ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Τμήμα Σ.Σ.Ο.Ε.

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ : Κα ΜΠΟΤΑ ΒΙΚΤΩΡΙΑ

Φοιτητές :

ΜΕΛΕΝΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
Αρ. Μητρώου : 7851

ΖΑΡΑΒΕΛΗΣ ΦΩΤΙΟΣ
Αρ. Μητρώου : 8350

Πτυχιακή εργασία

Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Η ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Πριν από την βιομηχανική επανάσταση οι επιχειρήσεις ήταν μικροί οργανισμοί διοικούμενοι από τον ίδιο τον ιδιοκτήτη με τη βοήθεια σε μερικές περιπτώσεις ενός μικρού αριθμού προσώπων. Από την εμφάνιση της βιομηχανικής επανάστασης μέχρι σήμερα έχει συντελεστεί μία αξιοσημείωτη ανάπτυξη στο μέγεθος και στην πολυπλοκότητα των οργανισμών. Τα μικρά μαγαζιά της παλιάς εποχής βαθμιαία εξελίχτηκαν σε εταιρίες συγκέντρωσης πολύ μεγάλων κεφαλαίων. Στα πλαίσια αυτής της επαναστατικής αλλαγής αυξήθηκε εντυπωσιακά η κατανομή της εργασίας και ο καταμερισμός των ευθυνών της διοίκησης σε αυτούς τους οργανισμούς.

Όμως παρ' όλα αυτά, η αυξανόμενη εξειδίκευση έχει δημιουργήσει καινούρια προβλήματα, που εξακολουθούν να υπάρχουν σε πολλούς οργανισμούς. Ένα πρόβλημα είναι η τάση πολλά συστατικά μέρη να αναπτύσσονται σε σχετικά αυτόνομες αυτοκρατορίες με δικούς τους στόχους και συστήματα αξιών, ξεχνώντας έτσι τον τρόπο με τον οποίο οι δραστηριότητες και οι στόχοι τους συνδέονται με τον κύριο οργανισμό. Αυτό που είναι άριστο για κάποιο συστατικό μέρος συχνά είναι επιζήμιο για κάποιο άλλο, με αποτέλεσμα να εργάζονται με αντίθετες επιδιώξεις. Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι, καθώς αυξάνεται η πολυπλοκότητα και η εξειδίκευση σ' έναν οργανισμό, η κατανομή των διαθέσιμων πόρων στις διάφορες δραστηριότητες γίνεται όλο και πιο δύσκολη. Αυτού του είδους τα προβλήματα καθώς και η ανάγκη να βρεθεί ένας καλύτερος τρόπος να λυθούν, προσφέρουν το πλαίσιο για την εμφάνιση της επιχειρησιακής έρευνας.

Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η επιχειρησιακή έρευνα είναι μια επιστημονική μέθοδος που εφαρμόζεται από μια ομάδα επιστημόνων διαφόρων ειδικοτήτων σε προβλήματα που έχουν σχέση με τον τρόπο διοίκησης και συντονισμού των λειτουργιών ή δραστηριοτήτων μέσα σ' ένα οργανισμό, η φύση του οποίου δεν έχει σημασία γιατί η επιχειρησιακή έρευνα μπορεί να εφαρμοστεί σ' όλων των ειδών τις επιχειρήσεις. Στόχος της είναι η εύρεση εκείνης της λύσης των προβλημάτων διαφόρων συστημάτων η οποία αποτελεί την βέλτιστη για όλο το σύστημα.

Η ανάγκη για επιχειρησιακή έρευνα παρουσιάστηκε στις αρχές του Β' Παγκοσμίου πολέμου, καθώς ήταν πολύ σημαντική η αποτελεσματική κατανομή περιορισμένων πόρων στις διάφορες στρατιωτικές επιχειρήσεις και στις δραστηριότητες μέσα σε κάθε μία απ' αυτές. Έτσι η βρετανική και στη συνέχεια η αμερικανική στρατιωτική διοίκηση επιστράτευσαν πολλούς επιστήμονες για να εφαρμόσουν μια επιστημονική προσέγγιση, ώστε να αντιμετωπιστεί το παραπάνω πρόβλημα καθώς και άλλα στρατηγικά και τακτικά προβλήματα. Αυτές οι ομάδες επιστημόνων αποτέλεσαν τις πρώτες ομάδες της επιχειρησιακής έρευνας.

Η βιομηχανία παρακινούμενη από την έκδηλη επιτυχία της στο στρατό άρχισε βαθμιαία να ενδιαφέρεται για τον καινούριο αυτό τομέα. Τα προβλήματα ήταν ουσιαστικά τα ίδια με διαφορετικό γενικό πλαίσιο. Έτσι η επιχειρησιακή έρευνα βρήκε πρόσφορο έδαφος τόσο στη βιομηχανία όσο και στη δημόσια διοίκηση.

Εξίσου σημαντικοί παράγοντες που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξή της ήταν η εμφάνιση του αυτοματισμού, δηλαδή η αντικατάσταση του ανθρώπου από την μηχανή, η αξιόλογη πρόοδος που έγινε σε σύντομο χρονικό διάστημα στη βελτίωση των τεχνικών μεθόδων της καθώς επίσης η εισβολή της επανάστασης των ηλεκτρονικών υπολογιστών, διότι είναι λογικό πως για να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά τα πολύπλοκα προβλήματα που εξετάζονται από την επιχειρησιακή έρευνα απαιτούνται πολλοί υπολογισμοί οι οποίοι τις περισσότερες φορές είναι αδύνατον να γίνουν με το χέρι.

ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται με τις μεθόδους της επιχειρησιακής έρευνας μπορούν, ανάλογα με το περιεχόμενό τους και το πεδίο εφαρμογής τους, να καταταγούν στις παρακάτω κατηγορίες :

1. Προβλήματα που αναφέρονται στην πρόληψη και την εξάλειψη δυσκολιών, εμποδίων ή καταστροφικών γεγονότων, τα οποία ελαττώνουν την αποτελεσματικότητα μιας ενέργειας. Τα προβλήματα αυτά προκύπτουν από γεγονότα που συμβαίνουν ή μπορούν να συμβούν κατά τη διάρκεια των φάσεων μιας ενέργειας, διαταράσσοντας την κανονική της ανάπτυξη και ελαττώνοντας την ικανότητά της. Προβλήματα αυτού του τύπου είναι εκείνα που εξετάζουν την πρόληψη των οδικών και αεροπορικών ατυχημάτων, τη λανθασμένη λειτουργία των συστημάτων ελέγχου κ.τ.λ.
2. Προβλήματα που αποσκοπούν σε μια μορφή αριστοποίησης ή βελτιστοποίησης. Είναι τα προβλήματα, τα οποία προέρχονται από την επιθυμία να πραγματοποιήσουμε ένα ορισμένο έργο με τον πιο συμφέροντα για μας τρόπο. Τα προβλήματα αυτά διέπονται από ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες και η λύση τους αναφέρεται στην «άριστη» χρήση διαθέσιμων μέσων, ώστε να επιτυγχάνουμε τα καλύτερα αποτελέσματα με τις λιγότερες θυσίες. Τα προβλήματα αυτά συγκροτούν την πιο πλατιά και την πιο γνωστή κατηγορία επιχειρησιακών προβλημάτων.
3. Προβλήματα που προκύπτουν από την μεταφορά καινούριων τεχνικών και καινούριων ανακαλύψεων από ένα ειδικό πεδίο σε ένα άλλο πεδίο δραστηριοτήτων. Αυτού του τύπου είναι τα προβλήματα που έχουν σχέση με τη χρήση π.χ. των ραδιενεργών ισοτόπων στο

ιατρικό πεδίο ή στο βιομηχανικό πεδίο για τον έλεγχο υλικών.

4. Προβλήματα που έχουν σχέση με την πρόβλεψη των ενεργειών. Είναι εκείνα τα προβλήματα που εξετάζουν τους διάφορους δυνατούς τρόπους βελτιστοποίησης των ενεργειών, χρησιμοποιώντας ανακαλύψεις με την πρόοδο των επιστημών και της τεχνολογίας. Στα προβλήματα αυτά ανήκουν επίσης και εκείνα που διαπραγματεύονται καθαρά υποθετικές καταστάσεις, που εξετάζουν ένα προϊόν ή έναν κίνδυνο ή μια ειδική επιχειρησιακή λειτουργία. Προβλήματα αυτού του τύπου ανακύπτουν στα διάφορα κέντρα ερευνών που ασχολούνται με τη μελέτη των εξερευνήσεων και των ανακαλύψεων, καθώς και με τη μελέτη του διαστήματος.

Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Στη χώρα μας, μέθοδοι επιχειρησιακής έρευνας, πρωτοδημοσιεύθηκαν στο περιοδικό «ΣΠΟΥΔΕΣ» του Πανεπιστημίου Πειραιώς (τότε ΑΒΣΠ) στη δεκαετία του 1950. Στη συνέχεια το Σχολείο Επιχειρησιακής Έρευνας που οργάνωσε η AGARD Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, το Σεπτέμβριο του 1961 και στο οποίο δίδασκαν Γάλλοι ειδικοί, στελέχη του CIRO και της SEMA, έγινε αφορμή να έρθουν σε επαφή με την επιχειρησιακή έρευνα όσοι ενδιαφέρονταν τότε γι' αυτή.

Ο απόηχος του Σχολείου αυτού δημιούργησε την ανάγκη για τη ίδρυση της Ελληνικής Εταιρίας Επιχειρησιακών Ερευνών στην Ελλάδα (ΕΕΕΕ). Έτσι στις 05/06/1963 γεννιέται η ΕΕΕΕ με 41 ιδρυτικά μέλη.

Σκοπός της εταιρίας είναι η διάδοση της ΕΕ στην Ελλάδα, η ενθάρρυνση της αντίστοιχης εκπαίδευσης, η υποστήριξη της θεωρητικής και εφαρμοσμένης έρευνας, η ανάπτυξη διεθνών ανταλλαγών πληροφοριών και σχέσεων με όμοιες εταιρίες του εξωτερικού με συμμετοχή και οργάνωση συνεδρίων για συνεχή ενημέρωση στα μέλη της.

Στην Ελλάδα, παρ' όλο που οι ανάγκες σε επιχειρησιακούς ερευνητές είναι τεράστιες, εντούτοις δεν έχει ακόμα κατανοηθεί απόλυτα ο ρόλος της ΕΕ. Από έρευνα που πραγματοποίησε γύρω στα 1980 η Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών αποδείχτηκε ότι είναι μικρός ο αριθμός των οργανισμών και επιχειρήσεων που χρησιμοποιούν την επιχειρησιακή έρευνα στην Ελλάδα. Μεταξύ αυτών συμπεριλαμβάνονται : η ΔΕΗ, ο ΟΤΕ, ο ΟΣΕ, η Εθνική Τράπεζα της Ελλάδος, η Αγροτική Τράπεζα της Ελλάδος κ.τ.λ.

Σύμφωνα πάντα με την προαναφερθείσα έρευνα της ΕΕΕΕ οι εφαρμογές της επιχειρησιακής έρευνας προσέκρουσαν στα εξής εμπόδια :

- Δυσπιστία από τις ενδιαφερόμενες επιχειρήσεις για τις προθέσεις και την αξιοπιστία των ερευνών της επιχειρησιακής έρευνας.
- Απροθυμία για ριζικές οργανωτικές αλλαγές, έλλειψη συμπαράστασης από την διοίκηση και ύπαρξη παραγόντων που προβάλλουν διαφορετικές λύσεις από αυτές που προτείνουν οι γνώστες ΕΕ.
- Ανακρίβεια των στοιχείων πάνω στα οποία στηρίζονται οι μελέτες τη ΕΕ.

