ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΤΟΥΡΙΣΜΟΥ

(πρώην Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής – Μεσολόγγι)

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ -ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ»

Μπασδέκη Άννα

(ΑΜ:16198)

Εισηγητής

Τσιφοπανόπουλος Φώτης

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2019-2020

«ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ -ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ»

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Γραμμικός Προγραμματισμός, Αλγόριθμοι, Μέθοδος Simplex, Δυαδικότητα, Βελτιστοποίηση.

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

OM	Διοίκηση Επιχειρήσεων
OR	Έρευνα Επιχειρήσεων
PERT	Τεχνική Αξιολόγηση και Ανασκόπηση Προγράμματος
LP	Γραμμικός Προγραμματισμός

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σχεδιασμός και ο έλεγχος σύνθετων συστημάτων, η επίλυση σοβαρών προβλημάτων αποτελεσματικής κατανομής σπανίων πόρων με τη χρήση ελλιπών πληροφοριών και η ανάπτυξη βιώσιμων στρατηγικών για την κατανόηση καταστάσεων συγκρούσεων και συνεργασίας ήταν πάντα απαραίτητες και προκλητικές για τα άτομα, τους οργανισμούς και τις οικονομίες. Η Βελτιστοποίηση και η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι οι κλάδοι που αντιμετωπίζουν τέτοια προβλήματα σε επιστημονική βάση. δηλαδή εφαρμόζουν επιστημονικές μεθόδους και τεχνολογίες πληροφορικής στην επίλυση προβλημάτων και παρέχουν στον ιδιοκτήτη του προβλήματος ποσοτικές προσεγγίσεις για ενημερωμένη και ορθολογική λήψη αποφάσεων. Κεντρική σε οποιαδήποτε ποσοτική ανάλυση αποφάσεων και λήψη αποφάσεων είναι το θεμέλιο για τα μαθηματικά μοντέλα και την εφαρμογή των μαθηματικών θεωριών και μεθόδων. Εδώ το μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να αφηγείται την ουσία του προβλήματος λήψης αποφάσεων. Θα πρέπει να δώσει μια κατάλληλη και καλά δομημένη άποψη του υποκείμενου πραγματικού προβλήματος, έτσι ώστε τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση και τον χειρισμό του μοντέλου να ισχύουν για το πραγματικό πρόβλημα. Η βελτιστοποίηση είναι η πειθαρχία στα εφαρμοσμένα μαθηματικά που ασχολείται με τα μοντέλα βελτιστοποίησης, τις μαθηματικές τους ιδιότητες (θεωρία βελτιστοποίησης) και την ανάπτυξη και εφαρμογή αλγορίθμων (αριθμητική ανάλυση και αλγοριθμική σχεδίαση). Ο προσδιορισμός και η διατύπωση του προβλήματος, η κατασκευή ενός κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου και η εξεύρεση λύσης από αυτό, η δοκιμή και η τροποποίηση του μοντέλου και τέλος η εφαρμογή της λύσης μοντέλου στην πραγματική προβληματική κατάσταση είναι οι φάσεις της προσέγγισης της Έρευνας Επιχειρήσεων. Έτσι, είναι η βελτιστοποίηση που υποστηρίζει αυτή τη διαδικασία με ένα ισχυρό κιβώτιο εργαλείων. Σε αυτή την εργασία δίνουμε μια εισαγωγή στις πολλές όψεις της Βελτιστοποίησης και Επιχειρησιακής Έρευνας.

SUMARRY

Designing and controlling complex systems, solving hard problems of efficiently allocating scarce resources using incomplete information, and developing sustainable strategies to master situations of conflict and co-operation have always been necessary and challenging for individuals, organizations, and economies. Optimization and Operations Research are the disciplines that deal with such problems on a scientific basis; that is, they apply scientific methods and information technology to problem solving and provide the problem owner with quantitative approaches to informed and rational decision-making. Central to any quantitative decision analysis and decision-making are the foundation on mathematical models and the application of mathematical theories and methods. Here the mathematical model should abstract the crux of the decision-making problem. It should give a suitable and well-structured view of the underlying real problem, so that the conclusions obtained from analyzing and manipulating the model are valid for the real problem. Optimization is that discipline within applied mathematics that deals with optimization models, their mathematical properties (optimization theory), and the development and implementation of algorithms (numerical analysis and algorithmic design). Specifying and formulating the problem, constructing a suitable mathematical model and deriving a solution from it, testing and modifying the model, and finally implementing the model solution in the real problem situation are the phases of the Operations Research approach. Thus, it is optimization that supports this process with a powerful tool-box. In this article we give an introduction to the many faces of Optimization and Operations Research.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διοίκηση επιχειρήσεων (OM) ορίζεται γενικά ως το ειδικό πεδίο της διοίκησης, το οποίο αφορά τη διαχείριση κατά μήκος του μετασχηματισμού των πρώτων υλών σε αγαθά ή υπηρεσίες. Περιλαμβάνει τον τρόπο αποτελεσματικής χρήσης των πόρων όσον αφορά την ικανοποίηση των απαιτήσεων των πελατών και έχει γίνει ένας από τους πιο διερευνημένους ερευνητικούς τομείς. Όπως ορίζεται στο Business Dictionary, η βελτιστοποίηση είναι να βρεθεί μια εναλλακτική λύση με την πιο αποδοτική από πλευράς κόστους ή υψηλότερη επιτεύξιμη απόδοση κάτω από τους συγκεκριμένους περιορισμούς μεγιστοποιώντας τους επιθυμητούς παράγοντες και ελαχιστοποιώντας τους ανεπιθύμητους. Παρόλο που η βελτιστοποίηση διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαχείριση λειτουργιών και έχουν δημοσιευθεί πολυάριθμες βιβλιογραφικές αναθεωρήσεις σε θέματα διαχείρισης λειτουργιών ή σε ορισμένα συγκεκριμένα θέματα βελτιστοποίησης, καμία από αυτές δεν παρέχει γενική άποψη των μοντέλων και των αλγορίθμων που είναι αφιερωμένοι στη βελτιστοποίηση στον τομέα της διαχείρισης των επιχειρήσεων. Ως εκ τούτου, ο σκοπός αυτής της μελέτης είναι η διεξαγωγή έρευνας σχετικά με μεθόδους και αλγόριθμους μοντελοποίησης, οι οποίες εφαρμόστηκαν στη βελτιστοποίηση της διαχείρισης λειτουργιών και υπηρεσιών που δημοσιεύθηκε τα τελευταία δέκα χρόνια.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι όλα τα είδη επιχειρήσεων σε μια επιχείρηση, τα οποία πρέπει να οδηγούνται από διαφορετικά μέρη, βασίζονται στη διαδικασία συνεργατικών λειτουργιών, η OM συνήθως ασχολείται με τη διαχείριση της διαδικασίας που μετατρέπει τις εισροές (πρώτες ύλες, χειρωνακτική εργασία και ενέργεια κλπ.) στις εκροές (σε μορφές αγαθών ή / και υπηρεσιών). Τα τρία θέματα οργανώνονται σε αυτή τη μελέτη από την οπτική της διαδικασίας, ώστε να επιτρέπουν στους αναγνώστες να έχουν μια σαφή ιδέα σχετικά με τα κρίσιμα ζητήματα βελτιστοποίησης που εμπλέκονται σε μια τέτοια διαδικασία μετασχηματισμού: (i) Βελτιστοποίηση στη διαχείριση εισροών: να χρησιμοποιούν αποτελεσματικά και αποτελεσματικά τους πόρους. (Ii) Βελτιστοποίηση στη διαχείριση των εγκαταστάσεων: με γνώμονα την εισροή των διαδικασιών, τα προβλήματα βελτιστοποίησης σε αυτό το στάδιο αρχίζουν με συγκεκριμένες εργασίες που έχουν ήδη προγραμματιστεί προσπαθώντας να ελαχιστοποιήσει την επίδραση διαφόρων παραγόντων που προκαλούν απροσδόκητες καταστροφές ή καθυστερήσεις, έτσι ώστε οι διαδικασίες εργασίας να μπορούν να προχωρήσουν ομαλά στο μέγιστο βαθμό. Το πιο κρίσιμο θέμα που θα αναλυθεί σε αυτό το θέμα είναι η αναδιάταξη παραγωγής / εξυπηρέτησης λαμβάνοντας υπόψη τις εργασίες συντήρησης ή τις απροσδόκητες βλάβες iii) Βελτιστοποίηση στη διαχείριση της παραγωγής: τα προβλήματα βελτιστοποίησης στο στάδιο της παραγωγής αφορούν κυρίως τον τρόπο παράδοσης αγαθών ή υπηρεσιών σε πελάτες με τον βέλτιστο τρόπο. Μια ανασκόπηση για τη βελτιστοποίηση του δρομολογίου του οχήματος, το πιο σημαντικό θέμα στο σύστημα παράδοσης, θα αναλυθεί σε αυτό το μέρος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μόνο το σημαντικότερο θέμα που εμπλέκεται σε κάθε στάδιο περιγράφεται λεπτομερώς σε αυτή την εργασία επειδή είναι αδύνατο για μας να δώσουμε πλήρη περιγραφή. Επιπλέον, δεδομένου ότι στην βιβλιογραφία έχουν αναφερθεί σε διάφορες εργασίες επανεξέτασης σχετικά με ορισμένα θέματα διαχείρισης επιχειρήσεων, θα μπορούσαμε να επωφεληθούμε από τέτοιες μελέτες και να συμπληρώσουμε τις εργασίες επανεξέτασης συγκεντρώνοντας τις δημοσιεύσεις που έχουν παρουσιαστεί τα τελευταία χρόνια, ιδίως τα άρθρα που δημοσιεύθηκαν μεταξύ του έτους 2010 και 2016, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συμπλήρωμα των υφιστάμενων μελετών επανεξέτασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

1.1 Γενικά για την Επιχειρησιακή Έρευνα

Σήμερα η έρευνα των Επιχειρήσεων (OR) εφαρμόζεται από κάθε μεγάλο οργανισμό σε αναπτυγμένο έθνος και αναπτυσσόμενη χώρα σε κάθε τμήμα σε όλα τα επίπεδα. Η διαθεσιμότητα ταχύτερων και ευέλικτων υπολογιστικών εγκαταστάσεων και ο αριθμός των ειδικευμένων επαγγελματιών OR έχουν ενισχύσει την αποδοχή και τη δημοτικότητα του κλάδου. Στη χώρα, όπως οι Η.Π.Α. και η βρετανική ανάπτυξη της OR, δεν έχει περιοριστεί, αντιθέτως έχει φτάσει σε πολλές χώρες, συμπεριλαμβανομένης της Ινδίας.

Η επιχειρησιακή έρευνα περιλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα τεχνικών και μεθόδων επίλυσης προβλημάτων που εφαρμόζονται στην ανίχνευση βελτιωμένης λήψης αποφάσεων και αποτελεσματικότητας. Μερικά από τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται από τους επιχειρησιακούς ερευνητές είναι στατιστικές, βελτιστοποίηση, θεωρία πιθανοτήτων, θεωρία ουρών αναμονής, θεωρία παιγνίων, θεωρία γραφημάτων, ανάλυση αποφάσεων, μαθηματική μοντελοποίηση και προσομοίωση. Λόγω της υπολογιστικής φύσης αυτών των πεδίων, η OR έχει επίσης ισχυρούς δεσμούς με την επιστήμη [1].

Οι εφαρμογές στην επιχειρησιακή έρευνα, όπως και σε άλλους κλάδους της μηχανικής και των οικονομικών, επιχειρούν να χρησιμοποιήσουν μοντέλα για να έχουν πρακτικό αντίκτυπο στα πραγματικά προβλήματα.

1.2 Ορισμός Επιχειρησιακής Έρευνας

Ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα (OR) περιγράφει την πειθαρχία που επικεντρώνεται στην εφαρμογή της τεχνολογίας των πληροφοριών για την τεκμηριωμένη λήψη αποφάσεων [2]. Με άλλα λόγια, η OR αντιπροσωπεύει τη μελέτη της βέλτιστης κατανομής πόρων. Ο στόχος της OR είναι να παράσχει λογικές βάσεις για τη λήψη αποφάσεων επιδιώκοντας να κατανοήσει και να δομήσει πολύπλοκες καταστάσεις και να χρησιμοποιήσει αυτή την κατανόηση για να προβλέψει τη συμπεριφορά του συστήματος και τη βελτίωση της απόδοσης του συστήματος. Μεγάλο μέρος της πραγματικής εργασίας γίνεται με τη χρήση αναλυτικών και αριθμητικών τεχνικών για την ανάπτυξη και τον χειρισμό μαθηματικών μοντέλων με οργανωτικά συστήματα που αποτελούνται από ανθρώπους, μηχανές και διαδικασίες [1].

Σύμφωνα με τον Moarse και τον Kimbal (1946) η OR είναι μια επιστημονική μέθοδος παροχής εκτελεστικού τμήματος με μια ποσοτική βάση για απόφαση σχετικά με τις πράξεις που ελέγχονται.

Σύμφωνα με τη Συνοπτική Εγκυκλοπαίδεια Britannica, η OR είναι η εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων στη διαχείριση και διοίκηση στρατιωτικών, κυβερνητικών, εμπορικών και βιομηχανικών συστημάτων. Χαρακτηρίζεται από έναν προσανατολισμό συστημάτων ή μηχανική συστημάτων, όπου οι διεπιστημονικές ερευνητικές ομάδες προσαρμόζουν τις επιστημονικές μεθόδους σε μεγάλης κλίμακας προβλήματα που πρέπει να διαμορφωθούν, δεδομένου ότι οι εργαστηριακές δοκιμές είναι αδύνατες.

Με τον ίδιο τρόπο, η McGraw-Hill Science & Technology Encyclopedia ορίζει την OR ως εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων και τεχνικών στα προβλήματα λήψης αποφάσεων. Ένα πρόβλημα λήψης αποφάσεων, συμβαίνει όταν υπάρχουν δύο ή περισσότερες εναλλακτικές πορείες δράσης, καθένα από τα οποία οδηγεί σε ένα διαφορετικό και μερικές φορές άγνωστο τελικό αποτέλεσμα. Οι ερευνητικές δραστηριότητες χρησιμοποιούνται επίσης για τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας του

περιορισμένες πηγές. Ο στόχος είναι να επιλέξετε την καλύτερη εναλλακτική λύση, δηλαδή αυτή που οδηγεί στο καλύτερο αποτέλεσμα.

Στην ουσία, μια έρευνα λειτουργίας (OR), είναι ο κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών που ασχολείται με τη βελτιστοποίηση της χρήσης των διαθέσιμων πηγών, δεδομένων των περιορισμών. Μια συλλογή από πολλές αναλυτικές τεχνικές αναφέρονται γενικά ως ερευνητικές δραστηριότητες [3].

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως η O.R. είναι ένα δύσκολο έργο. Οι ορισμοί που υπογραμμίστηκαν από διάφορους εμπειρογνώμονες και φορείς σχετικά με το θέμα μας επιτρέπουν από κοινού να μάθουμε τι είναι η O.R., και τι κάνει. Είναι οι εξής: [3]

1. Σύμφωνα με το Operational Research Society της Μεγάλης Βρετανίας η Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η επίθεση της σύγχρονης επιστήμης σε σύνθετα προβλήματα που προκύπτουν στην κατεύθυνση και διαχείριση μεγάλων συστημάτων μηχανημάτων, υλικών και χρημάτων στη βιομηχανία, τις επιχειρήσεις, την κυβέρνηση και την άμυνα. Η διακριτική της προσέγγιση είναι να αναπτύξει ένα επιστημονικό μοντέλο του συστήματος, ενσωματώνοντας μετρήσεις παραγόντων όπως η αλλαγή και ο κίνδυνος, με το οποίο να προβλέπουν και να συγκρίνουν τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών ή ελέγχων. Ο σκοπός είναι να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις δράσεις της επιστημονικά.

2. Ο Randy Robinson τονίζει ότι η OR είναι η εφαρμογή των επιστημονικών μεθόδων για τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας των λειτουργιών, των αποφάσεων και της διαχείρισης. Με μέσα όπως η ανάλυση δεδομένων, η δημιουργία μαθηματικών μοντέλων και η προσφορά καινοτόμων προσεγγίσεων, οι επαγγελματίες της Ερευνητικής Εταιρείας Επιχειρήσεων αναπτύσσουν επιστημονικά βασισμένες πληροφορίες που δίνουν γνώση και καθοδηγούν τη λήψη αποφάσεων. Αναπτύσσουν επίσης σχετικό λογισμικό, συστήματα, υπηρεσίες και προϊόντα.

3. Οι Mors και ο Kimball έχουν τονίσει την O.R. ότι είναι μια ποσοτική προσέγγιση και την περιγράφει ως μια επιστημονική μέθοδο παροχής εκτελεστικών υπηρεσιών με μια ποσοτική βάση για αποφάσεις σχετικά με τις πράξεις που βρίσκονται υπό τον έλεγχό τους.

4. Miller and Starr state, η O.R. εφαρμόζεται ως θεωρία αποφάσεων, η οποία χρησιμοποιεί κάθε επιστημονικό, μαθηματικό ή λογικό μέσο για να προσπαθήσει να ανταπεξέλθει στα προβλήματα που αντιμετωπίζει η εκτελεστική εξουσία, όταν προσπαθεί να επιτύχει μια διεξοδική ορθολογιστική αντιμετώπιση του προβλήματός της για την απόφασή του.

5.Ο Pocock τονίζει ότι η O.R. είναι μια εφαρμοσμένη Επιστήμη. Δηλώνει η «O.R. είναι η επιστημονική μεθοδολογία (αναλυτική, μαθηματική και ποσοτική) η οποία αξιολογώντας τη συνολική επίπτωση διαφόρων εναλλακτικών τρόπων δράσης σε ένα σύστημα διαχείρισης παρέχει μια βελτιωμένη βάση για τη λήψη αποφάσεων διαχείρισης.

Εικόνα 1.2.1 Πλάνο επιχειρησιακής Έρευνας

1.3 Εργαλεία και Τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας

Η έρευνα χρησιμοποιεί όλα τα κατάλληλα εργαλεία ή τεχνικές που είναι διαθέσιμες. Τα κοινά συχνά χρησιμοποιούμενα εργαλεία / τεχνικές είναι μαθηματικές διαδικασίες, ανάλυση κόστους, ηλεκτρονικός υπολογισμός. Ωστόσο, οι ερευνητές έδωσαν ιδιαίτερη σημασία στην ανάπτυξη και τη χρήση τεχνικών όπως ο γραμμικός προγραμματισμός, η θεωρία των παιχνιδιών, η θεωρία αποφάσεων, η θεωρία ουρών αναμονής, τα μοντέλα απογραφής και η προσομοίωση. Εκτός από τις παραπάνω τεχνικές, μερικά άλλα κοινά εργαλεία είναι ο μη γραμμικός προγραμματισμός, ο προγραμματισμός ακέραιων αριθμών, ο δυναμικός προγραμματισμός, η θεωρία της αλληλουχίας, η διαδικασία Markov, ο προγραμματισμός δικτύου (PERT / CPM), το συμβολικό μοντέλο, η θεωρία των πληροφοριών και η θεωρία των τιμών. Υπάρχουν επίσης πολλά άλλα εργαλεία ή τεχνικές έρευνας λειτουργιών. Οι σύντομες εξηγήσεις ορισμένων από τις παραπάνω τεχνικές ή εργαλεία είναι οι εξής: [4]

Γραμμικός Προγραμματισμός: Πρόκειται για μια περιορισμένη τεχνική βελτιστοποίησης, η οποία βελτιστοποιεί κάποιο κριτήριο μέσα σε ορισμένους περιορισμούς. Στον γραμμικό προγραμματισμό η αντικειμενική λειτουργία (κέρδος,

απώλεια ή απόδοση της επένδυσης) και οι περιορισμοί είναι γραμμικοί. Υπάρχουν διάφορες διαθέσιμες μέθοδοι για την επίλυση του γραμμικού προγραμματισμού.
Θεωρία παιγνίων: Χρησιμοποιείται για τη λήψη αποφάσεων σε συγκρουόμενες καταστάσεις όπου υπάρχει ένας ή περισσότεροι παίκτες ή αντίπαλοι. Σε αυτό το κίνητρο των παικτών διαχωρίζονται. Η επιτυχία ενός παίκτη τείνει να είναι εις βάρος άλλων παικτών και ως εκ τούτου βρίσκεται σε σύγκρουση.