Παρά τις παραπάνω παρατηρήσεις, νεότερες έρευνες σε πρόσφατα εθνικά συνέδρια της ΕΕΕΕ δείχνουν ότι το ενδιαφέρον των επιχειρηματιών είναι μεγαλύτερο προς τους επιχειρησιακούς ερευνητές που σημαίνει ότι το μέλλον της ΕΕ στην Ελλάδα είναι ελπιδοφόρο.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Προσπάθειες για την επίλυση των προβλημάτων της επιχειρησιακής έρευνας έχουν γίνει με διάφορες μεθόδους όπως η θεωρία ουρών αναμονής, η θεωρία αποθεμάτων, η θεωρία παιγνίων, η θεωρία προσομοίωσης και ο μαθηματικός προγραμματισμός που περιλαμβάνει τον γραμμικό, τον μη γραμμικό, τον δυναμικό και τον στοχαστικό προγραμματισμό, ανάλογα με το είδος των προβλημάτων που καλείται να επιλύσει.

Μαθηματικός προγραμματισμός είναι το σύνολο των μεθόδων και υπολογιστικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για την επίλυση μιας κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποίησης. Τα προβλήματα αυτά περιγράφονται με τη βοήθεια ενός μαθηματικού προτύπου που αποτελείται από μια πραγματική συνάρτηση της οποίας ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο και από μια ομάδα συνθηκών που οι μεταβλητές της συνάρτησης πρέπει να ικανοποιούν. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον μαθηματικό προγραμματισμό ως ένα κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών που έχει ως αντικείμενο την μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση πραγματικών συναρτήσεων, κάτω από ορισμένους περιορισμούς για τις μεταβλητές.

Η λέξη προγραμματισμός δίνει ίσως την εντύπωση ότι πρόκειται για έναν κλάδο της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Αυτό δεν είναι σωστό, αν και η χρησιμοποίηση ηλεκτρονικών υπολογιστών διευκολύνει κατά πολύ την επίλυση σύνθετων προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού. Ο όρος προγραμματισμός δηλώνει ότι οι ελεγχόμενες μεταβλητές του προτύπου πρόκειται να προγραμματισθούν ή να επιλεγούν έτσι ώστε η συνάρτηση του προτύπου να βελτιστοποιείται υπό τους δοσμένους περιορισμούς.

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια ειδική μορφή του μαθηματικού προγραμματισμού. Ο όρος γραμμικός χρησιμοποιείται γιατί όλες οι μαθηματικές σχέσεις του προβλήματος είναι γραμμικές. Γραμμική είναι η σχέση κατά την οποία, αν πολλαπλασιάσουμε, π.χ. τον αριθμό των υπαλλήλων (ή των μηχανών) μιας επιχείρησης με έναν αριθμό, η παραγωγή των αγαθών της επιχείρησης θα πολλαπλασιασθεί με τον αριθμό αυτό. Αν θέλουμε να παραστήσουμε με γεωμετρικό τρόπο τις παραπάνω γραμμικές σχέσεις, θα έχουμε την εμφάνιση ευθείων γραμμών.

Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού υπάρχει μία γραμμική συνάρτηση η οποία αποτελεί το αντικείμενο της μεγιστοποίησης του κέρδους ή ελαχιστοποίησης του κόστους. Η συνάρτηση αυτή καλείται αντικειμενική συνάρτηση. Για την αντιμετώπιση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού ακολουθούμε δύο στάδια :

α) Κατασκευάζουμε το μαθηματικό μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

β) Λύνουμε το πρόβλημα με την γραφική μέθοδο ή την αλγεβρική μέθοδο ή τη μέθοδο simplex ή αντιστοιχούμε το γραμμικό πρόβλημα σε ένα άλλο πρόβλημα το οποίο καλείται δυϊκό ή δυαδικό, ανάλογα με τα δεδομένα που έχουμε.

Οι βασικές προϋποθέσεις που απαιτούνται για να παραστήσουμε ένα πρόβλημα με μαθηματικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής :

α) Η γραμμικότητα : τόσο η αντικειμενική συνάρτηση, όσο και οι περιορισμοί να είναι γραμμικής μορφής.

β) Η προσθετικότητα : οι ποσότητες ενός μέσου παραγωγής που καταναλώνονται στις επιμέρους δραστηριότητες, να μπορούν να προστεθούν.

γ) Η διαιρετότητα : οι μεταβλητές των προβλημάτων του γραμμικού προγραμματισμού να μπορούν να πάρουν όλες τις τιμές του συνόλου R^+.

δ) Η ύπαρξη μίας μόνο αντικειμενικής συνάρτησης για την αξιολόγηση μιας στρατηγικής.

ε) Προσδιορισμένοι συντελεστές : όλοι οι συντελεστές ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού (δηλαδή α_{ij}, β_i, c_j θεωρούνται ως γνωστές σταθερές).

Για τη διαμόρφωση ενός προβλήματος σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού χρειάζεται πρώτα να εντοπίσουμε τις μεταβλητές και να τις παραστήσουμε με $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Οι μεταβλητές αυτές είναι θετικές ή μηδέν. Στη συνέχεια διαμορφώνουμε την αντικειμενική συνάρτηση : $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ και μετά βρίσκουμε τους περιορισμούς, οι οποίοι , όπως και η αντικειμενική συνάρτηση, είναι γραμμικές συναρτήσεις.

Για να κατανοήσουμε όμως καλύτερα την μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι σκόπιμο να αναλύσουμε την μέθοδο simplex.

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Εισαγωγή

Η μέθοδος simplex βασίζεται σε 2 έννοιες. Στην έννοια της εφικτής ή δυνατής λύσης και στην έννοια της άριστης λύσης. Η αναζήτηση μιας άριστης λύσης αρχίζει από μια βασική εφικτή λύση ή πρόγραμμα. Η λύση αυτή εξετάζεται για αριστοποίηση και αν είναι άριστη η αναζήτηση σταματά. Αν δεν είναι, μια καλύτερη βασική εφικτή λύση αναζητείται έως ότου φτάσουμε στην άριστη λύση. Στην μέθοδο simplex επομένως, το πρώτο στάδιο αποτελεί πάντα η εξεύρεση μίας βασικής εφικτής λύσης. Κατόπιν αυτή η λύση εξετάζεται για αριστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης και την επίδραση που έχει η εισαγωγή μιας μη βασικής μεταβλητής, για την αντικατάσταση τουλάχιστον μίας από τις βασικές μεταβλητές που ήδη έχουμε στην λύση. Εάν σημειώνεται βελτίωση ή αντικατάσταση, γίνεται πάντα με την εισαγωγή μόνο μίας μη βασικής μεταβλητής κάθε φορά, η οποία δίνει πάντοτε μια νέα εφικτή λύση. Τα διάφορα στάδια επαναλαμβάνονται μηχανικά μέχρι να φτάσουμε σε μια άριστη λύση, αν υπάρχει. Διαφορετικά η μέθοδος μας δείχνει είτε ότι ένα δεδομένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δεν έχει λύση ή ότι δεν υπάρχει ένα συγκεκριμένο μέγιστο στην λύση.

Περιγραφή της μεθόδου

Για την εφαρμογή της μεθόδου simplex, πρέπει :

i) Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) να είναι σε κανονική μορφή. Η πιο κατάλληλη μορφή είναι:

$$\max\ (c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots . c_n \cdot x_n)$$

ii) Να είναι γνωστή μια (αρχική) μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση χ_0

Ξεκινώντας από τη γνωστή λύση χ_0 ελέγχουμε πρώτα αν αυτή είναι άριστη και σε αντίθετη περίπτωση βρίσκουμε μια καλύτερη βασική εφικτή λύση χ_1 , αν υπάρχει. Η χ_0 ως μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση έχει κάποιες θετικές συντεταγμένες που ονομάζονται χ. Γι' αυτό χρειαζόμαστε κάποια κριτήρια άριστων λύσεων. Εφόσον η χ_0 είναι η λύση του π.γ.π. η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο χ_0 είναι βασική λύση και οι στήλες του πίνακα που αντιστοιχούν στις θετικές συντεταγμένες της είναι γραμμικά ανεξάρτητες και αποτελούν την βάση του διανυσματικού χώρου. Χρειαζόμαστε πάντα ένα κριτήριο για να αποφασίσουμε αν η βασική εφικτή λύση είναι άριστη ή όχι. Το κριτήριο αυτό βασίζεται στην τελευταία γραμμή του πίνακα που ονομάζεται γραμμή διαφορών.

Αν η γραμμή των διαφορών είναι μεγαλύτερη του μηδενός τότε η μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση χ_0 είναι άριστη. Αν η γραμμή των διαφορών είναι μικρότερη του μηδενός τότε η μη εκφυλισμένη βασική λύση χ_0 δεν είναι άριστη.

Η βασική ιδέα της μεθόδου simplex περιγράφεται ως εξής: Είναι μια επαναληπτική αλγεβρική μέθοδος με τη βοήθεια της οποίας, ξεκινώντας από μία βασική δυνατή λύση, μπορούμε με διαδοχικές επαναλήψεις να προσδιορίζουμε κάθε φορά και μία βελτιωμένη βασική λύση μέχρι να κατά λήξουμε στη βέλτιστη αν υπάρχει. Η αρχική βασική δυνατή λύση μπορεί να βρεθεί πολύ εύκολα αρκεί να θεωρήσουμε στο σύστημα των περιορισμών τις βοηθητικές μεταβλητές ως βασικές και να θέσουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με το μηδέν.

Σε αυτό οδηγούμαστε από το γεγονός ότι οι στήλες που αντιστοιχούν στις βοηθητικές μεταβλητές σχηματίζουν ένα μοναδιαίο πίνακα.

Αφού προσδιορίσουμε την αρχική βασική δυνατή λύση τότε με βάση τα δεδομένα του προβλήματος κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα της μεθόδου simplex.

1. Ο αλγόριθμος

Τα διαδοχικά βήματα της μεθόδου simplex μπορούν να εκτελεστούν πιο εύκολα με τη βοήθεια μιας σειράς πινάκων που είναι γνωστοί σαν tableau simplex. Ο αλγόριθμος simplex θα αναπτυχθεί κάνοντας την υπόθεση ότι ο πίνακας περιέχει τον m x m μοναδιαίο πίνακα I, ο οποίος μας δίνει την πρώτη βάση. Τότε η αρχική βασική εφικτή λύση δίνεται από το διάνυσμα των σταθερών όρων. Αν όλα τα στοιχεία των σταθερών όρων είναι μη μηδενικά (άρα θετικά αφού το π.γ.π. είναι σε κανονική μορφή) η λύση αυτή είναι μη εκφυλισμένη και έτσι έχουμε όλες τις προϋποθέσεις για την εφαρμογή της μεθόδου simplex.

1) Σχηματίζουμε έναν πίνακα (tableau). Στις πρώτες στήλες γράφονται οι συντελεστές που έχουν οι βασικές μεταβλητές χ_1, χ_2,.... χ_v στην αντικειμενική συνάρτηση. Στις επόμενες στήλες γράφονται οι μεταβλητές της βάσης ή βασικές μεταβλητές.

Στην τελευταία στήλη γράφονται οι συντελεστές που έχουν όλες οι μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση και στην τελευταία γραμμή που ονομάζεται γραμμή διαφορών ή γραμμή σχετικού κόστους οι ποσότητες που δίνονται από την εκφώνηση.