Θεωρία Αποφάσεων: Η θεωρία αποφάσεων αφορά τη λήψη αποφάσεων υπό συνθήκες πλήρους βεβαιότητας σχετικά με τα μελλοντικά αποτελέσματα και υπό συνθήκες τέτοιες ώστε να μπορούμε να κάνουμε κάποιες πιθανότητες για το τι θα συμβεί στο μέλλον.

Θεωρία ουρών:
Αυτό χρησιμοποιείται σε καταστάσεις όπου σχηματίζεται η ουρά (για παράδειγμα πελάτες που περιμένουν υπηρεσία, αεροσκάφη που περιμένουν προσγείωση, εργασίες που περιμένουν για επεξεργασία στο σύστημα ηλεκτρονικών υπολογιστών κ.λπ.). Ο στόχος εδώ είναι η μείωση του κόστους αναμονής χωρίς αύξηση του κόστους εξυπηρέτησης.

Μοντέλα αποθέματος: Το μοντέλο αποθεμάτων λαμβάνει αποφάσεις που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος αποθεμάτων. Το μοντέλο αυτό μειώνει με επιτυχία το συνολικό κόστος αγοράς, μεταφοράς και αποθεματοποίησης

Προσομοίωση: Η προσομοίωση είναι μια διαδικασία που μελετά ένα πρόβλημα με τη δημιουργία ενός μοντέλου της διαδικασίας που εμπλέκεται στο πρόβλημα και στη συνέχεια μέσω μιας σειράς οργανωμένων δοκιμών και λύσεων σφάλματος προσπαθεί να καθορίσει την καλύτερη λύση. Κάποιες φορές αυτή είναι μια δύσκολη / χρονοβόρα διαδικασία. Η προσομοίωση χρησιμοποιείται όταν ο πραγματικός πειραματισμός δεν είναι εφικτός ή δεν είναι δυνατή η λύση του μοντέλου.
Μη γραμμικός προγραμματισμός: Χρησιμοποιείται όταν η αντικειμενική λειτουργία και οι περιορισμοί δεν είναι γραμμικής φύσης. Οι γραμμικές σχέσεις μπορούν να εφαρμοστούν για την προσέγγιση μη γραμμικών περιορισμών αλλά περιορίζονται σε κάποιο εύρος, επειδή η προσέγγιση γίνεται φτωχότερη καθώς επεκτείνεται το εύρος. Έτσι, ο μη γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της

προσέγγισης στην οποία βρίσκεται ένα διάλυμα και στη συνέχεια το διάλυμα λαμβάνεται χρησιμοποιώντας γραμμικές μεθόδους.

Δυναμικός προγραμματισμός: Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μια μέθοδος ανάλυσης διαδικασιών λήψης πολλών σταδίων. Σε αυτό το κάθε στοιχειώδη απόφαση εξαρτάται από τις προηγούμενες αποφάσεις και από εξωτερικούς παράγοντες.

Ακέραιος προγραμματισμός: Εάν μία ή περισσότερες μεταβλητές του προβλήματος λαμβάνουν ολοκληρωμένες τιμές μόνο τότε χρησιμοποιείται η δυναμική μέθοδος προγραμματισμού. Για παράδειγμα αριθμός ή κινητήρας σε έναν οργανισμό, αριθμός επιβατών σε αεροσκάφος, αριθμός γεννητριών σε μονάδα παραγωγής ενέργειας κ.λπ.

Markov Process: Η διαδικασία του Markov επιτρέπει την πρόβλεψη αλλαγών με την πάροδο του χρόνου είναι γνωστές πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά ενός συστήματος. Αυτό χρησιμοποιείται στη λήψη αποφάσεων σε καταστάσεις όπου καθορίζονται οι διάφορες καταστάσεις. Η πιθανότητα από μια κατάσταση σε άλλη κατάσταση είναι γνωστή και εξαρτάται από την τρέχουσα κατάσταση και είναι ανεξάρτητη από το πώς φτάσαμε σε αυτή τη συγκεκριμένη κατάσταση.

Προγραμματισμός Δικτύου: Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται εκτενώς για το σχεδιασμό, το προγραμματισμό και την παρακολούθηση μεγάλων έργων (για παράδειγμα, εγκατάσταση του συστήματος υπολογιστών, σχεδιασμός Ε & Α, κατασκευή, συντήρηση κ.λπ.). Στόχος αυτής της τεχνικής είναι η ελαχιστοποίηση των προβληματικών σημείων (όπως καθυστερήσεις, διακοπή, σημεία συμφόρησης στην παραγωγή κ.λπ.) με τον προσδιορισμό των κρίσιμων παραγόντων. Οι διάφορες δραστηριότητες και οι σχέσεις τους σε ολόκληρο το έργο αντιπροσωπεύονται διαγραμματικά με τη βοήθεια δικτύων και βελών, τα οποία χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό κρίσιμων δραστηριοτήτων και διαδρομών. Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι τεχνικών στον προγραμματισμό του δικτύου, είναι: Τεχνική αξιολόγησης και ανασκόπησης προγράμματος (PERT) - χρησιμοποιείται όταν οι δραστηριότητες δεν είναι γνωστές με τον ακριβή χρόνο / είναι διαθέσιμη μόνο η πιθανολογική εκτίμηση του χρόνου. Χρησιμοποιείται η μέθοδος CRI (Critical Path Method - CPM) όταν ο χρόνος των δραστηριοτήτων είναι γνωστός με ακρίβεια.

Θεωρία πληροφοριών: Αυτή η αναλυτική διαδικασία μεταφέρεται από το πεδίο ηλεκτρικής επικοινωνίας στο O.R.field. Ο στόχος αυτής της θεωρίας είναι να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα της ροής πληροφοριών με ένα δεδομένο σύστημα. Αυτό χρησιμοποιείται κυρίως σε δίκτυα επικοινωνιών αλλά έχει επίσης έμμεση επίδραση στην προσομοίωση της εξέτασης της οργανωτικής δομής των επιχειρήσεων με σκοπό την ενίσχυση της ροής πληροφοριών.

1.4 Εφαρμογές Επιχειρησιακής Έρευνας

Σήμερα, σχεδόν όλοι οι τομείς των επιχειρήσεων και της κυβέρνησης αξιοποιούν τα οφέλη της Επιχειρησιακής Έρευνας. Υπάρχουν πολλές εφαρμογές της Operations Research. Αν και δεν είναι εφικτό να καλύπτονται όλες οι αιτήσεις της O.R. εν συντομία. Ακολουθούν τα συντομευμένα σύνολα τυπικών εφαρμογών έρευνας για τις λειτουργίες που δείχνουν πόσο ευρέως χρησιμοποιούνται αυτές οι τεχνικές σήμερα: [5]

Λογιστική:

- Οργάνωση αποτελεσματικών ομάδων ελέγχου
- Ανάλυση πιστωτικής πολιτικής
- Σχεδιασμός ταμειακών ροών
- Ανάπτυξη σταθερού κόστους
- Καθορισμός του κόστους των υποπροϊόντων
- Σχεδιασμός της στρατηγικής αποπληρωμής λογαριασμού

Κατασκευή:

- Προγραμματισμός, παρακολούθηση και έλεγχος του έργου
- Προσδιορισμός της κατάλληλης εργασίας
- Ανάπτυξη του εργατικού δυναμικού
- Κατανομή πόρων σε έργα

Σχεδιασμός Εγκαταστάσεων:

- Εργοστασιακή θέση και απόφαση μεγέθους
- Εκτίμηση του αριθμού των απαιτούμενων εγκαταστάσεων
- Σχεδιασμός νοσοκομείου
- Διεθνής σχεδιασμός συστήματος logistics
- Φόρτωση και εκφόρτωση των μεταφορών
- Απόφαση θέσης αποθήκης [5]

Χρηματοδότηση:

- Δημιουργία μοντέλων διαχείρισης μετρητών
- Κατανομή κεφαλαίου μεταξύ των διαφόρων εναλλακτικών λύσεων
- Δημιουργία μοντέλων χρηματοοικονομικού σχεδιασμού
- Ανάλυση επενδύσεων
- Ανάλυση χαρτοφυλακίου
- Δημιουργία πολιτικής για τα μερίσματα

Βιομηχανοποίηση:

- Τον έλεγχο της απογραφής
- Προβολή ισορροπίας μάρκετινγκ
- Προγραμματισμός παραγωγής
- Η εξομάλυνση της παραγωγής

Εμπορία:

- Κατανομή προϋπολογισμού διαφήμισης
- Εισαγωγή προϊόντος
- Επιλογή του συνδυασμού προϊόντων
- Αποφασίζοντας πιο αποτελεσματική εναλλακτική συσκευασία [5]

Οργανωσιακή Συμπεριφορά / Ανθρώπινο Δυναμικό:

- Προγραμματισμός προσωπικού
- Προσλήψεις εργαζομένων
- Ικανότητα εξισορρόπησης
- Προγραμματισμός προγράμματος κατάρτισης
- Σχεδιάστε αποτελεσματικότερα την οργανωτική δομή

Αγοραστικός:

- Βέλτιστη αγορά
- Βέλτιστη αναδιάταξη
- Μεταφορά υλικών

Έρευνα και ανάπτυξη:

- Έλεγχος έργων Ε & Α
- Εφαρμογή προϋπολογισμού Ε & Α
- Προγραμματισμός της εισαγωγής του προϊόντος [5].

1.5 Χαρακτηριστικά της Επιχειρησιακής Έρευνας

Τα σημαντικά χαρακτηριστικά της ερευνητικής δραστηριότητας περιλαμβάνουν τα εξής: [6]

(1). **Λήψη απόφασης**. Κάθε βιομηχανική οργάνωση αντιμετωπίζει προβλήματα πολλαπλών πτυχών για να εντοπίσει την καλύτερη δυνατή λύση στα προβλήματά της. Ή O.R. έχει ως στόχο να βοηθήσει τα στελέχη να αποκτήσουν βέλτιστη λύση με τη χρήση τεχνικών της OR. Βοηθά επίσης τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων να βελτιώσει τις δημιουργικές και συνετές ικανότητές του, να αναλύσει και να κατανοήσει την προβληματική κατάσταση που οδηγεί σε καλύτερο έλεγχο, καλύτερο συντονισμό, καλύτερα συστήματα και τελικά καλύτερες αποφάσεις.

(2). **Επιστημονική προσέγγιση**. Ή O.R. εφαρμόζει επιστημονικές μεθόδους, τεχνικές και εργαλεία για τον σκοπό της ανάλυσης και επίλυσης των σύνθετων προβλημάτων. Με αυτή την προσέγγιση δεν υπάρχει χώρος για την εικασία και την προκατάληψη του ατόμου από τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων [7].

(3). **Διεπαγγελματική προσέγγιση ομάδας**. Βασικά, τα βιομηχανικά προβλήματα είναι πολύπλοκα και συνεπώς απαιτούν μια ομαδική προσπάθεια για να τα χειριστεί. Αυτή η ομάδα αποτελείται από επιστήμονες / μαθηματικούς και τεχνοκράτες. Ποιοι χρησιμοποιούν από κοινού τα εργαλεία OR για να βρουν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. Προσπαθεί να αναλύσει τη σχέση αιτίου - αποτελέσματος μεταξύ διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος και αξιολογεί τα αποτελέσματα διαφόρων εναλλακτικών στρατηγικών.

(4) .**Συστηματική προσέγγιση**. Ο βασικός στόχος της προσέγγισης του συστήματος είναι ο εντοπισμός για κάθε πρόταση όλων των σημαντικών και έμμεσων επιπτώσεων σε όλα τα υποσυστήματα ενός συστήματος και η αξιολόγηση κάθε δράσης με όρους των αποτελεσμάτων για το σύνολο του συστήματος. Η αλληλεπίδραση κάθε υποσυστήματος μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη βοήθεια μαθηματικών / αναλυτικών μοντέλων OR για να επιτευχθεί αποδεκτή λύση [8].

(5). **Χρήση υπολογιστών**. Τα μοντέλα της OR χρειάζονται πολύ υπολογισμούς και ως εκ τούτου, η χρήση υπολογιστών καθίσταται απαραίτητη. Με τη χρήση υπολογιστών είναι δυνατό να χειριστούν πολύπλοκα προβλήματα που απαιτούν μεγάλο όγκο υπολογισμού. Ο στόχος των μοντέλων έρευνας της επιχείρησης είναι να επιχειρήσει και να εντοπίσει την καλύτερη ή βέλτιστη λύση υπό τις καθορισμένες συνθήκες. Για τον προαναφερθέντα σκοπό, είναι απαραίτητο να καθοριστεί ένα μέτρο αποτελεσματικότητας στο οποίο θα πρέπει να βασίζεται στους στόχους του οργανισμού. Τα μέτρα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συγκριθούν τα εναλλακτικά μαθήματα δράσης που λαμβάνονται κατά την ανάλυση.

1.6 Μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας

Όταν η OR χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός προβλήματος ενός οργανισμού, ακολουθείται η ακόλουθη διαδικασία επτά βημάτων πρέπει να ακολουθηθεί: [9]

Βήμα 1: Σύνταξη του προβλήματος Ο αναλυτής αρχικά ορίζει το πρόβλημα του οργανισμού. Ο καθορισμός του προβλήματος περιλαμβάνει τον καθορισμό, τους στόχους του οργανισμού και τα τμήματα του οργανισμού (ή του συστήματος) που πρέπει να μελετηθούν πριν λύσει το πρόβλημα.

Βήμα 2. Παρατηρήστε το σύστημα

Στη συνέχεια, ο αναλυτής συλλέγει δεδομένα για να εκτιμήσει τις τιμές των παραμέτρων που επηρεάζουν το πρόβλημα του οργανισμού. Αυτές οι εκτιμήσεις χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη (στο Βήμα 3) και την αξιολόγηση (στο Βήμα 4) ενός μαθηματικού μοντέλου του προβλήματος του οργανισμού.

Βήμα 3. Δημιουργήστε ένα μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος

Ο αναλυτής, λοιπόν, αναπτύσσει ένα μαθηματικό μοντέλο (με άλλα λόγια μια εξιδανικευμένη αναπαράσταση) του προβλήματος. Σε αυτή την τάξη, περιγράφουμε πολλές μαθηματικές τεχνικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιηθούν τα συστήματα [10].

Βήμα 4. Επαληθεύστε το μοντέλο και χρησιμοποιήστε το μοντέλο για πρόβλεψη

Ο αναλυτής προσπαθεί τώρα να προσδιορίσει εάν το μαθηματικό μοντέλο που αναπτύχθηκε στο Βήμα 3 είναι μια ακριβής αναπαράσταση της πραγματικότητας. Για να προσδιοριστεί πόσο καλά προσαρμόζεται το μοντέλο στην πραγματικότητα, καθορίζεται το πόσο έγκυρο είναι το μοντέλο για την τρέχουσα κατάσταση.

Βήμα 5. Επιλέξτε μια κατάλληλη εναλλακτική λύση

Δεδομένου ενός μοντέλου και μιας σειράς εναλλακτικών λύσεων, ο αναλυτής επιλέγει την εναλλακτική λύση (αν υπάρχει) που ανταποκρίνεται καλύτερα στους στόχους του οργανισμού. Μερικές φορές ισχύει το σύνολο των εναλλακτικών λύσεων σε ορισμένους περιορισμούς. Σε πολλές περιπτώσεις, η καλύτερη εναλλακτική λύση μπορεί να είναι αδύνατη ή πολύ δαπανηρή για να προσδιοριστεί.

Βήμα 6. Παρουσιάστε τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της μελέτης

Σε αυτό το στάδιο, ο αναλυτής παρουσιάζει το μοντέλο και τις συστάσεις του Βήματος 5 στην απόφαση λήψης ατομικών ή ομαδικών. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί κανείς να παρουσιάσει διάφορες εναλλακτικές λύσεις και να αφήσει την οργάνωση να επιλέξει το υπεύθυνο λήψης αποφάσεων να επιλέξει εκείνο που είναι καλύτερο και ικανοποιεί τις ανάγκες του / της.

Μετά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της μελέτης OR στον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων, ο αναλυτής μπορεί να βρει ότι δεν (ή δεν) εγκρίνει τις συστάσεις. Αυτό μπορεί να προκύψει από τον εσφαλμένο ορισμό του προβλήματος στο χέρι ή από τη μη εμπλοκή των υπεύθυνων για τη λήψη αποφάσεων στην έναρξη του έργου. Σε αυτή την περίπτωση, ο αναλυτής θα πρέπει να επιστρέψει στο Βήμα 1, 2 ή 3 [11].

Βήμα 7. Εφαρμογή και αξιολόγηση της σύστασης

Εάν ο υπεύθυνος λήψης αποφάσεων αποδέχθηκε τη μελέτη, ο αναλυτής βοηθά στην εφαρμογή των συστάσεων. Το σύστημα πρέπει να παρακολουθείται συνεχώς (και να ενημερώνεται δυναμικά με την αλλαγή του περιβάλλοντος) ώστε να διασφαλίζεται ότι οι συστάσεις επιτρέπουν στους φορείς λήψης αποφάσεων, να εκπληρώσει τους στόχους του.

1.7 Μαθηματικό Μοντέλο OR

«Η OR είναι η αναπαράσταση συστημάτων του πραγματικού κόσμου με μαθηματικά μοντέλα μαζί με τη χρήση ποσοτικών μεθόδων (αλγορίθμων) για την επίλυση τέτοιων μοντέλων, με σκοπό τη βελτιστοποίηση».

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο που αποτελείται από: [12]

- Μεταβλητές απόφασης, οι οποίες είναι οι άγνωστες που πρέπει να προσδιοριστούν από τη λύση του μοντέλου.
- Περιορισμοί που αντιπροσωπεύουν τους φυσικούς περιορισμούς του συστήματος.
- Μια αντικειμενική λειτουργία
- Μια βέλτιστη λύση στο μοντέλο είναι η αναγνώριση ενός συνόλου μεταβλητών τιμών που είναι εφικτές (ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς) και οι οποίες οδηγούν στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής λειτουργίας.
- Σε γενικές γραμμές μπορούμε να θεωρήσουμε την OR ως εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων / σκέψης στη λήψη αποφάσεων.