2) Ελέγχουμε αν η λύση χ_o είναι άριστη εξετάζοντας τις διαφορές στην τελευταία γραμμή.

3) Το στοιχείο x_{ji}, το οποίο σημειώνουμε με ένα τετράγωνο λέγεται οδηγός. Για τον σκοπό αυτό παίρνουμε σαν οδηγό – στήλη την στήλη στην οποία ανήκει ο αρνητικός δείκτης με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.
Διαιρώντας την στήλη των σταθερών όρων με τον οδηγό – στήλη βρίσκουμε τους λόγους. Στον μικρότερο από τους λόγους αυτούς αντιστοιχεί η οδηγός γραμμή που προσδιορίζει την μεταβλητή που θα εγκαταλείψει την βάση στο επόμενο βήμα.

Το οδηγό στοιχείο βρίσκεται στην τομή της οδηγού γραμμής με την οδηγό στήλη.

Παρατηρήσεις

i) Οι στήλες κάθε tableau που αντιστοιχούν στις βασικές (κάθε φορά) στήλες του πίνακα, έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα με 0 εκτός του στοιχείου της αντίστοιχης γραμμής, που είναι ίσο με 1

ii) Εφόσον η άριστη λύση βρίσκεται, όταν η γραμμή των διαφορών είναι μεγαλύτερη του μηδενός, συμφέρει σε κάθε tableau να υπολογίσουμε (μετά την γραμμή του πιλότου) πρώτα την γραμμή των διαφορών και μετά τα υπόλοιπα στοιχεία του tableau αν αυτό είναι απαραίτητο, δηλαδή αν δεν έχει βρεθεί ακόμη η άριστη λύση.

2. Τεχνητές μεταβλητές

Η εφαρμογή του αλγόριθμου simplex προϋποθέτει αφενός μεν ότι το π.γ.π. είναι σε κανονική μορφή και αφετέρου ότι ο αντίστοιχος πίνακας περιέχει τον m x m μοναδιαίο πίνακα I ο οποίος μας δίνει και την πρώτη βασική εφικτή λύση. Ενώ κάθε π.γ.π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών, ο μοναδιαίος πίνακας δεν σχηματίζεται πάντα από τις στήλες του. Σε μια τέτοια περίπτωση, θα πρέπει μα μετασχηματίσουμε το π.γ.π. σε ένα ισοδύναμο που να περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα και φυσικά να είναι σε κανονική μορφή. Ο πιο κατάλληλος τρόπος για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος είναι η μέθοδος των τεχνητών μεταβλητών. Κατ' αυτήν βρίσκουμε την άριστη λύση εφαρμόζοντας τη μέθοδο simplex πρώτα σε ένα διαφορετικό π.γ.π. που είναι σε κανονική μορφή και περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα. Οι περιορισμοί του νέου αυτού π.γ.π. σχηματίζονται από τους περιορισμούς του αρχικού όπου έχουμε προσθέσει σε όσες εξισώσεις χρειάζεται από μια μη αρνητική μεταβλητή (τεχνητή μεταβλητή) ώστε να δημιουργείται ο μοναδιαίος πίνακας. Η αντικειμενική συνάρτηση του νέου π.γ.π. ορίζεται έτσι ώστε η άριστη λύση του να μην περιέχει τεχνητές μεταβλητές ως βασικές. Έτσι, εφόσον οι θετικές συντεταγμένες της άριστης λύσης του αντιστοιχούν όλες σε κανονικές μεταβλητές, διαγράφοντας τις τεχνητές μεταβλητές, έχουμε αμέσως μια βασική εφικτή (και ίσως άριστη) λύση του αρχικού προβλήματος. Επιπλέον, το πρώτο tableau simplex του αρχικού π.γ.π. είναι ακριβώς το τελικό tableau του νέου π.γ.π. όταν διαγραφούν οι στήλες των τεχνητών μεταβλητών (τεχνητές στήλες) και φυσικά αντικατασταθούν οι συντελεστές κόστους με αυτούς της αρχικής αντικειμενικής συνάρτησης.

3. Ο αλγόριθμος αρνητικής βάσης

Συχνά όταν φέρουμε ένα π.γ.π. σε κανονική μορφή, ενώ εμφανίζονται όλες οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα, μία τουλάχιστον από αυτές έχει αρνητικό πρόσημο. Τότε, ενώ έχουμε μια προφανή βασική λύση, αυτή έχει ένα τουλάχιστον αρνητικό στοιχείο και επομένως δεν είναι εφικτή. Ο αλγόριθμος αρνητικής (ή μη θετικής) βάσης χρησιμοποιείται ακριβώς σε τέτοιες περιπτώσεις και αποτελείται από δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση ξεκινώντας από μια βασική αλλά όχι εφικτή λύση χ_0 βρίσκουμε μια βασική εφικτή λύση χ_1. Στη δεύτερη φάση ξεκινώντας από τη βασική εφικτή λύση χ_1 βρίσκουμε την άριστη λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο simplex.

4. Εκφυλισμένες λύσεις

Όταν σε ένα tableau simplex εμφανισθεί εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση δηλαδή εφικτή λύση με λιγότερες από m θετικές συντεταγμένες, τότε μπορεί στο επόμενο tableau να μην βελτιώνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αλλά να παραμένει η ίδια. Αυτό συμβαίνει όταν φεύγει από τη βάση η στήλη της οποίας η αντίστοιχη μεταβλητή είναι ίση με μηδέν.

Για να εμφανισθεί για πρώτη φορά εκφυλισμένη λύση θα πρέπει ή το αρχικό διάνυσμα των σταθερών όρων να έχει ένα τουλάχιστον μηδενικό στοιχείο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια εταιρεία κατασκευάζει μοτοσικλέτες σε τρία διαφορετικά μεγέθη (κυβικά) : 90, 250 και 700. Παρά το σχετικό μικρό της μέγεθος, μόνο τρία υλικά (που χάρη συντομίας συμβολίζουμε με A, B και C) είναι σε θέση να περιορίσουν την παραγωγή. Στον πίνακα που ακολουθεί μπορείτε να δείτε συνοπτικά όλα τα δεδομένα που καθορίζουν την ημερήσια παραγωγή της εταιρείας.

	Μοντέλο	Κέρδος	Υλικό A	Υλικό B	Υλικό C
	90cc	140(χιλ. δρχ)	2	1	1
	250cc	300(χιλ. δρχ)	8	1	0
	700cc	400(χιλ. δρχ)	2	4	1
Διαθ. Ποσότητες			400	200	300

Σημειώστε τέλος, ότι για λόγους ασφαλείας, όλες οι ποσότητες του υλικού A πρέπει να καταναλωθούν.

1. Βρείτε τη βέλτιστη ημερήσια γραμμή παραγωγής για την εν λόγω εταιρεία.
2. Πόσες μονάδες από κάθε υλικό A, B, και C χρησιμοποιούνται στο παραπάνω σχήμα παραγωγής;

ΛΥΣΗ

1. Έστω ότι είναι

χ_1 ο ημερήσιος παραγόμενος αριθμός μοτοσικλετών 90cc
χ_2 ο ημερήσιος παραγόμενος αριθμός μοτοσικλετών 250cc
χ_3 ο ημερήσιος παραγόμενος αριθμός μοτοσικλετών 700cc

Επομένως ζητάμε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$

$$\text{Max}\ (140\chi_1 + 300\chi_2 + 400\chi_3)$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$2\chi_1+8\chi_2+2\chi_3 \leq 400$$
$$\chi_1+\chi_2+4\chi_3 \leq 200$$
$$\chi_1+\chi_3 \leq 300$$

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3 \geq 0$$

Καταρχήν μετατρέπουμε τις ανισώσεις σε εξισώσεις, εισάγοντας τις λεγόμενες μεταβλητές χαλαρότητας s_1, s_2, s_3

Γράφουμε λοιπόν :

$$2\chi_1+8\chi_2+2\chi_3+s_1=400$$
$$\chi_1+\chi_2+4\chi_3+s_2=200$$
$$\chi_1+\chi_3+s_3=300$$

Λέμε τότε ότι έχουμε φέρει τις συνθήκες του προβλήματος στην τυπική τους μορφή. Ο 1ος πίνακας simplex προκύπτει με την γραφή του επαυξημένου πίνακα του συστήματος, τοποθετημένου πάνω από μια γραμμή δεικτών που είναι αντίθετοι των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε μία από τις ελεγχόμενες μεταβλητές και μηδέν για κάθε βοηθητική μεταβλητή, καθώς και για την στήλη των σταθερών όρων.

Η γραμμή αυτή των δεικτών ονομάζεται γραμμή καθαρής εκτίμησης.

Ο πρώτος πίνακας γίνεται:

Πίνακας 1

χ_1	χ_2	χ_3	s_1	s_2	s_3	Σταθερές
2	8	2	1	0	0	400
1	1	4	0	1	0	200
1	0	1	0	0	1	300
-140	-300	-400	0	0	0	

Στην πρώτη αυτή φάση ξεκινάμε από την εφικτή λύση $\chi_1=\chi_2=\chi_3=0$ οπότε από το σύστημα προκύπτει $s_1=400$, $s_2=200$, $s_3=300$ ενώ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $f(0,0,0) =140 \cdot 0+300 \cdot 0+400 \cdot 0 = 0$

Τονίζεται ότι για να είναι εφικτή η λύση με όλες τις ελεγχόμενες μεταβλητές 0, θα πρέπει όλες οι αντίστοιχες τιμές των μεταβλητών χαλαρότητας να είναι μη αρνητικές .

Οι μεταβλητές, οι οποίες εξισώνονται με 0 σε κάθε βήμα της μεθόδου, λέμε ότι δεν περιλαμβάνονται στην βάση, ενώ οι υπόλοιπες είναι οι μεταβλητές της βάσης ή βασικές μεταβλητές.

Στον 1^{o} λοιπόν πίνακα simplex οι παραπάνω βασικές μεταβλητές είναι οι s_1, s_2, s_3. Για να βελτιώσουμε την πρώτη αυτή εφικτή λύση μεταβαίνοντας σε μία νέα θα πρέπει μια νέα μεταβλητή να μπει στη βάση αντικαθιστώντας κάποια άλλη.

Για τον σκοπό αυτό παίρνουμε σαν οδηγό – στήλη την στήλη στην οποία ανήκει ο αρνητικός δείκτης με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, δηλαδή στην συγκεκριμένη περίπτωση το -400.

Η στήλη αυτή προσδιορίζει την μεταβλητή που θα μπει στη βάση στο επόμενο βήμα που στο πρόβλημα μας είναι η χ_3 .

Διαιρώντας την στήλη των σταθερών όρων με τον οδηγό – στήλη βρίσκουμε τους λόγους 400/2, 200/4, 300/1.

Στον μικρότερο από τους λόγους αυτούς αντιστοιχεί η οδηγός γραμμή που προσδιορίζει την μεταβλητή που θα εγκαταλείψει την βάση στο επόμενο βήμα.

Το οδηγό στοιχείο βρίσκεται στην τομή της οδηγού γραμμής με την οδηγό στήλη (που στο παράδειγμα μας είναι το 4)

Στον επόμενο πίνακα simplex το στοιχείο αυτό πρέπει να γίνει ίσο με 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης στην οποία ανήκει να γίνουν ίσα με 0.

Για να το πετύχουμε αυτό κάνουμε τις παρακάτω πράξεις:

$$\gamma_1=\gamma 1/8$$
$$\gamma_2=2\gamma-\gamma_1$$
$$\gamma_3=3\gamma$$

Από τις παραπάνω πράξεις προκύπτει ο δεύτερος πίνακας:

Πίνακας 2

χ_1	χ_2	χ_3	s_1	s_2	Σταθερες
1/4	1	1/4	0	0	50
3/4	0	$\boxed{15/4}$	1	0	150
1	0	1	0	1	300
15000	-65	-325	0	0	15000

Οδηγός στήλη είναι η στήλη χ_3 και οδηγός στοιχείο το 15/4. Επειδή στον πίνακα υπάρχουν αρνητικοί δείκτες συνεχίζουμε με την μέθοδο simplex.

Ο τρίτος πίνακας προκύπτει από τους μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=\gamma_1-1/4\gamma_2$$
$$\gamma_2=4/15\gamma_2$$
$$\gamma_3=\gamma_3-\gamma_2$$

Πίνακας 3

χ_1	χ_2	χ_3	s_1	s_2	Σταθερες
1/5	1	0	-1/5	0	40
1/5	0	1	4/15	0	40
4/5	0	0	-4/15	1	260
0	0	0	260/3	0	28000

Επειδή στον πίνακα αυτό δεν υπάρχουν αρνητικοί δείκτες είναι και ο τελικός πίνακας. Έτσι η εταιρεία θα έχει το μέγιστο κέρδος 28.000.000 αν παρασκευάσει όλο το υπάρχον υλικό A και B και μόνο (300-260) = 40 μονάδες του υλικού C.

Στον τελικό πίνακα simplex του παραπάνω προβλήματος παρατηρούμε ότι η ελεγχόμενη μεταβλητή χ_3 , παρά το ότι δεν είναι βασική στην βέλτιστη λύση, έχει κάτω από αυτή δείκτη 0 .

Όταν αυτό συμβαίνει με κάποια ελεγχόμενη μεταβλητή, σημαίνει ότι η βέλτιστη λύση που προσδιορίσαμε δεν είναι μοναδική, αλλά ότι υπάρχει και κάποια εναλλακτική λύση με την μεταβλητή αυτή βασική.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Η εταιρεία υπολογιστών BEST επιθυμεί να προγραμματίσει την εβδομαδιαία παραγωγή της για τα επιτραπέζια και φορητά μοντέλα προσωπικών υπολογιστών που συναρμολογεί. Για την εβδομάδα που έρχεται η εταιρεία είναι έτοιμη να διαθέσει 150 ώρες εργασίας, χώρο 300 τ.μ. και τις 20 οθόνες φορητών υπολογιστών που έχει στην αποθήκη της. Ένας γρήγορος υπολογισμός έδειξε ότι κάθε επιτραπέζιος υπολογιστής χρειάζεται 3 ώρες συναρμολόγησης και χώρο 8 τ.μ. ενώ κάθε φορητός 5 ώρες συναρμολόγησης και χώρο 5 τ.μ.

1. Αν το κέρδος από κάθε επιτραπέζιο υπολογιστή ανέρχεται στις 50.000 δρχ. κι από κάθε φορητό στις 40.000 δρχ. βρείτε την καλύτερη γραμμή παραγωγής.
2. Υποθέστε ότι η εταιρεία για να καλύψει τα έξοδά της πρέπει να συναρμολογήσει τουλάχιστον 25 υπολογιστές. Ποιά είναι τώρα η καλύτερη γραμμή παραγωγής;
3. Υποθέστε ότι η εταιρεία για να καλύψει τα έξοδά της πρέπει να συναρμολογήσει τουλάχιστον 50 υπολογιστές. Ποιά είναι τώρα η καλύτερη γραμμή παραγωγής;
4. Υποθέστε ότι η εταιρεία είναι έτοιμη να διαθέσει 175 ώρες εργασίας. Ποιά είναι τώρα η καλύτερη γραμμή παραγωγής;

ΛΥΣΗ

1. Έστω ότι είναι χ_1 ο αριθμός των επιτραπέζιων και χ_2 των φορητών υπολογιστών που θα παραχθούν. Τότε το πρόβλημα αφορά το

$$\max z = 50\chi_1+40\chi_2 \text{ (χιλιάδες δρχ.)}$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$3\chi_1 + 5\chi_2 \leq 150 \text{ (ώρες εργασίας)}$$
$$\chi_2 \leq 20 \text{ (οθόνες φορητών)}$$
$$8\chi_1 + 5\chi_2 \leq 300 \text{ (χώρος εργασίας)}$$

$$\chi_1, \chi_2 \geq 0$$

Η τυπική μορφή του προβλήματος αυτού είναι:

$$3\chi_1 + 5\chi_2 + s_1 = 150$$
$$\chi_2 + s_2 = 20$$
$$8\chi_1 + 5\chi_2 + s_3 = 300$$

όπου s_1, s_2, $s_3 \geq 0$ οι αντίστοιχες μεταβλητές χαλαρότητας και ο πρώτος πίνακας simplex είναι:

Πίνακας 1

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερες
3	5	1	0	0	150
0	1	0	1	0	20
8	5	0	0	1	300
-50	-40	0	0	0	

Οδηγός στήλη είναι η στήλη της χ_1 και οδηγό στοιχείο το 8.

Ο δεύτερος πίνακας προκύπτει από τους μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1 = \gamma_1 - 3\gamma_3$$
$$\gamma_2 = \gamma_2$$
$$\gamma_3 = 1/8\gamma_3$$
$$\gamma_4 = \gamma_4 + 50\gamma_3$$

Πίνακας 2

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερές
0	$\boxed{25/8}$	1	0	-3/8	75/2
0	1	0	1	0	20
1	5/8	0	0	1/8	75/2
0	-70/8	0	0	50/8	1875

Επειδή έχουμε αρνητικούς δείκτες συνεχίζουμε την μέθοδο simplex. Εδώ στήλη οδηγός είναι η χ_2 και το στοιχείο οδηγός το 25/8.

Ο τρίτος πίνακας προκύπτει από τους μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1 = 8/25\ \gamma$$
$$\gamma_2 = \gamma_2 - \gamma_1$$
$$\gamma_3 = \gamma_3 - 5/8\ \gamma_1$$
$$\gamma_4 = \gamma_4 + 70/8\ \gamma$$

Πίνακας 3

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερές
0	1	8/25	0	-3/25	12
0	0	-8/25	1	3/25	8
1	0	-5/25	0	5/25	30
0	0	14/5	0	26/5	1980

Από το τελικό tableau βλέπουμε ότι άριστη λύση του προβλήματος είναι η $\chi_1=30$, $\chi_2=12$, με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ίση με 1.980 δρχ.

2. Μας ζητάει ότι η εταιρεία για να καλύψει τα έξοδα της πρέπει να συναρμολογήσει τουλάχιστον 50 υπολογιστές οπότε το πρόβλημα παίρνει τώρα τη μορφή

$$\max z = 50\chi_1 + 40\chi_2 \text{ (χιλιάδες δρχ.)}$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$
\begin{aligned}
3\chi_1 + 5\chi_2 &\leq 150 && \text{(ώρες εργασίας)} \\
\chi_2 &\leq 20 && \text{(οθόνες φορητών)} \\
8\chi_1 + 5\chi_2 &\leq 300 && \text{(χώρος εργασίας)} \\
\chi_1 + \chi_2 &\geq 25 && \text{(ελάχιστη παραγωγή)}
\end{aligned}
$$

$$\chi_1, \chi_2 \geq 0$$

Για να επιλυθεί τώρα το πρόβλημα με τη μέθοδο simplex θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τεχνητές μεταβλητές M:

$$\max (50x_1 + 40x_2 + M)$$

όταν

$$
\begin{aligned}
3\chi_1 + 5x_2 + s_1 &= 150 \\
x_2 + s_2 &= 20 \\
8x_1 + 5x_2 + s_3 &= 300 \\
x_1 + x_2 - s_4 + M &= 25
\end{aligned}
$$

όπου

$$x_i > 0 \quad i = 1, 2, \ldots 7$$

$$\text{για } s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

οπότε παίρνουμε τον πρώτο πίνακα simplex:

Πίνακας 1

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	s_4	M	Σταθερες
3	5	1	0	0	0	0	150
0	1	0	1	0	0	0	20
8	5	0	0	1	0	0	300
1	1	0	0	0	-1	1	25
-50+M	-40+M	0	0	0	0-M	0	0+25M

Η χ_1 είναι η στήλη οδηγός και το στοιχείο 1 είναι το στοιχείο οδηγός.
Ο δεύτερος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=\gamma_1-3\gamma_4$$
$$\gamma_2=\gamma_2$$
$$\gamma_3=\gamma_3-8\gamma_4$$
$$\gamma_4=\gamma_4$$
$$\gamma_5=\gamma_5-(M-50)\gamma_4$$

Ο δεύτερος πίνακας είναι:

Πίνακας 2

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Σταθερές
0	2	1	0	0	3	75
0	1	0	1	0	0	20
0	-3	0	0	1	8	100
1	1	0	0	0	-1	25
0	10	0	0	0	-50	1275

Επειδή έχουμε αρνητικούς δείκτες συνεχίζουμε την μέθοδο simplex. Οδηγός στήλη είναι η s_4 και στοιχείο οδηγός το στοιχείο 8.
Ο τρίτος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=\gamma_1-3\gamma_3$$
$$\gamma_2=\gamma_2$$
$$\gamma_3=1/8\gamma_3$$
$$\gamma_4=\gamma_4+\gamma_3$$
$$\gamma_5=\gamma_5+50\gamma_3$$

Πίνακας 3

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Σταθερές
0	$\boxed{25/8}$	1	0	-3/8	0	75/2
0	1	0	1	0	0	20
0	-3/8	0	0	1/8	1	25/2
1	5/8	0	0	1/8	0	75/2
0	-70/8	0	0	50/8	0	1875

Συνεχίζουμε την μέθοδο simplex αφού ο πίνακας έχει αρνητικές τιμές. Τώρα έχουμε οδηγό στήλη την χ_2 και ως στοιχείο οδηγό το 25/8.

Ο τέταρτος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1 = 8/25\gamma_1$$
$$\gamma_2 = \gamma_2 - \gamma_1$$
$$\gamma_3 = \gamma_3 + 3/8\gamma_1$$
$$\gamma_4 = \gamma_4 - 5/8\gamma_1$$
$$\gamma_5 = \gamma_5 + 70/8\gamma_1$$

Πίνακας 4

[illegible]	[illegible]	s_1	s_2	s_3	s_4	Σταθε[illegible]
0	1	8/25	0	3/25	0	12
0	0	-8/25	1	3/25	0	8
0	0	3/25	0	5/25	1	17
1	0	-5/25	0	5/25	0	30
0	0	14/5	0	26/5	0	1980

Βρέθηκε η άριστη λύση του προβλήματος $\chi = (30, 12, 0, 8, 0, 17, 0)$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ίση με 1.980 δρχ.