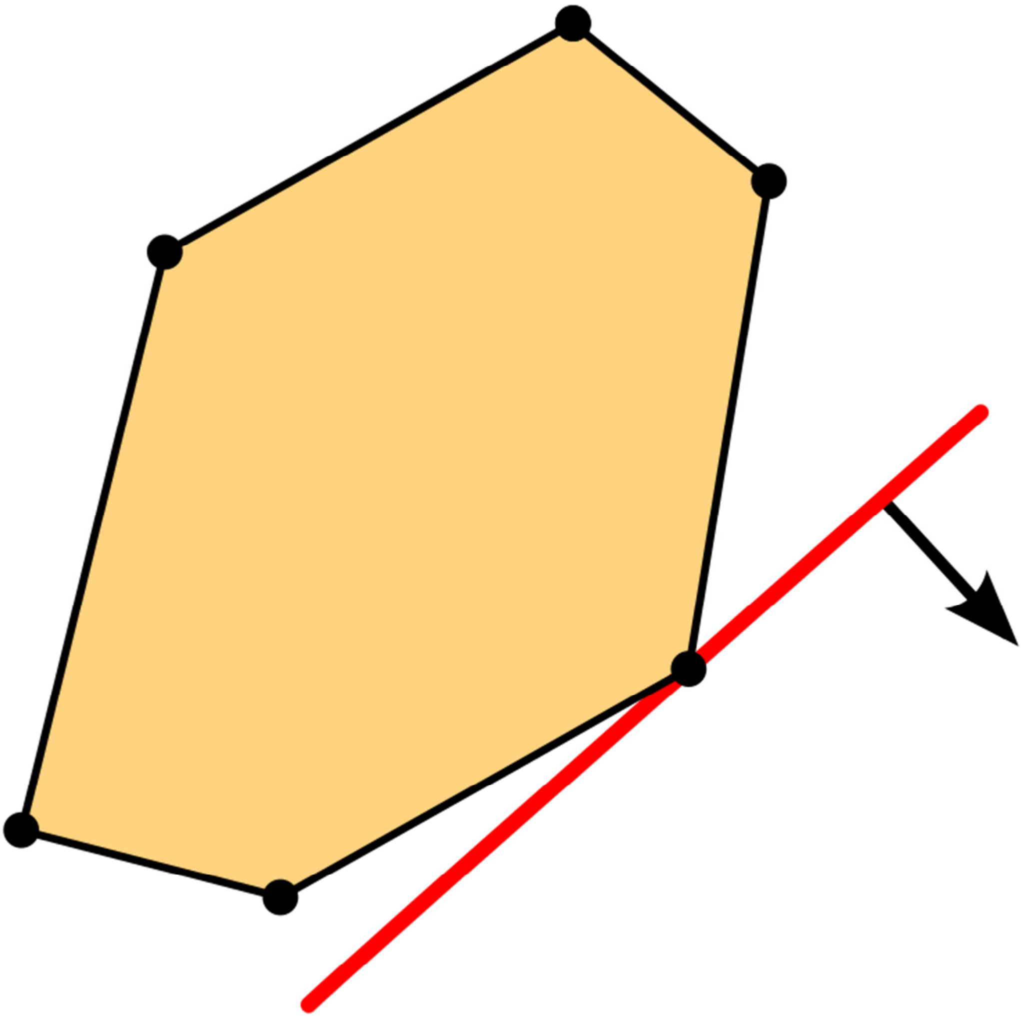
- ❖ Η υποκείμενη OR είναι η φιλοσοφία που πρέπει να ληφθεί: και χρησιμοποιώντας μια ποσοτική (ρητή, αρθρωτή) προσέγγιση θα οδηγήσει σε καλύτερες αποφάσεις από τη χρήση μη ποσοτικών (έμμεσων, άδηλων) προσεγγίσεων.
- ❖ Πράγματι, μπορεί να υποστηριχθεί ότι, αν και η OR είναι ατελής, προσφέρει την καλύτερη διαθέσιμη προσέγγιση για να πάρει μια συγκεκριμένη απόφαση σε πολλές περιπτώσεις (πράγμα που δεν σημαίνει ότι η χρήση OR θα παράγει τη σωστή απόφαση).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

2.1 Ορισμός Γραμμικού Προγραμματισμού

Ο γραμμικός προγραμματισμός (LP), που ονομάζεται επίσης γραμμική βελτιστοποίηση είναι μια μέθοδος για την επίτευξη του καλύτερου αποτελέσματος (όπως το μέγιστο κέρδος ή το χαμηλότερο κόστος) σε ένα μαθηματικό μοντέλο των οποίων οι απαιτήσεις αντιπροσωπεύονται από γραμμικές σχέσεις. Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια ειδική περίπτωση του μαθηματικού προγραμματισμού (επίσης γνωστή ως μαθηματική βελτιστοποίηση) [13].

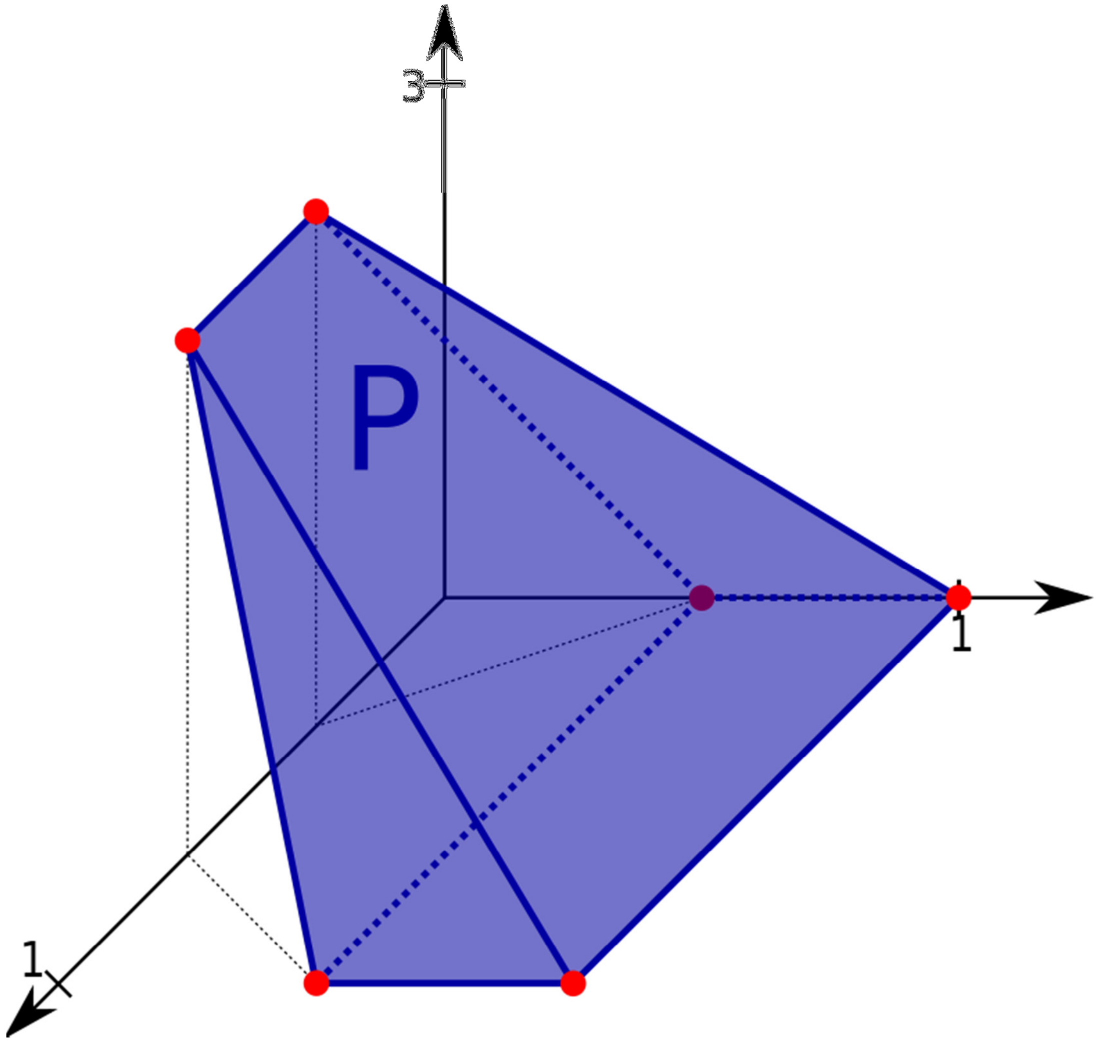
Πιο τυπικά, ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια τεχνική για τη βελτιστοποίηση μιας γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης, που υπόκειται σε γραμμικούς περιορισμούς ισότητας και γραμμικής ανισότητας. Η εφικτή περιοχή του είναι ένα κυρτό πολυτόπιο, το οποίο είναι ένα σύνολο που ορίζεται ως η διασταύρωση πεπερασμένων πολλών μισών χώρων, καθένα από τα οποία ορίζεται από μια γραμμική ανισότητα **εικόνα 2.1.1**. Η αντικειμενική λειτουργία του είναι μια πραγματική τιμή συναρτησιακής (γραμμικής) συνάρτησης που ορίζεται σε αυτό το πολυεδρικό. Ένας γραμμικός αλγόριθμος προγραμματισμού βρίσκει ένα σημείο στο πολυεδρικό όπου αυτή η συνάρτηση έχει τη μικρότερη (ή μεγαλύτερη) τιμή εάν υπάρχει ένα τέτοιο σημείο [14].



Εικόνα 2.1.1 Μια εικονογραφική παράσταση ενός απλού γραμμικού προγράμματος με δύο μεταβλητές και έξι ανισότητες. Το σύνολο των εφικτών λύσεων απεικονίζεται με κίτρινο χρώμα και σχηματίζει ένα πολύγωνο, ένα πολυδιάστατο 2-διαστάσεων. Η συνάρτηση γραμμικού κόστους αντιπροσωπεύεται από την κόκκινη γραμμή και το βέλος: Η κόκκινη γραμμή είναι ένα σύνολο επιπέδων της συνάρτησης κόστους και το βέλος δείχνει την κατεύθυνση στην οποία βελτιστοποιούμε.

Τα γραμμικά προγράμματα είναι προβλήματα που μπορούν να εκφραστούν σε κανονική μορφή, όπου το x αντιπροσωπεύει τον φορέα των μεταβλητών (πρόκειται να καθοριστεί), γ και b είναι φορείς (γνωστών) συντελεστών, A είναι μια (γνωστή) μήτρα συντελεστών και (·) T {\ displaystyle (\ cdot) ^ {mathrm {T}}} (\ cdot) ^ {\ mathrm {T}} είναι η μήτρα που μεταφέρεται. Η έκφραση που μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται ονομάζεται αντικειμενική λειτουργία (cTx σε αυτή την περίπτωση). Οι ανισότητες $Ax \leq b$ και $x \geq 0$ είναι οι περιορισμοί που καθορίζουν ένα κυρτό πολυτόπιο πάνω στο οποίο πρέπει να βελτιστοποιηθεί η αντικειμενική λειτουργία. Στο πλαίσιο αυτό, δύο φορείς είναι συγκρίσιμοι όταν έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Εάν κάθε είσοδος στην πρώτη είναι μικρότερη ή ίση με την αντίστοιχη καταχώρηση στο δεύτερο, τότε μπορεί να ειπωθεί ότι ο πρώτος φορέας είναι μικρότερος ή ίσος με τον δεύτερο φορέα [15].

Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να εφαρμοστεί σε διάφορους τομείς σπουδών. Χρησιμοποιείται ευρέως στα μαθηματικά και, σε μικρότερο βαθμό, στις επιχειρήσεις, στην οικονομία και σε ορισμένα προβλήματα μηχανικής **εικόνα 2.1.2**. Οι βιομηχανίες που χρησιμοποιούν μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού περιλαμβάνουν τη μεταφορά, την ενέργεια, τις τηλεπικοινωνίες και την κατασκευή. Έχει αποδειχθεί χρήσιμο για τη μοντελοποίηση διαφόρων τύπων προβλημάτων στον προγραμματισμό, τη δρομολόγηση, τον προγραμματισμό, την ανάθεση και το σχεδιασμό [16].



Εικόνα 2.1.2 Μια κλειστή εφικτή περιοχή ενός προβλήματος με τρεις μεταβλητές είναι ένα κυρτό πολυεδρικό. Οι επιφάνειες που δίνουν μια σταθερή τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι επίπεδα (δεν φαίνονται). Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού είναι να βρεθεί ένα σημείο στο πολυεδρικό που βρίσκεται στο επίπεδο με την υψηλότερη δυνατή τιμή.

2.2 Ιστορική Ανασκόπηση

Το πρόβλημα της επίλυσης ενός συστήματος γραμμικών ανισοτήτων χρονολογείται τουλάχιστον στο βαθμό που ο Fourier, ο οποίος το 1827 δημοσίευσε μια μέθοδο για την επίλυσή τους, [13] και μετά τον οποίο ονομάζεται η μέθοδος εξάλειψης του Fourier-Motzkin.

Το 1939 μια γραμμική διατύπωση προγραμματισμού ενός προβλήματος ισοδύναμου με το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δόθηκε από τον σοβιετικό οικονομολόγο Leonid Kantorovich, ο οποίος πρότεινε επίσης μια μέθοδο για την επίλυσή του [14]. Είναι ένας τρόπος που ανέπτυξε, κατά τη διάρκεια του Β Παγκοσμίου Πολέμου, να προγραμματίσει τις δαπάνες και τις αποδόσεις, προκειμένου να μειώσει το κόστος του στρατού και να αυξήσει τις απώλειες που επιβάλλονται στον εχθρό [12]. Την ίδια εποχή με τον Kantorovich, ο ολλανδο-αμερικανός οικονομολόγος T. C. Koopmans διατύπωσε κλασικά οικονομικά προβλήματα ως γραμμικά προγράμματα. Ο Kantorovich και ο Koopmans μοιράστηκαν αργότερα το βραβείο Νόμπελ του οικονομικού έτους 1975 [13]. Το 1941, ο Frank Lauren Hitchcock διατύπωσε επίσης προβλήματα μεταφοράς ως γραμμικά προγράμματα και έδωσε μια λύση πολύ παρόμοια με την μεταγενέστερη μέθοδο simplex [14]. Ο Hitchcock είχε πεθάνει το 1957 και το βραβείο Νόμπελ δεν απονέμεται μετά θάνατον.

Κατά τη διάρκεια του 1946-1947, ο Γιώργος Β. Dantzig ανέπτυξε ανεξάρτητα γενική γραμμική προγραμματιστική διατύπωση για να χρησιμοποιηθεί για προγραμματισμό των προβλημάτων στην Πολεμική Αεροπορία των ΗΠΑ [15]. Το 1947, ο Dantzig εφευρέθηκε επίσης η μέθοδος simplex που για πρώτη φορά αντιμετώπισε αποτελεσματικά το γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού στις περισσότερες περιπτώσεις [15]. Όταν ο Dantzig κανόνισε μια συνάντηση με τον John von Neumann για να συζητήσει τη μέθοδο του simplex, ο Neumann αμέσως υπέθεσε τη θεωρία της δυαδικότητας συνειδητοποιώντας ότι το πρόβλημα που δούλευε στη θεωρία των παιχνιδιών ήταν ισοδύναμο. Ο Dantzig παρείχε επίσημη απόδειξη σε μια μη δημοσιευμένη έκθεση «Ένα Θεώρημα για τις Γραμμικές Ανισότητες» στις 5 Ιανουαρίου 1948 [15]. Στα μεταπολεμικά χρόνια, πολλές βιομηχανίες την εφάρμοσαν στον καθημερινό προγραμματισμό τους.

Το αρχικό παράδειγμα του Dantzig ήταν να βρει την καλύτερη ανάθεση 70 ατόμων σε 70 θέσεις εργασίας. Η υπολογιστική ισχύς που απαιτείται για να δοκιμαστούν όλες οι μεταβολές για να επιλέξετε την καλύτερη απόδοση είναι μεγάλη. ο αριθμός των δυνατών διαμορφώσεων υπερβαίνει τον αριθμό των σωματιδίων στο παρατηρούμενο σύμπαν. Ωστόσο, χρειάζεται μόνο μια στιγμή για να βρεθεί η βέλτιστη λύση θέτοντας το πρόβλημα ως γραμμικό πρόγραμμα και εφαρμόζοντας τον απλό αλγόριθμο. Η θεωρία πίσω από τον γραμμικό προγραμματισμό μειώνει δραστικά τον αριθμό των πιθανών λύσεων που πρέπει να ελεγχθούν.

Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού απεδείχθη για πρώτη φορά ότι είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο από τον Leonid Khachiyan το 1979, αλλά μια μεγαλύτερη θεωρητική και πρακτική πρόοδος στον τομέα ήρθε το 1984 όταν η Narendra Karmarkar εισήγαγε μια νέα μέθοδο εσωτερικού σημείου για την επίλυση του γραμμικού προγραμματισμού προβλήματα [16].

2.3 Χρήσεις

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι ένας ευρέως χρησιμοποιούμενος τομέας βελτιστοποίησης για διάφορους λόγους. Πολλά πρακτικά προβλήματα στην έρευνα των λειτουργιών μπορούν να εκφραστούν ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού [12]. Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις γραμμικού προγραμματισμού, όπως τα προβλήματα ροής δικτύου και τα προβλήματα ροής πολλαπλής ζεύξης, θεωρούνται αρκετά σημαντικά ώστε να έχουν δημιουργήσει πολλές έρευνες για εξειδικευμένους αλγόριθμους για τη λύση τους. Ορισμένοι αλγόριθμοι για άλλους τύπους προβλημάτων βελτιστοποίησης λειτουργούν με την επίλυση προβλημάτων LP ως υπό-προβλήματα. Ιστορικά, οι ιδέες από τον γραμμικό προγραμματισμό έχουν εμπνεύσει πολλές από τις κεντρικές έννοιες της θεωρίας βελτιστοποίησης, όπως η δυαδικότητα, η αποσύνθεση και η σημασία της κυρτότητας και των γενικεύσεών της. Ομοίως, ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιήθηκε σε μεγάλο βαθμό για την αρχική διαμόρφωση της μικροοικονομίας και σήμερα χρησιμοποιείται στη διαχείριση της εταιρείας, όπως ο σχεδιασμός, η παραγωγή, η μεταφορά, η τεχνολογία και άλλα θέματα. Αν και τα σύγχρονα ζητήματα διαχείρισης αλλάζουν συνεχώς, οι περισσότερες εταιρείες θα ήθελαν να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη τους και να ελαχιστοποιήσουν το κόστος με περιορισμένους πόρους. Ως εκ τούτου, πολλά θέματα μπορούν να χαρακτηριστούν ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού [12].

2.4 Αλγόριθμοι

Ο απλός αλγόριθμος, που αναπτύχθηκε από τον George Dantzig το 1947, λύνει προβλήματα LP κατασκευάζοντας μια εφικτή λύση σε μια κορυφή του πολύτοπου και στη συνέχεια περπατώντας κατά μήκος ενός μονοπατιού στα άκρα του πολύτοπου σε κορυφές με μη μειούμενες τιμές της αντικειμενικής λειτουργίας μέχρι να επιτυγχάνεται βέλτιστη λύση. Σε πολλά πρακτικά προβλήματα, συμβαίνει παγίδευση: πολλοί στροφείς γίνονται χωρίς αύξηση της αντικειμενικής λειτουργίας [17]. Σε σπάνια πρακτικά προβλήματα, οι συνήθεις εκδόσεις του αλγορίθμου simplex μπορεί στην πραγματικότητα να κυκλώσουν [18]. Για να αποφευχθούν οι κύκλοι, οι ερευνητές ανέπτυξαν νέους κανόνες περιστροφής [18].

Στην πράξη, ο απλός αλγόριθμος είναι αρκετά αποδοτικός και μπορεί να εγγυηθεί ότι θα βρει το βέλτιστο σε παγκόσμιο επίπεδο εάν ληφθούν ορισμένες προφυλάξεις κατά της ποδηλασίας. Ο αλγόριθμος simplex έχει αποδειχθεί ότι επιλύει αποτελεσματικά τα τυχαία προβλήματα, δηλ. σε κυβικό αριθμό βημάτων, [18]που είναι παρόμοια με τη συμπεριφορά του σε πρακτικά προβλήματα [19], [20].

Ωστόσο, ο απλός αλγόριθμος έχει την κακή συμπεριφορά της χειρότερης περίπτωσης: οι Klee και Minty δημιούργησαν μια οικογένεια γραμμικών προβλημάτων προγραμματισμού για τα οποία η μέθοδος simplex παίρνει μια σειρά από βήματα εκθετικά στο μέγεθος του προβλήματος [21]. Στην πραγματικότητα, για κάποιο χρονικό διάστημα δεν ήταν γνωστό αν το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού ήταν επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο, δηλ. Κατηγορίας πολυπλοκότητας P.

Criss-cross αλγόριθμος

Όπως ο απλός αλγόριθμος του Dantzig, ο αλγόριθμος cross-cross είναι ένας αλγόριθμος ανταλλαγής βάσεων που περιστρέφεται μεταξύ των βάσεων. Ωστόσο, ο αλγόριθμος cross-cross δεν χρειάζεται να διατηρήσει την εφικτότητα, αλλά μπορεί να στρέψει μάλλον από μια εφικτή βάση σε μια μη εφικτή βάση. Ο αλγόριθμος cross-cross δεν έχει πολυωνυμική χρονική πολυπλοκότητα για τον γραμμικό προγραμματισμό. Και οι δύο αλγόριθμοι επισκέπτονται όλες τις 2D γωνίες ενός (διαταραγμένου) κύβου στη διάσταση D, τον κύβο Klee-Minty, στη χειρότερη περίπτωση [21].

Εσωτερικό σημείο

Σε αντίθεση με τον απλό αλγόριθμο, ο οποίος βρίσκει μια βέλτιστη λύση με το πέρασμα των άκρων μεταξύ των κορυφών σε ένα πολυεδρικό σύνολο, οι εσωτερικές μεθόδους κινούνται μέσα στο εσωτερικό της εφικτής περιοχής.

Ελλειψοειδής αλγόριθμος, ακολουθώντας Khachiyan

Αυτός είναι ο πρώτος αλγόριθμος που έχει βρεθεί για τον γραμμικό προγραμματισμό. Για την επίλυση ενός προβλήματος το οποίο έχει n μεταβλητές και μπορεί να κωδικοποιηθεί σε bit εισόδου L, αυτός ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί ψευδό-αριθμητικές πράξεις O (n4L) σε αριθμούς με ψηφία O (L). Ο Leonid Khachiyan λύνεται αυτό το μακροχρόνιο ζήτημα πολυπλοκότητας το 1979 με την εισαγωγή της μεθόδου ελλειψοειδούς [19]. Η ανάλυση σύγκλισης έχει προκαθορισμένους (πραγματικούς αριθμούς), συγκεκριμένα τις επαναληπτικές μεθόδους που αναπτύχθηκαν από τον Naum Z. Shor και τους αλγόριθμους προσέγγισης από τους Arkadi Nemirovski και D. Yudin.

Προβολικός αλγόριθμος του Karmarkar

Ο αλγόριθμος του Khachiyan ήταν καθοριστικής σημασίας για την καθιέρωση της λύσης πολυωνυμικού χρόνου γραμμικών προγραμμάτων. Ο αλγόριθμος δεν ήταν υπολογιστική διείσδυση, καθώς η μέθοδος simplex είναι πιο αποδοτική για όλες εκτός από ειδικά κατασκευασμένες οικογένειες γραμμικών προγραμμάτων.

Ωστόσο, ο αλγόριθμος Khachiyan ενέπνευσε νέες γραμμές έρευνας στον γραμμικό προγραμματισμό. Το 1984, ο N. Karmarkar πρότεινε μια προβολική μέθοδο για τον γραμμικό προγραμματισμό. Ο αλγόριθμος του Karmarkar βελτιώθηκε στο πολυώνυμο της χειρότερης περίπτωσης Khachiyan (δίνοντας O (n 3.5 L) {\ displaystyle O (n ^ {3.5} L)} O (n ^ {3.5} L). Ο Karmarkar ισχυρίστηκε ότι ο αλγόριθμός του ήταν πολύ ταχύτερος στην πρακτική LP από την απλή μέθοδο, έναν ισχυρισμό που δημιούργησε μεγάλο ενδιαφέρον για τις μεθόδους εσωτερικών σημείων [20]. Από την ανακάλυψη του Karmarkar, έχουν προταθεί και αναλυθεί πολλές μέθοδοι εσωτερικού σημείου.

2.5 Είδη Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Προβλήματα κατασκευής: Τα προβλήματα αυτά αφορούν την παραγωγή και την πώληση διαφόρων προϊόντων από μια εταιρεία. Η παραγωγή των προϊόντων απαιτεί ένα σταθερό ποσό εργατικού δυναμικού, ώρες μηχανών, πρώτες ύλες, αποθηκευτικό χώρο κλπ. Διαφορετικά προϊόντα παράγονται έτσι ώστε να ικανοποιούν τους προαναφερθέντες περιορισμούς και τις διαθέσιμες επενδύσεις. Η ιδέα εδώ είναι να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη της κατασκευαστικής εταιρείας. Αυτό αντιπροσωπεύει έναν από τους συνηθέστερους τύπους προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού [22].

Διατροφικά προβλήματα: Πολύ συχνά οι διαιτολόγοι και οι διαιτολόγοι υποχρεούνται να προετοιμάσουν τα διαγράμματα υγείας και διατροφής. Ο στόχος αυτών των διαγραμμάτων διατροφής είναι να συμπεριλάβει όλα τα σημαντικά είδη θρεπτικών ουσιών που απαιτούνται από το ανθρώπινο σώμα για να παραμείνουν υγιείς. Επιπλέον, η διατροφή πρέπει να είναι διαθέσιμη με λογικό κόστος. Έτσι, στα προβλήματα διατροφής, πρέπει να συμπεριλάβετε μια ελάχιστη ποσότητα όλων των σημαντικών θρεπτικών ουσιών, ελαχιστοποιώντας έτσι το κόστος ενός τέτοιου σχεδίου διατροφής. Ο γραμμικός προγραμματισμός βρίσκει εκτεταμένη χρήση σε αυτόν τον τομέα.

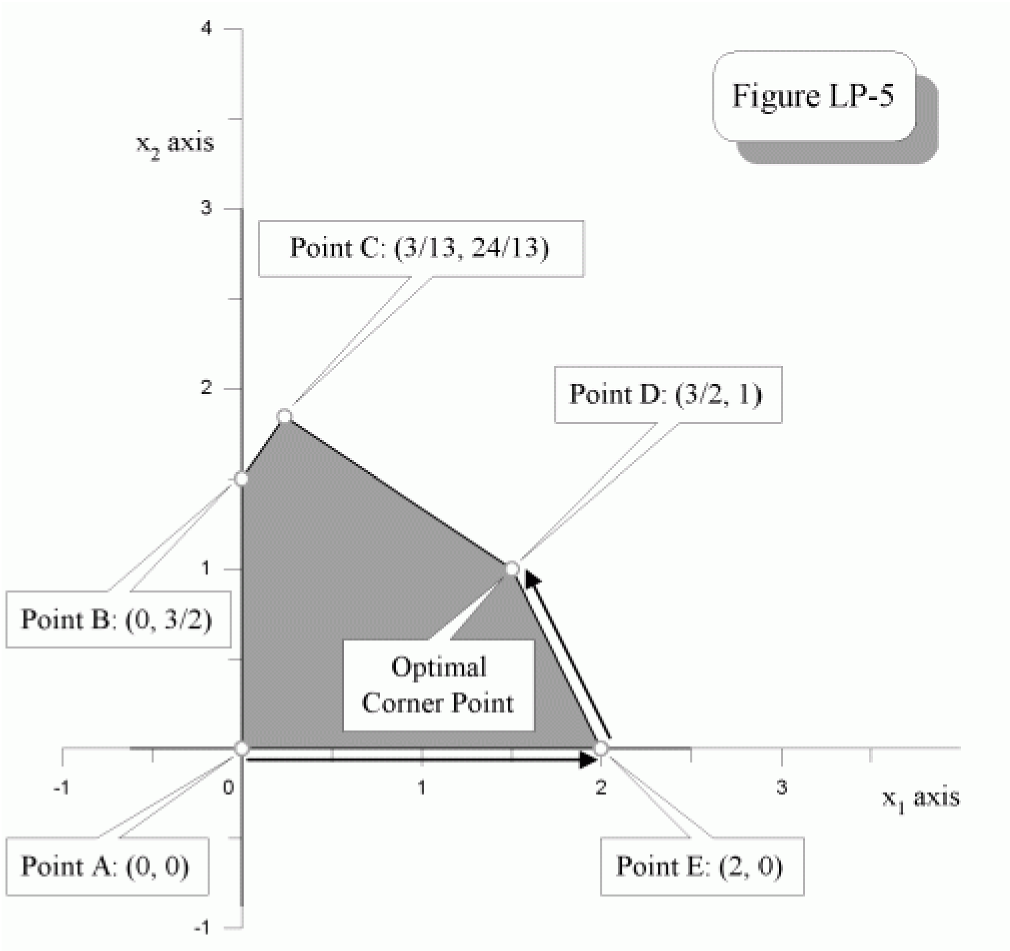
Προβλήματα μεταφοράς: Τα προϊόντα που παράγονται σε εργοστάσια και μονάδες παραγωγής υποτίθεται ότι μεταφέρονται στα σημεία πώλησης και στις αγορές που βρίσκονται σε διαφορετικές τοποθεσίες. Η ιδέα είναι να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς ταυτόχρονα, διασφαλίζοντας την ασφαλή και επιτυχή μεταφορά των προϊόντων στις επιθυμητές τοποθεσίες. Αυτές οι δηλώσεις προβλημάτων είναι παραδείγματα των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού [23].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

3.1 Μέθοδος Simplex

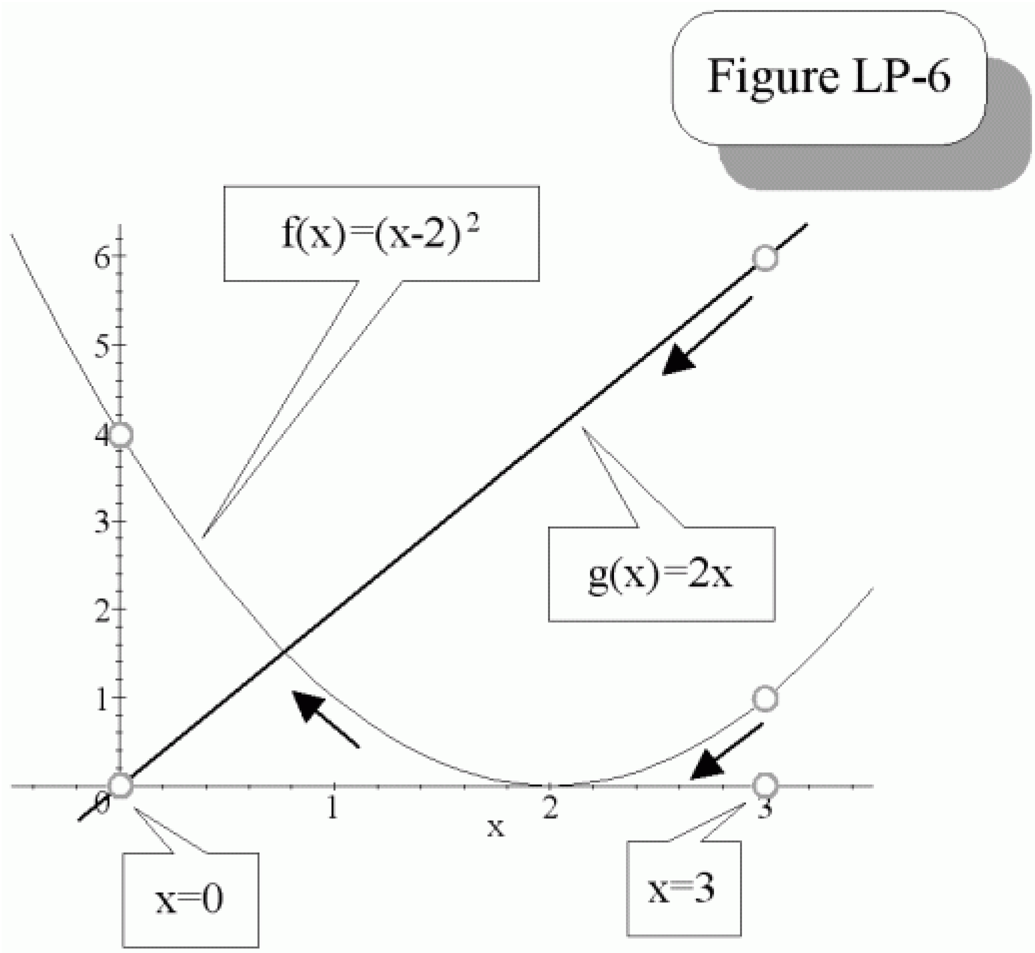
Στη μαθηματική βελτιστοποίηση, ο απλός αλγόριθμος του Dantzig (ή η μέθοδος simplex) είναι ένας δημοφιλής αλγόριθμος για τον γραμμικό προγραμματισμό [24].

Παρόλο που η μέθοδος δεν απαιτεί ρητή εξάρτηση από το γράφημα, θα πρέπει πρώτα να εξηγήσουμε γραφικά την βασική ιδέα πίσω από τη μέθοδο Simplex. και θα το κάνουμε αυτό χρησιμοποιώντας το παράδειγμα από την τελευταία ενότητα. Η συζήτησή μας θα αναφέρεται στο Σχήμα LP-5 παρακάτω.



Θα ξεκινήσουμε την αναζήτηση στο (οποιοδήποτε) από τα γωνιακά σημεία και στη συνέχεια θα ανεβούμε, σαν να ανεβαίνουμε σε ένα λόφο, προς το βέλτιστο σημείο γωνίας κατά μήκος των άκρων της εφικτής περιοχής. Σε αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα, η μέθοδος Simplex θα ξεκινήσει στο σημείο A. Το πρώτο μας καθήκον είναι να καθορίσουμε αν το σημείο A είναι βέλτιστο ή όχι. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν δύο άκρα που προέρχονται από το σημείο A, το ένα τελειώνει στο σημείο B και το άλλο στο σημείο E. Με άλλα λόγια, υπάρχουν δύο γωνιακά σημεία που είναι δίπλα στο σημείο A. Επομένως, θα συγκρίνουμε την τιμή αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο A έναντι των σημείων B και E. Στην περίπτωση αυτή, τόσο το B όσο και το E έχουν μια τιμή αντικειμενικής συνάρτησης υψηλότερη από εκείνη του σημείου A. Ως εκ τούτου, το σημείο A δεν είναι βέλτιστο και μπορούμε να επιλέξουμε να ταξιδέψουμε σε ένα από αυτά τα δύο σημεία. Υποθέστε ότι επιλέγουμε να πάμε στο σημείο E, όπως υποδεικνύεται από ένα βέλος στο σχήμα LP-5. Στη συνέχεια, μετά την άφιξή μας στο σημείο E, πάλι, πρέπει να μάθουμε αν το E είναι το βέλτιστο. Για να το προσδιορίσουμε, απλά επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία σύγκρισης της τιμής αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο E έναντι εκείνων των γειτονικών γωνιακών σημείων A και D. Είναι προφανές ότι από αυτά τα δύο σημεία πρέπει να εξεταστεί μόνο το D, αφού μόλις περάσαμε από το σημείο A, το οποίο είναι γνωστό ότι είναι κατώτερο. Αφού ελέγξουμε την τιμή αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο D για να διαπιστώσουμε ότι συμβαίνει να είναι καλύτερη από εκείνη στο σημείο E. Συνεπώς, ακολουθούμε την επόμενη διαδρομή προς το σημείο D (επίσης υποδεικνύεται με ένα βέλος στο σχήμα LP-5). Κατά την άφιξη στο σημείο D, συγκρίνουμε και πάλι το OFV με εκείνα στα σημεία C και E. Εφόσον ο OFV στο D αποδεικνύεται καλύτερος από αυτόν της C, καταλήγουμε τελικά στο συμπέρασμα ότι το σημείο D είναι το βέλτιστο.

Είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι το σημείο Δ είναι το βέλτιστο, βασιζόμαστε σιωπηρά στο γεγονός ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική στις μεταβλητές απόφασης. Για να δείτε αυτό, εξετάστε το απλό πρόβλημα βελτιστοποίησης: Μεγιστοποιήστε (x-2) 2 με 0 £ x £ 3. Εδώ, η αντικειμενική συνάρτηση f (x) = (x-2) 2 είναι μη γραμμική και η γραφική παράσταση της φαίνεται στο Σχήμα LP-6 παρακάτω.



Τώρα, φανταστείτε τον εαυτό μας να στέκεται στο σημείο με το x = 3, όπου η τιμή αντικειμενικής συνάρτησης ισούται με 1 (= (3-2) 2). και υποθέτουμε ότι σχεδιάζουμε να ταξιδέψουμε στην προέλευση, όπου x = 0. Αν κοιτάξουμε προς την κατεύθυνση της προέλευσης, η τιμή αντικειμενικής συνάρτησης θα παρουσιάσει πρώτα μια πτώση και στη συνέχεια μια αύξηση, με μια τελική τιμή 4 (= (0-2) 2). Αυτή η αρχική παρακμή σημαίνει ότι το σημείο στο x = 3 είναι τοπικά βέλτιστο. Ωστόσο, δεδομένου ότι η τελική τιμή αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από 1, βλέπουμε ότι αυτό το σημείο δεν είναι βέλτιστο σε παγκόσμιο επίπεδο. Είναι σαφές ότι αν είχαμε μια γραμμική αντικειμενική συνάρτηση, όπως g (x) = 2x (που επίσης απεικονίζεται στο σχήμα LP-6), τότε αυτό το φαινόμενο δεν μπορεί να συμβεί, αφού όταν η αντικειμενική λειτουργία αρχίσει να μειώνεται σε μια δεδομένη κατεύθυνση, συνεχίστε με σταθερό ρυθμό ανεξάρτητα από το πόσο ταξιδεύουμε. Ως εκ τούτου, μια τοπικά βέλτιστη λύση για ένα γραμμικό πρόγραμμα θα είναι πάντοτε βέλτιστη σε παγκόσμιο επίπεδο. Στο παραπάνω παράδειγμα, το σημείο D είναι τοπικά βέλτιστο. είναι ως εκ τούτου παγκόσμια βέλτιστη.

Αρχίζουμε τώρα τη λύση του προηγούμενου παραδείγματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex. και αυτό δίνεται στον παρακάτω σύνδεσμο.

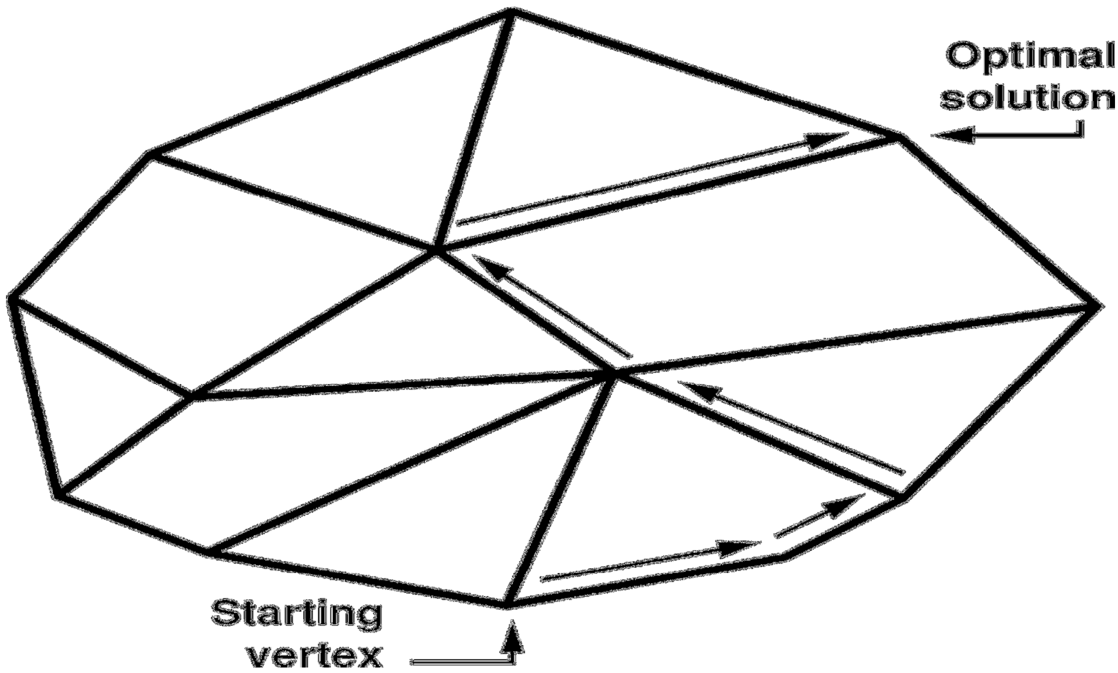
Το όνομα του αλγορίθμου προέρχεται από την έννοια ενός simplex και προτάθηκε από τον T. S. Motzkin [24]. Οι απλοί δεν χρησιμοποιούνται στη μέθοδο, αλλά μια ερμηνεία της είναι ότι λειτουργεί με απλούς κώνους και αυτοί γίνονται απλοί με έναν επιπλέον περιορισμό [25]. Οι απλοί κώνοι είναι οι γωνίες (δηλ. Οι γειτονιές των κορυφών) ενός γεωμετρικού αντικειμένου που ονομάζεται πολυτόπιο. Το σχήμα αυτού του πολυτοπιου ορίζεται από τους περιορισμούς που εφαρμόζονται στην αντικειμενική λειτουργία.