3. Μας ζητάει ότι η εταιρεία πρέπει να συναρμολογήσει 50 υπολογιστές για να καλύψει τα έξοδα της οπότε η μορφή του νέου προβλήματος είναι η

$$\max z = 50\chi_1 + 40x_2 \text{ (χιλιάδες δραχμές)}$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 3\chi_1+5\chi_2 &\leq 150 && \text{(ώρες εργασίας)} \\ \chi_2 &\leq 20 && \text{(οθόνες φορητών)} \\ 8\chi_1+5\chi_2 &\leq 300 && \text{(χώρος εργασίας)} \\ \chi_1+\chi_2 &\geq 50 && \text{(ελάχιστη παραγωγή)} \end{aligned}$$

$$\chi_1, \chi_2 \geq 0$$

Για να επιλυθεί τώρα το πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τεχνητές μεταβλητές:

$$\max z\ (50\chi_1+40\chi_2+M)$$

όταν

$$\begin{aligned} 3\chi_1+5\chi_2+s_1 &= 150 \\ \chi_2+s_2 &= 20 \\ 8\chi_1+5\chi_2+s_3 &= 300 \\ \chi_1+\chi_2-s_4+M &= 50 \end{aligned}$$

$$x_i>0 \quad i=1, 2, \ldots 7$$

$$\text{για } s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Ο πρώτος πίνακας είναι:

Πίνακας 1

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	s_4	M	Σταθερές
3	5	1	0	0	0	0	150
0	1	0	1	0	0	0	20
8	5	0	0	1	0	0	300
1	1	0	0	0	-1	1	50
-50+M	-40+M	0	0	0	0-M	0	0+50M

Παίρνουμε την χ_1 ως στήλη οδηγό και το στοιχείο 8 ως στοιχείο οδηγό και έτσι ο δεύτερος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=\gamma_1-3\gamma_3$$
$$\gamma_2=\gamma_2$$
$$\gamma_3=1/8\gamma_3$$
$$\gamma_4=\gamma_4-\gamma_3$$
$$\gamma_5=\gamma_5-(M-50)\gamma_3$$

Πίνακας 2

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	s_4	M	Σταθερές
0	25/8	1	0	-3/8	0	0	75/2
0	1	0	1	0	0	0	20
1	5/8	0	0	1/8	0	0	75/2
0	3/8	0	0	-1/8	-1	1	25/2
0	-70/8+3/8M	0	0	50/8-1/8M	0-M	0	1875+25/2M

Συνεχίζουμε την μέθοδο simplex με στήλη οδηγό τη χ_2 και στοιχείο οδηγό το 25/8 οπότε ο τρίτος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=8/25\gamma_1$$
$$\gamma_2=\gamma_2-\gamma_1$$
$$\gamma_3=\gamma_3-5/8\gamma_1$$
$$\gamma_4=\gamma_4-3/8\gamma_1$$

Πίνακας 3

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	s_4	M	Σταθερές
0	1	8/25	0	-3/25	0	0	12
0	0	-8/25	1	3/25	0	0	8
1	0	-5/25	0	5/25	0	0	30
0	0	-3/25	0	-2/25	-1	1	8
0	0	70/25-3/25M	0	130/25-2/25M	0-M	0	1980-8M

Στη λύση όμως αυτή η τεχνητή μεταβλητή M εξακολουθεί να υπάρχει στη βάση κι επομένως το αρχικό π. γ. π. δεν έχει εφικτές λύσεις.

4. Η εταιρεία μπορεί να διαθέσει 175 ώρες εργασίας οπότε το πρόβλημα παίρνει την μορφή:

$$\max z\ (50x_1 + 40\chi_2)$$

με περιορισμούς:

$$3\chi_1+5\chi_2 \le 175$$
$$\chi_2 \le 20$$
$$8\chi_1+5\chi_2 \le 300$$
$$\chi_1, \chi_2 \ge 0$$

Η τυπική μορφή του προβλήματος παίρνει την μορφή:

$$3\chi_1+5\chi_2+s_1=175$$
$$\chi_2+s_2=20$$
$$8\chi_1+5\chi_2+s_3=300$$

$$\text{για } s_1, s_2, s_3, \ge 0$$

Οπότε ο πρώτος πίνακας είναι:

Πίνακας 1

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερές
3	5	1	0	0	175
0	1	0	1	0	20
8	5	0	0	1	300
-50	-40	0	0	0	

Η στήλη χ_1 είναι η στήλη οδηγός και το στοιχείο 8 είναι το στοιχείο οδηγός. Οπότε ο δεύτερος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=\gamma_1-3\gamma_3$$
$$\gamma_2=\gamma_2$$
$$\gamma_3=1/8\gamma_3$$
$$\gamma_4=\gamma_4+50\gamma_3$$

Πίνακας 2

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερές
0	25/8	1	0	-3/8	125/2
0	1	0	1	0	20
1	5/8	0	0	1/8	75/2
0	-70/8	0	0	50/8	1875

Συνεχίζουμε την μέθοδο simplex αφού έχουμε αρνητικούς δείκτες. Η στήλη οδηγός είναι η στήλη χ_2 και το στοιχείο οδηγός το 25/8.

Ο τελικός πίνακας παίρνει την μορφή από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=\gamma_1$$
$$\gamma_2=\gamma_2-5\gamma_2$$
$$\gamma_3=1/5\gamma_3$$
$$\gamma_4=\gamma_4+15\gamma_3$$

Πίνακας 3

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s	Σταθερές
0	1	8/25	0	-3/25	20
0	0	-8/25	1	3/25	0
1	0	-5/25	0	5/25	25
0	0	70/25	0	130/25	2050

Από το τελικό tableau βλέπουμε ότι η άριστη λύση του προβλήματος χ_1=25, χ_2=20, s_1=0, s_2=0, s_3=0 είναι εκφυλισμένη (s_2=0). Η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίση με 2.050 δρχ.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Μικρή βιοτεχνία παιδικών παιχνιδιών κατασκευάζει μια πάνινη κούκλα σε δύο μεγέθη. Η βιοτεχνία για να αντεπεξέλθει στην χριστουγεννιάτικη ζήτηση της αγοράς προσλαμβάνει εποχιακό προσωπικό κι έτσι πια απασχολεί 30 εργάτες. Ο πίνακας που ακολουθεί συνοψίζει τα δεδομένα παραγωγής σε ημερήσια βάση:

Μέγεθος	Κέρδος (δρχ.)	Χρόνος παραγωγής (hr)	Υλικό (κιλά)
Μικρό	300	0.10	1
Μεγάλο	800	0.30	2

Σημειώστε επιπλέον ότι κάθε εργάτης δουλεύει 8 ώρες την ημέρα και ότι η διαθέσιμη ποσότητα υφάσματος είναι 2.000 κιλά.

Να βρεθεί η βέλτιστη γραμμή παραγωγής.

ΛΥΣΗ

1. Έστω ότι είναι χ_1 ο αριθμός των μικρών και χ_2 των μεγάλων κούκλων που κατασκευάζονται κάθε μέρα. Τότε το συνολικό κέρδος της βιοτεχνίας ανέρχεται σε

$$\max z = 300x_1 + 800x_2$$

και φυσικά πρέπει να μεγιστοποιηθεί.

Οι περιορισμοί του προβλήματος προκύπτουν:

i) από το διαθέσιμο χρόνο εργασίας:
$0{,}1\chi_1 + 0{,}3\chi_2 \leq 240$

ii) από τη διαθέσιμη ποσότητα υφάσματος:
$\chi_1 + 2\chi_2 \leq 2000$

iii) από τη μη δυνατότητα παραγωγής αρνητικού αριθμού κούκλων:
$\chi_1, \chi_2 \geq 0$

Η τυπική μορφή του προβλήματος παίρνει την μορφή:

$$0{,}1\chi_1 + 0{,}3 + s_1 = 240$$
$$\chi_1 + 2\chi_2 + s_2 = 2000$$

$$\text{για } s_1, s_2 \geq 0$$

Ο πρώτος πίνακας simplex είναι:

Πίνακας 1

χ_1	χ_2	s_1	s_2	Σταθερες
0,1	0.3	1	0	240
1	2	0	1	2000
-300	-800	0	0	

Παίρνουμε ως στήλη οδηγό τη στήλη χ_2 και στοιχείο οδηγό το 0,3.
Από τους παρακάτω μετασχηματισμούς προκύπτει ο δεύτερος πίνακας:

$$\gamma_1=\gamma_1+3\gamma_1$$
$$\gamma_2=\gamma_2$$
$$\gamma_3=3\gamma_3 1/3\gamma_2$$

Πίνακας 2

χ_1	χ_2	s_1	s_2	Σταθερές
1/3	1	10/3	0	400
1/3	0	-20/3	1	1200
-100/3	0	800/3	0	640.000

Συνεχίζουμε την μέθοδο simplex αφού έχουμε αρνητικούς δείκτες. Η στήλη οδηγός είναι η στήλη χ_1 και το στοιχείο οδηγός το στοιχείο 1/3. Ο τρίτος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=\gamma_1-\gamma_2$$
$$\gamma_2=\gamma_2$$
$$\gamma_3=1/3\ \gamma_3$$

Πίνακας 3

χ_1	χ_2	s_1	s_2	Σταθερές
0	1	10	-1	400
1	0	-20	3	1200
0	0	2.000	100	680.000

Βρέθηκε η άριστη λύση χ = (1200, 400) που οδηγεί σε ημερήσιο κέρδος 680.000 δρχ

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα τυροκομείο παρασκευάζει 3 είδη τυριών με ανάμιξη αγελαδινού, πρόβειου και γάλακτος σε σκόνη, τα οποία συσκευάζει σε δοχεία και τα πωλεί με τιμές 2 χιλ. δρχ. χίλιες και 3 χιλ. δρχ. αντίστοιχα.
Κάποια μέρα το τυροκομείο έχει στη διάθεσή του 100 κιλά πρόβειο, 150 αγελαδινό και 200 κιλά γάλα σε σκόνη. Αν για την παρασκευή ενός δοχείου τυριού από το α' είδος χρειάζονται 4 κιλά αγελαδινό, 2 κιλά πρόβειο και 2 κιλά γάλα σε σκόνη, από το β' είδος 3, 1 και 6 κιλά και από το γ' είδος 2, 3 και 1 κιλό αντίστοιχα, να βρεθεί πόσα δοχεία από κάθε είδος τυριού πρέπει να παρασκευάσει το τυροκομείο την ημέρα αυτή, για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι πρέπει να παρασκευάζει χ_1 δοχεία από το α', χ_2 από το β' και χ_3 δοχεία από το γ' είδος τυριού.

Ζητάμε τότε το μέγιστο της συνάρτησης

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1+2x_2+3x_3$$

$$\text{όταν } \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3 \geq 0$$

$$\text{και } 4\chi_1 +3\chi_2+2\chi_3 \leq 150,$$

$$2\chi_1+\chi_2+3\chi_3 \leq 100$$

$$2\chi_1+6\chi_2+\chi_3 \leq 200$$

Γράφουμε τις συνθήκες στην κανονική μορφή

$$4\chi_1+ 3\chi_2+ 2\chi_3+s_1 =150$$

$$2x_1+ x2+ 3x_3+s_2 =100$$

$$2x_1+6x2+ x3+s_3 =200$$

όπου s_1, s_2, $s_3 \geq 0$ οι αντίστοιχες μεταβλητές χαλαρότητας και ο πρώτος πίνακας simplex είναι:

Πίνακας 1

χ_1	χ_2	χ_3	s_1	s_2	s_3	σταθερες
4	3	2	1	0	0	150
2	1	3	0	1	0	100
2	6	1	0	0	1	200
-2	-1	-3	0	0	0	

Οδηγός στήλη είναι η στήλη της χ_3 και επειδή 100/3<150/2<200/1, οδηγό στοιχείο είναι το 3. Έτσι η χ_3 θα αντικαταστήσει στη νέα βάση την s_2 .
Με τον σχηματισμό $\gamma_2=1/3\gamma_2$ παίρνουμε:

Πίνακας 2

[illegible]	[illegible]	[illegible]	s_1	s_2	s_3	Σταθερες
4	3	2	1	0	0	150
2/3	1/3	1	0	1/3	0	100/3
2	69	1	0	0	1	200
-2	-1	-3	0	0	0	0

Και με τους μετασχηματισμούς

$\gamma_1=\gamma_1-2\gamma_1$, $\gamma_3=\gamma_3-\gamma_2$ και $\gamma_4=\gamma_4+3\gamma_3$

προκύπτει ο δεύτερος πίνακας simplex:

Πίνακας 3

χ_1	χ_2	χ_3	s_1	s_2	s_3	Σταθερες
8/3	7/3	0	1	-2/3	0	250/3
2/3	1/3	1	0	1/3	0	100/3
4/3	17/3	0	0	-1/3	1	500
0	0	0	0	1	0	100

Επειδή στον πίνακα αυτό δεν υπάρχουν αρνητικοί δείκτες είναι και ο τελικός πίνακας. Έτσι το τυροκομείο θα έχει το μέγιστο κέρδος (100 χιλ.δρχ.), αν παρασκευάσει 100/3 δοχεία τυρί από το τρίτο είδος και κανένα δοχείο από τα άλλα δύο είδη. Στον τελικό πίνακα simplex του παραπάνω προβλήματος παρατηρούμε ότι οι ελεγχόμενες μεταβλητές χ_1 και χ_2 παρά το ότι δεν είναι βασικές στην βέλτιστη λύση, έχουν κάτω από αυτές δείκτη 0. Όταν αυτό συμβαίνει με κάποια ελεγχόμενη μεταβλητή, σημαίνει ότι η βέλτιστη λύση που προσδιορίσαμε με την μέθοδο simplex δεν είναι μοναδική, αλλά ότι υπάρχει και κάποια εναλλακτική λύση με την μεταβλητή αυτή βασική.