Σε γεωμετρικούς όρους, η εφικτή περιοχή που ορίζεται από όλες τις τιμές του x {\ displaystyle \ mathbf {x}} \ mathbf {x} έτσι ώστε A x ≤ b {\ textstyle A \ mathbf {x} \ leq \ mathbf {b}} {\ textstyle A \ mathbf {x} \ leq \ mathbf {b}} και ∀ i, xi ≥ 0 {\ displaystyle \ forall i, x_ {i} \ geq 0} {\ displaystyle \ \ geq 0} είναι ένα (πιθανώς απεριόριστο) κυρτό πολυτόπιο. Ένα ακραίο σημείο ή κορυφή αυτού του polytope είναι γνωστό ως βασική εφικτή λύση (BFS).

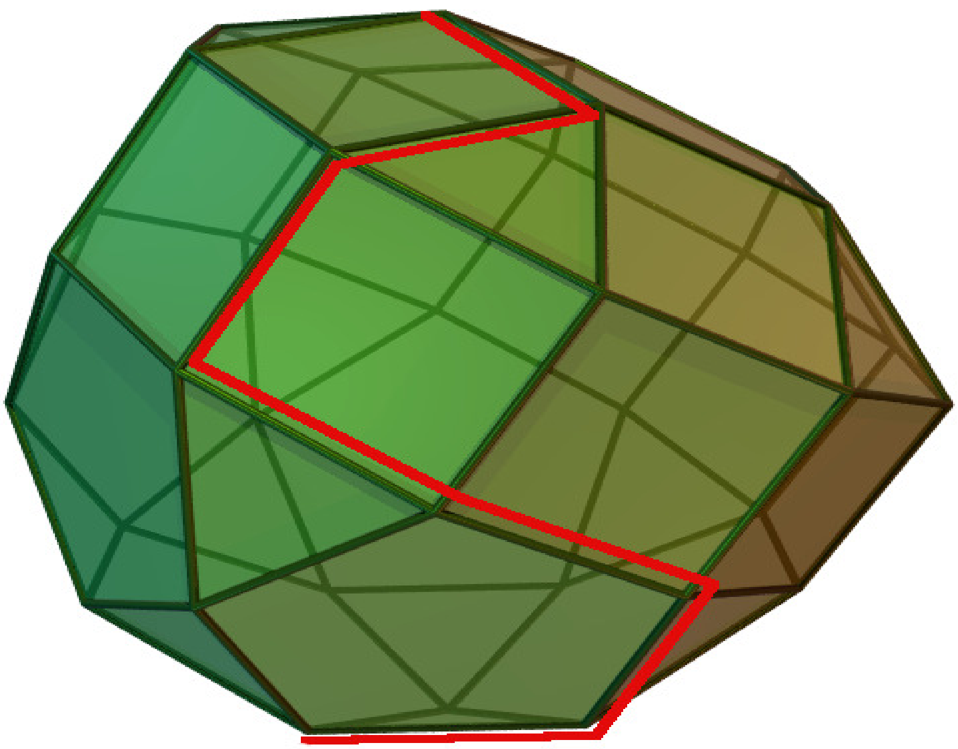
Μπορούμε να δείξουμε ότι για ένα γραμμικό πρόγραμμα σε τυποποιημένη μορφή, αν η αντικειμενική συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή στην εφικτή περιοχή, τότε έχει αυτή την τιμή στο (τουλάχιστον) ένα από τα ακραία σημεία [24]. Αυτό αφ 'εαυτού μειώνει το πρόβλημα σε ένα πεπερασμένο υπολογισμό αφού υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός ακραίων σημείων, αλλά ο αριθμός των ακραίων σημείων είναι απρόσιτα μεγάλος για όλα εκτός από τα μικρότερα γραμμικά προγράμματα [24].

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι, αν ένα ακραίο σημείο δεν είναι ένα μέγιστο σημείο της αντικειμενικής συνάρτησης, τότε υπάρχει μια άκρη που περιέχει το σημείο έτσι ώστε η αντικειμενική λειτουργία να αυξάνεται αυστηρά στην άκρη που απομακρύνεται από το σημείο [26]. Εάν η άκρη είναι πεπερασμένη τότε η άκρη συνδέεται με ένα άλλο ακραίο σημείο όπου η αντικειμενική λειτουργία έχει μεγαλύτερη τιμή, διαφορετικά η αντικειμενική λειτουργία είναι απεριόριστη πάνω στην άκρη και το γραμμικό πρόγραμμα δεν έχει λύση. Ο αλγόριθμος simplex εφαρμόζει αυτή την εικόνα περπατώντας κατά μήκος των άκρων του πολυτοπιου σε ακραία σημεία με μεγαλύτερες αντικειμενικές τιμές. Αυτό συνεχίζεται έως ότου επιτευχθεί η μέγιστη τιμή ή επισκέπτεται μια απεριόριστη άκρη (καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση). Ο αλγόριθμος τερματίζεται πάντα επειδή ο αριθμός των κορυφών στο πολυτοπιο είναι πεπερασμένος. Επιπλέον, αφού πηδούμε μεταξύ των κορυφών πάντα προς την ίδια κατεύθυνση (της αντικειμενικής λειτουργίας), ελπίζουμε ότι ο αριθμός των κορυφών που επισκέπτονται θα είναι μικρός [26].

Η λύση ενός γραμμικού προγράμματος επιτυγχάνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο, γνωστό ως Φάση I, ένα αρχικό ακραίο σημείο βρίσκεται. Ανάλογα με τη φύση του προγράμματος, αυτό μπορεί να είναι ασήμαντο, αλλά γενικά μπορεί να λυθεί εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο simplex σε μια τροποποιημένη έκδοση του αρχικού προγράμματος. Τα πιθανά αποτελέσματα της φάσης I είναι είτε ότι διαπιστώνεται μια βασική εφικτή λύση είτε ότι η εφικτή περιοχή είναι κενή. Στην τελευταία περίπτωση το γραμμικό πρόγραμμα καλείται μη εφικτό. Στο δεύτερο βήμα, Φάση II, ο αλγόριθμος simplex εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας τη βασική εφικτή λύση που βρίσκεται στην φάση I ως σημείο εκκίνησης. Τα πιθανά αποτελέσματα από τη Φάση II είναι είτε μια βέλτιστη βασική εφικτή λύση είτε μια άπειρη άκρη πάνω στην οποία η αντικειμενική λειτουργία είναι απεριόριστη [27], [28].



Σχήμα 3.1.1 Ένα σύστημα γραμμικών ανισοτήτων ορίζει ένα πολυτόπιο ως εφικτή περιοχή. Ο αλγόριθμος simplex ξεκινά από την αρχική κορυφή και κινείται κατά μήκος των άκρων του πολυτοπιου μέχρι να φτάσει στην κορυφή της βέλτιστης λύσης.



Σχήμα 3.1.2 Πολύεδρο του απλού αλγορίθμου σε 3D

Τυπική φόρμα

Ο μετασχηματισμός ενός γραμμικού προγράμματος σε ένα σε τυποποιημένη μορφή μπορεί να επιτευχθεί ως εξής [24]. Πρώτον, για κάθε μεταβλητή με κατώτερο όριο διαφορετικό από 0, εισάγεται μια νέα μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ της μεταβλητής και της δεσμευμένης. Η αρχική μεταβλητή μπορεί στη συνέχεια να εξαλειφθεί με υποκατάσταση. Για παράδειγμα, δεδομένου του περιορισμού

x 1 ≥ 5 {\ displaystyle x_ {1} \ geq 5} x_ {1} \ geq 5

μια νέα μεταβλητή, y 1 {\ displaystyle y_ {1}} y_ {1}, εισάγεται με

y 1 = x 1 - 5 x 1 = y 1 + 5 {\ displaystyle {\ begin {ευθυγραμμισμένο} y_ {1} = x_ {1} -5 \\ x_ {1} = y_ {1} +5 \ ευθυγραμμισμένο}}} {\ begin {ευθυγραμμισμένο} y_ {1} = x_ {1} -5 \\ x_ {1} = y_ {1} +5 \ end {ευθυγραμμισμένο}}

Η δεύτερη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξάλειψη του x 1 {\ displaystyle x_ {1}} x_ {1} από το γραμμικό πρόγραμμα. Με αυτόν τον τρόπο, όλοι οι περιορισμοί του κατώτερου ορίου μπορούν να αλλάξουν σε περιορισμούς μη αρνητικότητας.

Δεύτερον, για κάθε παραμένοντα περιορισμό ανισότητας, εισάγεται μια νέα μεταβλητή, που ονομάζεται μεταβλητή slack, για να αλλάξει ο περιορισμός σε έναν περιορισμό ισότητας. Αυτή η μεταβλητή αντιπροσωπεύει τη διαφορά μεταξύ των δύο πλευρών της ανισότητας και θεωρείται μη αρνητική. Για παράδειγμα, οι ανισότητες

x 2 + 2 x 3 ≤ 3 - x 4 + 3 x 5 ≥ 2 {\ displaystyle {\ begin {ευθυγραμμισμένο} x_ {2} + 2x_ {3} & \ leq 3 \\ - x_ {4} + 3x_ { } {\ begin {aligned} x_ {2} + 2x_ {3} & \ leq 3 \\ - x_ {4} + 3x_ {5} & \ geq 2 \ ευθυγραμμισμένος}}

αντικαθίστανται από

x 2 + 2 + 2 x 3 + s 1 = 3 - x 4 + 3 x 5 - s 2 = 2 s 1, s 2 ≥ 0 {\ displaystyle {\ begin { {1} & = 3 \\ - x_ {4} + 3x_ {5} -s_ {2} & = 2 \\ s_ {1}, \, s_ {2} & \ geq 0 \ {\ begin {aligned} x_ {2} + 2x_ {3} + s_ {1} & = 3 \\ - x_ {4} + 3x_ {5} -s_ {2} & = 2 \ \, s_ {2} & \ geq 0 \ τέλος {ευθυγραμμισμένο}}

Είναι πολύ πιο εύκολο να εκτελέσετε αλγεβρικό χειρισμό σε ανισότητες σε αυτή τη μορφή. Στις ανισότητες όπου το ≥ εμφανίζεται όπως το δεύτερο, ορισμένοι συγγραφείς αναφέρονται στη μεταβλητή που εισάγεται ως μεταβλητή πλεόνασμα.

Τρίτον, κάθε απεριόριστη μεταβλητή εξαλείφεται από το γραμμικό πρόγραμμα. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους, το ένα είναι η επίλυση της μεταβλητής σε μία από τις εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται και στη συνέχεια η εξάλειψη της μεταβλητής με υποκατάσταση. Το άλλο είναι να αντικαταστήσει τη μεταβλητή με τη διαφορά δύο περιορισμένων μεταβλητών. Για παράδειγμα, αν z 1 {\ displaystyle z_ {1}} z_ {1} είναι απεριόριστη τότε γράψτε

z = {1} - z_ {1} ^ {+} - z_ {1} ^ {-} \\ & z_ {1} ^ {+}, \, z_ {1} ^ {-} \ geq 0 \ end {ευθυγραμμισμένο}}} {\ begin {aligned} & z_ {1} -z_ {1} ^ {-} \\ & z_ {1} ^ {+}, \, z_ {1} ^ {-} \ geq 0 \ end {ευθυγραμμισμένο}}

Η εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξάλειψη του z 1 {\ displaystyle z_ {1}} z_ {1} από το γραμμικό πρόγραμμα.

Όταν ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία, η εφικτή περιοχή θα είναι στη μορφή

A x = b, ∀ ixi ≥ 0 {\ displaystyle \ mathbf {A} \ mathbf {x} = \ mathbf {b}, \, \ forall i \ x_ {i} \ geq 0} {\ displaystyle \ mathbf { } \ mathbf {x} = \ mathbf {b}, \, \ forall i \ x_ {i} \ geq 0}

Είναι επίσης χρήσιμο να υποθέσουμε ότι ο βαθμός A {\ displaystyle \ mathbf {A}} \ mathbf {A} είναι ο αριθμός των γραμμών. Αυτό δεν έχει ως αποτέλεσμα απώλεια της γενικότητας, διότι διαφορετικά είτε το σύστημα A x = b {\ displaystyle \ mathbf {A} \ mathbf {x} = \ mathbf {b}} \ mathbf {A} \ mathbf { b} έχει περιττές εξισώσεις που μπορούν να πέσουν, ή το σύστημα είναι ασυμβίβαστο και το γραμμικό πρόγραμμα δεν έχει λύση [24].

3.2 Ιστορική Ανασκόπηση

Ο Γιώργος Ντάντζιγκ εργάστηκε για μεθόδους σχεδιασμού για την πολεμική αεροπορία των ΗΠΑ κατά τη διάρκεια του Β Παγκοσμίου Πολέμου, χρησιμοποιώντας μια αριθμομηχανή γραφείου. Το 1946 ο συνάδελφός του τον προκάλεσε να ερευνήσει τη διαδικασία σχεδιασμού για να τον αποσπάσει από τη λήψη άλλης δουλειάς. Ο Dantzig διατύπωσε το πρόβλημα ως γραμμικές ανισότητες εμπνευσμένες από το έργο του Wassily Leontief, ωστόσο, εκείνη την εποχή δεν περιέλαβε έναν στόχο ως μέρος της διατύπωσης του. Χωρίς έναν στόχο, μπορεί να είναι εφικτός ένας μεγάλος αριθμός λύσεων και, ως εκ τούτου, να βρεθεί η βέλτιστη εφικτή λύση, καθώς πρέπει να χρησιμοποιηθούν βασικοί κανόνες που καθορίζουν στρατιωτικά, που περιγράφουν πώς μπορούν να επιτευχθούν οι στόχοι, σε αντίθεση με τον προσδιορισμό ενός ίδιου στόχου. Η βασική ιδέα του Dantzig ήταν να συνειδητοποιήσει ότι οι περισσότεροι τέτοιοι βασικοί κανόνες μπορούν να μεταφραστούν σε μια γραμμική αντικειμενική λειτουργία που πρέπει να μεγιστοποιηθεί [29]. Η ανάπτυξη της μεθόδου simplex ήταν εξελικτική και συνέβη σε μια περίοδο περίπου ενός έτους [30].

Αφού ο Dantzig περιελάβανε μια αντικειμενική λειτουργία ως μέρος της διαμόρφωσής του στα μέσα του 1947, το πρόβλημα ήταν μαθηματικά πιο τραχύ. Ο Dantzig συνειδητοποίησε ότι ένα από τα άλυτα προβλήματα που είχε θεωρήσει λάθος ως εργασία στην τάξη του καθηγητή Jerzy Neyman (και στην πραγματικότητα αργότερα λυθεί) ήταν εφαρμόσιμο για την εξεύρεση αλγορίθμου για γραμμικά προγράμματα. Αυτό το πρόβλημα περιλάμβανε την εύρεση της ύπαρξης πολλαπλασιαστών Lagrange για γενικά γραμμικά προγράμματα πάνω σε μια συνεχή μεταβλητή, κάθε μια από τα οποία περιορίστηκε μεταξύ μηδέν και ένα και ικανοποιώντας γραμμικούς περιορισμούς που εκφράστηκαν με τη μορφή Lebesgue ολοκλήρων. Ο Dantzig δημοσίευσε αργότερα την «εργασία του» ως διατριβή για να κερδίσει το διδακτορικό του. Η γεωμετρία της στήλης που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή τη διατριβή έδωσε την εικόνα του Dantzig ότι τον έκανε να πιστέψει ότι η μέθοδος Simplex θα ήταν πολύ αποδοτική [31].

3.3 Λειτουργίες Περιστροφής

Η γεωμετρική λειτουργία της μετακίνησης από μια βασική εφικτή λύση σε μια γειτονική βασική εφικτή λύση υλοποιείται ως λειτουργία περιστροφής. Κατ 'αρχάς, επιλέγεται ένα μη φυσικό στοιχείο περιστροφής σε μια μη βασική στήλη. Η σειρά που περιέχει αυτό το στοιχείο πολλαπλασιάζεται με την αμοιβαιότητά του για να αλλάξει αυτό το στοιχείο σε 1 και στη συνέχεια πολλαπλάσια της σειράς προστίθενται στις άλλες σειρές για να αλλάξουν οι άλλες καταχωρήσεις στη στήλη στο 0. Το αποτέλεσμα είναι ότι εάν το στοιχείο στροφέα είναι στη σειρά r, τότε η στήλη γίνεται η r-η στήλη του πίνακα ταυτότητας. Η μεταβλητή για αυτήν τη στήλη είναι πλέον μια βασική μεταβλητή, αντικαθιστώντας τη μεταβλητή που αντιστοιχεί στην r-η στήλη του πίνακα ταυτότητας πριν από τη λειτουργία. Στην πραγματικότητα, η μεταβλητή που αντιστοιχεί στη στήλη περιστροφής εισέρχεται στο σύνολο βασικών μεταβλητών και ονομάζεται εισερχόμενη μεταβλητή και η μεταβλητή που αντικαθίσταται αφήνει το σύνολο των βασικών μεταβλητών και ονομάζεται μεταβλητή που εξέρχεται. Το tableau εξακολουθεί να είναι σε κανονική μορφή αλλά με το σύνολο των βασικών μεταβλητών που έχουν αλλάξει από ένα στοιχείο [32].

Αλγόριθμος

Αφήστε ένα γραμμικό πρόγραμμα να δοθεί από ένα κανονικό πίνακα. Ο αλγόριθμος simplex προχωρά με την εκτέλεση διαδοχικών πράξεων περιστροφής, καθένα από τα οποία δίνει μια βελτιωμένη βασική εφικτή λύση. η επιλογή του στοιχείου περιστροφής σε κάθε βήμα καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από την απαίτηση ότι ο άξονας αυτός βελτιώνει τη λύση.

Εισαγωγή επιλογής μεταβλητών

Δεδομένου ότι η εισερχόμενη μεταβλητή γενικά θα αυξηθεί από 0 σε θετικό αριθμό, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα μειωθεί εάν το παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με αυτή τη μεταβλητή είναι αρνητικό. Αντιστοίχως, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται εάν η στήλη περιστροφής είναι επιλεγμένη έτσι ώστε η αντίστοιχη καταχώρηση στη γραμμή αντικειμένων του πίνακα να είναι θετική.

Εάν υπάρχουν περισσότερες από μία στήλες έτσι ώστε η καταχώρηση στη σειρά αντικειμένων να είναι θετική, τότε η επιλογή της οποίας να προσθέσουμε στο σύνολο των βασικών μεταβλητών είναι κάπως αυθαίρετη και μερικές εισάγουν κανόνες μεταβλητής επιλογής [24] όπως ο αλγόριθμος Devex [32] έχει αναπτυχθεί.

Εάν όλες οι καταχωρίσεις στη σειρά αντικειμένων είναι μικρότερες ή ίσες με 0, τότε δεν μπορεί να γίνει καμία επιλογή εισαγωγής μεταβλητής και η λύση είναι στην πραγματικότητα βέλτιστη. Μπορεί εύκολα να φανεί ότι είναι βέλτιστη αφού η αντικειμενική σειρά αντιστοιχεί τώρα σε μια εξίσωση της φόρμας

z (x) = z B + μη αρνητικοί όροι που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές {\ displaystyle z (\ mathbf {x}) = z_ {B} + {\ text { }} = z_ {B} + {\ text {μη αρνητικοί όροι που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές}}

Αλλάζοντας τον κανόνα επιλογής μεταβλητής επιλογής έτσι ώστε να επιλέγει μια στήλη όπου η καταχώρηση στη σειρά αντικειμένων είναι αρνητική, ο αλγόριθμος αλλάζει έτσι ώστε να βρίσκει το μέγιστο της αντικειμενικής συνάρτησης παρά το ελάχιστο.

Αφήνοντας την επιλογή μεταβλητών

Μόλις επιλεγεί η στήλη περιστροφής, η επιλογή της σειράς περιστροφής καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από την απαίτηση ότι το προκύπτον διάλυμα είναι εφικτό. Πρώτον, εξετάζονται μόνο οι θετικές καταχωρίσεις στην στήλη στροφέα, καθώς αυτό εγγυάται ότι η τιμή της εισερχόμενης μεταβλητής δεν θα είναι αρνητική. Εάν δεν υπάρχουν θετικές καταχωρήσεις στην στήλη περιστροφής, τότε η εισερχόμενη μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μη αρνητική τιμή με το διάλυμα να παραμένει εφικτό. Σε αυτή την περίπτωση η αντικειμενική λειτουργία είναι απεριόριστη κάτω και δεν υπάρχει ελάχιστο.

Στη συνέχεια, η σειρά περιστροφής πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε όλες οι άλλες βασικές μεταβλητές να παραμείνουν θετικές. Ένας υπολογισμός δείχνει ότι αυτό συμβαίνει όταν η προκύπτουσα τιμή της εισερχόμενης μεταβλητής είναι στο ελάχιστο. Με άλλα λόγια, αν η στήλη περιστροφής είναι c, τότε η σειρά περιστροφής r επιλέγεται έτσι ώστε

b r / a r c {\ displaystyle β_ {r} / a_ {rc} \,} b_ {r} / a_ {rc} \,

είναι το ελάχιστο πάνω από όλες τις r έτσι ώστε το τόξο> 0. Αυτό ονομάζεται δοκιμή ελάχιστης αναλογίας [24]. Εάν υπάρχουν περισσότερες από μία σειρές για τις οποίες επιτυγχάνεται το κατώτατο όριο, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας κανόνας ρίψης μεταβλητής επιλογής (1983) για τον προσδιορισμό.

Παράδειγμα

Δείτε επίσης: Αναθεωρημένος αλγόριθμος simplex § Αριθμητικό παράδειγμα

Εξετάστε το γραμμικό πρόγραμμα

Περιορίζω

Z = -2χ-3γ-4ζ {\ displaystyleZ = -2x-3y-4z \ Z = -2x-3y-4z \

Υποτάσσω

3 x + 2 y + z ≤ 10 2 x + 5 y + 3 z ≤ 15 x, y, z ≥ 0 {\ displaystyle {\ begin {ευθυγραμμισμένο} 3x + 2y + z & \ leq 15 \\ x, \, y, \, z & \ geq 0 \ end {ευθυγραμμισμένο}}} {\ begin {ευθυγραμμισμένο} 3x + 2y + z & \ leq 10 \\ 2x + 5y + 3z & \ leq 15 \ x, \, y, \, z & \ geq 0 \ τέλος {ευθυγραμμισμένο}}

Με την προσθήκη των χαλαρών μεταβλητών s και t, αυτό αντιπροσωπεύεται από τον κανονικό πίνακα

[1 2 3 4 0 0 0 0 3 2 1 1 0 10 0 2 5 3 0 1 15] {\ displaystyle {\ begin {bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \ 0 & 3 & 2 & bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 &

1 & 0 & 10 & 0 & 2 & 5 & end {bmatrix}}

όπου οι στήλες 5 και 6 αντιπροσωπεύουν τις βασικές μεταβλητές s και t και η αντίστοιχη βασική εφικτή λύση είναι

x = y = z = 0, s = 10, t = 15. {\ displaystyle x = y = z = 0, \, s = 10, \ t = s = 10, \, t = 15.

Οι στήλες 2, 3 και 4 μπορούν να επιλεγούν ως στήλες περιστροφής, για το παράδειγμα αυτό έχει επιλεγεί η στήλη 4. Οι τιμές του ζ που προκύπτουν από την επιλογή των σειρών 2 και 3 ως στρογγυλές σειρές είναι 10/1 = 10 και 15/3 = 5 αντίστοιχα. Από αυτά το ελάχιστο είναι 5, έτσι η σειρά 3 πρέπει να είναι η σειρά περιστροφής. Η εκτέλεση του άξονα δημιουργεί

[3 - 2 - 11 0 0 - 4 - 60 0 7 1 0 3 - 1 15 0 2 5 3 0 1 15] {\ displaystyle {\ begin {bmatrix} 3 & -2 & -11 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 15 \ end {bmatrix}}} {\ displaystyle {\ begin {bmatrix} 3 & -2 & -11 & 0 & -4 & -60 &

Τώρα οι στήλες 4 και 5 αντιπροσωπεύουν τις βασικές μεταβλητές z και s και την αντίστοιχη βασική εφικτή λύση

x = y = t = 0, z = 5, s = 5. {\ displaystyle x = y = t = 0, \, z = 5, \, s = z = 5, \, s = 5.

Για το επόμενο βήμα, δεν υπάρχουν θετικές καταχωρήσεις στη γραμμή αντικειμένων και στην πραγματικότητα

Z = - 60 + 2χ + 11γ + 4τ 3 = - 20 + 2χ + 11γ + 4τ 3 {\ displaystyle Z = {\ tfrac {-60 + 2x + 11y + 4t} -20 + {\ tfrac {2x + 11y + 4t} {3}}} {\ displaystyle Z = {\ tfrac {-60 + 2x + 11y + 4t} {3} 11y + 4t} {3}}} έτσι ώστε η ελάχιστη τιμή του Z να είναι -20.

3.4 Εύρεση ενός Πρώτου Κανονικού Πίνακα

Γενικά, ένα γραμμικό πρόγραμμα δεν θα δοθεί σε κανονική μορφή και θα πρέπει να βρεθεί ένας ισοδύναμος κανονικός πίνακας πριν αρχίσει ο αλγόριθμος simplex. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την εισαγωγή τεχνητών μεταβλητών. Οι στήλες του πίνακα ταυτότητας προστίθενται ως διανύσματα στηλών για αυτές τις μεταβλητές. Αν η τιμή b για μια εξίσωση περιορισμού είναι αρνητική, η εξίσωση ακυρώνεται πριν προστεθούν οι στήλες του πίνακα ταυτότητας. Αυτό δεν αλλάζει το σύνολο των εφικτών λύσεων ή της βέλτιστης λύσης και διασφαλίζει ότι οι χαλαρές μεταβλητές θα αποτελέσουν μια αρχική εφικτή λύση. Το νέο tableau είναι σε κανονική μορφή αλλά δεν είναι ισοδύναμο με το αρχικό πρόβλημα. Έτσι εισάγεται μια νέα αντικειμενική συνάρτηση, ίση με το άθροισμα των τεχνητών μεταβλητών, και εφαρμόζεται ο απλός αλγόριθμος για να βρεθεί το ελάχιστο. το τροποποιημένο γραμμικό πρόγραμμα ονομάζεται πρόβλημα Φάσης I [24].

Ο αλγόριθμος simplex που εφαρμόζεται στο πρόβλημα Φάσης I πρέπει να τερματίζεται με μια ελάχιστη τιμή για τη νέα αντικειμενική συνάρτηση αφού, δεδομένου ότι είναι το σύνολο των μη αρνητικών μεταβλητών, η τιμή του περιορίζεται κάτω από το 0. Εάν το ελάχιστο είναι 0 τότε οι τεχνητές μεταβλητές μπορούν να εξαλειφθούν από η προκύπτουσα κανονική πλατφόρμα που παράγει ένα κανονικό πίνακα που ισοδυναμεί με το αρχικό πρόβλημα. Ο αλγόριθμος simplex μπορεί στη συνέχεια να εφαρμοστεί για να βρεθεί η λύση. αυτό το βήμα ονομάζεται Φάση II. Εάν το ελάχιστο είναι θετικό τότε δεν υπάρχει εφικτή λύση για το πρόβλημα Φάσης I όπου οι τεχνητές μεταβλητές είναι μηδενικές. Αυτό σημαίνει ότι η εφικτή περιοχή για το αρχικό πρόβλημα είναι κενή και έτσι το αρχικό πρόβλημα δεν έχει λύση [24].

Παράδειγμα

Εξετάστε το γραμμικό πρόγραμμα

Περιορίζω

Z = -2χ-3γ-4ζ {\ displaystyleZ = -2x-3y-4z \ Z = -2x-3y-4z \

Υποτάσσω

3 x + 2 γ + ζ = 10 2 x + 5 γ + 3 z = 15 x, y, z ≥ 0 {\ displaystyle {\ begin {ευθυγραμμισμένο} 3x + 2y + 15 \\ x, \, y, \, z & \ geq 0 \ end {ευθυγραμμισμένο}}} {\ begin {ευθυγραμμισμένο} 3x + 2y + z & y, \, z & \ geq 0 \ end {ευθυγραμμισμένο}}

Αυτό αντιπροσωπεύεται από τον (μη κανονικό) πίνακα

[1 2 3 4 0 0 3 2 1 10 0 2 5 3 15] {\ displaystyle {\ begin {bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 15 \ end {bmatrix}}} \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 15 \ end {bmatrix}}

Εισάγετε τεχνητές μεταβλητές u και v και αντικειμενική συνάρτηση W = u + v, δίνοντας ένα νέο πίνακα

[1 0 0 0 0 - 1 - 1 0 0 1 2 3 4 0 0 0 0 0 3 2 1 1 0 10 0 0 2 5 3 0 1 15] {\ displaystyle {\ begin {bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 10 & 0 & 1 & 15 & end {bmatrix}}}

Η εξίσωση που καθορίζει την αρχική λειτουργία του αντικειμένου διατηρείται εν αναμονή της Φάσης II.

Από την κατασκευή, τα u και v είναι και οι δύο μη βασικές μεταβλητές, επειδή είναι μέρος του αρχικού πίνακα ταυτότητας. Ωστόσο, η αντικειμενική συνάρτηση W υποθέτει ότι u και v είναι και τα δύο 0. Για να ρυθμίσετε την αντικειμενική συνάρτηση να είναι η σωστή τιμή όπου u = 10 και v = 15, προσθέστε την τρίτη και την τέταρτη σειρά στην πρώτη σειρά δίνοντας

[1 0 5 7 4 0 0 25 0 1 2 3 4 0 0 0 0 0 3 2 1 1 0 10 0 0 2 5 3 0 1 15] {\ displaystyle {\ begin {bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 & 4 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 15 \ end {bmatrix}}} {\ begin {bmatrix} 1 & 0 & 25 &

Επιλέξτε τη στήλη 5 ως στήλη στροφέα, οπότε η σειρά περιστροφής πρέπει να είναι γραμμή 4 και ο ενημερωμένος πίνακας είναι

[3 0 7 1 0 0 - 4 15 0 3 - 2 - 11 0 0 - 4 - 60 0 0 7 1 0 3 - 1 15 0 0 2 5 3 0 1 15] {\ displaystyle {\ begin {bmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 & 0 & - & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 3 & -1 & 15 & 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 3 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 15 \ end {bmatrix}

Τώρα επιλέξτε τη στήλη 3 ως στήλη περιστροφής, για την οποία η σειρά 3 πρέπει να είναι η σειρά περιστροφής, για να πάρετε

[1 0 0 0 0 - 1 - 1 0 0 7 0 - 25 0 2 - 10 - 130 0 0 7 1 0 3 - 1 15 0 0 0 11 7 - 2 3 25] {\ displaystyle {\ begin {bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -25 & 0 & 2 & -10 & -1 & 3 & -1 15 & 0 & 0 & 11 & 7 & -2 & 3 & 25 end {bmatrix}}} {\ displaystyle {& begin & -10 & -130 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 3 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 11 & 7 & -2 & 3 & 25 \ end {bmatrix}

Οι τεχνητές μεταβλητές είναι τώρα 0 και μπορεί να πέσουν δίνοντας ένα κανονικό πίνακα αντίστοιχο με το αρχικό πρόβλημα:

[7 0 - 25 0 - 130 0 7 1 0 15 0 0 11 7 25] {\ displaystyle {\ begin {bmatrix} 7 & 0 & -25 & 0 & -130 \\ 0 & \ begin {bmatrix} 7 & 0 & -25 & 0 & -130 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 15 & 0 & 11 & 7 & 25 \ end {bmatrix}}}

Αυτό, τυχαία, είναι ήδη βέλτιστο και η βέλτιστη τιμή για το αρχικό γραμμικό πρόγραμμα είναι -130/7.

Αναθεωρημένος αλγόριθμος simplex

Η μορφή tableau που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω για να περιγράψει τον αλγόριθμο προσφέρεται σε μια άμεση εφαρμογή στην οποία το tableau διατηρείται ως μια ορθογώνια σειρά (m + 1) -by- (m + n + 1). Είναι απλό να αποφευχθεί η αποθήκευση των m ρητών στηλών της μήτρας ταυτότητας που θα εμφανιστούν στο πλαίσιο του πίνακα επειδή το B είναι ένα υποσύνολο των στηλών του [A, I]. Αυτή η υλοποίηση αναφέρεται ως ο τυπικός απλός αλγόριθμος. Το γενικό κόστος αποθήκευσης και υπολογισμών είναι τέτοιο ώστε η τυποποιημένη μέθοδος simplex είναι μια απαγορευτικά δαπανηρή προσέγγιση για την επίλυση μεγάλων προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Σε κάθε απλή επανάληψη, τα μόνα απαιτούμενα δεδομένα είναι η πρώτη σειρά του πίνακα, η (στρεφόμενη) στήλη του tableau που αντιστοιχεί στην εισερχόμενη μεταβλητή και στη δεξιά πλευρά. Το τελευταίο μπορεί να ενημερωθεί χρησιμοποιώντας την κεντρική στήλη και η πρώτη σειρά του πίνακα μπορεί να ενημερωθεί χρησιμοποιώντας την (στρεφόμενη) σειρά που αντιστοιχεί στη μεταβλητή που αφήνει. Τόσο η αξονική στήλη όσο και η στρεφόμενη σειρά μπορούν να υπολογιστούν απευθείας χρησιμοποιώντας τις λύσεις των γραμμικών συστημάτων εξισώσεων που περιλαμβάνουν τη μήτρα B και το προϊόν-φορέα μήτρας χρησιμοποιώντας το A. Αυτές οι παρατηρήσεις κινητοποιούν τον αναθεωρημένο αλγόριθμο απλού στοιχείου, για τον οποίο οι υλοποιήσεις διακρίνονται από το αναστρέψιμο εκπροσώπηση του B [15].

Σε μεγάλα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, το A είναι συνήθως μια αραιή μήτρα και, όταν η προκύπτουσα ακεραιότητα του B εκμεταλλεύεται όταν διατηρεί την αναστρέψιμη αναπαράστασή του, ο αναθεωρημένος απλός αλγόριθμος είναι πολύ πιο αποδοτικός από την τυποποιημένη μέθοδο simplex. Οι εμπορικοί απλοϊκοί λύτριες βασίζονται στον αναθεωρημένο αλγόριθμο απλού στοιχείου [28], [34],[35], [22].

Εκφυλισμός: παύση και ποδηλασία

Εάν οι τιμές όλων των βασικών μεταβλητών είναι αυστηρά θετικές, τότε ένας άξονας πρέπει να έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της αντικειμενικής τιμής. Όταν αυτό συμβαίνει πάντοτε, κανένα σύνολο βασικών μεταβλητών δεν εμφανίζεται δύο φορές και ο αλγόριθμος simplex πρέπει να τερματιστεί μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Οι βασικές εφικτές λύσεις όπου τουλάχιστον μία από τις βασικές μεταβλητές είναι μηδενικές ονομάζονται εκφυλισμένες και μπορεί να οδηγήσουν σε στροφείς για τους οποίους δεν υπάρχει βελτίωση στην αντικειμενική τιμή. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει πραγματική αλλαγή στη λύση αλλά μόνο μια αλλαγή στο σύνολο των βασικών μεταβλητών. Όταν πολλές τέτοιες στροφές εμφανίζονται διαδοχικά, δεν υπάρχει βελτίωση. σε μεγάλες βιομηχανικές εφαρμογές, ο εκφυλισμός είναι συνηθισμένος και η εν λόγω καθυστέρηση" είναι αξιοσημείωτη. Το χειρότερο από το σταμάτημα είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί το ίδιο σύνολο βασικών μεταβλητών δύο φορές, οπότε οι ντετερμινιστικοί κανόνες περιστροφής του αλγορίθμου simplex θα παράγουν έναν άπειρο βρόχο ή κύκλο. Ενώ ο εκφυλισμός είναι ο κανόνας στην πράξη και η παύση είναι κοινή, η ποδηλασία είναι σπάνια στην πράξη. Ο κανόνας του Bland εμποδίζει την ποδηλασία και έτσι εγγυάται ότι ο απλός αλγόριθμος πάντα τερματίζεται [36], [25], [24]. Ένας άλλος αλγόριθμος περιστροφής, ο αλγόριθμος cross-cross ποτέ δεν κυκλώνει σε γραμμικά προγράμματα.

Οι κανόνες περιστροφής που βασίζονται στην ιστορία, όπως ο κανόνας του Zadeh και ο κανόνας του Cunningham, προσπαθούν επίσης να παρακάμψουν το ζήτημα της διακοπής και της ποδηλασίας, παρακολουθώντας πόσο συχνά χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες μεταβλητές και στη συνέχεια ευνοώντας τέτοιες μεταβλητές που έχουν χρησιμοποιηθεί λιγότερο συχνά.

Αποδοτικότητα

Η μέθοδος simplex είναι αξιοσημείωτα αποδοτική στην πράξη και ήταν μια μεγάλη βελτίωση σε σχέση με παλαιότερες μεθόδους όπως η απομάκρυνση του Fourier-Motzkin. Ωστόσο, το 1972, οι Klee και Minty [37] δίνουν ένα παράδειγμα, τον κύβο Klee-Minty, που δείχνει ότι η χειρότερη περίπτωση πολυπλοκότητας της μεθόδου simplex όπως διατυπώνεται από τον Dantzig είναι η εκθετική ώρα. Από τότε, για σχεδόν κάθε παραλλαγή της μεθόδου, έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει μια οικογένεια γραμμικών προγραμμάτων για τα οποία εκτελείται άσχημα. Είναι ανοιχτό το ερώτημα εάν υπάρχει μια παραλλαγή με τον πολυωνυμικό χρόνο, αν και είναι γνωστοί οι υπο-εκθετικοί κανόνες στροφής [33].

Το 2018 αποδείχθηκε ότι μια συγκεκριμένη παραλλαγή της μεθόδου simplex είναι NP-δύναμη, δηλ. μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση, με το πολυωνυμικό εναέριο, οποιουδήποτε προβλήματος στην NP έμμεσα κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Επιπλέον, η απόφαση για το εάν μια δεδομένη μεταβλητή μπαίνει πάντα στη βάση κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου σε μια δεδομένη είσοδο και καθορίζει τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος είναι και τα δύο προβλήματα του NP. Ο υπολογισμός της παραγωγής ορισμένων άλλων κανόνων περιστροφής ήταν ήδη γνωστός ως PSPACE-complete [27], [38].