Στην περίπτωσή μας π.χ. αν το τυροκομείο παρασκευάζει 20 δοχεία τυρί από το α' και 20 από το γ' είδος και το γάλα θα επαρκούσε, αλλά και το κέρδος θα ήταν πάλι μέγιστο, αφού f (20, 0, 20) = 2x20+3x20 =100. Το ίδιο θα συνέβαινε αν παρασκεύαζε 30 δοχεία από το β' και 70/3 από το γ' είδος αφού f (0, 30, 70/3) = 100.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα μικρό ξυλουργείο παράγει θρανία, τραπέζια και καρέκλες. Για την παραγωγή τους το μόνο που στ' αλήθεια χρειάζεται είναι ξυλεία και η δουλειά του ξυλουργού, δουλειά που μπορεί να διαχωριστεί στη φάση της κατασκευής και στη φάση του φινιρίσματος. Οι απαιτήσεις του καθενός των προϊόντων σε πρώτες ύλες δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί μαζί με τις διαθέσιμες ποσότητες.

Πρώτη ύλη	Θρανίο	Τραπέζι	Καρέκλα	Διαθ.ποσότ.
Ξυλεία(m)	8	6	1	48m
Κατασκευή(ώρες)	2	1,5	0,5	8ώρες
Φινίρισμα(ώρες)	4	2	1,5	20ώρες

Ένα θρανίο πουλιέται προς 60.000 δρχ. ένα τραπέζι προς

30.000 δρχ. και μια καρέκλα προς 20.000. Κατά τον ξυλουργό, ενώ η αγορά μπορεί να απορροφήσει οποιονδήποτε αριθμό σε θρανία και καρέκλες, το πολύ πέντε τραπέζια μπορούν να πωληθούν. Μια και οι πρώτες ύλες είναι ήδη διαθέσιμες ο ξυλουργός επιθυμεί να μάθει τον αριθμό προϊόντων από κάθε είδος που πρέπει να κατασκευάσει ώστε να μεγιστοποιήσει τις εισπράξεις του.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι είναι χ_1 ο αριθμός των θρανίων που θα πουληθούν, χ_2 των τραπεζιών και χ_3 των καρεκλών. Τότε το πρόβλημά μας αφορά τη μεγιστοποίηση της ποσότητας.

$$\max\ (60x_1+30x_2+20x_3)$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$8\chi_1+6\chi_2+\chi_3 \leq 48 \text{ (ξυλεία)}$$
$$2\chi_1+1,5\chi_3 \leq 8 \text{ (κατασκευή)}$$
$$4\chi_1+2\chi_2+1,5\chi_3 \leq 20 \text{ (φινίρισμα)}$$
$$\chi_2 \leq 5 \text{ (ζήτηση αγοράς σε τραπέζια)}$$
$$\text{για } \chi_1, \chi_2, \chi_3 \geq 0$$

Η τυπική μορφή είναι η εξής:

$$\max\ (60x_1 + 30\chi_2 + 20\chi_3)$$

όταν

$$8\chi_1+6\chi_2+\chi_3+s_1 = 48$$
$$2\chi_1+1,5\chi_2+0,5\chi_3+s_2 = 8$$
$$4\chi_1+2\chi_2+1,5\chi_3+s_3 = 20$$
$$\chi_2+s_4 = 5$$

$$\text{για } s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$
$$\chi_i > 0, \quad \text{όπου } i=1, 2, \ldots, 7$$

Ο πρώτος πίνακας simplex προκύπτει:

Πίνακας 1

χ_1	χ_2	χ_3	s_1	s_2	s_3	s_4	Σταθερές
8	6	1	1	0	0	0	48
2	1,5	0,5	0	1	0	0	8
4	2	1,5	0	0	1	0	20
0	1	0	0	0	0	1	5
-60	-30	-20	0	0	0	0	

Επειδή |-60| = max {|-60|, |-30|, |-20|} η στήλη χ_1 είναι εκείνη που μπαίνει στη βάση. Τότε min {48/8, 8/2, 20/4} = 8/2 κι άρα η στήλη s_2 φεύγει από τη βάση. Πιλότος είναι το χ_{21}. Συνεχίζουμε στο 2ο tableau μετά την εφαρμογή των τύπων απαλοιφής.

Ο δεύτερος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=\gamma_1-8\gamma_2$$
$$\gamma_2=1/2\gamma_2$$
$$\gamma_3=\gamma_3-4\gamma_2$$
$$\gamma_4=\gamma_3-4\gamma_2$$
$$\gamma_5=\gamma_5+60\gamma_2$$

Πίνακας 2

χ 1	χ 2	χ 3	s 1	s 2	s 3	s 4	Σταθερές
0	0	-1	1	-4	0	0	16
1	0,75	0,25	0	0,5	0	0	4
0	-1	0,5	0	-2	1	0	4
0	1	0	0	0	0	1	5
0	15	-5	0	30	0	0	240

Η στήλη χ_3 μπαίνει στη βάση.
Τότε min {4/0,25, 4/0,5} = 4/0,5 κι άρα η στήλη s_3 βγαίνει από τη βάση. Πιλότος είναι το $x_{33} = 0,5$

Ο τρίτος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_1=\gamma_1+\gamma_3$$
$$\gamma_2=\gamma_2-0,25\gamma_3$$
$$\gamma_3=1/0,5\gamma_3$$
$$\gamma_4=\gamma_4$$
$$\gamma_5=\gamma_5+5\gamma_3$$

Πίνακας 3

χ	χ	χ	s	s	s	s	Σταθερές
0	-2	0	1	-8	2	0	24
1	1,25	0	0	1,5	-0,5	0	2
0	-2	1	0	-4	2	0	8
0	1	0	0	0	0	1	5
0	5	0	0	10	10	0	280

Άρα βρέθηκε η άριστη λύση $\chi = (2, 0, 8)$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι $Z = 280$.

Ο ξυλουργός δηλαδή για να μεγιστοποιήσει τις εισπράξεις του θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τις διαθέσιμες πρώτες ύλες για να κατασκευάσει 2 θρανία και 8 καρέκλες. Η παραγωγή αυτή θα δώσει εισπράξεις που ανέρχονται στις 280.000 δρχ. Παρατηρείστε ότι παραμένουν αδιάθετα

(48 - [(2x8)+(8x1)]) = 24 m ξυλείας.

Στο πρόβλημα αυτό οι περιθώριες μεταβλητές s_1, s_2, s_3 και s_4 αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα:

. τα μέτρα ξύλου που έμειναν αχρησιμοποίητα (s_1)

. τις ώρες που υπήρχαν για την κατασκευή των προϊόντων και δεν δουλεύτηκαν (s_2)

. τις ώρες που υπήρχαν για το φινίρισμα των προϊόντων και δεν δουλεύτηκαν (s_3)

. τα τραπέζια που μπορούσαν να κατασκευαστούν μέχρι την ανώτερη ζήτηση της αγοράς και δεν έγιναν (s_4).

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να λυθεί με τον αλγόριθμο simplex το π.γ.π.

$\max\,(5\chi_1-4\chi_2)$

$-\chi_1+\chi_2 \geq -6$

$3\chi_1-2\chi_2 \leq 24$

$-2\chi_1+3\chi_2 \leq 9$

$\chi_1,\chi_2 \geq 0$

ΛΥΣΗ

Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι :

$$\max\,(5\chi_1-4\chi_2)$$

$$\chi_1-\chi_2+s_1 = -6$$

$$3\chi_1-2\chi_2+s_2 = 24$$

$$-2\chi_1+3\chi_2+s_3 = 9$$

$$\text{όπου } \chi_i \geq 0 \quad i=1, 2, \ldots, 5$$

$$\text{για } s_1,s_2,s_3 \geq 0$$

Ο πρώτος πίνακας προκύπτει:

Πίνακας 1

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερές
$\boxed{1}$	-1	1	0	0	6
3	-2	0	1	0	24
-2	3	0	0	1	9
-5	4	0	0	0	0

Άρα η στήλη χ_1 μπαίνει στη βάση.
Τότε min [6/1, 24/3] = 6/1 άρα η στήλη s_1 φεύγει από τη βάση.
Πιλότος είναι το $\chi_{11} = 1$.
Συνεχίζουμε την μέθοδο simplex αφού έχουμε αρνητικούς δείκτες.
Ο δεύτερος πίνακας προκύπτει από:

$$\gamma_1=\gamma_1/1$$

$$\gamma_2=\gamma_2-3\gamma_1$$

$$\gamma_3=\gamma_3-(-2)\gamma_1$$

$$\gamma_4=\gamma_4-(-5)\gamma_1$$

Πίνακας 2

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερές
1	-1	1	0	0	6
0	$\boxed{1}$	-3	1	0	6
0	1	2	0	1	21
0	-1	5	0	0	30

Άρα η στήλη χ_2 μπαίνει στη βάση. Τότε min [6/1, 21/1] = 6/1 άρα η στήλη s_2 βγαίνει από τη βάση. Πιλότος είναι το $\chi_{22} = 1$. Συνεχίζουμε την μέθοδο simplex αφού έχουμε αρνητικό δείκτη και ο τρίτος πίνακας προκύπτει από τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\gamma_2=\gamma_2/1$$

$$\gamma_4=\gamma_4-(-1)\gamma_2$$

Πίνακας 3

χ_1	χ_2	s_1	s_2	s_3	Σταθερές
1	0	1	0	0	12
0	1	-3	1	0	6
0	0	0	0	1	15
0	0	2	1	0	36

Βρέθηκε η άριστη λύση που είναι : $\chi_1=12$, $\chi_2=6$, $s_2=15$, ή $\chi=(12, 6, 0, 0, 15)$. Η αντίστοιχη (άριστη) τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $z=36$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο simplex

max $z=3x_1+4x_2+2x_3$

με τους περιορισμούς

$\chi_1+\chi_2+\chi_3\leq12$

$\chi_1+2\chi_2-\chi_3\leq5$

$\chi_1-\chi_2+\chi_3\leq2$

όπου $\chi_1\geq0$, $\chi_2\geq0$, $\chi_3\geq0$

ΛΥΣΗ

Εισάγουμε τις μη αρνητικές βοηθητικές μεταβλητές χ_4, χ_5 και χ_6 και παίρνουμε την κανονική μορφή του προβλήματος

$$\max z = 3x_1+4x_2+2x_3+0x_4+0x_5+0x_6$$

με του περιορισμούς:

$$\chi_1+\chi_2+\chi_3+\chi_4=12$$
$$\chi_1+2\chi_2-\chi_3+\chi_5=5$$
$$\chi_1-\chi_2+\chi_3+\chi_6=2$$
$$\chi_j \geq 0, \ j=1,2,3,4,5,6$$

Κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα simplex.