Η ανάλυση και η ποσοτικοποίηση της παρατήρησης ότι ο απλός αλγόριθμος είναι αποτελεσματικός στην πράξη παρά την εκθετική περίπλοκη χειρότερη περίπτωση του έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη άλλων μέτρων πολυπλοκότητας. Ο αλγόριθμος simplex έχει πολύπλοκη πολυωνυμική χρονική πολυπλοκότητα υπό διάφορες κατανομές πιθανοτήτων, με την ακριβή απόδοση μέσου όρου του αλγορίθμου simplex ανάλογα με την επιλογή μιας κατανομής πιθανοτήτων για τις τυχαίες μήτρες [28], [39].
Μια άλλη προσέγγιση για τη μελέτη των «τυπικών φαινομένων» χρησιμοποιεί τη θεωρία της κατηγορίας Baire από τη γενική τοπολογία και για να δείξει ότι οι «τοπολογικές» περισσότερες μήτρες μπορούν να λυθούν με τον απλό αλγόριθμο σε έναν πολυωνυμικό αριθμό βημάτων. Οι επιδόσεις του απλού αλγόριθμου μελετούν τη συμπεριφορά των χειρότερων σεναρίων κάτω από μικρές διαταραχές - είναι τα χειρότερα σενάρια σταθερά κάτω από μια μικρή αλλαγή (με την έννοια της δομικής σταθερότητας), ή μήπως είναι εφικτά; Αυτός ο τομέας έρευνας, ονομάζεται λεκιασμένη ανάλυση, εισήχθη ειδικά για να μελετήσει τη μέθοδο simplex. Πράγματι, ο χρόνος λειτουργίας της μεθόδου simplex στην είσοδο με θόρυβο είναι πολυώνυμος στον αριθμό μεταβλητών και το μέγεθος των διαταραχών [40].

Άλλοι αλγόριθμοι

Άλλοι αλγόριθμοι για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού περιγράφονται στο άρθρο γραμμικού προγραμματισμού. Ένας άλλος αλγόριθμος περιστροφής ανταλλαγής βάσης είναι ο αλγόριθμος cross-cross [23], [18]. Υπάρχουν αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου για γραμμικό προγραμματισμό που χρησιμοποιούν μεθόδους εσωτερικών σημείων: αυτές περιλαμβάνουν τον ελλειψοειδές αλγόριθμο του Khachiyan, τον προβολικό αλγόριθμο του Karmarkar και τους αλγορίθμους παρακολούθησης διαδρομής [41].

Γραμμικός-κλασματικός προγραμματισμός

Ο γραμμικός κλασματικός προγραμματισμός (LFP) είναι μια γενίκευση του γραμμικού προγραμματισμού (LP). Στην LP η αντικειμενική συνάρτηση είναι μια γραμμική συνάρτηση, ενώ η αντικειμενική συνάρτηση ενός γραμμικού-κλασματικού προγράμματος είναι ένας λόγος δύο γραμμικών λειτουργιών. Με άλλα λόγια, ένα γραμμικό πρόγραμμα είναι ένα κλασματικό γραμμικό πρόγραμμα στο οποίο ο παρονομαστής είναι η σταθερή συνάρτηση που έχει την τιμή μία παντού. Ένα γραμμικό-κλασματικό πρόγραμμα μπορεί να λυθεί με μια παραλλαγή του αλγορίθμου simplex [24], [26], [3], [30] ή με τον αλγόριθμο cross-cross [36].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΔΥΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

4.1 Κίνητρο για Δυαδικότητα

Εξετάστε το ακόλουθο πρόβλημα LP:

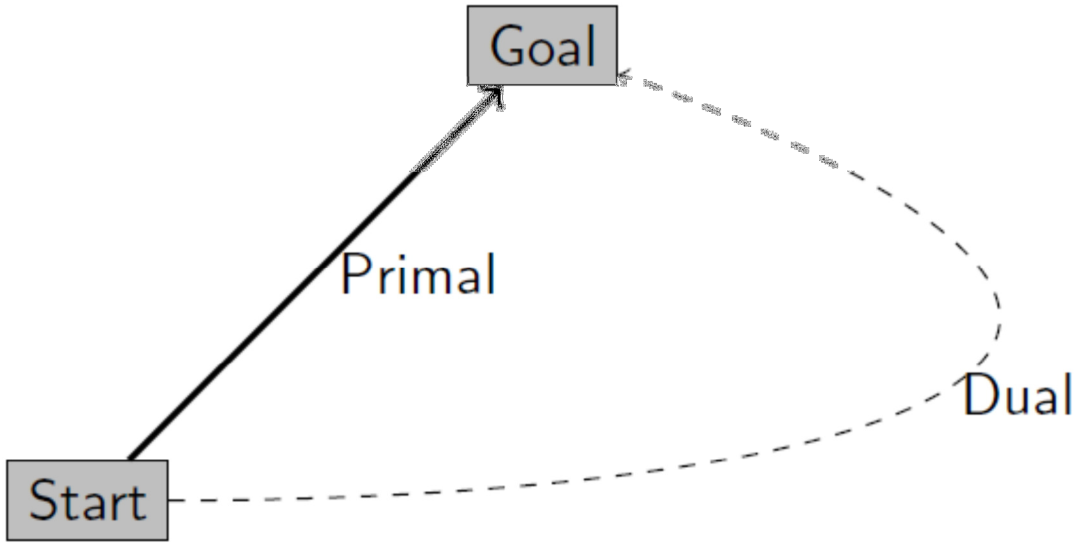
$$
\begin{array}{llllll}
\min & -x_1 & -x_2 & & & \\
s.t. & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 12 \\
 & x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = 9 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι (x1, x2, x3, x4) = (5, 2, 0, 0) είναι μια εφικτή λύση του LP.

Ερώτηση: μπορούμε να αποδείξουμε ότι (5, 2, 0, 0) είναι μια βέλτιστη λύση χωρίς την επίλυση του αρχικού LP;

Το κλειδί είναι να βρείτε ένα κατάλληλο κάτω όριο του αρχικού LP.

Βασική Ιδέα



Lagrangian πολλαπλασιαστές στη δυαδικότητα

Εξετάστε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (Primal)

$$\begin{aligned} \min : \quad & \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ s.t. \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ας x * είναι μια βέλτιστη λύση σε αυτό το μοντέλο. Εισάγουμε ένα χαλαρό πρόβλημα στο οποίο ο περιορισμός Ax = b αντικαθίσταται από μια ποινή p '(b-Ax), όπου p είναι ο λαγκρανγκικός πολλαπλασιαστικός φορέας. Τότε αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα.

$$\begin{aligned} \min : \quad & \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{p}'(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \\ s.t. \quad & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Lagrangian πολλαπλασιαστές στη δυαδικότητα

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}) &= \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}[\mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{p}'(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})] \\ &= \mathbf{p}'\mathbf{b} + \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}(\mathbf{c}' - \mathbf{p}'\mathbf{A})\mathbf{x} \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι

$$\min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}(\mathbf{c}' - \mathbf{p}'\mathbf{A})\mathbf{x} = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathbf{c}' - \mathbf{p}'\mathbf{A} \geq \mathbf{0}' \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Με τη μεγιστοποίηση του g (p), πρέπει να λάβουμε υπόψη μόνο αυτές τις τιμές του p για τις οποίες το g (p) δεν είναι ίσο με - άπειρο. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το διπλό πρόβλημα είναι το ίδιο με το άλλο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού.

$$\begin{aligned} \max: \quad & \mathbf{p}'\mathbf{b} \\ s.t. \quad & \mathbf{p}'\mathbf{A} \leq \mathbf{c}' \end{aligned}$$

Συντόμευση για να γράψετε ένα διπλό για ένα πρωταρχικό

PRIMAL	min	max	DUAL
constraints	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 free	variables
variables	≥ 0 ≤ 0 free	$\leq b_i$ $\geq b_i$ $= b_i$	constraints

Το διπλό του διπλού είναι το πρωταρχικό

Αν μετατρέψουμε το διπλό σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ελαχιστοποίησης και στη συνέχεια βρούμε το διπλό του, έχουμε ένα πρόβλημα ισοδύναμο με το αρχικό πρόβλημα.

Συντόμευση για να γράψετε ένα διπλό για ένα πρωταρχικό

$$
\begin{array}{ccc}
\min & \Leftrightarrow & \max \\
\text{membre de droit} & \Leftrightarrow & \text{objectif} \\
\text{objectif} & \Leftrightarrow & \text{membre de droit} \\
\text{contraintes} & \Leftrightarrow & \text{variables} \\
\text{variables} & \Leftrightarrow & \text{constraints} \\
[\text{coefficients}] & \Leftrightarrow & [\text{coefficients}]^t \\
\text{variable} \geq 0 & \Leftrightarrow & \text{contrainte} \leq \\
\text{variable libre} & \Leftrightarrow & \text{contrainte} = \\
\text{contrainte} \geq & \Leftrightarrow & \text{variable} \geq 0 \\
\text{contrainte} = & \Leftrightarrow & \text{variable libre}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\min\limits_{u,v,w} & c^t u & +d^t v & +e^t w & & \\
\text{s.c.} & Au & & & = a & (y) \\
 & & Bv & +Cw & \geq b & (t) \\
 & u, & v & & \geq 0 &
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{lllll}
\max\limits_{y,t} & a^t y & +b^t t & & \\
\text{s.c.} & A^t y & & \leq c & (u) \\
 & & B^T t & \leq d & (v) \\
 & & C^T t & = e & (w) \\
 & & t & \geq 0 &
\end{array}
$$

Ένα παράδειγμα πρακτικής

$$
\begin{array}{llllll}
\min & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \\
s.t. & x_1 & +3x_2 & & =5 & (p_1) \\
 & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \geq 6 & (p_2) \\
 & & & x_3 & \leq 4 & (p_3) \\
 & x_1 & & & \geq 0 & \\
 & & x_2 & & \leq 0 & \\
 & & & x_3 & \text{free} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
\max & 5p_1 & +6p_2 & +4p_3 & \\
s.t. & p_1 & & & \text{free} \\
 & & p_2 & & \geq 0 \\
 & & & p_3 & \leq 0 \\
 & p_1 & +2p_2 & & \leq 1 \\
 & 3p_1 & -p_2 & & \geq 2 \\
 & & 3p_2 & +p_3 & = 3
\end{array}
$$

Διπλό πρόβλημα

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 5x_1 & +6x_2 & +4x_3 & & \\
s.t. & x_1 & +2x_2 & & \leq 1 & (p1) \\
 & 3x_1 & -x_2 & & \geq 2 & (p2) \\
 & & 3x_2 & +x_3 & = 3 & (p3) \\
 & & x_2 & & \geq 0 & (p4) \\
 & & & x_3 & \leq 0 & (p5)
\end{array}
$$

Δύο κανόνες που πρέπει να θυμόμαστε:

1) p'A = c '

2) Αν έχουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, η λαγκρανγική λειτουργία προσπαθεί πάντα να παρέχει ένα χαμηλότερο όριο; Ωστόσο, αν το πρόβλημα είναι μια μεγιστοποίηση, τη λαγκρανγικη λειτουργία πάντα προσπαθεί να σπείρει ένα ανώτερο όριο.

Θεωρία της δυαδικότητας

Αδύναμη δυαδικότητα

Αν το x είναι μια εφικτή λύση στο πρωταρχικό πρόβλημα και το p είναι μια εφικτή λύση στο διπλό πρόβλημα, τότε,

P’b≤c’x

Ισχυρή δυαδικότητα

Έστω x και p είναι εφικτές λύσεις στο πρωταρχικό και διπλό πρόβλημα, αντίστοιχα, και υποθέστε ότι p'b = c'x. τότε, τα x και p είναι βέλτιστες λύσεις για το αρχικό και το διπλό, αντίστοιχα.

Παράδειγμα για επίλυση

$$
(P) \quad
\begin{array}{lrl}
\max\limits_{x} & -x_1 - 2x_2 & \\
\text{s.c.} & -x_1 + x_2 & \leq 2 \\
 & x_1 - x_2 & \leq 1 \\
 & -x_1 - x_2 & \leq -3 \\
 & -2x_1 - x_2 & \leq -5 \\
 & x_1 \qquad & \leq 4 \\
 & x_2 & \leq 4 \\
 & x & \geq 0
\end{array}
$$

Ειδικές περιπτώσεις στη μέθοδο simplex

1. Εκφυλισμός
2. Απεριόριστες λύσεις
3. Δεν υπάρχουν (ή δεν είναι εφικτές) λύσεις

Εκφυλισμός

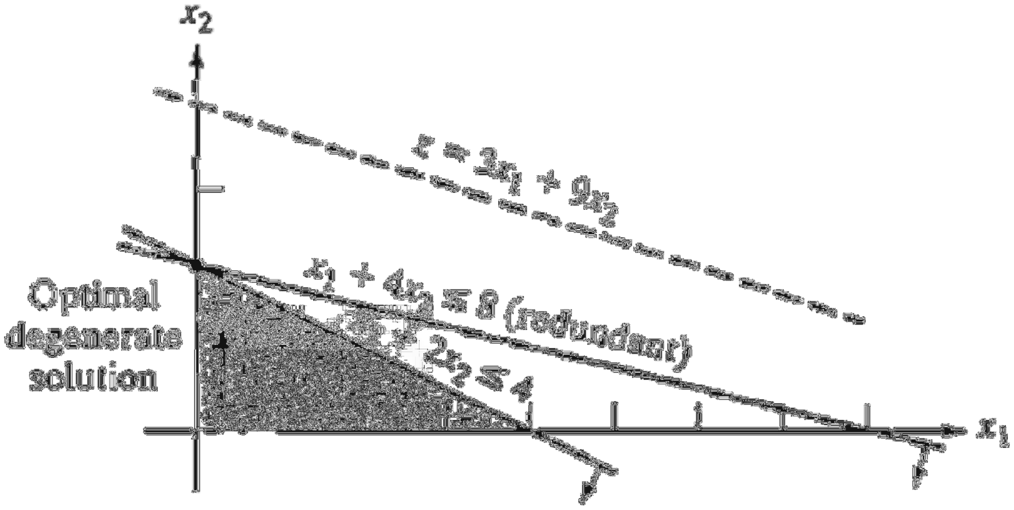
Κατά την εφαρμογή της προϋπόθεσης σκοπιμότητας της μεθόδου simplex, μπορεί να συμβεί μια ισοπαλία για την ελάχιστη αναλογία και μπορεί να σπάσει αυθαίρετα. Όταν συμβεί αυτό, τουλάχιστον μία βασική μεταβλητή θα είναι μηδενική στην επόμενη επανάληψη και η νέα λύση λέγεται ότι είναι εκφυλισμένη.

Δεν υπάρχει τίποτα ανησυχητικό για μια εκφυλισμένη λύση, με εξαίρεση μια μικρή θεωρητική ταλαιπωρία, που ονομάζεται ποδηλασία ή κύκλος. Η κατάσταση αποκαλύπτει ότι το μοντέλο έχει τουλάχιστον έναν περιττό περιορισμό.

Εκφυλισμός

$$\text{Maximize } z = 3x_1 + 9x_2$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



Απεριόριστες Λύσεις

Σε ορισμένα μοντέλα LP, οι τιμές των μεταβλητών μπορούν να αυξηθούν επ 'αόριστόν χωρίς να παραβιαστεί οποιοσδήποτε από τους περιορισμούς - που σημαίνει ότι ο χώρος της λύσης είναι απεριόριστος σε τουλάχιστον μία μεταβλητή.

Ως αποτέλεσμα, η αντικειμενική τιμή μπορεί να αυξηθεί (περίπτωση μεγιστοποίησης) ή να μειωθεί (περίπτωση ελαχιστοποίησης) επ 'αόριστόν. Σε αυτή την περίπτωση, τόσο ο χώρος της λύσης όσο και η βέλτιστη αντικειμενική τιμή είναι απεριόριστες. Η απεριόριστη καταδεικνύει ότι το μοντέλο είναι κακώς κατασκευασμένο.

Maximize $z = 2x_1 + x_2$

$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

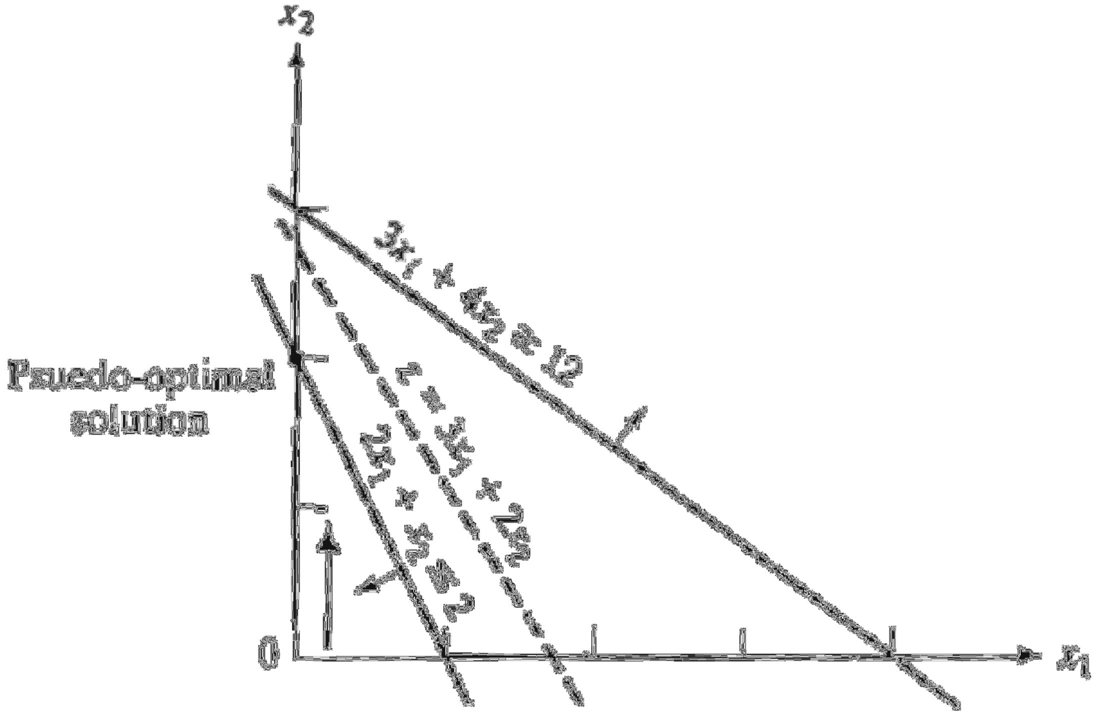
Μη εφικτή λύση

Τα μοντέλα LP με ασυνεπή περιορισμό δεν έχουν εφικτή λύση. Αυτή η κατάσταση δεν μπορεί ποτέ να συμβεί αν όλοι οι περιορισμοί είναι του τύπου ≤ με μη αρνητικές πλευρές δεξιά, επειδή οι παγίδες παρέχουν μια εφικτή λύση. Για άλλους τύπους περιορισμών, χρησιμοποιούμε τεχνητές μεταβλητές.

Αν και οι τεχνητές μεταβλητές τιμωρούνται στην αντικειμενική λειτουργία για να τους ωθήσουν στο μηδέν στο βέλτιστο, αυτό μπορεί να συμβεί μόνο εάν το μοντέλο έχει εφικτό χώρο.

$$\text{Maximize } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 2 \\
3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



4.2 Ανάλυση Ευαισθησίας

Γιατί η ανάλυση ευαισθησίας είναι σημαντική στην πράξη;

Η επίδραση του

- αλλαγή συντελεστή φορτίου επιβατών.
- Ένας από τους σταθμούς εκτός λειτουργίας.
- Ορισμένοι σταθμοί που προστίθενται στο δίκτυο για το συνολικό κόστος.

Στο LP, οι παράμετροι (δεδομένα εισόδου) του μοντέλου μπορούν να αλλάξουν εντός ορισμένων ορίων χωρίς να αναγκαστεί να αλλάξει η βέλτιστη λύση. Αυτό αναφέρεται ως ανάλυση ευαισθησίας.

Στα μοντέλα LP, οι παράμετροι δεν είναι συνήθως ακριβείς. Με την ανάλυση ευαισθησίας, μπορούμε να διαπιστώσουμε τον αντίκτυπο αυτής της αβεβαιότητας στην ποιότητα της βέλτιστης λύσης. Για παράδειγμα, για ένα εκτιμώμενο μοναδιαίο κέρδος ενός προϊόντος, αν η ανάλυση ευαισθησίας αποκαλύψει ότι η βέλτιστη τιμή παραμένει η ίδια για μια αλλαγή ± 10% στο κέρδος μονάδας (δηλαδή η αλλαγή των συντελεστών του αντικειμένου δεν αλλάζει το X *), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η λύση είναι πιο ισχυρή από ό, τι στην περίπτωση όπου το εύρος αδιαφορίας είναι μόνο ± 1%.

1. Ευαισθησία της βέλτιστης λύσης στις αλλαγές στη διαθεσιμότητα των πόρων (δεξιά πλευρά των περιορισμών).

2. Ευαισθησία της βέλτιστης λύσης στις αλλαγές στο μοναδιαίο κέρδος ή το μοναδιαίο κόστος (συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης).

Ανάλυση ευαισθησίας-παράδειγμα

Η JOBCO παράγει δύο προϊόντα σε δύο μηχανές. Μια μονάδα του προϊόντος 1 απαιτεί 2 ώρες στη μηχανή 1 και 1 ώρα στο μηχάνημα 2. Για το προϊόν 2, μια μονάδα απαιτεί 1 ώρα στο μηχάνημα 1 και 3 ώρες στο μηχάνημα 2. Τα έσοδα ανά μονάδα προϊόντων 1 και 2 είναι \$ 30 και \$ 20, αντίστοιχα.

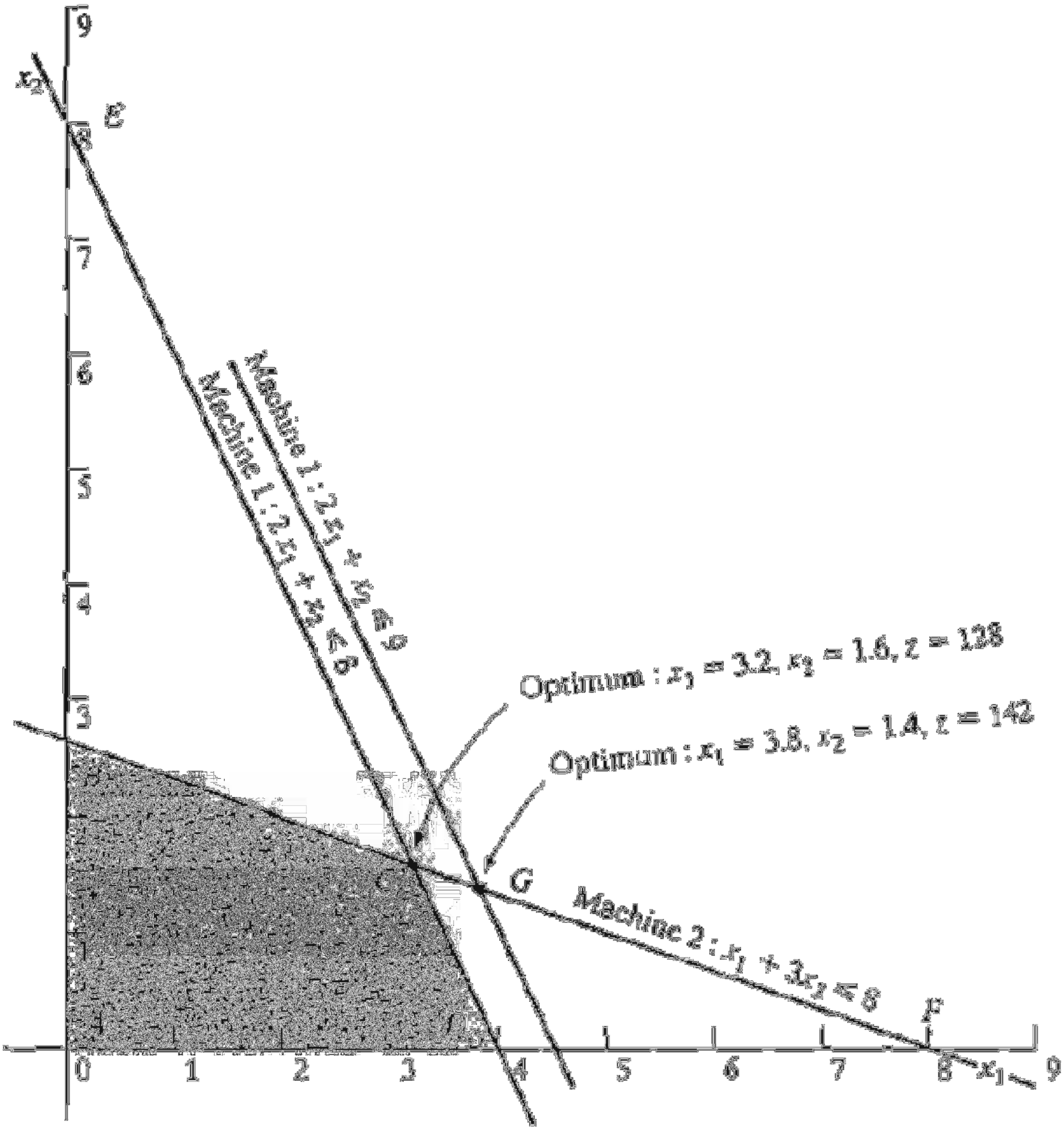
Ο συνολικός ημερήσιος χρόνος επεξεργασίας που είναι διαθέσιμος για κάθε μηχάνημα είναι 8 ώρες. Εκχωρώντας και αντιπροσωπεύοντας τον ημερήσιο αριθμό μονάδων προϊόντων 1 και 2, αντίστοιχα, το μοντέλο LP δίνεται ως

$$\text{Maximize } z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8 \quad \text{(Machine 1)} \\ x_1 + 3x_2 &\leq 8 \quad \text{(Machine 2)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Η αλλαγή στη βέλτιστη λύση όταν γίνονται αλλαγές στην ικανότητα του μηχανήματος

1. Εάν η ημερήσια χωρητικότητα αυξάνεται από 8 ώρες σε 9 ώρες, το νέο βέλτιστο θα συμβεί στο σημείο G.



Ο ρυθμός αλλαγής στο βέλτιστο z που προκύπτει από την αλλαγή της χωρητικότητας του μηχανήματος από 8 ώρες σε 9 ώρες μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Rate of revenue change}\\ \text{resulting from increasing}\\ \text{machine 1 capacity by 1 hr}\\ \text{(point } C \text{ to point } G\text{)}\end{array}\right) = \frac{z_G - z_C}{\text{(Capacity change)}} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = \$14.00/\text{hr}$$

Ο υπολογιζόμενος συντελεστής παρέχει μια άμεση σχέση ανάμεσα στην εισροή (πόροι) του μοντέλου και την παραγωγή του (συνολικά έσοδα) που αντιπροσωπεύει

την μοναδιαία αξία ενός πόρου (σε $ / hr) -δηλαδή, η μεταβολή της βέλτιστης αντικειμενικής τιμής ανά μονάδα μεταβολής τη διαθεσιμότητα του πόρου (χωρητικότητα μηχανής).
Αυτό σημαίνει ότι μια αύξηση (μείωση) μονάδας στη χωρητικότητα του μηχανήματος 1 θα αυξήσει (μειώσει) τα έσοδα κατά 14,00 δολάρια.

Μπορούμε να δούμε ότι η διπλή τιμή των $ 14.00 / ώρα παραμένει έγκυρη για αλλαγές (αυξήσεις ή μειώσεις) της χωρητικότητας της μηχανής 1 που μετακινούν τον περιορισμό της παράλληλα προς τον εαυτό της σε οποιοδήποτε σημείο του τμήματος γραμμής BF. Αυτό σημαίνει ότι το εύρος εφαρμογής της δεδομένης διπλής τιμής μπορεί να είναι υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Minimum machine 1 capacity [at } B = (0, 2.67)] = 2 \times 0 + 1 \times 2.67 = 2.67 \text{ hr}$$
$$\text{Maximum machine 1 capacity [at } F = (8, 0)] = 2 \times 8 + 1 \times 0 = 16 \text{ hr}$$

Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι η διπλή τιμή των 14,00 / ώρα θα παραμείνει έγκυρη για την περιοχή.

$$2.67 \text{ hrs} \leq \text{Machine 1 capacity} \leq 16 \text{ hrs}$$

Οι αλλαγές εκτός αυτού του εύρους θα δημιουργήσουν διαφορετική διπλή τιμή (αξία ανά μονάδα).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες, η βελτιστοποίηση της διαχείρισης των επιχειρήσεων έχει γίνει όλο και πιο δημοφιλής όχι μόνο στην ακαδημαϊκή βιβλιογραφία αλλά και στην πράξη. Ωστόσο, τα προβλήματα ποικίλουν πολύ, και λίγες ανασκοπήσεις της βιβλιογραφίας παρέχουν μια επισκόπηση των μοντέλων και των αλγορίθμων που εφαρμόζονται στην βελτιστοποίηση της διαχείρισης των λειτουργιών.

Οι ερευνητικές δραστηριότητες είναι, καταρχήν, η εφαρμογή επιστημονικών μεθόδων, τεχνικών και εργαλείων για την επίλυση προβλημάτων που αφορούν τη λειτουργία ενός συστήματος, προκειμένου να δοθούν σε εκείνους που ελέγχουν το σύστημα τις βέλτιστες λύσεις στα προβλήματα. Απλώς, είναι μια συστηματική και αναλυτική προσέγγιση στη λήψη αποφάσεων και την επίλυση προβλημάτων. Από τη σκοπιά ενός διαχειριστή προγράμματος, η έρευνα των επιχειρήσεων είναι ένα εργαλείο που μπορεί να συμβάλει σημαντικά στη βελτίωση της παραγωγικότητας, στη λήψη αποφάσεων και στη βελτιστοποίηση των λύσεων. Ως εκ τούτου, οι πιθανές ανταμοιβές μπορεί να είναι τεράστιες. Οι τεχνικές βελτιστοποίησης εξηγούνται επίσης σε αυτό το κεφάλαιο για να βοηθήσουν τους διαχειριστές προγραμμάτων να κατανοήσουν τη σημασία τους. Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανομή, την εκχώρηση, το προγραμματισμό, την επιλογή ή την αξιολόγηση των δυνατοτήτων που έχουν περιορισμένοι πόροι για διαφορετικές εργασίες. Έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα σε προβλήματα που σχετίζονται με την κατασκευή, όπου μπορεί να συναγάγει τις πιο κερδοφόρες μεθόδους κατανομής πόρων.

Η κατασκευή μοντέλων βελτιστοποίησης για τη διαχείριση υπηρεσιών θα πρέπει να βασίζεται περισσότερο στις απαιτήσεις των πελατών, καθιστώντας τη βελτιστοποίηση της διαχείρισης υπηρεσιών πολύ διαφορετική από αυτή των παραδοσιακών θεμάτων διαχείρισης λειτουργιών. Επιπλέον, οι περισσότερες από τις τρέχουσες μελέτες επικεντρώνονται στο ντετερμινιστικό περιβάλλον και πολύ λίγα από αυτά συμβάλλουν στη βελτίωση της αποτελεσματικότητας της αποτελεσματικότητας των λειτουργιών σε δυναμικό περιβάλλον. Αξίζει να αναπτυχθούν νέα μοντέλα και μεθοδολογίες που μπορούν να βοηθήσουν εκείνους που λαμβάνουν αποφάσεις που αντιμετωπίζουν την αβεβαιότητα του περιβάλλοντος, να κάνουν προγράμματα ευρωστίας ή να ανταποκριθούν γρήγορα στην απροσδόκητη διαταραχή με μια λύση υψηλής ποιότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Panneerselvam, Operations Research, New Delhi: PHI Learning, 2006

2. Natarajan, P. Balasubramani καιA. Tamilarasi, Operations Research, Pearson Education, 2005.

3. Hamdy A Taha, 1999. Introduction to Operations Research, PHI Limited, New Delhi.

4. Murty (1983, p. 79) There are abstract optimization problems, called oriented matroid programs, on which Bland's rule cycles (incorrectly) while the criss-cross algorithm terminates correctly.

5. Gupta καιD.S. Hira, Operations Research, New Delhi: S. Chand & Company LTD., 1992.

6. Carter και C. C. Price, Operations Research: A Practical Introduction, CRC Press, 2000.

7. Borgwardt, Karl-Heinz (1987). The simplex method: A probabilistic analysis. Algorithms and Combinatorics (Study and Research Texts). 1. Berlin: Springer-Verlag. pp. xii+268. ISBN 978-3-540-17096-9. MR 0868467.

8. Brice, Integral Methods for Quadratic Programming: Theory and Implementation, Zurich: Logos Verlag Berlin, 2012.

9. Cheema, Operations Research, Firewall Media, 2005.

10. Sivarethinamohan, Operations Research, Tata McGraw-Hill, 1964.

11. Shenoy, Linear Programming: Methods and Applications, New Age International, 1998.

12. George B. Dantzig (April 1982). "Reminiscences about the origins of linear programming". Operations Research Letters. 1 (2): 43–48. doi:10.1016/0167-6377(82)90043-8. (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

13. Gerard Sierksma; Yori Zwols (2015). Linear and Integer Optimization: Theory and Practice, Third Edition. CRC Press. p. 1. ISBN 9781498710169

14. Alexander Schrijver (1998). Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley & Sons. pp. 221–222. ISBN 978-0-471-98232-6.

15. George B. Dantzig and Mukund N. Thapa. 2003. Linear Programming 2: Theory and Extensions. Springer-Verlag

16. Narendra Karmarkar (1984). "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming". Combinatorica. 4 (4): 373–395. doi:10.1007/BF02579150

(τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

17. Lee, Yin-Tat; Sidford, Aaron (2015). Efficient inverse maintenance and faster algorithms for linear programming. FOCS '15 Foundations of Computer Science. arXiv:1503.01752

18. Fukuda, Komei; Terlaky, Tamás (1997). Thomas M. Liebling and Dominique de Werra (eds.). "Criss-cross methods: A fresh view on pivot algorithms". Mathematical Programming, Series B. 79 (1–3). Amsterdam: North-Holland Publishing Co. pp. 369–395. doi:10.1007/BF02614325. MR 1464775. (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

19. Leonid Khachiyan (1979). "A Polynomial Algorithm for Linear Programming". Doklady Akademii Nauk SSSR. 224 (5): 1093–1096.

20. Strang, Gilbert (1 June 1987). "Karmarkar's algorithm and its place in applied mathematics". The Mathematical Intelligencer. 9 (2): 4–10. doi:10.1007/BF03025891. ISSN 0343-6993. MR 0883185. (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

21. Vaidya, Pravin M. (1989). Speeding-up linear programming using fast matrix multiplication. 30th Annual Symposium on Foun- dations of Computer Science (FOCS'89).

22. Zeyuan Allen-Zhu; Lorenzo Orecchia (2015). Using Optimization to Break the Epsilon Barrier: A Faster and Simpler Width-Independent Algorithm for Solving Positive Linear Programs in Parallel. ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. arXiv:1407.1925. Bibcode:2014arXiv1407.1925A.

23. Terlaky, Tamás; Zhang, Shu Zhong (1993). "Pivot rules for linear programming: A Survey on recent theoretical developments". Annals of Operations Research. 46–47 (1): 203–233. CiteSeerX 10.1.1.36.7658. doi:10.1007/BF02096264. ISSN 0254-5330. MR 1260019. (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

24. Murty (1983, Chapter 3.20 (pp. 160–164) and pp. 168 and 179)

25. Bland, Robert G. (May 1977). "New finite pivoting rules for the simplex method". Mathematics of Operations Research. 2 (2): 103–107. doi:10.1287/moor.2.2.103. JSTOR 3689647. MR 0459599.

26. Roos (1990): Roos, C. (1990). "An exponential example for Terlaky's pivoting rule for the criss-cross simplex method". Mathematical Programming. Series A. 46 (1): 79–84. doi:10.1007/BF01585729. MR 1045573 (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

27. Adler, Ilan; Christos, Papadimitriou; Rubinstein, Aviad (2014), "On Simplex Pivoting Rules and Complexity Theory", International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, Lecture Notes in Computer Science, 17: 13–24, arXiv:1404.3320, doi:10.1007/978-3-319-07557-0_2, ISBN 978-3-319-07556-3 (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

28. Dmitris Alevras and Manfred W. Padberg, Linear Optimization and Extensions: Problems and Extensions, Universitext, Springer-Verlag, 2001. (Problems from Padberg with solutions.)

29. Disser, Yann; Skutella, Martin (2018-11-01). "The Simplex Algorithm Is NP-Mighty". ACM Trans. Algorithms. 15 (1): 5:1–5:19. arXiv:1311.5935. doi:10.1145/3280847. ISSN 1549-6325. (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

30. Mathis, Frank H.; Mathis, Lenora Jane (1995). "A nonlinear programming algorithm for hospital management". SIAM Review. 37 (2): 230–234. doi:10.1137/1037046. JSTOR 2132826. MR 1343214. (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

31. Dantzig, George B. (1960), "General convex objective forms", in Arrow, Kenneth J.; Karlin, Samuel; Suppes, Patrick (eds.), Mathematical models in the social sciences, 1959: Proceedings of the first Stanford symposium, Stanford mathematical studies in the social sciences, IV, Stanford, California: Stanford University Press, pp. 151–158

32. Dantzig, George; Wald, Abraham (1951). "On the Fundamental Lemma of Neyman and Pearson". The Annals of Mathematical Statistics. 22: 87–93. doi:10.1214/aoms/1177729695 (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

33. Hansen, Thomas; Zwick, Uri (2015), "An Improved Version of the Random-Facet Pivoting Rule for the Simplex Algorithm", Proceedings of the Forty-seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing: 209–218, CiteSeerX 10.1.1.697.2526, doi:10.1145/2746539.2746557, ISBN 9781450335362 (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

34. Maros, István (2003). Computational techniques of the simplex method. International Series in Operations Research & Management Science. 61. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers. pp. xx+325. ISBN 978-1-4020-7332-8. MR 1960274.

35. Maros, István; Mitra, Gautam (1996). "Simplex algorithms". In J. E. Beasley (ed.). Advances in linear and integer programming. Oxford Science. pp. 1–46. MR 1438309.

36. Illés, Tibor; Szirmai, Ákos; Terlaky, Tamás (1999). "The finite criss-cross method for hyperbolic programming". European Journal of Operational Research. 114 (1): 198–214. CiteSeerX 10.1.1.36.7090. doi:10.1016/S0377-2217(98)00049-6. ISSN 0377-2217. PDF preprint (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

37. Klee, Victor; Minty, George J. (1972). "How good is the simplex algorithm?". In Shisha, Oved (ed.). Inequalities III (Proceedings of the Third Symposium on Inequalities held at the University of California, Los Angeles, Calif., September 1–9, 1969, dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin). New York-London: Academic Press. pp. 159–175. MR 0332165.

38. Fearnly, John; Savani, Rahul (2015), "The Complexity of the Simplex Method", Proceedings of the Forty-seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing: 201–208, arXiv:1404.0605, doi:10.1145/2746539.2746558, ISBN 9781450335362 (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

39. Beer, Stafford, 1966. Decision and Control, John Wiley & Sons, Inc., New York.

40. Spielman, Daniel; Teng, Shang-Hua (2001). "Smoothed analysis of algorithms: why the simplex algorithm usually takes polynomial time". Proceedings of the Thirty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing. ACM. pp. 296–305. arXiv:cs/0111050. doi:10.1145/380752.380813. ISBN 978-1-58113-349-3. (τελευταία επίσκεψη 5/2/2020)

41. Sharma, J.K., 1989. Mathematical Models in Operations Research, Tata McGraw Hill Publishing Company Ltd., New Delhi.