Πίνακας 1

	c_j	3	4	2	0	0	0	
c_j	Βασικές μεταβλητές	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	B_i
0	χ_4	1	1	1	1	0	0	12
0	χ_5	1	$\boxed{2}$	-1	0	1	0	5
0	χ_6	1	-1	1	0	0	1	2
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	z_j-c_j	-3	-4	-2	0	0	0	

Για τη γραμμή z_j, πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές των στηλών κάθε μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης που βρίσκονται στη βάση και παίρνουμε τα γινόμενα τους.

Για τη γραμμή z_j-c_j, αφαιρούμε τις τιμές της σειράς c_j από τη σειρά z_j.

Για τη γραμμή z_j ,οι ποσότητες υπολογίζονται ως εξής:

$\chi_1=0 \cdot 1+0 \cdot 1+0 \cdot 1=0$ $\qquad$ $\chi_2=0 \cdot 1+0 \cdot 2+0 \cdot (-1)=0$

$\chi_3=0 \cdot 1+0 \cdot (-1)+0 \cdot 1=0$ $\qquad$ $\chi_4=0 \cdot 1+0 \cdot 0+0 \cdot 0=0$

$\chi_5=0 \cdot 0+0 \cdot 1+0 \cdot 0=0$ $\qquad$ $\chi_6=0 \cdot 0+0 \cdot 0+0 \cdot 1=0$

$B_i = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 2 = 0$

Για τη γραμμή z_j-c_j οι ποσότητες υπολογίζονται ως εξής:

$\chi_1 = 0-3 = -3$	$\chi_2 = 0-4 = -4$
$\chi_3 = 0-2 = -2$	$\chi_4 = 0-0 = 0$
$\chi_5 = 0-0 = 0$	$\chi_6 = 0-0 = 0$

Μία αρχική βασική λύση του προβλήματος (1) είναι:

$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0,\ \chi_4 = 12,\ \chi_5 = 5,\ \chi_6 = 2,\ z = 0$

Παρατηρούμε ότι στη γραμμή των διαφορών z_j-c_j του πίνακα 1 υπάρχουν τρεις διαφορές αρνητικές. Επομένως, η αρχική λύση δεν είναι βέλτιστη.

Αναζητούμε τη βέλτιστη λύση κατασκευάζοντας μία καινούργια βάση.

Επειδή : $\min(z_j - c_j) = -4$,η μεταβλητή η οποία θα μπει στη βάση είναι η χ_2. Η στήλη χ_2 είναι η στήλη οδηγός.

Για να βρούμε ποιά μεταβλητή θα βγει από τη βάση θεωρούμε τη σχέση:

$\min[B_i/\chi_2] = \min[12/1, 5/2]$

Άρα από τη βάση βγαίνει η μεταβλητή χ_5. (Δεν διαιρούμε και με το τρίτο στοιχείο της στήλης χ_2, δηλαδή το -1 είναι αρνητικό). Η γραμμή χ_5 είναι η γραμμή οδηγός και το στοιχείο 2 το στοιχείο οδηγός.

Κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα που έχει ως βασικές μεταβλητές το χ_2, το χ_4 και το χ_6 με τον εξής τρόπο:

Διαιρούμε τη γραμμή οδηγό (δηλαδή τη χ_5) με το 2, που είναι το στοιχείο οδηγός και τη νέα γραμμή που προκύπτει,

δηλαδή την (1/2,1,-1/2,0,1/2,0,5/2)

τη βάζουμε στο νέο πίνακα στη θέση που είχε η γραμμή χ_5 στον αρχικό πίνακα. Οι γραμμές χ_4, χ_6, z_i καθώς και η γραμμή των διαφορών στο νέο πίνακα προκύπτουν με τον εξής τρόπο:

Γραμμή χ_4 στο νέο πίνακα

(1, 1, 1, 1 ,0, 0, 12) - 1· (1/2, 1, -1/2, 0, 1/2, 0, 5/2) =
= (1/2, 0, 3/2, 1, -1/2, 0, 19/2)

Γραμμή χ_6 στο νέο πίνακα

(1, -1, 1, 0, 0, 1, 2) - (-1) · (1/2, 1, -1/2, 0, 1/2, 0, 5/2) =
=(1,-1,1,0,0,1,2)-(-1/2,-1,1/2,0,-1/2,05/2)·(3/2,0,1/2,0,1/2,1,9/2)

Γραμμή z_j στο νέο πίνακα

χ_1=0·1/2+4·1/2+0·3/2=2
χ_2=0·0+4·1+0·0=4
χ_3=0·3/2+4·(-1/2)+0·1/2= -2
χ_4=0·1+4·0+0·0=0
χ_5=0·(-1/2)+4·1/2+0·1/2=2
χ_6=0·0+4·0+0·1=0

B_j=0·19/2+4·5/2+0·9/2=10

Γραμμή z_j-c_j στο νέο πίνακα

χ_1=2-3= -1
χ_2=4-4=0
χ_3= -2-2= -4
χ_4=0-0=0
χ_5=2-0=2
χ_6=0-0=0

Επομένως ο νέος πίνακα είναι:

Πίνακας 2

	c_j	3	4	2	0	0	0	
c_i	Βασικές μεταβλητές	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	B_i
0	χ_4	1/2	0	3/2	1	-1/2	0	19/2
4	χ_2	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	5/2
0	χ_6	3/2	0	1/2	0	1/2	1	9/2
	z_j	2	4	-2	0	2	0	10
	z_j-c_j	-1	0	-4	0	2	0	

Παρατηρούμε ότι στη γραμμή των διαφορών z_j-c_j του πίνακα 2 υπάρχουν δύο διαφορές αρνητικές. Επομένως, η λύση που δίνεται από τον πίνακα 2 δεν είναι η βέλτιστη. Αναζητούμε τη βέλτιστη λύση κατασκευάζοντας μία νέα βάση:

Επειδή : $\min(z_j\text{-}c_j) = -4$,η μεταβλητή που θα μπει στη βάση είναι η χ_3. Η στήλη χ_3 είναι η στήλη οδηγός.

Επειδή: $\min[B_i/\chi_3]=\min[19/2/3/2,9/2/1/2]=\min[19/3, 9]=19/3$ από τη βάση θα βγει η μεταβλητή χ_4. Η γραμμή χ_4 είναι η γραμμή οδηγός και το στοιχείο 3/2 το στοιχείο οδηγός.

Κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα που έχει ως βασικές μεταβλητές το χ_2, χ_3 και το χ_6.

Διαιρούμε τη γραμμή οδηγό (δηλαδή τη χ_4) με το3/2 που είναι το στοιχείο οδηγός και τη νέα γραμμή που προκύπτει, δηλαδή την: (1/3, 0, 1, 2/3, 1/3, 0, 19/3)
τη βάζουμε στο νέο πίνακα, στη θέση που είχε η γραμμή χ_4 στον πίνακα 2. Οι γραμμές χ_2 και χ_6, z_j καθώς και η γραμμή των διαφορών στο νέο πίνακα βρίσκονται ως εξής:

Γραμμή χ_2 στο νέο πίνακα

=(1/2, 1, -1/2, 0, 1/2, 0, 5/2)–(-1/2)(1/3, 0, 1, 2/3, -1/3, 0, 19/3) =
=(1/2, 1, -1/2, 0, 5/2) – (-1/6, 0, -1/2, -1/3, 1/6, 10, -19/6) =
=(2/3, 1, 0, 1/3, 1/3, 0, 17/3)

Γραμμή χ_6 στο νέο πίνακα

=(3/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 1, 9/2) – 1/2(1/3, 0, 1, 2/3, -1/3, 0, 19/3) =
=(3/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 1, 9/2) – (1/6, 0, 1/2, 1/3, -1/6, 0, 19/6) =
=(4/3, 0, 0, -1/3, 2/3, 1, 4/3)

Γραμμή z_j στο νέο πίνακα

$\chi_1=2\cdot1/3+4\cdot2/3=0\cdot4/3=10/3$
$\chi_2=2\cdot0+4\cdot1+0\cdot0=4$

$\chi_3=2\cdot 1+4\cdot 0+0\cdot 0=2$
$\chi_4=2\cdot 3/2+4\cdot 1/3+0\cdot(-1/3)=13/3$
$\chi_5=2\cdot(-1/3)+4\cdot 1/3+0\cdot 2/3=2/3$
$\chi_6=2\cdot 19/3+4\cdot 17/3+0\cdot 4/3=106/3$

$B_i=2\cdot 19/3+4\cdot 17/3+0\cdot 4/3=106/3$

Γραμμή z_j-c_j στο νέο πίνακα

$\chi_1=10/3-3=1/3$
$\chi_2=4-4=0$
$\chi_3=2-2=0$
$\chi_4=13/3-0=13/3$
$\chi_5=2/3-0=2/3$
$\chi_6=0-0=0$

Έτσι, ο νέος πίνακας είναι:

Πίνακας 3

	c_j	3	4	2	0	0	0	
c_i	Βασικές μεταβλητές	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	B_i
2	χ_4	1/3	0	1	3/2	-1/3	0	
4	χ_2	2/3	1	0	1/3	1/3	0	
0	χ_6	4/3	0	0	-1/3	2/3	1	
	z_j	10/3	4	2	13/3	2/3	0	
	z_j-c_j	1/3	0	0	13/3	2/3	0	

Επειδή ισχύει:
z_j-$c_j\geq 0$, $\quad$ j=1,2,3,4,5,6
η λύση $\chi_1=0$, $\chi_2=17/3$, $\chi_3=19/3$, $\chi_4=0$, $\chi_5=0$, $\chi_6=4/3$ που βρήκαμε στον πίνακα 3 είναι βέλτιστη.
Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$\max z=106/3$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να λυθεί το πρόβλημα με τη μέθοδο simplex:

$\max z = 3\chi_1 + 4\chi_2 + 2\chi_3$

με τους περιορισμούς:

$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \leq 12$

$\chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3 \leq 5$

$\chi_1 - \chi_2 + \chi_3 \leq 2$

$\chi_1 \geq 0, \chi_2 \geq 0, \chi_3 \geq 0$

ΛΥΣΗ

Εισάγουμε τις μη αρνητικές βοηθητικές μεταβλητές χ_4, χ_5 και χ_6 και παίρνουμε την κανονική μορφή του προβλήματος:

$\max z = 3\chi_1 + 4\chi_2 + 2\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 + 0\chi_6$

με τους περιορισμούς:

$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 = 12$

$\chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3 + \chi_5 = 5$

$\chi_1 - \chi_2 + \chi_3 + \chi_6 = 2$

$\chi_j \geq 0$, j=1,2,3,4,5,6.

Κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα simplex.

Πίνακας 1

	c_j	3	4	2	0	0	0	
c_i	Βασικές μεταβλητές	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	B_i
0	χ_4	1	1	1	1	0	0	12
0	χ_5	1	2	-1	0	1	0	5
0	χ_6	1	-1	1	0	0	1	2
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	-3	-4	-2	0	0	0	

Για τη γραμμή z_j πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές των στηλών κάθε μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης που βρίσκονται στη βάση και παίρνουμε τα γινόμενά τους.
Για τη γραμμή z_j-c_j, αφαιρούμε τις τιμές της σειράς c_j από την σειρά z_j.

Για τη γραμμή z_j οι ποσότητες υπολογίζονται ως εξής:

$\chi_1=0\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 1=0$ $\chi_2=0\cdot 1+0\cdot 2+0\cdot(-1)=0$
$\chi_3=0\cdot 1+0\cdot(-1)+0\cdot 1=0$ $\chi_4=0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0=0$
$\chi_5=0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0=0$ $\chi_6=0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1=0$

$B_i=0\cdot 12+0\cdot 5+0\cdot 2=0$

Για τη γραμμή z_j-c_j οι ποσότητες υπολογίζονται ως εξής:

$\chi_1=0-3=-3$ $\chi_2=0-4=-4$
$\chi_3=0-2=-2$ $\chi_4=0-0=0$
$\chi_5=0-0=0$ $\chi_6=0-0=0$

Μια αρχική βασική λύση του προβλήματος (1) είναι:
$\chi_1=\chi_2=\chi_3=0$, $\chi_4=12$, $\chi_5=5$, $\chi_6=2$, $z=0$

Παρατηρούμε ότι στη γραμμή των διαφορών z_j-c_j του πίνακα 1 υπάρχουν τρεις διαφορετικές αρνητικές. Επομένως η αρχική λύση δεν είναι βέλτιστη. Αναζητούμε τη βέλτιστη λύση κατασκευάζοντας μία καινούργια βάση.

Επειδή : $\min(z_j-c_j)= -4$, η μεταβλητή η οποία θα μπει στη βάση είναι η χ_2. Η στήλη χ_2 είναι η στήλη οδηγός.

Για να βρούμε ποιά μεταβλητή θα βγει από τη βάση θεωρούμε τη σχέση:
$\min=[B_i/\chi_2]=\min[12/1,5/2]=5/2$

Άρα, από τη βάση βγαίνει η μεταβλητή χ_5. (Δεν διαιρούμε και με το τρίτο στοιχείο της στήλης χ_2, δηλαδή το -1,το αντίστοιχο σημείο, δηλαδή το2 της στήλης χ_2, διότι το -1 είναι αρνητικό). Η γραμμή χ_5 είναι η γραμμή οδηγός και το στοιχείο 2 το στοιχείο οδηγός.

Κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα που έχει ως βασικές μεταβλητές το χ_2, το χ_4 και το χ_6 με τον εξής τρόπο:

Διαιρούμε τη γραμμή οδηγό (δηλαδή τη χ_5) με το 2, που είναι το στοιχείο οδηγός και τη νέα γραμμή που προκύπτει, δηλαδή την: (1/2,1,-1/2,0,1/2,0,5/2)
τη βάζουμε στο νέο πίνακα, στη θέση που είχε η γραμμή χ_5 στον αρχικό πίνακα. Οι γραμμές χ_4, χ_6, z_i καθώς και η γραμμή των διαφορών στο νέο πίνακα βρίσκονται με τον εξής τρόπο.

Γραμμή χ_4 στο νέο πίνακα

$(1, 1, 1, 1, 0, 0, 12) - 1\cdot(1/2, 1, -1/2, 0, 1/2, 0, 5/2) =$
$= (1/2, 0, 3/2, 1, -1/2, 0, 19/2)$

Γραμμή χ_6 στο νέο πίνακα

$(1, -1, 1, 0, 0, 1, 2) - (-1)(1/2, 1, -1/2, 0, 1/2, 0, 5/2) =$
$=(1,-1,1,0,0,1,2)-(-1/2,-1,1/2,0,-1/2,0,-5/2)(3/2,0,1/2,0,1/2,1,9/2)$

Γραμμή z_j στο νέο πίνακα

$\chi_1=0\cdot 1/2+4\cdot 1/2+0\cdot 3/2=2$
$\chi_2=0\cdot 0+4\cdot 1+0\cdot 0=4$
$\chi_3=0\cdot 3/2+4\cdot(-1/2)+0\cdot 1/2= -2$
$\chi_4=0\cdot 1+4\cdot 0+0\cdot 0=0$
$\chi_5=0\cdot(-1/2)+4\cdot 1/2+0\cdot 1/2=2$
$\chi_6=0\cdot 0+4\cdot 0+0\cdot 0=0$

$B_i=0\cdot 19/2+4\cdot 5/2+0\cdot 9/2=10$

Γραμμή z_j-c_j στο νέο πίνακα

$\chi_1=2-3= -1$
$\chi_2=4-4=0$
$\chi_3= -2-2= -4$
$\chi_4=0-0=0$
$\chi_5=2-0=2$
$\chi_6=0-0=0$

Επομένως ο νέος πίνακας είναι:

Πίνακας2

	c_i	3	4	2	0	0	0	
	Βασικές μεταβλητές	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	B_i
0	χ_4	1/2	0	3/2	1	-1/2	0	19/2
4	χ_2	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	5/2
0	χ_6	3/2	0	1/2	0	1/2	1	9/2
	z_j	2	4	-2	0	2	0	10
	z_j-c_j	-1	0	-4	0	2	0	

Παρατηρούμε ότι στη γραμμή των διαφορών z_j-c_j του πίνακα 2 υπάρχουν δύο διαφορές αρνητικές. Επομένως η λύση που δίνεται από τον πίνακα 3 δεν είναι βέλτιστη. Αναζητούμε τη βέλτιστη λύση κατασκευάζοντας μία νέα βάση:

Επειδή : $\min(z_j\text{-}c_j) = -4$, η μεταβλητή που θα μπει στη βάση είναι η χ_3. Η στήλη χ_3 είναι η στήλη οδηγός.

Επειδή:
$\min[B_i/\chi_3]=\min[19/2/3/2, 9/2/4/2]=\min[19/3, 9]=19/3$
από τη βάση θα βγει η μεταβλητή χ_4. Η γραμμή χ_4 είναι η γραμμή οδηγός και το στοιχείο 3/2 το στοιχείο οδηγός.

Κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα που έχει ως βασικές μεταβλητές το χ_2, χ_3 και το χ_6.

Διαιρούμε τη γραμμή οδηγό (δηλαδή τη χ_4) με το 3/2, που είναι το στοιχείο οδηγός και τη νέα γραμμή που προκύπτει, δηλαδή την: (1/3, 0, 1, 2/3, 1/3, 0, 19/3)
τη βάζουμε στο νέο πίνακα, στη θέση που είχε η γραμμή χ_4 στον πίνακα 2. Οι γραμμές χ_2 και χ_6, z_j, καθώς και η γραμμή των διαφορών στο νέο πίνακα βρίσκονται ως εξής:

Γραμμή χ_2 στο νέο πίνακα

$=(1/2,1,-1/2,0,1/2,0,5/2)-(-1/2)(1/3,0,1,2/3,-1/3,0,19/3)=$
$=(1/2,1,-1/2,0,1/23,0,5/2)-(-1/6,0,-1/2,-1/3,1/6,10,-19/2)=$
$=(2/3, 1, 0, 1/3, 1/3, 0, 17/3)$

Γραμμή χ_6 στο νέο πίνακα

$=(3/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 1, 9/2)-1/2(1/3, 0, 1, 2/3, -1/3, 0, 19/2)=$
$=(3/2,0,1/2,0,1/2,1,9/2)-(1/6,0,1/2,1/3,-1/6,0,19/6)=$
$=(4/3, 0, 0, -1/3, 2/3, 1 ,4/3)$

Γραμμή z_j στο νέο πίνακα

$\chi_1=2\cdot 1/3+4\cdot 2/3+0\cdot 4/3=10/3$
$\chi_2=2\cdot 0+4\cdot 1+0\cdot 0=4$
$\chi_3=2\cdot 1+4\cdot 0+0\cdot 0=2$
$\chi_4=2\cdot 3/2+4\cdot 1/3+0\cdot(-1/3)=13/3$
$\chi_5=2\cdot(-1/3)+4\cdot 1/3+0\cdot 2/3=2/3$
$\chi_6=2\cdot 0+4\cdot 0+0\cdot 1=0$

$B_i=2\cdot 19/3+4\cdot 17/3+0\cdot 4/3=106/3$

Γραμμή z_j-c_j στο νέο πίνακα

$\chi_1=10/3-3=1/3$
$\chi_2=4-4=0$
$\chi_3=2-2=0$
$\chi_4=13/3-0=13/3$
$\chi_5=2/3-0=2/3$
$\chi_6=0-0=0$

Έτσι ο νέος πίνακας είναι:

Πίνακας 3

	c_j	3	4	2	0	0	0	
c_i	Βασικές μεταβλητές	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	B
2	χ_4	1/3	0	1	3/2	-1/3	0	19/3
4	χ_2	2/3	1	0	1/3	1/3	0	17/3
0	χ_6	4/3	0	0	-1/3	2/3	1	4/3
	z_j	10/3	4	2	13/3	2/3	0	106/3
	z_j-c_j	1/3	0	0	13/3	2/3	0	

Επειδή ισχύει:
$z_j-c_j \geq 0$, για j=1,2,3,4,5,6
η λύση: $\chi_1=0$, $\chi_2=17/3$, $\chi_3=19/3$, $\chi_4=0$, $\chi_5=0$, $\chi_6=4/3$
που βρήκαμε στον πίνακα 3 είναι βέλτιστη.
Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$\max z = 106/3$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΑΝΤΕΛΗ Γ. ΥΨΗΛΑΝΤΗ: Επιχειρησιακή Έρευνα – Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων.
ΣΤΡΑΤΗ ΚΟΥΝΙΑ – ΔΗΜΗΤΡΗ ΦΑΚΙΝΟΥ: Γραμμικός Προγραμματισμός.
ΓΡΗΓΟΡΗ Π. ΠΡΑΣΤΑΚΟΥ:Επιχειρησιακή Έρευνα για τη Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων.
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΑΠΟΥΝΤΖΗ: Τεχνικές Επιχειρησιακής Έρευνας – Γραμμικός Προγραμματισμός Θεωρία Παιχνιδιών Ι.
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Ε. ΜΠΟΤΣΑΡΗΣ:Επιχειρησιακή Έρευνα – Μέθοδοι και Προβλήματα.
ΝΙΚΗΤΑ ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΥ:Επιχειρησιακή Έρευνα – Μεθοδολογία – Ουρές Αναμονής – Προσομοίωση
ΑΓΓΕΛΟΣ Α. ΤΣΑΓΚΛΑΚΑΝΟΣ:Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα – Γραμμικός Προγραμματισμός Ι.
ΣΩΤΗΡΗ ΠΟΛΙΤΗ:Επιχειρησιακή Έρευνα.
Δ^ρ Π. ΚΙΟΧΟΣ – Δ^ρ Γ.ΘΑΝΟΣ – Δ.ΣΑΛΑΜΟΥΡΗΣ Α. ΚΙΟΧΟΣ:Επιχειρησιακή Έρευνα.
ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΜΙΧΑΛΗΣ:Οικονομικός Προγραμματισμός.
ΠΡΙΓΟΥΡΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ:Ασκήσεις και Προβλήματα στην Επιχειρησιακή Έρευνα.
F.S. HILLIER – G.J.LIEBERMAN:Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα.