ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΚΡΥΝΙΚΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ – ΜΠΙΝΤΟΥΔΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ

ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ (ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ)

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ – 2017

Επισήμανση

Οι διαπιστώσεις, τα αποτελέσματα, τα συμπεράσματα και οι πιθανές προτάσεις της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, εκτός των αναφορών που σημαίνονται ως λήμματα, αποτελούν προσωπικές θεωρητικές ή εμπειρικές διαπιστώσεις του φοιτητή/φοιτήτριας ή της ομάδας των φοιτητών που την επιμελήθηκαν και δεν απηχούν κατ' ανάγκη τη γνώμη του εισηγητή εκπαιδευτικού, ή του Εκπαιδευτικού Προσωπικού του Τμήματος Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής ή του Α.Τ.Ε. Δυτικής Ελλάδας.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αυτή η πτυχιακή εργασία δημιουργήθηκε με σκοπό να προβληματίσει τον αναγνώστη για το αν και κατά πόσο μπορούν οι συναρτήσεις να φάνουν χρήσιμες σε προβλήματα οικονομικών επιστημών.

Στην προσπάθεια μας να ικανοποιήσουμε τις ανάγκες για απλότητα και σαφήνεια τα ουσιώδη θέματα του λογισμού τα παρουσιάζουμε (κατά την γνώμη μας) με ένα τρόπο εύκολα κατανοητό δηλαδή με ένα τρόπο που δεν προϋποθέτει αυξημένες γνώσεις μαθηματικών και ταυτόχρονα ισορροπημένο αναφορικά με την έμφαση στη θεωρία, τις τεχνικές και τα σχετικά παραδείγματα.

Η οικονομική επιστήμη έχει μεγάλο αντίκτυπο σε μια κοινωνία τόσο από τις αποφάσεις των ηγετών της όσο και στην καθημερινότητα και την ποιότητα ζωής των απλών πολιτών. Ακόμη, η οικονομική επιστήμη ασχολείται με την έρευνα των οικονομικών φαινομένων παραδείγματος χάριν ο ορισμός της τιμής των προϊόντων και των υπηρεσιών σε μια οικονομία, τη ζήτηση και την προσφορά τους, τις οικονομικές κρίσεις και τη λήψη μέτρων από τις εκάστοτε κυβερνήσεις διάφορων χωρών για την αντιμετώπισή τους. Για αυτόν το λόγο, καθώς είδαμε τη σπουδαιότητα της οικονομικής επιστήμης σε μια κοινωνία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οτιδήποτε τις επηρεάζει όπως η επιστήμη των μαθηματικών και ιδιαίτερα των συναρτήσεων είναι εξίσου σπουδαία.

Για τη συγγραφή αυτής της εργασίας χρειάστηκε η προσωπική μας προσπάθεια στην έρευνα και στη συγγραφή καθ’ αυτή, ωστόσο νιώθουμε την ανάγκη να ευχαριστήσουμε όλους όσους συνέβαλαν μέχρι το πέρας της. Πιο συγκεκριμένα, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον εισηγητή για την άμεση βοήθεια του όποτε την χρειαστήκαμε, τις οικογένειες μας για τη στήριξη τους καθώς και φίλους μας προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές που με τις γνώσεις τους και αυτοί συνέβαλλαν στην ολοκλήρωση της εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος αυτής της εργασίας είναι στο τέλος της μελέτης της από τον αναγνώστη, να είναι σε θέση να απαντήσει στο αν και κατά πόσο οι συναρτήσεις συμμετέχουν στην επίλυση οικονομικών προβλημάτων. Υπό την επεξεργασία αυτού του ερωτήματος είναι εύλογο κανείς να αναρωτηθεί για την προέλευση των συναρτήσεων και τη σχέση τους με την οικονομική επιστήμη ώστε να διαπιστώσουμε αν η εφαρμογή τους έχει συμβάλλει σε αυτή μέχρι σήμερα. Επειδή οι συναρτήσεις είναι ένα σύνθετο κεφάλαιο στην επιστήμη των μαθηματικών η εργασία ξεκινά με το θεωρητικό μέρος των συναρτήσεων.

Πιο συγκεκριμένα αναφέρεται στην έννοια της συνάρτησης, στη μονοτονία και τα ακρότατα της, στα όρια, στη συνέχεια, στα ολοκληρώματα και σε διάφορες ιδιότητες τους. Σε αυτό το σημείο πλέον ο αναγνώστης είναι σε θέση να αντιληφθεί την έννοια της συνάρτησης και τη σχέση της με τα οικονομικά προβλήματα καθώς και την επίλυση αυτών.

Στις μέρες μας ωστόσο τα άτομα που καλούνται να επιλύσουν τέτοιες καταστάσεις καθημερινά, δεν χρησιμοποιούν τις συναρτήσεις στη μορφή που παρουσιάστηκαν μέχρι αυτό το σημείο. Αντιθέτως χρησιμοποιούν τις συναρτήσεις με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών και διάφορων προγραμμάτων για τη διευκόλυνση εφαρμογής των συναρτήσεων σε τέτοιες καταστάσεις. Στην προκειμένη περίπτωση το πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιήθηκε είναι το Microsoft Office Excel.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Συμβολισμοί και Μαθηματικά Σύμβολα

$\in$	: Ανήκει
$\notin$	: Δεν ανήκει
$\exists$	: Υπάρχει
$A \cup B$	: Η ένωση των συνόλων Α και Β
$A \cap B$	: Η τομή των συνόλων Α και Β
$\equiv$	: Ίσον εκ ταυτότητος
$=$	: Ίσον
$\neq$	: Διάφορο
$\Leftrightarrow$	: Ισοδυναμεί με
$\Rightarrow$	: Συνεπάγεται
$\leq$	: Μικρότερο ή Ίσο
$\geq$	: Μεγαλύτερο ή Ίσο
$\langle$	: Μεγαλύτερο
$\rangle$	: Μικρότερο
$\cup$	: Τομή
$\cap$	: Ένωση
$\subseteq$	: Υποσύνολο
$\subset$	: Γνήσιο υποσύνολο
$\forall$	: Για κάθε (καθολικός ποσοδείκτης)
$g \circ f$	: Η σύνθεση των συναρτήσεων f και g
$\eta\mu$	: Το ημίτονο
$\sigma\upsilon\nu$	: Το συνημίτονο
$\varepsilon\phi$	: Η εφαπτομένη
$\sigma\phi$	: Η συνεφαπτομένη
$\ln$	: Ο φυσικός λογάριθμος
$\log_a$	: Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α
$\exp$	: Η εκθετική συνάρτηση
∂	: Μερική Παράγωγος
$\Re$	: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\aleph$	: Το σύνολο των φυσικών αριθμών
f	: Η συνάρτηση
f'	: Η παράγωγος της συνάρτησης f
f''	: Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f
f^{-1}	: Η αντίστροφη συνάρτηση της f
∞	: Το άπειρο
$\lim$	: Ο συμβολισμός του ορίου
$\mathrm{M}(\alpha,\beta)$	: Σημείο Μ που έχει συντεταγμένες α και β
$\int$	: Ο συμβολισμός του ολοκληρώματος
$\int f(x)dx$	: Το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$	: Το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ανέκαθεν ένας από τους πιο σημαντικούς και βασικούς παράγοντες ώστε μια κοινωνία να ξεχωρίσει απέναντι σε μια άλλη είναι η οικονομία της. Γιατί ανάλογα με τους πόρους που έχει να διαθέσει μπορεί να αναπτυχθεί σε πολλούς τομείς, όπως την εκπαίδευση, την υγεία, τις τέχνες και γενικότερα να ανεβαίνει το βιοτικό επίπεδο των πολιτών της

Στην πάροδο των ετών, πολλοί μελετητές έχουν προσπαθήσει να βρουν τρόπους να βοηθήσουν στην ανάπτυξη μίας οικονομίας, παίρνοντας στοιχεία από άλλες επιστήμες, όπως αυτή των μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία εμείς θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι από την επιστήμη των μαθηματικών, συγκεκριμένα οι συναρτήσεις βοηθούν στην επίλυση οικονομικών προβλημάτων.

Η λογική που ακολουθήσαμε στην προσπάθεια μας να τεκμηριώσουμε την παραπάνω άποψη ήταν αρχικά να κάνουμε μια ιστορική αναδρομή και να μελετήσουμε την έννοια της συνάρτησης από τα απολύτως βασικά, σε σημείο δηλαδή που ο αναγνώστης να μην χρειάζεται να έχει εξειδικευμένες γνώσεις.

Στην πορεία ωστόσο, σταδιακά το επίπεδο αυτό ανεβαίνει ώστε οι συναρτήσεις να συσχετιστούν με οικονομικές εφαρμογές ενώ στο τέλος παρακολουθούμε το πώς οι οικονομικές συναρτήσεις κυριαρχούν στην καθημερινότητα ενός οικονομολόγου με τη χρήση των υπολογιστών.

Πιο αναλυτικά, κάναμε μια ιστορική ανάδρομη προκειμένου να μάθουμε το πως και το από πότε οι συναρτήσεις συσχετίστηκαν με την οικονομική επιστήμη, με ποιο τρόπο και εάν εντέλει βοήθησαν στην επίλυση οικονομικών προβλημάτων.

Στην πορεία όσων αφορά σε μαθηματικό επίπεδο αναφερθήκαμε στην έννοια της συνάρτησης. Θελήσαμε δηλαδή με αυτή την εισαγωγή να ξεκινήσουμε ομαλά παρουσιάζοντας στον αναγνώστη τα είδη των συναρτήσεων και τις ιδιότητες τους.

Όταν πλέον ο αναγνώστης είναι σε θέση να αντιληφθεί τις έννοιες που αναφέρθηκαν στα πρώτα δυο κεφάλαια, παρουσιάζονται στις επόμενες ενότητες οι συναρτήσεις σε σχέση με την οικονομική επιστήμη. Εκεί λοιπόν φαίνεται κυρίως από τα παραδείγματα και τις εφαρμογές το πώς λειτουργούν οι συναρτήσεις στη επίλυση οικονομικών προβλημάτων, τόσο σε οικονομικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής όσο και σε οικονομικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Τέλος, για του λόγου το αληθές επειδή οι οικονομικές συναρτήσεις δεν επιλύονται εύκολα και γρήγορα σε αυτό το επίπεδο, θελήσαμε να προβούμε στην μελέτη τους με την χρήση υπολογιστικού προγράμματος που χρησιμοποιείται από ηλεκτρονικό υπολογιστή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ιστορική αναδρομή των συναρτήσεων
Πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής – Όρια – Συνέχεια

1.1 Η ιστορική αναδρομή των συναρτήσεων

Η έννοια των συναρτήσεων γενικότερα, προέρχεται από την αρχαιότητα και συγκεκριμένα εμφανίζεται και στην Αρχαία Ελλάδα. Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν είχαν την έννοια της γενικής συνάρτησης ή ισοδύναμα, των γενικών γεωμετρικών σχημάτων. Ασχολούνταν με συγκεκριμένα σχήματα, όπως το τρίγωνο, η σφαίρα, ο κύλινδρος, οι κωνικές τομές, και δεν ασχολούνταν με την απόδειξη ιδιοτήτων που θα ίσχυαν για γενικότερα σχήματα, και που οδηγούσαν στην ανάγκη εισαγωγής μιας πιο γενικής μορφής συνάρτησης.
Ο κανόνας αυτός έχει μια αξιοσημείωτη εξαίρεση. Ο Αρχιμήδης στο έργο του *Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου Α'* ορίζει τα αξιώματα κυρτότητας για μια καμπύλη (και για μια επιφάνεια). Έτσι ο Αρχιμήδης βρίσκεται πολύ κοντά στο γενικό ορισμό της κυρτής συνάρτησης.
Η συνειδητοποίηση της έννοιας της συνάρτησης εξελίχτηκε με μεγάλη βραδύτητα, και ήρθε από πολλές κατευθύνσεις. Μια τέτοια κατεύθυνση ήταν η ανάγκη του διαχωρισμού γνωστών παραμέτρων και άγνωστων μεταβλητών σε μια αλγεβρική εξίσωση. Η συστηματοποίηση αυτού του διαχωρισμού έγινε από τον γάλλο μαθηματικό Francois Viet (1540-1603), και συνέβαλε σημαντικά στη μετατόπιση, που έγινε κατά τον 17^o αιώνα, από την μελέτη ειδικών προβλημάτων και καταστάσεων στην διερεύνηση γενικών μεθόδων.
Η αναλυτική γεωμετρία εφευρέθηκε από τους γάλλους μαθηματικούς R. Descartes (Καρτέσιος) (1596-1650) και τον Pierre de Fermat (1601-1665). Η κεντρική ιδέα της αναλυτικής γεωμετρίας είναι η αντιστοίχιση μεταξύ μιας αλγεβρικής εξίσωσης και του γεωμετρικού τόπου γενικά μιας καμπύλης των σημείων με συντεταγμένες ως προς δυο σταθερούς ορθογωνίους άξονες που ικανοποιούν την εξίσωση. Έτσι επιτυγχάνεται η γραφική παράσταση μιας αλγεβρικής εξίσωσης. Κατά την περίοδο της Αναγέννησης η άλγεβρα είχε γνωρίσει σημαντική ανάπτυξη και ο σκοπός των Descartes και Fermat ήταν να χρησιμοποιήσουν την άλγεβρα αυτή για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων.
Έτσι η μέθοδος Descartes ήταν να ξεκινήσει με ένα γεωμετρικό πρόβλημα κατά κανόνα όχι πολύ διαφορετικό από τα προβλήματα γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων και να το μετατρέψει με τη μέθοδο της αναλυτικής γεωμετρίες σε αλγεβρική εξίσωση, την όποια και να προσπαθήσει να επιλύσει. Αντίστροφα ο Fermat ξεκινούσε από μια αλγεβρική εξίσωση (όπως η γενική δευτεροβάθμια δυο μεταβλητών $ax^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$) και απεδείκνυε τις γεωμετρικές ιδιότητες της καμπύλης που αντιστοιχούσε σε αυτήν (όπως την ταξινόμηση των κωνικών τομών σε έλλειψη, υπερβολή, και παραβολή στην παραπάνω εξίσωση.
Η αναλυτική γεωμετρία είχε ως αποτέλεσμα την κατανόηση της σημασίας της μεταβλητής, βασικού συστατικού της έννοιας της συνάρτησης, και την αύξηση των γεωμετρικών καμπυλών που μπορούσαν να μελετηθούν.
Η έννοια της συνάρτησης που άρχισε να δημιουργείται από τους Viete, Descartes και είναι, όπως θα λέγαμε σήμερα, η υπολογιστική, στενή μορφή της, αυτή που δίνεται με ένα συγκεκριμένο τύπο, ή με ένα αλγόριθμο υπολογισμού της. Ταυτόχρονα, όμως αναπτύσσονταν και η γεωμετρική και γενική έννοια της συνάρτησης, όπως με την κυρτή συνάρτηση που ορίστηκε απ τον Αρχιμήδη. Η κίνηση ενός σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου, και

παρόμοιας έννοιας κινητικής ή φυσικής μεταβολής, καθώς και η ανάγκη ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού, που μελετώντας από τους Γαλιλαίο και Cavalieri και από τον πολύ σημαντικό άγγλο μαθηματικό Isaac Barrow (1630-1677), που όπως θα δούμε και αργότερα σε πολλά σημεία ήταν πρόδρομος του Νεύτωνα, κατέληξε στην γενική και γεωμετρική έννοια της συνάρτησης.
Προς την ίδια κατεύθυνση βοήθησε και η συναρτησιακή σχέση ($f(xy) = f(x) + f(y)$) που όριζε τους λογαρίθμους. Οι υπολογισμοί του John Napier (1550-1617) που είχαν πρακτικό και εφαρμοσμένο στόχο βασίζονταν σε σαφή κατανόηση της συναρτησιακής σχέσης σε μια εποχή που η γενική έννοια της συνάρτησης ήταν ακόμα άγνωστη. Η λογαριθμική συνάρτηση ιστορικά έπαιξε το ρόλο συνάρτησης προτύπου και βοήθησε στην ανάπτυξη της γενικής έννοιας. Από θεωρητική σκοπιά, θεμελιώθηκε η έννοια της συναρτησιακής σχέσης του λογαρίθμου από τον Βέλγο Ιησουΐτη μοναχό Gregory St. Vincent, περί το 1647.
Μετά από αυτή την εξαιρετικά μακρόχρονη παρασκευή η έννοια της συνάρτησης ήρθε στο μαθηματικό προσκήνιο με το έργο Introductio in Analysm infinitorum του Euler το 1748. Ο Euler χρησιμοποίησε και τον ίδιο όρο «συνάρτηση» (function). Αρχικά για τον Euler «συνάρτηση» ήταν οι διάφορες γεωμετρικές ποσότητες που σχετίζονταν με μια καμπύλη καθώς όμως έμφαση άρχισε να δίνεται σε τύπους και εξισώσεις που εξέφραζαν αυτές τις ποσότητες το κέντρο βάρους της έννοιας άρχισε να μετατοπίζεται και έτσι ο Euler γράφει στην αρχή του παραπάνω έργου του: «Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από την μεταβλητή ποσότητα και από αριθμούς ή σταθερές ποσότητας». Έχουμε δηλαδή εδώ έναν σαφή ορισμό της στενής, υπολογιστικής έννοιας της συνάρτησης.
Αργότερα το 1755 ο Euler έδωσε έναν ευρύτερο ορισμό της συνάρτησης: «Αν μερικές ποσότητες εξαρτώνται από πολλές ποσότητες ώστε όταν οι δεύτερες μεταβληθούν μεταβάλλονται και οι πρώτες, τότε οι πρώτες ποσότητες καλούνται συναρτήσεις των δεύτερων… Έτσι αν το x συμβολίζει μια μεταβλητή ποσότητα τότε όλες οι ποσότητες που με οποιονδήποτε καθορίζονται από αυτήν καλούνται συναρτήσεις του x.» Με αυτόν τον ορισμό ο Euler φτάνει ουσιαστικά στο σύγχρονο γενικό ορισμό της συνάρτησης.
Κατά ένα μεγάλο μέρος του 18^{ου} αιώνα η στενή έννοια της συνάρτησης κυριάρχησε. Η μελέτη όμως των λύσεων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους αποκάλυψε ότι οι λύσεις αυτές ήταν συχνά συναρτήσεις «κακής συμπεριφοράς», συναρτήσεις που δεν δίνονταν από έναν αναλυτικό τύπο. Αργότερα ο γάλλος μαθηματικός Joseph Fourier (1768-1830) στη μελέτη αναπαράστασης γενικών συναρτήσεων με τριγωνομετρικές σειρές κατέληξε στην ανάγκη διεύρυνσης της έννοιας της συνάρτησης. Έτσι ο Fourier γράφει: « Πάνω από όλα, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ στην οποία η απόδειξη εφαρμόζεται, είναι τελείως αυθαίρετη, και δεν υπόκειται σε κανένα νόμο συνέχειας… Γενικά η συνάρτηση $f(x)$ παριστά μια διαδοχή τιμών που δίνονται στην τετμημένη x, και για τις οποίες υπάρχει ένας ίσος αριθμός τεταγμένων $f(x)$…Δεν υποθέτουμε ότι οι τεταγμένες υπόκεινται σε έναν κοινό κανόνα. Ακολουθούν η μια την άλλη με οποιονδήποτε τρόπο και η καθεμία ορίζεται ως να ήταν μοναδική ποσότητα».
Ο Fourier με αυτόν τον ορισμό φτάνει στην σύγχρονη έννοια της συνάρτησης, αυτήν που σήμερα χρησιμοποιούσε ως κεντρική έννοια σε όλες τις περιοχές των Μαθηματικών. Είναι σημαντικό να αντιληφθούμε ότι η συνάρτηση κατέληξε στη σημερινή της μορφή, μετά από μακροχρόνια πορεία που διέγραψε, όχι από κάποια αχρείαστη τάση αφηρημένης μαθηματικής γενίκευσης, αλλά από τις αδήριτες πρακτικές και συγκεκριμένες ανάγκες που παρουσιάστηκαν για την ανάπτυξη των Μαθηματικών.

Πηγή: Γιαννακούλιας κ.ά., 1999

1.2 Η έννοια της συνάρτησης

Μία από τις πιο σημαντικές έννοιες σε ολόκληρα τα μαθηματικά είναι αυτή της συνάρτησης σε όλους σχεδόν τους κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών οι συναρτήσεις αποδεικνύονται το κεντρικό αντικείμενο έρευνας. Γενικά, η έννοια της συνάρτησης είναι μια πολύ γενική έννοια. Προς το παρόν, θα περιοριστούμε σε συναρτήσεις ενός πολύ ειδικού τύπου ακόμα και αυτή η μικρή κλάση συναρτήσεων, παρουσιάζει αρκετά μεγάλη ποικιλία για να τραβήξει την προσοχή μας για κάμποσο καιρό. Αρχικά δεν θα δώσουμε καν ούτε έναν αυστηρό ορισμό. Για αρχή, ένας προκαταρκτικός ορισμός θα μας δώσει τη δυνατότητα να συζητήσουμε πλατιά τις συναρτήσεις από τις οποίες θα περιγράψουμε τη διαισθητική έννοια της συνάρτησης όπως την αντιλαμβάνονται οι μαθηματικοί. Αρχικά ας ξεκινήσουμε λοιπόν με τον ακόλουθο δοκιμαστικό ορισμό της συνάρτησης:

Δοκιμαστικός Ορισμός: Συνάρτηση είναι ένας κανόνας που απεικονίζει, σε καθέναν από κάποιους πραγματικούς αριθμούς κάποιον άλλον πραγματικό αριθμό.

Τα παρακάτω παραδείγματα των συναρτήσεων που ακολουθούν δίνονται για να εξηγήσουν και να ενισχύσουν αυτόν τον ορισμό, ο οποίος ομολογουμένως χρειάζεται κάποιες διευκρινήσεις.

Παράδειγμα 1: Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό στο τετράγωνό του.

Παράδειγμα 2: Ο κανόνας που εικονίζει κάθε αριθμό y στον αριθμό: $\dfrac{y^3+3y+5}{y^2+1}$.

Παράδειγμα 3: Ο κανόνας που εικονίζει κάθε αριθμό $c \neq 1$, -1στον αριθμό: $\dfrac{c^3+3c+5}{c^2-1}$.

Παράδειγμα 4: Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό x που ικανοποιεί την $-17 \leq x \leq \pi/3$ στον αριθμό x^2.

Παράδειγμα 5: Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό α στον αριθμό 0 αν το α είναι άρρητος, και στον αριθμό 1 αν ο α είναι ρητός.

Παράδειγμα 6: Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό t στον αριθμό $t^3 - x$.

Υπάρχει κάτι που θα πρέπει να είναι τελείως καθαρό μετά από αυτά τα παραδείγματα: Μια συνάρτηση είναι οποιοσδήποτε κανόνας που απεικονίζει αριθμούς σε κάποιους άλλους αριθμούς, όχι μόνο ένας κανόνας που μπορεί παρασταθεί με έναν αλγεβρικό τύπο, ούτε ακόμα από μια ομοιόμορφη συνθήκη που να εφαρμόζεται σε όλους τους αριθμούς ούτε είναι αναγκαστικά ένας κανόνας που κάποιος, μπορεί να εφαρμόσει στην πράξη. Επίσης, ο κανόνας μπορεί να παραλείπει κάποιους αριθμούς και ακόμα να μην είναι σαφές σε ποιους ακριβώς αριθμούς εφαρμόζεται η συνάρτηση. Το σύνολο των αριθμών στους οποίους ορίζεται μια συνάρτηση λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Πριν αναφερθεί οτιδήποτε άλλο που αφορά τις συναρτήσεις είναι σημαντικό να χρειαστεί ένας συμβολισμός για τον απεικονισμό τους. Δεδομένου ότι σε αυτήν την εργασία θα μιλάμε συνέχεια για συναρτήσεις χρειαζόμαστε έναν κατάλληλο τρόπο για να ονομάζουμε τις συναρτήσεις και για να αναφερόμαστε σε αυτές γενικά. Η πιο συνηθισμένη πρακτική είναι να συμβολίζουμε μια συνάρτηση με ένα γράμμα. Για προφανείς όμως λόγους, το γράμμα << f >> (function = συνάρτηση) είναι το επικρατέστερο, καθιστώντας έτσι και τα << g >>**,** << h >> προφανείς υποψήφιους, αλλά και κάθε γράμμα (καθώς και οποιοδήποτε λογικό σύμβολο) μας κάνει, χωρίς να αποκλείονται και τα <<**x**>> και <<**y**>>**,** αν και αυτά τα γράμματα συνήθως χρησιμοποιούνται για να συμβολίσουν αριθμούς .

Αν η f είναι μια συνάρτηση τότε ο αριθμός στον οποίο απεικονίζει η f τον αριθμό x, συμβολίζεται με << $f(x)$ >> αυτό το σύμβολο διαβάζεται << f του x >> και συνήθως λέγεται η τιμή της f στο x . Φυσικό είναι, αν συμβολίζουμε μια συνάρτηση με x, να διαλέξουμε κάποιο άλλο γράμμα ως σύμβολο για τον αριθμό (μια απόλυτα νόμιμη αν και κάπως ιδιότροπη, επιλογή θα μπορούσε να είναι το << f >>δίνοντας μας το σύμβολο $x(f)$. Σημειώνουμε ότι το σύμβολο $f(x)$ έχει έννοια μόνο για x στο πεδίο ορισμού της f για τα άλλα x, το σύμβολο $f(x)$ δεν ορίζεται.

Πηγή: Michael Spivak

Αν συμβολίσουμε τις συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 1-7 με f, g, h, r, s, ϑ και α_x τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε τους ορισμούς τους ως εξής:

1) $f(x) = x^2$ για κάθε x.

2) $g(x) = \dfrac{y^3 + 3y + 5}{y^2 + 1}$ για κάθε y.

3) $h(x) = \dfrac{c^3 + 3c + 5}{c^2 - 1}$ για κάθε $c \neq 1,\ -1$.

4) $r(x) = x^2$ για κάθε x τέτοιο ώστε $-17 \leq x \leq \pi/3$

5) $s(x) = \begin{cases} 0, \alpha\nu\ \ x\ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma \\ 1, \alpha\nu\ \ x\ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma \end{cases}$

6) $\vartheta(x) = \begin{cases} 5, x = 2 \\ \dfrac{36}{\pi}, x = 17 \\ 28\ , x = \dfrac{\pi^2}{17} \\ 28\ , x = \dfrac{36}{\pi} \\ 16\ , x \neq 2 \end{cases}$

7) $a_x(t) = t^3 + x$, για κάθε αριθμό t

Αυτοί οι ορισμοί υποδεικνύουν τη συνηθισμένη διαδικασία που ακολουθούμε για να ορίσουμε μια συνάρτηση f μας λένε ποιο είναι το $f(x)$ για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της f. Στην πράξη κάποιες συντμήσεις είναι ανεκτές. Ο ορισμός (1) θα μπορούσε να γραφτεί απλώς:

(1) $f(x) = x^2$

με την διευκρινιστική φράση <<για κάθε x>> να εννοείται. Βέβαια, για τον ορισμό (4) η μόνη δυνατή σύντμηση είναι η:

(4) $r(x) = x^2, 17 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$

Δεχόμαστε συνήθως ότι ένας ορισμός σαν τον $k(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}, x \neq 0,1$

γίνεται να περικοπεί στον $k(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$

Με αλλά λόγια, αν δεν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού, θεωρούμε ότι αποτελείται από όλους τους αριθμούς για τους οποίους ο ορισμός έχει έννοια. Οδηγούμαστε έτσι στον εξής ορισμό:

Ορισμός: Συνάρτηση είναι ένα σύνολο από ζεύγη αριθμών με την ακόλουθη ιδιότητα: αν τα (α, β) και (α, c) είναι και τα δύο στο σύνολο, τότε $\beta = c$, με άλλα λόγια το σύνολο δεν πρέπει να περιέχει δύο διαφορετικά ζεύγη με το ίδιο πρώτο στοιχείο.
Αυτός είναι ο πρώτος μας πλήρης ορισμός και παρουσιάζει το σχήμα που θα ακολουθούμε πάντα για να ορίσουμε σπουδαίες νέες έννοιες. Αυτοί οι ορισμοί είναι τόσο σημαντικοί ώστε είναι ουσιώδες να ξέρουμε ποτέ τους έχουμε ολοκληρωμένους στη διάθεση μας και να τους διακρίνουμε από τα σχόλια και τις επεξηγηματικές παρατηρήσεις και τις περιστασιακές ερμηνείες. Για αυτό θα προηγείται η λέξη ΟΡΙΣΜΟΣ, η έννοια που ορίζεται θα γράφεται με κόκκινα γράμματα και ο ορισμός θα αποτελεί από μόνος του ξεχωριστή παράγραφο.

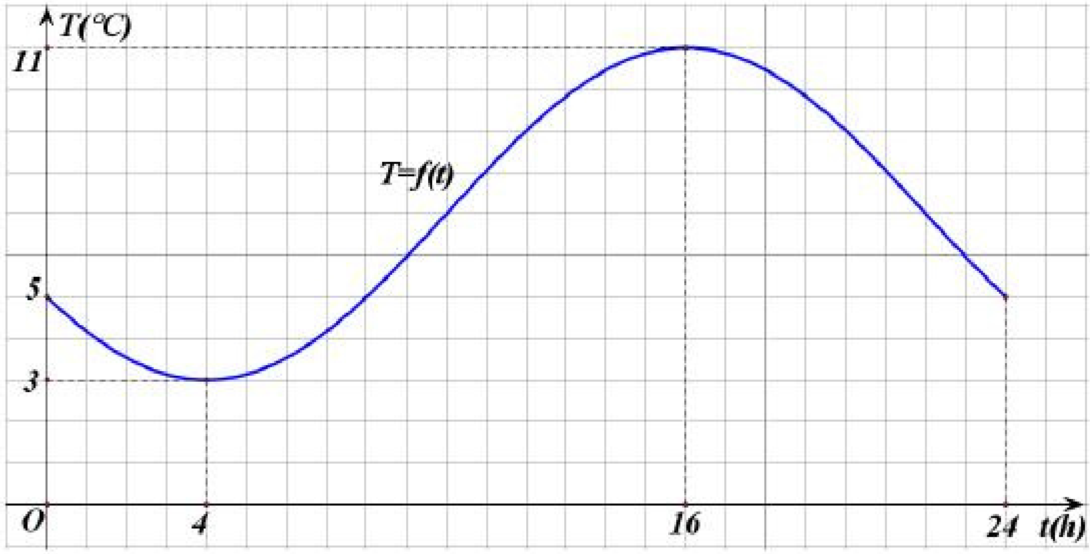
Ορισμός : Αν f είναι μια συνάρτηση, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των α για τα οποία υπάρχει κάποιο τέτοιο ώστε το (α, β) να ανήκει στην f. Αν το α είναι στο πεδίο ορισμού της f, έπεται από τον ορισμό της συνάρτησης ότι υπάρχει, πράγματι, ένας μοναδικός αριθμός β τέτοιος ώστε το (α, β) να ανήκει στην f. Αυτό το μοναδικό β συμβολίζεται με $f(a)$.

1.3 Μονοτονία και Ακρότατα συναρτήσεων

Μονοτονία συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$ που εκφράζει τη θερμοκρασία T ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας $(t = 0)$ μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας $(t = 24)$.

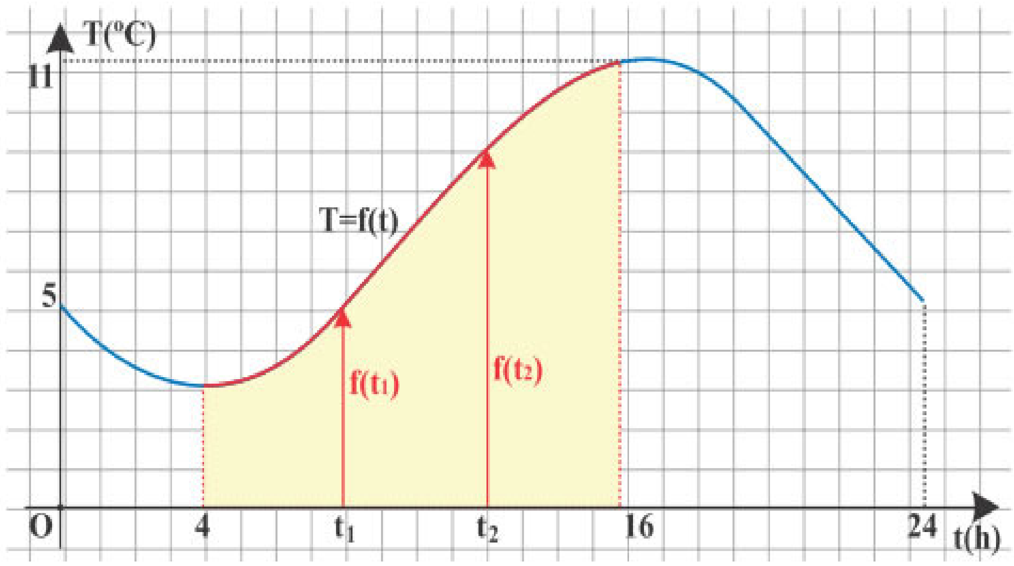
Διάγραμμα 1.3.1: Γραφική παράσταση της Τ



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

α) Διακρίνουμε ότι στο διάστημα [4,16] πως η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ανέρχεται.

Διάγραμμα 1.3.2: Γραφική παράσταση της Τ γνησίως αύξουσα



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία φαίνεται ότι αυξάνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [4,16]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$f(t_1) < f(t_2)$

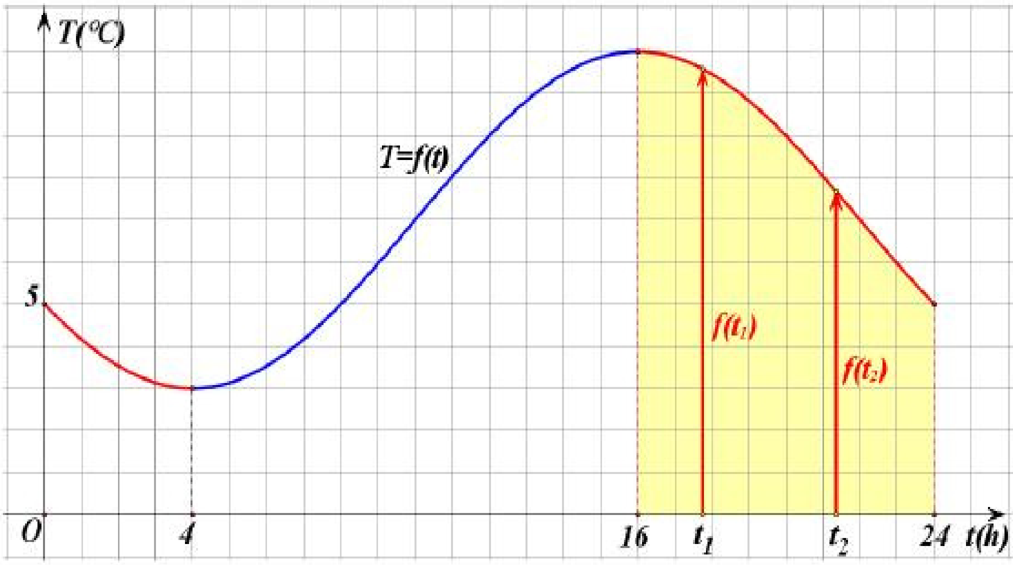
Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [4,16]. Γενικά:

<u>Ορισμός:</u> Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με x_1, x_2 ισχύει:
$f(x_1) < f(x_2)$
Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε: $f \uparrow \Delta$.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$. Πράγματι έστω $x_{1,} x_2 \in \Re$ με $x_1 < x_2$.

Τότε έχουμε:
$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ & \Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \\ & \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$
Γενικά: Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

β) Στο ίδιο σχήμα, διακρίνουμε επιπλέον ότι στο διάστημα [16,24] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας κατέρχεται.

Διάγραμμα 1.3.3: Γραφική παράσταση της Τ γνησίως φθίνουσα



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία φαίνεται ότι μειώνεται δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [16,24]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:
$f(t_1) > f(t_2)$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[16,24]$. Γενικά:

Ορισμός: Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:
$f(x_1) > f(x_2)$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε: $f \downarrow \Delta$.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -3x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.
Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \Re$ με $x_1 < x_2$.

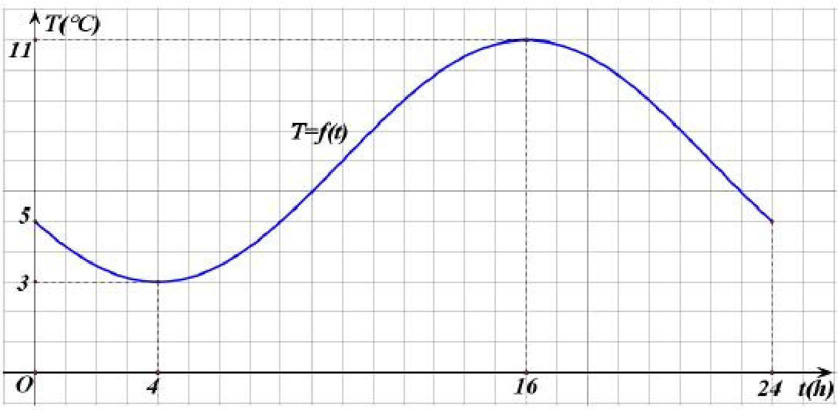
Τότε έχουμε:
$$\begin{aligned} & x_1, x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \\ & \Rightarrow -3x_1 + 5 > -3x_2 + 5 \\ & \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$
Γενικά: Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

Ελάχιστο και Μέγιστο συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$

Διάγραμμα 1.3.4: Γραφική παράσταση της Τ



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Παρατηρούμε ότι:

α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι η $f(4) = 3$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:
$f(t) \geq f(4) = 3$ για κάθε $t \in [0,24]$.
Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 4$ ελάχιστο, το $f(4) = 3$. Γενικά:

Ορισμός: Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ **(ολικό) ελάχιστο** όταν:
$f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in \mathrm{A}$.
Το $x_0 \in \mathrm{A}$ λέγεται θέση ελάχιστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλώς ελάχιστο της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με $\min f(x)$.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$. Επειδή,
$x^4 \geq 0$, για κάθε $x \in \Re$
θα είναι $3x^4 \geq 0$, για κάθε $x \in \Re$
οπότε θα έχουμε $3x^4 + 1 \geq 1$, για κάθε $x \in \Re$
Επομένως: $f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x \in \Re$.

Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$

β) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 16$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι η $T(16) = 11$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:
$f(t) \leq f(16) = 11$, για κάθε $t \in [0,24]$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 16$ μέγιστο, το $f(16) = 11$. Γενικά:

Ορισμός: Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in \mathrm{A}$ **(ολικό) μέγιστο** όταν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in \mathrm{A}$. Το $x_0 \in \mathrm{A}$ λέγεται θέση μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο ή απλώς μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με $\max f(x)$.

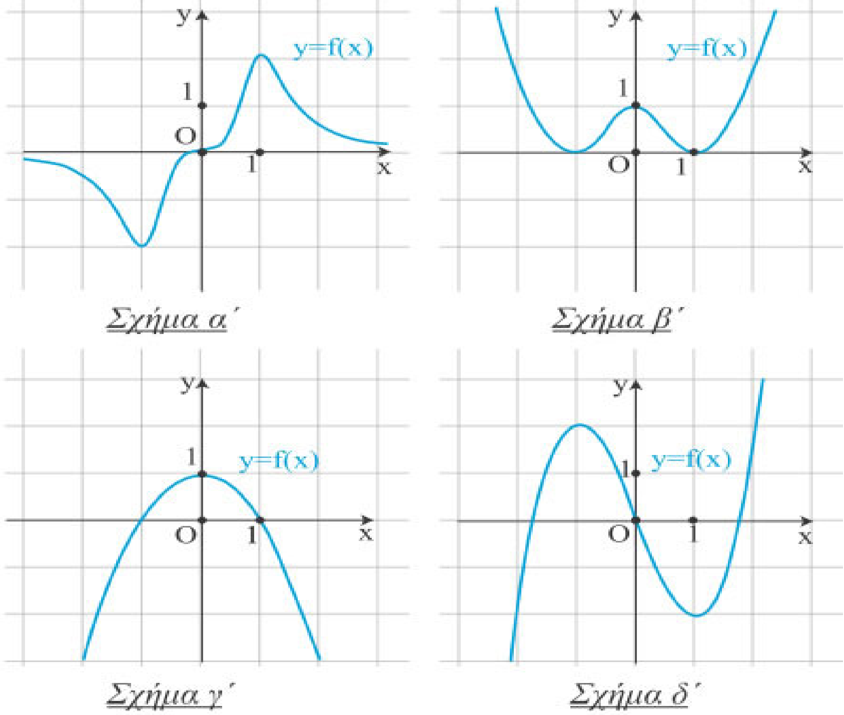
Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1$
Επειδή: $x^4 \geq 0$, για κάθε $x \in \Re$
θα είναι $-3x^4 \leq 0$, για κάθε $x \in \Re$
οπότε θα έχουμε $-3x^4 + 1 \leq 1$, για κάθε $x \in \Re$

Επομένως: $f(x) \leq f(0)$, για κάθε $x \in \Re$
Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται ολικά ακρότατα αυτής.

ΣΧΟΛΙΟ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Να προσθέσουμε επίσης πως μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μέγιστο και ελάχιστο (σχήμα Α) ή μόνο ελάχιστο (σχήμα Β) ή μόνο μέγιστο (σχήμα Γ) ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (σχήμα Δ).

Διάγραμμα 1.3.5: Γραφικές παραστάσεις με μέγιστα και ελάχιστα ή και χωρίς

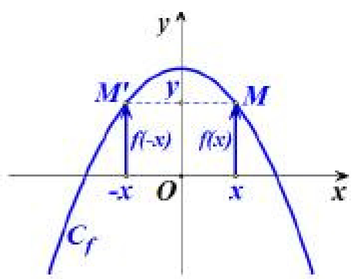


Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

<u>Άρτια συνάρτηση:</u>

α) Στο Διάγραμμα 1.3.6 δίνεται η γραφική παράσταση Cf μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού όλο το $\Re$. Όπως βλέπουμε η Cf έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της Cf ως προς τον άξονα $y'y$ ανήκει στην Cf.

Διάγραμμα 1.3.6: Γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Επειδή όμως το συμμετρικό του τυχαίου σημείου $M(x,y)$ της Cf ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $M'(-x,y)$ και επειδή τα σημεία $M(x,y)$ και $M'(-x,y)$ ανήκουν στην Cf, θα ισχύει $y = f(x)$ και $y = f(-x)$ οπότε θα έχουμε:
$f(-x) = -f(x)$

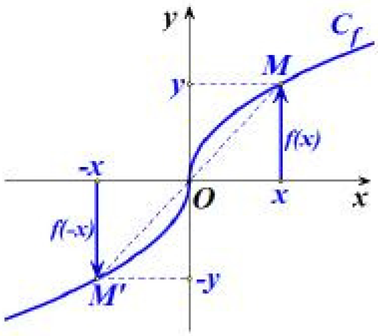
Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **άρτια**.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:
$-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.
Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ είναι άρτια συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το $\Re$ και για κάθε $x \in \Re$ ισχύει:
$f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = 2x^4 - x^2 + 1 = f(x)$
Άρα, η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Περιττή συνάρτηση:

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση Cf μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\Re$.

Διάγραμμα 1.3.7: Γραφική παράσταση περιττής συνάρτησης



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Όπως βλέπουμε η Cf έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της Cf ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στην Cf.
Επειδή όμως το συμμετρικό του τυχαίου σημείου $M(x,y)$ της Cf ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $M'(-x,-y)$ και επειδή τα σημεία $M(x,y)$ και $M'(-x,-y)$ ανήκουν στην Cf, θα ισχύει $y = f(x)$ και $-y = f(-x)$ όποτε θα έχουμε: $f(-x) = -f(x)$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **περιττή**. Γενικά:

Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται περιττή, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$

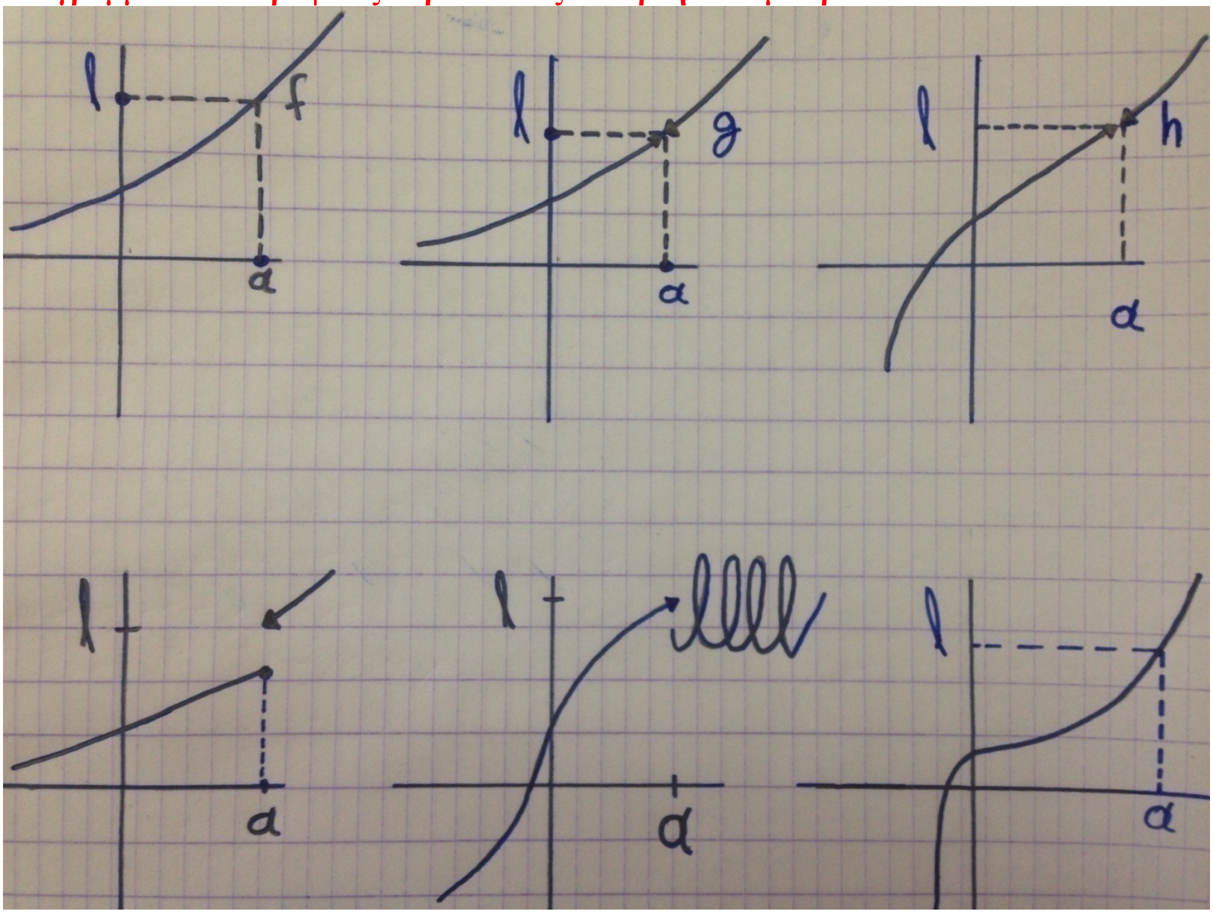
Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x$ είναι περιττή συνάρτηση επειδή έχει πεδίο ορισμού όλο το $\Re$ και για κάθε $x \in \Re$ ισχύει:
$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -f(x)$
Συνεπώς , η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

1.4 Όρια συναρτήσεων

Η έννοια του ορίου είναι οπωσδήποτε η πιο σημαντική και ίσως από τις πιο δύσκολες σε ολόκληρο τον Απειροστικό Λογισμό. Στόχος αυτής της ενότητας είναι ο ορισμός των ορίων, καθώς θα ξεκινήσουμε όμως για μια ακόμα φορά με έναν δοκιμαστικό ορισμό και στη συνέχεια θα καταλήξουμε στον κανονικό ορισμό του ορίου. Αυτό που θα ορίσουμε δεν είναι η λέξη <<όριο>> αλλά η έννοια μιας συνάρτησης που τείνει σε κάποιο όριο.

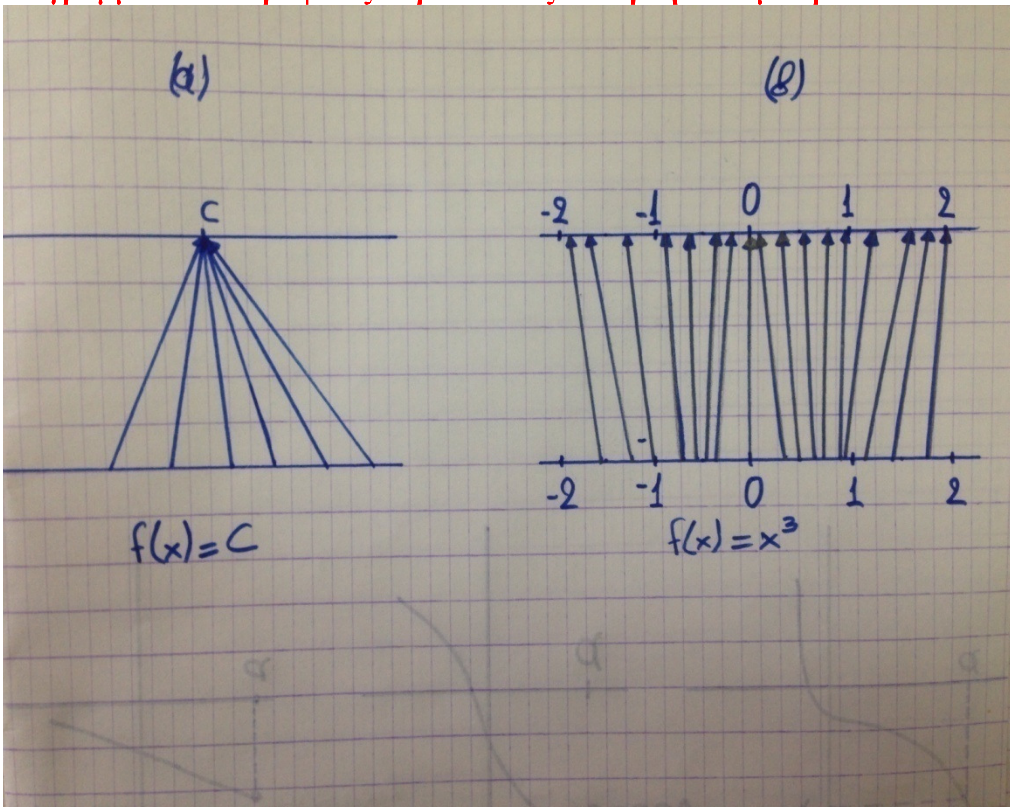
Δοκιμαστικός Ορισμός: Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο a, αν μπορούμε να φέρουμε το $f(x)$ όσο κοντά, θέλουμε στο l απαιτώντας το x να είναι αρκετά κοντά στο a, αλλά όχι ίσο με το a.
Από τις έξι πρώτες συναρτήσεις που σχεδιάσαμε στο παρακάτω σχήμα μόνο οι πρώτες τρεις τείνουν στο l κοντά στο a. Παρατηρούμε επίσης ότι, αν και το $g(a)$ δεν ορίζεται και το $h(a)$ είναι ορισμένο <<με λάθος τρόπο>>, ισχύει και πάλι ότι η g και η h τείνουν στο l κοντά στο a. Αυτό γιατί, στον ορισμό μας, αποκλείσαμε ρητά την ανάγκη να εξετάσουμε την τιμή της συνάρτησης στο a, αρκεί βέβαια το $f(x)$ να είναι κοντά στο l για x κοντά στο a αλλά όχι ίσο με το a. Απλώς, δεν μας ενδιαφέρει η τιμή του $f(a)$, ούτε καν θέτουμε το ερώτημα αν το $f(a)$ ορίζεται ή όχι.

Διάγραμμα 1.4.1: Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με όρια



Ένας βολικός τρόπος για να απεικονίσουμε τον ισχυρισμό ότι η f τείνει στο l κοντά στο a παρέχεται από μια μέθοδο σχεδίασης συναρτήσεων. Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο σχεδιάζουμε δυο ευθείες, που καθεμία παριστάνει στο $\Re$, και βέλη από ένα σημείο x της μιας, στο $f(x)$ της άλλης. Στην παρακάτω εικόνα δίνουμε μια τέτοια εικόνα για δυο διαφορετικές συναρτήσεις.

Διάγραμμα 1.4.2: Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων με όρια



Αυτός ο ορισμός, απλούστατα, δεν είναι αρκετά ακριβής για να χρησιμοποιηθεί σε αποδείξεις. Δεν είναι καθόλου σαφές πως μπορεί κανείς να <<φέρει>> το $f(x)$ κοντά στο l (οτιδήποτε και αν σημαίνει το <<κοντά>>) αιτώντας το x να είναι αρκετά κοντά στο a (όσο κοντά και αν υποτίθεται ότι είναι το <<αρκετά>> κοντά) Ας, αρχίσουμε για μια ακόμα φορά, με τον δοκιμαστικό ορισμό.

<u>Δοκιμαστικός Ορισμός:</u>

Η συνάρτηση f τείνει κοντά στο όριο l κοντά στο a αν μπορούμε να φέρουμε το $f(x)$ όσο κοντά θέλουμε στο l απαιτώντας το x να είναι αρκετά κοντά στο a αλλά όχι ίσο με το a.

Αρχικά η πρώτη – πρώτη αλλαγή που κάναμε σε αυτόν τον ορισμό, ήταν να σημειώσουμε ότι το να φέρουμε το $f(x)$ κοντά στο l σημαίνει να κάνουμε το $|f(x)-l|$ μικρό, και όμοια για το x και το a:

Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο a, αν μπορούμε να κάνουμε το $|f(x)-l|$ όσο μικρό θέλουμε απαιτώντας το $|x-a|$ να είναι αρκετά μικρό, και $x \neq a$.

Η δεύτερη πιο ουσιαστική αλλαγή ήταν να σημειώσουμε ότι το να κάνουμε το $|f(x)-l|$ όσο μικρό θέλουμε σημαίνει να κάνουμε το $|f(x)-l|<\varepsilon$ για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ που μπορεί να μας δοθεί:

Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο a, αν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ μπορούμε να κάνουμε το $|f(x) - l| < \varepsilon$ απαιτώντας το $|x - a|$ να είναι αρκετά μικρό, και $x \neq a$.

<u>Ορισμός ακολουθίας:</u>

Λέμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στον αριθμό x ή ότι η x_n τείνει στον x ή ότι ο x είναι το όριο της (x_n) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in N$ ώστε να ισχύει

$|x_n - x| < \varepsilon$

για κάθε $n \in N$, $n \geq n_0$. Πιο συνοπτικά: $n(x_n)$ συγκλίνει στον x αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \varepsilon$. Το ότι η (x_n) συγκλίνει στον x το συμβολίζουμε:

$x_n \to x$ ή $\lim x_n = x$ ή $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

Αν η (x_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, τότε λέμε ότι η (x_n) αποκλίνει. Μπορούμε να εκφράσουμε τα προηγούμενα λέγοντας πιο απλά: η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στον x αν η απόσταση του n-οστού όρου (x_n) από τον x είναι τελικά μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό ή αλλιώς: η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στον x αν ο n-οστός όρος (x_n) πλησιάζει απεριόριστα στον x όταν ο n γίνεται κατάλληλα μεγάλος.

<u>ΣΧΟΛΙΟ:</u>

Για να αποδείξουμε ότι $x_n \to x$ θεωρούμε έναν τυχόντα $\varepsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός $n_0 \in N$ ο οποίος εξαρτάται από τον ε τέτοιου ώστε από $n \in N, n \geq n_0$ να συνεπάγεται ($\Rightarrow$) $|x_n - x| < \varepsilon$ ή ισοδύναμα ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \varepsilon$ αρκεί να ισχύει $n \in N$ $n \geq N$.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, η οποία δεν ορίζεται για $x = 1$. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του $f(x)$ για τιμές του x κοντά στο 1.

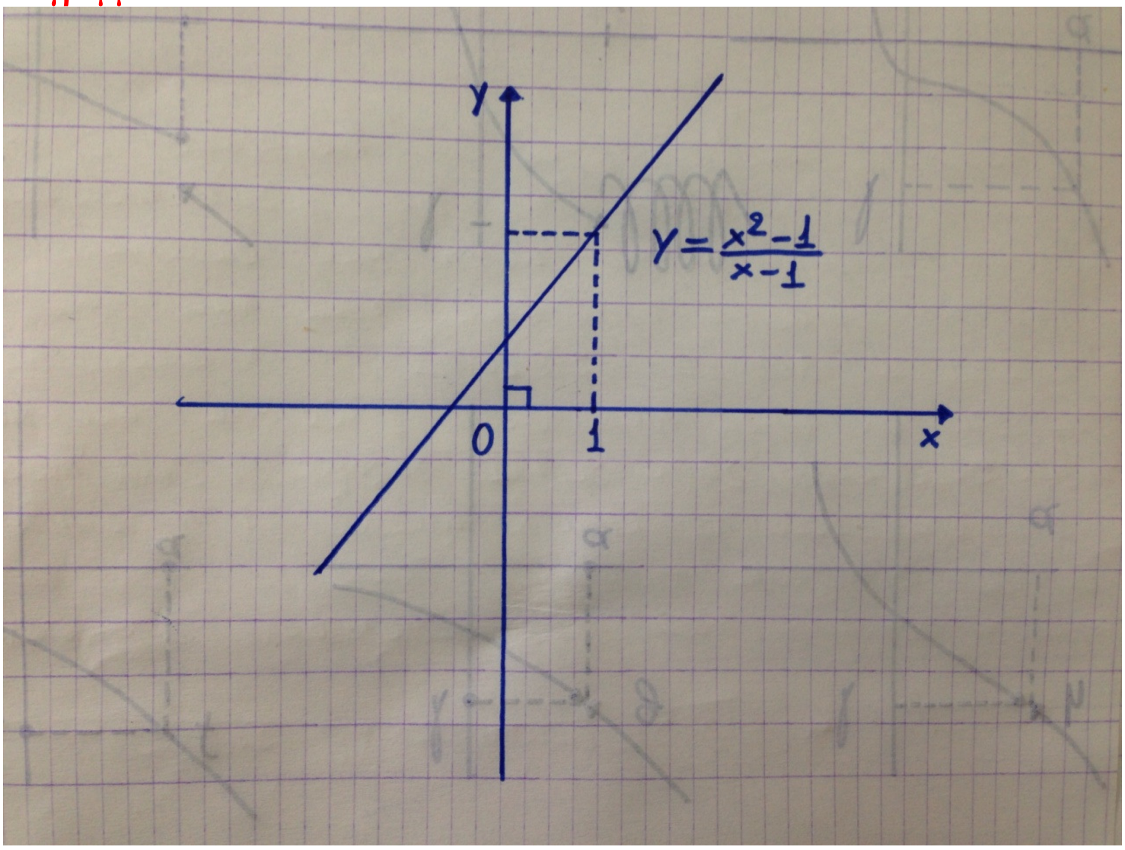
$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0,5	1,500000	1,5	2,500000
0,9	1,900000	1,1	2,100000
0,99	1,990000	1,01	2,010000
0,999	1,999000	1,001	2,001000
0,9999	1,999900	1,0001	2,000100

Από τον πιο πάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (και από τις δυο πλευρές του 1), το $f(x)$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν παρατηρήσουμε πως για το $x \neq 1$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1,$$

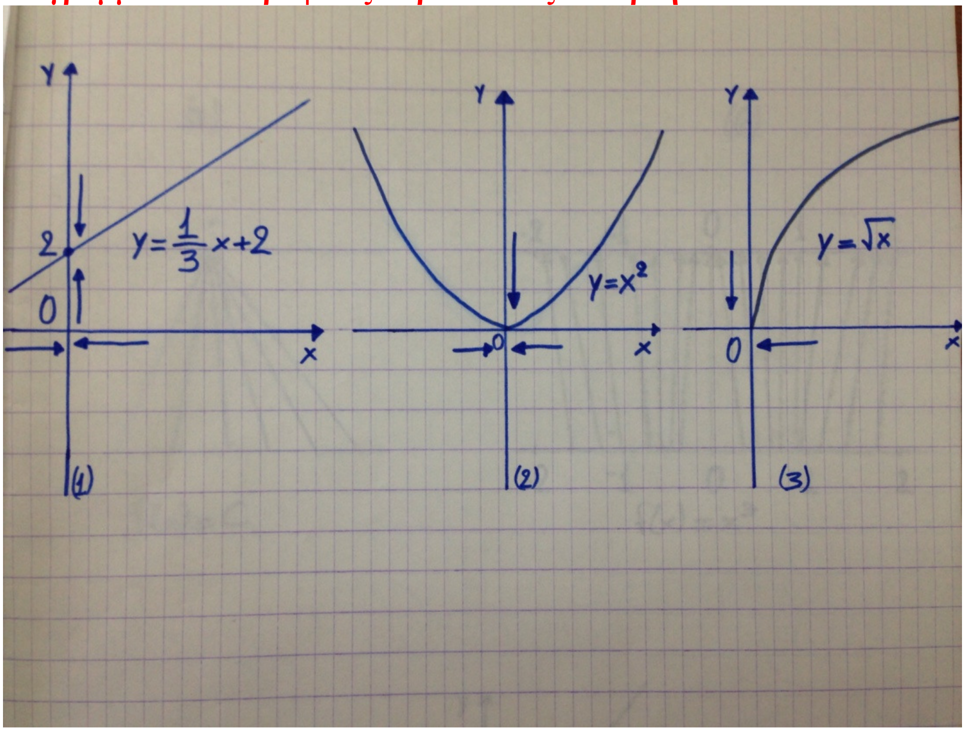
όποτε όταν το x παίρνει τιμές που τείνουν στο 1 $(x \to 1)$, τότε το $f(x) = x+1$ παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 $(x+1 \to 2)$. Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και γράφουμε $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

Διάγραμμα 1.4.3



Με το προηγούμενο παράδειγμα παρουσιάσαμε με απλό τρόπο και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα την έννοια του ορίου μια συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, υπάρχουν όμως σημεία του πεδίου ορισμού της πολύ κοντά στο x_0. Τίποτα βέβαια δεν αποκλείει την αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης και σε ένα σημείο x_0 που να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$, που είναι ορισμένη στο $\Re$. Παρατηρούμε ότι όταν $x \to 0$, το $f(x) \to 2$, δηλαδή $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$. Ομοίως, $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ και $\lim_{x\to 0} \sqrt{x = 0}$.

Διάγραμμα 1.4.4: Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων



ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \Re, f: A \to \Re$ συνάρτηση, x_0 σημείο συσσώρευσης του A και $l \in \Re$.
Λέγεται ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 εξ αριστερών είναι l και συμβολικα γράφουμε $\lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = l$, εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ να έχουμε $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Λέγεται ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 εκ δεξιών είναι l και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = l$, εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ να έχουμε $|f(x) - l| < \varepsilon$.

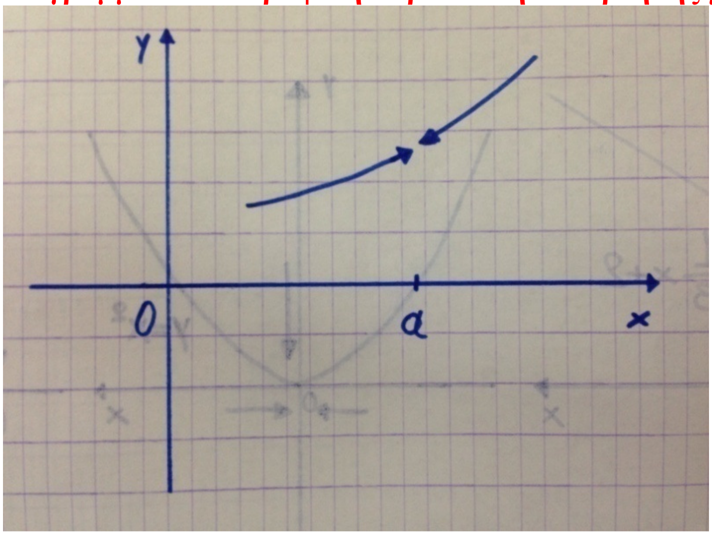
Ορισμός: : Έστω $A \subseteq \Re, f: A \to \Re$ συνάρτηση και x_0 σημείο συσσώρευσης του A
Λέγεται ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 εξ αριστερών είναι $+\infty$ (αντίστοιχα, $-\infty$) και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = +\infty$ (αντίστοιχα, $\lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = -\infty$), εάν για κάθε $E > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ να έχουμε $f(x) > E$ (αντίστοιχα, $f(x) < -E$).
Λέγεται ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 εκ δεξιών είναι $+\infty$ (αντίστοιχα, $-\infty$) και συμβολικά γράφουμε $\lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = +\infty$ (αντίστοιχα, $\lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = -\infty$), εάν για κάθε $E > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, για κάθε $x \in A$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ να έχουμε $f(x) > E$ (αντίστοιχα, $f(x) < -E$).
Πηγή: Μεγαρίτης κ.ά., 2010

1.5 Συνέχεια συναρτήσεων

Αν f είναι μια τυχαία συνάρτηση, δεν ισχύει αναγκαστικά ότι $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

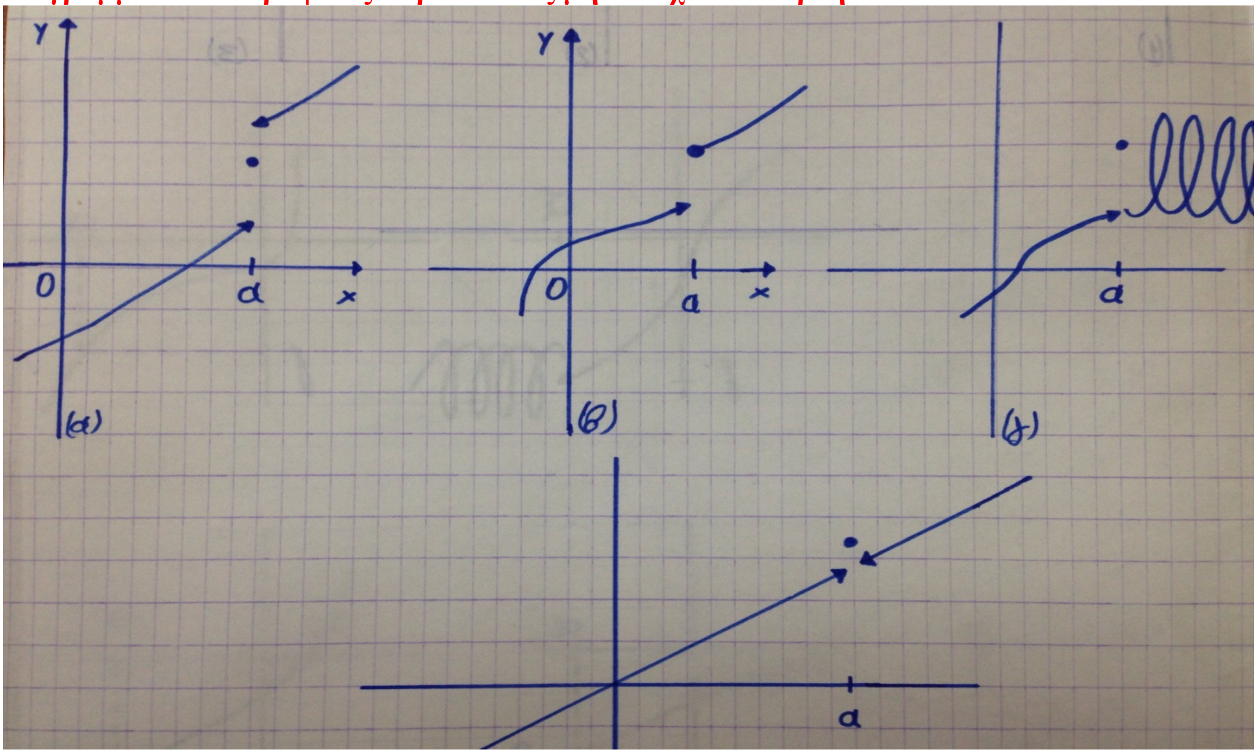
Πράγματι, η παραπάνω σχέση μπορεί να μην ισχύει για πολλούς λόγους. Για παράδειγμα, η f μπορεί να μην ορίζεται καν στο a, όποτε σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση δεν έχει νόημα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Διάγραμμα 1.5.1: Γραφική παράσταση συνάρτησης με όριο



Μπορεί πάλι να μην υπάρχει το $\lim_{x \to a} f(x)$ στο παρακάτω σχήμα. Τέλος, όπως φαίνεται στο τελευταίο σχήμα ακόμα και αν η f ορίζεται στο a και το $\lim_{x \to a} f(x)$ υπάρχει, το όριο μπορεί να μην είναι ίσο με $f(a)$.

Διάγραμμα 1.5.2: Γραφικές παραστάσεις μη συνεχών συναρτήσεων

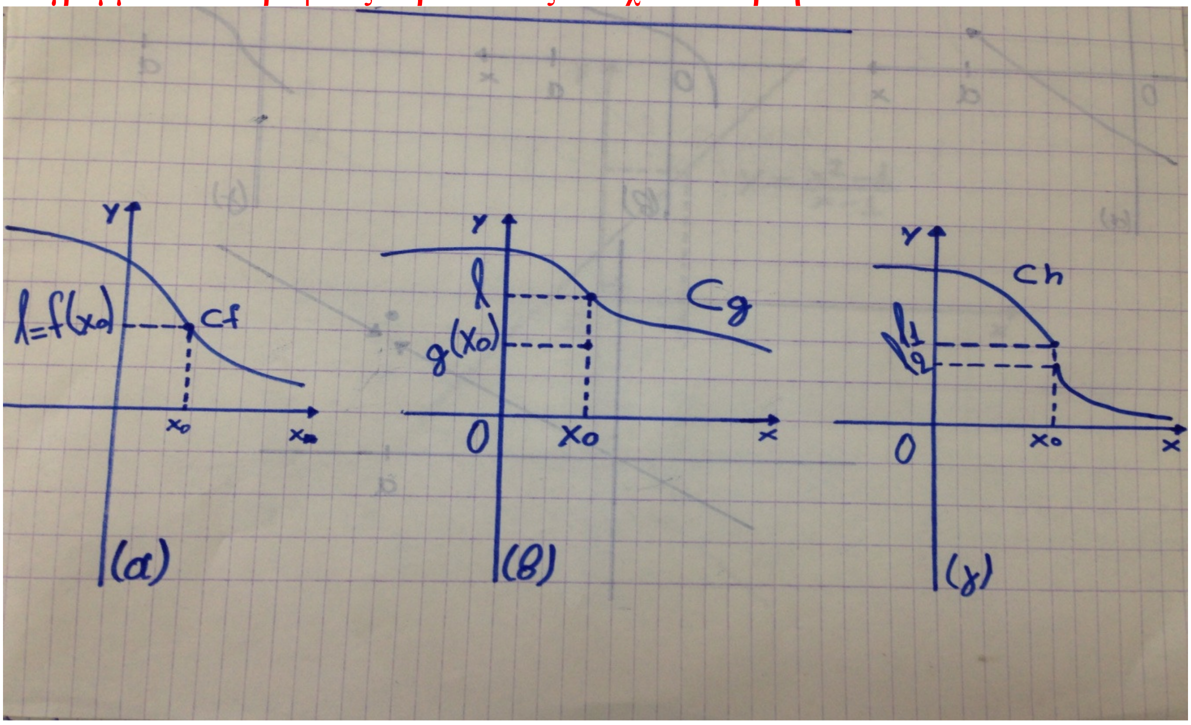


Θα ήταν εύλογο να χαρακτηριστεί αφύσικη κάθε συμπεριφορά αυτού του τύπου και να τοποθετήσουμε έναν τίτλο ευγενείας, σε εκείνες τις συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν τέτοιες ιδιαιτερότητες. Ο όρος που έχει γίνει αποδεκτός είναι <<συνεχής>>. Διαισθητικά, μια συνάρτηση f είναι συνεχής αν η γραφική παράσταση δεν παρουσιάζει χάσματα, άλματα ή απότομες ταλαντώσεις. Αν και αυτή η περιγραφή συνήθως επιτρέπει στον καθένα να αποφανθεί για το αν μια συνάρτηση είναι συνεχής κοιτάζοντας απλώς τη γραφική της παράσταση, μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε πλάνη, για αυτό ο ακριβής ορισμός είναι πολύ σημαντικός.

Ορισμός: Η συνάρτηση είναι συνεχής στο a αν $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα:

Διάγραμμα 1.5.3: Γραφικές παραστάσεις συνεχών συναρτήσεων



<u>**Παρατηρούμε ότι:**</u>

- Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq g(x_0)$.
- Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριο της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του παραπάνω σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως φυσικό να ονομάσουμε συνεχή στο x_0 μόνο τη συνάρτηση f. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0 αφού: $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριο της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριο της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$, στο σημείο x_0.
Για παράδειγμα:

- Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & αν\ \ x \le 0 \\ 2-x & αν\ \ x>0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0 αφού $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2+1) = 1$, ενώ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2-x) = 2$ οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

Πολλά από τα θεωρήματα της ανάλυσης αναφέρονται σε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Είναι, επομένως απαραίτητο να γνωρίζουμε τι αινούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα.

Ορισμός:

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

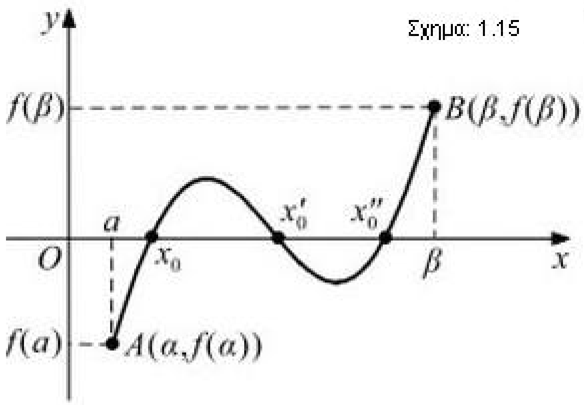
Θεώρημα του Bolzano

Ορισμός:

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επιπλέον ισχύει
- $f(a)\cdot f(\beta) < 0$.

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοιχτό διάστημα (α,β).

Διάγραμμα 1.5.4: Απεικόνιση θεωρήματος Bolzano



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

<u>Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών:</u>

Το συγκεκριμένο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano καθώς επίσης είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

<u>Ορισμός:</u>

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός

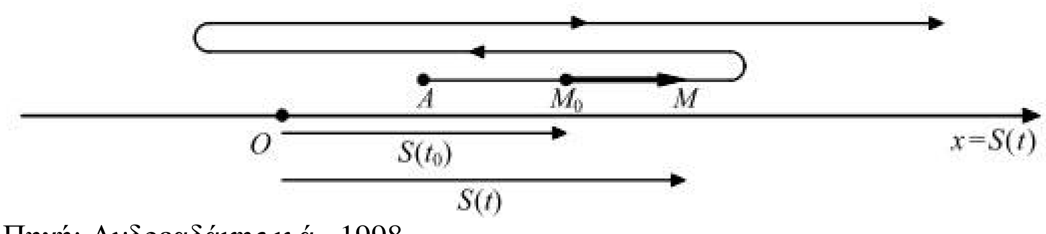
2.1 Παράγωγοι Συναρτήσεων

Σε αυτό το μέρος, θα ασχοληθούμε με δυο έννοιες, η μια είναι αυτή της συνάρτησης, ενώ η άλλη είναι αυτή του ολοκληρώματος. Οι δυο αυτές έννοιες μαζί αποτελούν την πηγή, όπου αντλεί την ιδιαίτερη γοητεία ο απειροστικός λογισμός. Η έννοια της συνάρτησης, τα όρια, η συνέχεια και πολλές έννοιες που έχουμε ασχοληθεί μέχρι τώρα, μπορεί να είναι θεμελιώδεις και απαραίτητα στην επιστήμη των οικονομικών και των μαθηματικών, ωστόσο είναι αλήθεια ότι είναι μια προετοιμασία για αυτήν την ενότητα. Οι έννοιες αυτές, θεωρείται ότι είναι κυρίως μαθηματικές, παρόλα αυτά οι πιο πολλές ιδέες, παραδείγματα και ορισμοί χρησιμοποιήθηκαν στην Φυσική. Έτσι λοιπόν με κάποια μικρή βοήθεια, αυτής της επιστήμης θα δούμε μερικά παραδείγματα.
(Michael Spivak, 2013)

<u>Στιγμιαία ταχύτητα:</u>

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα το οποίο κινείται κατά μήκος ενός άξονα χ και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t.

Διάγραμμα 2.1.1: Γραφική παράσταση στιγμιαίας ταχύτητας ανά το χρόνο



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται συνάρτηση θέσης του κινητού. Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάποια χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και ότι μετά από παρέλευση χρόνου h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$ βρίσκεται στη θέση M.
Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $S(t) - S(t_0)$. Άρα, η μέση ταχύτητα του κινητού σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι:

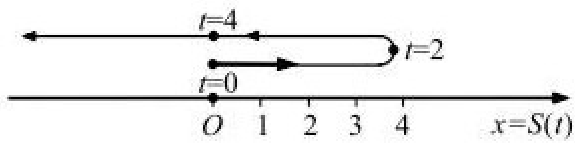
$$\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = \frac{μετατοπιση}{χρονος}$$

Όσο πιο κοντά είναι το t στο t_0, τόσο η μέση ταχύτητα του κινητού δίνει με καλύτερη προσέγγιση το ρυθμό αλλαγής της θέσης του κινητού κοντά στο t_0. Για το λόγο αυτό το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς το t τείνει στο t_0, το ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $U(t_0)$. Δηλαδή:

$$U(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

Για παράδειγμα, αν $S(t)=-t^2+4t$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού:

Διάγραμμα 2.1.2: Γραφική παράσταση στιγμιαίας ταχύτητας ανά το χρόνο



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά τις χρονικές στιγμές $t_0=1$, $t_2=2$, $t_3=3$ είναι αντιστοίχως:

- $U(1)=\lim_{t\to 1}\frac{S(t)-S(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{-t^2+4t-3}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{-(t-1)(t-3)}{t-1}=2$

- $U(2)=\lim_{t\to 2}\frac{S(t)-S(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{-t^2+4t-4}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{-(t-2)(t-2)}{t-2}=0$

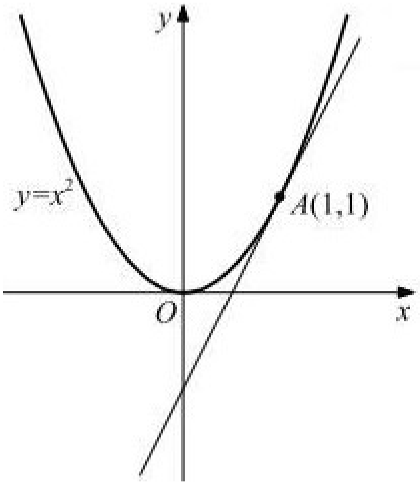
- $U(3)=\lim_{t\to 3}\frac{S(t)-S(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{-t^2+4t-3}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{-(t-1)(t-3)}{t-3}=-2$

Ορισμός:

Έστω μια συνάρτηση f και $A(x_0,f(x_0))$ ένα σημείο της Cf. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός λ τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της Cf στο σημείο της Α την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.
Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)$, όπου $\lambda=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$ και το σημείο της Α(1,1). Επειδή $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$ ορίζεται εφαπτόμενη της Cf στο σημείο της Α(1,1). Η εφαπτόμενη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$ και εξίσωση $y-1=2(x-1)$.

Διάγραμμα 2.1.3: Εφαπτομένη σε συνάρτηση



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Ο ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού και της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης μας οδήγησαν σε ένα όριο της μορφής: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Για την ιδιαίτερη περίπτωση που το παραπάνω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός:

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παραγωγός της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Για παράδειγμα:

αν $f(x)=x^2+1$, τότε στο $x_0=1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Επομένως, $f'(1)=2$

Αν τώρα, στην ισότητα $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$ τότε έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

2.2 Βασικές Παράγωγοι – Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

● Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in\Re$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή:

$(c)'=0$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$

Δηλαδή: $(c)'=0$

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή:

$(x)'=1$.

Πράγματι αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$ δηλαδή: $(x)'=1$.

● Έστω η συνάντηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in N-\{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή: $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

Πράγματι αν x_0 είναι ένα σημείο στο $\Re$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0{}^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+....+x_0{}^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+...+x_0{}^{\nu-1}$$

οπότε, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+...+x_0{}^{\nu-1}\right)=x_0{}^{\nu-1}+x_0{}^{\nu-1}+...+x_0{}^{\nu-1}=\nu x_0{}^{\nu-1}$

δηλαδή: $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

● Έστω η συνάντηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή: $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq 0$, ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_o)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ δηλαδή, $\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ δηλαδή: $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

Πράγματι, για κάθε $x\in\Re$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}$$

Επειδή, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0$ έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x$$ δηλαδή: $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$ δηλαδή: $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

Πράγματι, για κάθε $x\in\Re$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}$$

οπότε,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x$$

δηλαδή: $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=e^x$ δηλαδή: $(e^x)=e^x$.

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$ δηλαδή: $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

2.3 Ιδιότητες Παραγώγων – Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

Παράγωγος Αθροίσματος

Πρώτο θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.
Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$ δηλαδή: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει: $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Παράγωγος Γινομένου

Δεύτερο θεώρημα:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)\cdot(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει: $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $c\in\Delta$ επειδή $(c)'=0$, σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα τότε ισχύει: $(cf(x))'=cf'(x)$

Για παράδειγμα, $\quad (7x^3)'=7(x^3)'=7\cdot 3x^2=21x^2$

Παράγωγος Πηλίκου

Τρίτο θεώρημα:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$ τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Για παράδειγμα, $\left(\frac{x^2}{5x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(5x-1) - x^2(5x-1)'}{(5x-1)^2} = \frac{2x(5x-1) - x^2\cdot 5}{(5x-1)^2} = \frac{10x^2 - 2x - 5x^2}{(5x-1)^2} = \frac{5x^2-2x}{(5x-1)^2}$, $x \neq \frac{1}{5}$.

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω ότι θέλουμε την παράγωγο της συνάρτησης $y = \eta\mu 2x$ η οποία είναι σύνθεση της $g(x) = 2x$ και της $f(x) = \eta\mu x$. Επειδή $\eta\mu 2x = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, έχουμε $(\eta\mu\ 2x)' = (2\eta\mu\ x \cdot \sigma\upsilon\nu\ x)' = 2(\eta\mu\ x)'\sigma\upsilon\nu\ x + 2\eta\mu\ x \cdot (\sigma\upsilon\nu\ x)' =$ $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x = 2(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$

Από ότι βλέπουμε η παράγωγος της $y = \eta\mu 2x$ δεν είναι συνάρτηση $y = \sigma\upsilon\nu 2x$, όπως ίσως θα περίμενε κανείς από τον τύπο $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$. Αυτό εξηγείται με το παρακάτω θεώρημα:

Τέταρτο θεώρημα

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.
Γενικά, όταν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:
$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

2.4 Μελέτη συνάρτησης με χρήση παραγώγων

Ένας από τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου είναι να δικαιολογήσουμε τον χρόνο που αφιερώσαμε μαθαίνοντας πώς να βρίσκουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης. Στη συνέχεια θα δούμε πως γενικά όταν κάποιος ξέρει λίγα πράγματα δηλαδή, έχει λίγες πληροφορίες για την f', τότε έχει πολλές πληροφορίες για την συνάρτηση f που τον αφορά. Το να αντλήσουμε όμως πληροφορίες για την συνάρτηση f η οποία μας αφορά, με βάση κάποιες πληροφορίες για την f', απαιτεί αρκετή και δύσκολη δουλειά και θα αρχίσουμε με ένα θεώρημα που είναι πραγματικά εύκολο και κατανοητό.
Ένα πολύ βασικό θεώρημα, από τα πολλά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού, είναι το Θεώρημα της Μέσης Τιμής. Αρχικά όμως, θα διατυπώσουμε το θεώρημα του Rolle, το οποίο είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και στη συνέχεια διατυπώνουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής, το οποίο αποδεικνύεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του Rolle.

Θεώρημα Rolle:

Αν μια συνάρτηση είναι:

● συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

● παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β) και

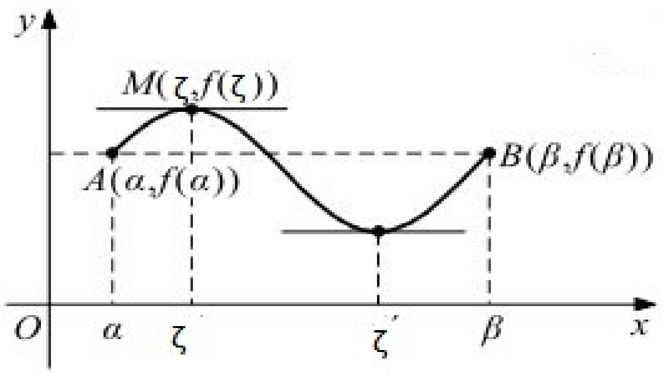
● $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\zeta\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\zeta)=0$.

Γεωμετρική Ερμηνεία:

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\zeta\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της Cf στο $M(\zeta,f(\zeta))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

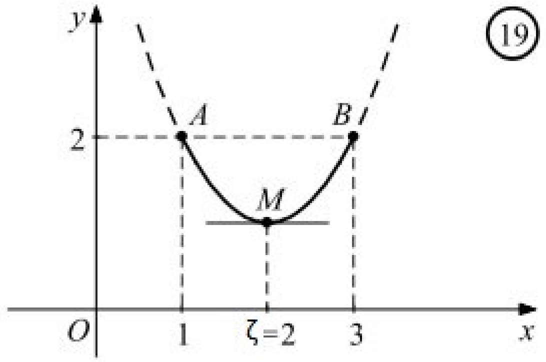
Διάγραμμα 2.4.1: Απεικόνιση εφαπτομένης μέσω θεωρήματος Rolle



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in[1,3]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ με $f'(x)=2x-4$ και $f(1)=2=f(3)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένας αριθμός $\zeta\in(1,3)$ τέτοιος ώστε $f'(\zeta)=0$. Για την εύρεση του αριθμού ζ, έχουμε: $f'(\zeta)=0\Leftrightarrow 2\zeta-4=0\Leftrightarrow\zeta=2$.

Διάγραμμα 2.4.2: Απεικόνιση εφαπτομένης μέσω θεωρήματος Rolle



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

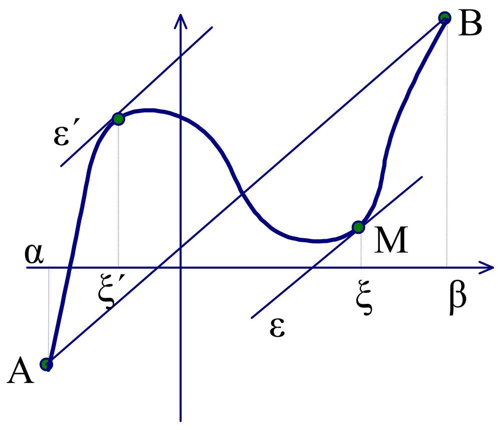
● συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

● παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β) και τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Αν το πάρουμε γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλα της ευθείας ΑΒ.

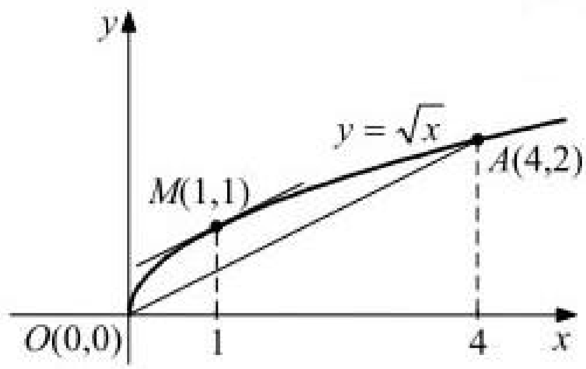
Διάγραμμα 3.4.3: Γεωμετρική απεικόνιση Θεωρήματος Μέσης Τιμής



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Για παράδειγμα έστω η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,4)$, με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει ένας αριθμός $\zeta\in(0,4)$ τέτοιος, ώστε $f'(\zeta)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{1}{2}$.

Διάγραμμα 3.4.4: Απεικόνιση συνάρτησης παραδείγματος



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

Για να βρούμε τον αριθμό ξ, έχουμε: $f'(\xi)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\xi}=1\Leftrightarrow\xi=1$.

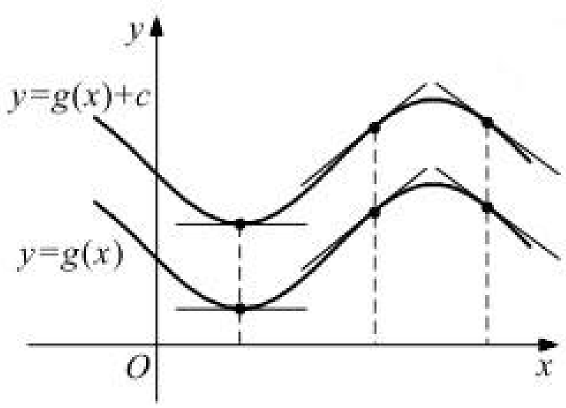
Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού θεωρείται μια από τις πιο σημαντικές προτάσεις της ανάλυσης, αφού με τη βοήθεια του αποδεικνύονται πολλά άλλα θεωρήματα. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής αποδεικνύουμε τα επόμενα δυο βασικά θεωρήματα.

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Διάγραμμα 3.4.5: Μονοτονία συνάρτησης

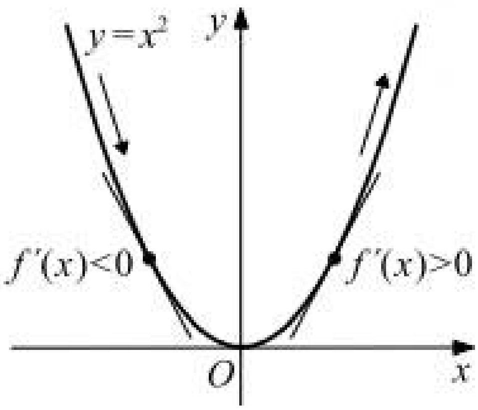


Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

<u>Μονοτονία Συνάρτησης</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(-\infty,0)$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $f'(x)=2x\leq 0$ ενώ στο διάστημα $(0,+\infty)$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $f'(x)=2x>0$. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στο πρόσημο και στη μονοτονία της παραγώγου της συνάρτησης. Συγκεκριμένα ισχύει.

Διάγραμμα 3.4.6: Μονοτονία συνάρτησης



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

<u>Θεώρημα:</u>

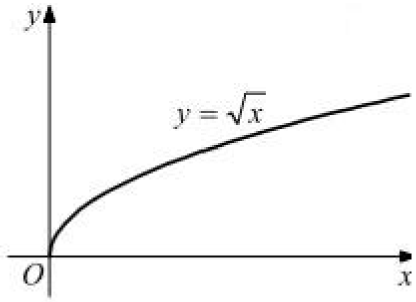
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Για παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Διάγραμμα 3.4.7: Απεικόνιση γνησίως αύξουσας συνάρτησης του παραδείγματος



Πηγή: Ανδρεαδάκης κ.ά., 1998

2.5 Αόριστα Ολοκληρώματα

Η παραγωγός και το ολοκλήρωμα είναι δυο έννοιες οι οποίες εμφανίζονται συχνά και μαζί, αυτό συμβαίνει καθώς η πρώτη τότε και μόνο τότε εμφανίζει όλη της την δύναμη, όταν δηλαδή παρουσιάζεται μαζί με το ολοκλήρωμα. Αν και στην αρχή αυτή θα οριστεί με έναν άλλο τρόπο ο οποίος είναι και λίγο πιο πολύπλοκος. Το ολοκλήρωμα τυποποιεί μια απλή διαισθητική έννοια, αυτή του εμβαδού. Ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης είτε είναι πραγματική ή μιγαδική, είναι μια νέα συνάρτησης της οποίας η παράγωγος είναι η αρχική συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα αυτό το ονομάζουμε αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγο, σε αντίθεση με το ορισμένο ολοκλήρωμα (το οποίο θα αναφερθεί παρακάτω) που μας δίνει μια αριθμητική τιμή και παρίσταται με το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης της συνάρτησης, του διαστήματος που ορίζεται και τις προβάλλουσες δυο σημείων της δοσμένης συνάρτησης. Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται επίσης ολοκλήρωμα κατά Riemann το οποίο θα δούμε παρακάτω. Εκτός από αυτά τα δυο είδη ολοκληρωμάτων υπάρχουν και άλλα είδη με τεράστιες εφαρμογές όχι μόνο στο χώρο της μαθηματικής επιστήμης άλλα και σε άλλες επιστήμες. Επιπλέον, υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα που τα όρια τους είναι τα κατ' εκδοχήν σημεία: το συν άπειρο, το πλην άπειρο και το συν-πλην άπειρο, ολοκληρώματα επιφανειακά, ολοκληρώματα επικαμπύλια, δίπλα – τριπλά και πολλαπλά ολοκληρώματα καθώς και ελλειπτικά ολοκληρώματα. Επίσης διακρίνονται σε: ολοκληρώματα γενικευμένα $1^{ου}$ είδους, $2^{ου}$ είδους και μικτού όπως και επικαμπύλια ολοκληρώματα $1^{ου}$ είδους με εφαρμογές στα προβλήματα κέντρου βάρους, μάζας καθώς και την εφαρμογή στο εμβαδόν επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή μιας γραμμής γύρω από άξονα. Επικαμπύλια $2^{ου}$ είδους με εφαρμογή στο έργο που παράγει υλικό σημείο με δοσμένη τη μάζα που κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση δύναμης από ένα σημείο σε ένα άλλο. Στην οικονομική επιστήμη συναντάμε πολλές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων σε προβλήματα υπολογισμού συναρτήσεων ολικών εσόδων, ολικού κόστους από τις αντίστοιχες συναρτήσεις οριακών εσόδων και οριακού κόστους. Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε το πλεόνασμα παραγωγού και καταναλωτή από τις συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς.

Ορισμός

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$, για την οποία μας είναι γνωστό ότι έχει προκύψει σαν παραγωγός μιας άλλης συνάρτησης $y(x)$, δηλαδή $\frac{dy(x)}{dx} = f(x)$ και ότι η $f(x)$ είναι γνωστή και η $y(x)$ άγνωστη. Ζητείται να προσδιορίσουμε την $y(x)$ δοθείσης της $f(x)$. Ένα τέτοιο πρόβλημα λέγεται διαφορική εξίσωση. Η λύση της είναι μια άλλη συνάρτηση, που ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα και συμβολίζεται << $\int f(x)dx$ >>. Γενικά:

● Κάθε συνάρτηση $f(x)$, συνεχής στο ανοιχτό διάστημα (α, β) είναι ολοκληρώσιμη στο (α, β).

● Κάθε συνάρτηση η οποία έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο (α, β), θα έχει άπειρα αόριστα ολοκληρώματα, τα οποία θα διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια σταθερά ποσότητα c. Επομένως, ο προηγούμενος τύπος γενικεύεται ως εξής: $\frac{dy(x)}{dx} = f(x) \Leftrightarrow y(x) = \int f(x)dx + c$

Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει:

$\int f'(x)dx = f(x) + c$, $c \in \Re$

Η διαδικασία εύρεσης του αορίστου ολοκληρώματος είναι αντίστροφη πορεία της παραγώγισης και λέγεται ολοκλήρωση. Η σταθερά c λέγεται σταθερά ολοκλήρωσης.

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ, συμβολίζεται $\int f(x)dx$ και διαβάζεται <<ολοκλήρωμα εφ του x ντε x>>. Δηλαδή, $\int f(x)dx = F(x) + c$, $c \in \Re$, όπου F μια παράγουσα της f στο Δ.

Για παράδειγμα:

$\int \sigma\upsilon\nu\chi dx = \eta\mu\chi + c$, αφού $(\eta\mu\chi)' = \sigma\upsilon\nu\chi$.

Η σταθερά c που αναφέραμε προηγουμένως αποτελεί δομικό και αναπόσπαστο στοιχείο του ολοκληρώματος και καλό είναι να μην παραλείπεται ποτέ. Όταν δίνονται ορισμένες πληροφορίες (αρχικές συνθήκες), η σταθερά αυτή μπορεί να προσδιοριστεί.

2.6 Βασικά Ολοκληρώματα

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, μπορούμε να αποδείξουμε τους παρακάτω τύπους των στοιχειωδών αόριστων ολοκληρωμάτων. Πράγματι, η παραγώγιση των δεύτερων μελών μας δίνει πάντα τα πρώτα.

Οι τύποι του παρακάτω πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

1.	$\int 0 d\chi = c$	6.	$\int \eta\mu\chi d\chi = -\sigma\upsilon\nu\chi + c$
2.	$\int 1 d\chi = \chi + c$	7.	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} d\chi = \varepsilon\phi\chi + c$
3.	$\int \frac{1}{\chi} d\chi = \ln\|\chi\| + c$	8.	$\int \frac{1}{\eta\mu^2\chi} d\chi = -\sigma\phi\chi + c$
4.	$\int \chi^a d\chi = \frac{\chi^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$	9.	$\int e^{\chi} d\chi = e^{\chi} + c$
5.	$\int \sigma\upsilon\nu\chi d\chi = \eta\mu\chi + c$	10.	$\int a^{\chi} d\chi = \frac{a^{\chi}}{\ln a} + c$

2.7 Ιδιότητες Ολοκληρωμάτων

Συνέπεια του ορισμού του αόριστου ολοκληρώματος και των κανόνων παραγώγισης είναι οι εξής δυο ιδιότητες:
Αν οι συναρτήσεις έχουν f και g έχουν παράγουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε:

- $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \lambda \in \Delta$
- $\int (f(x) + g(x)) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Όπως βλέπουμε δεν υπάρχει ιδιότητα που να περιγράφει την συμπεριφορά του ολοκληρώματος σχετικά με το γινόμενο συναρτήσεων. Αυτή είναι και η αιτία της δυσκολία υπολογισμού ολοκληρωμάτων, εν αντιθέσει με την παραγώγιση που ακολουθεί συγκεκριμένο αλγόριθμο.

2.8 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Ο πίνακας των αόριστων ολοκληρωμάτων δεν είναι αρκετός για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας οποιασδήποτε συνάρτησης, όπως π.χ τα ολοκληρώματα $\int 2x\sqrt{x^2} + 3dx$ και $\int xe^x dx$. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο υπολογισμός γίνεται απλούστερος με τη βοήθεια των παρακάτω μεθόδων ολοκλήρωσης.

Μέθοδος Ολοκλήρωσης Κατά Παράγοντες

Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\cdot dx$ που είναι συνέπεια του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δυο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε ένα διάστημα Δ.
Πράγματι, για κάθε $x \in \Delta$, έχουμε $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$,
Οπότε $f(x)\cdot g'(x) = (f(x)\cdot g(x))' - f'(x)\cdot g(x)$
Επομένως, $\int f(x)\cdot g'(x)dx = \int (f(x)\cdot g(x))'dx - \int f'(x)\cdot g(x)\cdot dx$
ή ισοδύναμα, $\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) + c - \int f'(x)\cdot g(x)dx$ (1)

Επειδή το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της πιο πάνω σχέσης (1), περιέχει μια σταθερά ολοκλήρωσης, το c μπορεί να παραλειφθεί, οπότε έχουμε τον παραπάνω τύπο.
Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα του β' μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

<u>Για παράδειγμα</u>
Ας, υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int xe^x dx$. Έχουμε: $\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$. Αν τώρα δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, αλλάζοντας τους ρόλους των x και e^x, βρίσκουμε $\int xe^x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{x}e^x dx$. Το τελευταίο, όμως ολοκλήρωμα είναι πιο σύνθετο από το αρχικό.

<u>Ολοκλήρωση με αντικατάσταση</u>

Με αυτή τη μέθοδο υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$. Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

όπου, $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int f(u)\cdot du$ του δεύτερου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα. Η απόδειξη του τύπου αυτού στηρίζεται στο γνωστό κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Θέτουμε $u = x^2+1$ και $du = (x^2+1)'dx = 2xdx$, όποτε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{u}du &= \int u^{1/2}du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + c\end{aligned}$$

$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$.

2.9 Ορισμένα Ολοκληρώματα Riemann

Γενικότερα, έστω $y = f(x)$ ορισμένη και φραγμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για την οποία δεν υποθέτουμε ότι είναι συνεχής ούτε ότι όλες οι τιμές της είναι μη αρνητικές στο $[a, \beta]$. Παίρνουμε τυχαία διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ του $[a, \beta]$ και αντίστοιχο τυχαίο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, ..., \xi_\nu\}$ ενδιαμέσων σημείων και σχηματίζουμε το άθροισμα.
$\Sigma(f, \alpha, \beta, \Delta, \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$.
Το $\Sigma(f, \alpha, \beta, \Delta, \Xi)$ ονομάζεται άθροισμα Riemann της $y = f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ ως προς την διαμέριση Δ και το σύνολο Ξ των ενδιάμεσων σημείων. Έστω ότι καθώς το πλάτος της Δ γίνεται όσο μικρό θέλουμε, το άθροισμα $\Sigma(f, \alpha, \beta, \Delta, \Xi)$ πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε σε ένα πραγματικό αριθμό τον οποίο σημειώνουμε με I. Τότε λέμε ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\alpha, \beta]$ και συμβολίζουμε τον αριθμό I με $\mathrm{I} = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Φυσικά, τα παραπάνω ισχύουν για κάθε διαμέριση Δ και κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ. Όμως αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\alpha, \beta]$ τότε για να υπολογίσουμε τον αριθμό I αρκεί να περιοριστούμε σε κάποια διαμέριση Δ και κάποια επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ και να εξασφαλίσουμε ότι το πλάτος της διαμέρισης που επιλέξαμε είναι αρκετά μικρό.
Οι παρακάτω προτάσεις μας εξασφαλίζουν την ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann μιας μεγάλης κλάσης συναρτήσεων.

- Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

- Αν η $y = f(x)$ είναι μονότονη στο $[\alpha, \beta]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται τμηματικά συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ αν η συνάρτηση ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$ και είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων $a \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq \beta$. Επιπλέον, σε κάθε σημείο ασυνέχειας θα πρέπει να υπάρχουν τα αριστερά και δεξιά όρια. Στα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ αρκεί να υπάρχει ένα από τα δυο πλευρικά όρια (στο α αρκεί να υπάρχει το από δεξιά όριο και στο β άκρο το από αριστερά όριο).
Αν η $y = f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

Ιδιότητες Ολοκληρωμάτων Riemann

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και λ είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Τότε και η $y = \lambda \cdot f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Έστω ότι οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha, \beta]$. Τότε και η $y = f(x) + g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \int_{a}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx .$$

Τα θεμελιώδη θεωρήματα

Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:
Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \Re$ συνεχής συνάρτηση και $F : [\alpha, \beta] \to \Re$ παράγουσα της f. Τότε, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha)$.

Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:
Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \Re$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : [\alpha, \beta] \to \Re$ με $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t) dt, x \in [\alpha, \beta]$. Τότε, η F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

2.10 Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

Τα ορισμένα ολοκληρώματα έχουν τις εξής ιδιότητες:

Ιδιότητα 1

Η εναλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης αλλάζει το πρόσημο του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Παράδειγμα

$$\int_{1}^{0} [2 - 3x^2] dx = \int_{0}^{1} (3x^2 - 2) dx = 3\int_{0}^{1} x^2 dx - 2\int_{0}^{1} dx = 3\left[\frac{x^2}{3}\right]_0^1 - 2[x]_0^1 = 3\left(\frac{1}{3} - 0\right) - 2(1 - 0) = 1 - 2 = -1$$

Ιδιότητα 2

Ένα ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ίσο με το 0 όταν τα δυο όρια είναι όμοια.

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

Αυτό υποδηλώνει πως το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και των αξόνων είναι μηδέν σε κάθε σημείο. Αυτό συμβαίνει γιατί το επίπεδο είναι μονοδιάστατο και όχι δισδιάστατο και δεν μπορούν να χαραχτούν πάνω από μια γραμμές.

Ιδιότητα 3

Ένα ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα πεπερασμένου αριθμού υπό ολοκληρωμάτων.

$$\int_a^d f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx, \ (a < b < c < d)$$

Η ιδιότητα αυτή που αναφέρεται και σαν προσθετική μας βοηθάει να ολοκληρώνουμε τις ασυνεχείς συναρτήσεις σε σημεία κατά Riemann. Ακόμα βοηθά στον ευκολότερο υπολογισμό εμβαδού.
<u>Σημείωση:</u> Αν και θεωρούμε μόνο κλειστά διαστήματα τα οριακά σημεία b και c αυτά δεν συμπεριλαμβάνονται δυο φορές στον υπολογισμό του εμβαδού όπως θα έπρεπε να γίνει αφού η **Ιδιότητα 2** μας λέει ότι η επιφάνεια πάνω από ένα σημείο είναι μηδέν έτσι ώστε ο διπλός υπολογισμός να μην έχει καμία επίδραση στις πράξεις μας. Στην περίπτωση που έχουμε ασυνεχείς συναρτήσεις τότε μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του τμήματος που μας ενδιαφέρει ή των τμημάτων απλά προσθέτοντας τα ορισμένα ολοκληρώματα. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Ιδιότητα 4

$$\int_a^b [-f(x)dx] = -\int_a^b f(x)dx$$

Ιδιότητα 5

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \ k = \textit{σταθερός αριθμός}$$

Ιδιότητα 6

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Ιδιότητα 7

Το ολοκλήρωμα κάθε περιττής συνάρτησης $f(x)\big(f(-x) = -f(x)\big)$ με αντίθετα άκρα ολοκλήρωσης είναι μηδέν: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Ιδιότητα 8

Το ολοκλήρωμα κάθε άρτιας συνάρτησης $f(x)\big(f(-x) = f(x)\big)$ με αντίθετα άκρα ολοκλήρωσης είναι ίσο με: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

<u>Διαφορετική έκφραση του αόριστου ολοκληρώματος</u>

Αν στο ορισμένο ολοκλήρωμα θεωρήσουμε το ένα άκρο ελεύθερο ως προς την μεταβλητή x, έχουμε: $\int_{a}^{x} f(x)dx = F(x) - F(a)$

Αν τώρα θέσουμε $c = -F(a)$, τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται ακριβώς το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int f(x)dx$.

<u>Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως συνάρτηση</u>

Το ολοκλήρωμα οποιασδήποτε συνεχούς συνάρτησης $f(t)$, $a \leq t \leq x$ ορίζεται ως: $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ και είναι συνάρτηση του άνω άκρου x της ολοκλήρωσης (όπου a είναι σταθερά και x μια μεταβλητή).

Η συνάρτηση $F'(x) = f(x)$ δηλαδή: $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(x)$ που σημαίνει ότι: κάθε συνεχής συνάρτηση έχει ένα αόριστο ολοκλήρωμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Οικονομικές Συναρτήσεις

3.1 Συναρτήσεις Κόστους, Εσόδων και Κερδών

Οι οικονομικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για συνήθεις υπολογισμούς, οι οποίοι σχετίζονται με χρήματα (αποσβέσεις, δάνεια κτλ)

Ορισμός κόστους
Κόστος είναι η επένδυση ή διάθεση αγοραστικής δύναμης για την απόκτηση υλικών η άυλων αγαθών και υπηρεσιών με απώτερο σκοπό τη χρησιμοποίηση τους για την πραγματοποίηση εσόδων από πωλήσεις που προέρχονται από συναλλαγές των πελατών ή την κάλυψη κοινωνικών αναγκών. Με άλλα λόγια, κόστος παραγωγής είναι οι οικονομικές θυσίες τις οποίες κάνει μια επιχείρηση για να ανταποκριθεί στις ανάγκες της παραγωγής. Για τον επιχειρηματία, το κόστος παραγωγής είναι το σύνολο των δαπανών για την αγορά παραγωγικών συντελεστών οι οποίοι χρησιμοποιούνται στην παραγωγή του προϊόντος του. Δηλαδή, στην οικονομική θεωρία το κόστος ορίζεται κάπως διαφορετικά. Το κόστος χωρίζεται σε δυο έννοιες: α) το κοινωνικό κόστος και β) το ιδιωτικό κόστος.

Κοινωνικό κόστος παραγωγής: είναι το κόστος στο οποίο υποβάλλεται μια κοινωνία όταν οι παραγωγικοί πόροι της χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ενός δεδομένου προϊόντος.

Ιδιωτικό κόστος παραγωγής: νοείται το χρηματικό ποσό που πρέπει να πληρώσει ο επιχειρηματίας για την απόκτηση διάφορων παραγωγικών συντελεστών που είναι απαραίτητοι για την παραγωγή ενός προϊόντος.

Το κόστος παραγωγής διακρίνεται σε: Συνολικό Κόστος TC, Σταθερό Κόστος FC και Μεταβλητό Κόστος VC.

Συνολικό Κόστος TC
Είναι το σύνολο των δαπανών στις οποίες προβαίνει η επιχείρηση για την παραγωγή του προϊόντος της. Το συνολικό κόστος, εκτός του τόκου των ιδίων κεφαλαίων και των ενοικίων των ιδιόκτητων εγκαταστάσεων, περιλαμβάνει και την αμοιβή του επιχειρηματία. Το συνολικό κόστος διακρίνεται σε συνολικό κόστος και σε μεταβλητό κόστος προσθέτοντας επίσης ότι αποτελείται από το άθροισμα αυτών των δυο.

Σταθερό Κόστος FC
Το σταθερό κόστος περιλαμβάνει τις δαπάνες που πραγματοποιεί η επιχείρηση ανεξαρτήτως του επιπέδου παραγωγής της όπως είναι για παραδείγματα τα ενοίκια, οι μισθοί, πάγια έξοδα κ.λ.π. Το σταθερό κόστος επιβαρύνει την επιχείρηση και όταν αυτή δεν παράγει. Το σταθερό κόστος επιβαρύνει την επιχείρηση και όταν αυτή δεν παράγει.

Μεταβλητό Κόστος VC
Το συνολικό μεταβλητό κόστος περιλαμβάνει τις δαπάνες παραγωγής του προϊόντος, οι οποίες μεταβάλλονται με τη καταβολή του επιπέδου παραγωγής, δηλαδή τις δαπάνες για πρώτες και βοηθητικές ύλες, για αμοιβές εργασίας κ.λ.π. Όταν αυξάνεται το επίπεδο

παραγωγής χρησιμοποιώντας περισσότερη εργασία και πρώτες ύλες, αυξάνεται και το μεταβλητό κόστος της επιχείρησης και αντίστροφα.

<u>Υπολογισμός μεταβλητού κόστους</u>:

α) Όταν μοναδικός μεταβλητός συντελεστής παραγωγής είναι η εργασία L τότε:

$VC = W \times L$ όπου W = η αμοιβή της εργασίας

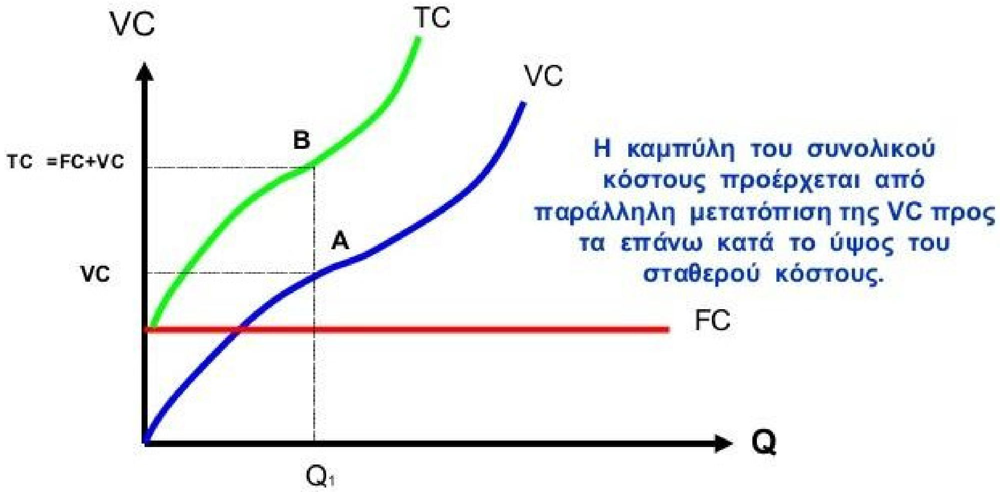
β) Όταν μεταβλητοί συντελεστές παραγωγής είναι η εργασία και οι πρώτες ύλες τότε:

$VC = (W \times L) + (C \times Q)$ όπου C = το κόστος της πρώτης ύλης ανά μονάδα

Το άθροισμα του μεταβλητού κόστους και του σταθερού κόστους είναι το συνολικό (βραχυχρόνιο) κόστος TC μιας επιχείρησης.

Συνολικό κόστος = Σταθερό κόστος + Μεταβλητό κόστος ή $TC = FC + VC$

Διάγραμμα 3.1.1: Καμπύλη συνολικού κόστους



Πηγή: Λιανός κ.ά.

<u>Παράδειγμα</u>: Μια επιχείρηση έχει ορισμένους σταθερούς συντελεστές οι οποίοι αποτελούνται από κτήρια εγκαταστάσεις και μηχανές. Για την παραγωγή της χρησιμοποιεί σταθερούς συντελεστές, οι οποίοι είναι η εργασία και οι πρώτες ύλες. Η δαπάνη για πρώτη ύλη προϊόντος είναι 150€. Η αμοιβή κάθε εργάτη είναι 2000€ και το σταθερό κόστος (FC) είναι 5000€. Με βάση τον παρακάτω πίνακα έχουμε:

Πίνακας

Αριθμός Εργατών L	Συνολικό Προϊόν Q	Σταθερό Κόστος FC	Μεταβλητό Κόστος VC	Συνολικό Κόστος TC
0	0	5000	0	5000
1	7	5000	$2000 \cdot 1 + 150 \cdot 7 = 3050$	8050
2	21	5000	$2000 \cdot 2 + 150 \cdot 21 = 8550$	8550
3	40	5000	$2000 \cdot 3 + 150 \cdot 40 = 17000$	17000
4	56	5000	$2000 \cdot 4 + 150 \cdot 56 = 16400$	21400

5	68	5000	$2000 \cdot 5 + 150 \cdot 68 = 20200$	25200
6	73	5000	$2000 \cdot 1 + 150 \cdot 73 = 22950$	27950
7	75	5000	$2000 \cdot 7 + 150 \cdot 75 = 27250$	30250
8	75	5000	$2000 \cdot 8 + 150 \cdot 75 = 27250$	32250

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη αναγράφει τον αριθμό των εργατών και η δεύτερη στήλη το συνολικό προϊόν. Παρατηρούμε επίσης ότι όταν $Q = 0$ τότε $FC = TC$. Στην τρίτη στήλη απεικονίζεται το σταθερό κόστος για την χρονική περίοδο που είναι 5000. Στην τέταρτη στήλη αναγράφεται το μεταβλητό κόστος το οποίο εξαρτάται από την αμοιβή των εργατών επί το πλήθος τους αθροίζοντας την πρώτη ύλη επί τον αριθμό του συνολικού προϊόντος. Άρα το συνολικό κόστος δίνεται από την εξής σχέση: $TC = 5000 + 2000L + 150Q$.

Μέσο Συνολικό Κόστος ATC

Είναι το συνολικό κόστος παραγωγής διαιρούμενο με το συνολικό προϊόν, δηλαδή είναι το σύνολο των δαπανών κατά μονάδα παραγωγής.

Μέσο συνολικό κόστος: $$ATC = \frac{\text{Συνολικό κόστος}}{\text{Ποσότητα Παραγωγής}} = \frac{TC}{Q}.$$

Το μέσο συνολικό κόστος διακρίνεται σε μέσο σταθερό κόστος AFC και σε μέσο μεταβλητό κόστος AVC $\quad ATC = AFC + AVC$.

Μέσο Σταθερό Κόστος AFC

Το μέσο σταθερό κόστος βρίσκεται αν διαιρέσουμε τις συνολικές σταθερές δαπάνες με το συνολικό προϊόν, δηλαδή μέσο σταθερό κόστος:

$$AFC = \frac{\text{Σταθερό Κόστος}}{\text{Ποσότητα Παραγωγής}} = \frac{FC}{Q}.$$

Μέσο Μεταβλητό Κόστος AVC

Το μέσο μεταβλητό κόστος βρίσκεται, αν διαιρέσουμε το σύνολο των μεταβλητών δαπανών με το συνολικό προϊόν, δηλαδή μέσο μεταβλητό κόστος:

$$AVC = \frac{\text{Μεταβλητό Κόστος}}{\text{Ποσότητα Παραγωγής}} = \frac{VC}{Q}.$$

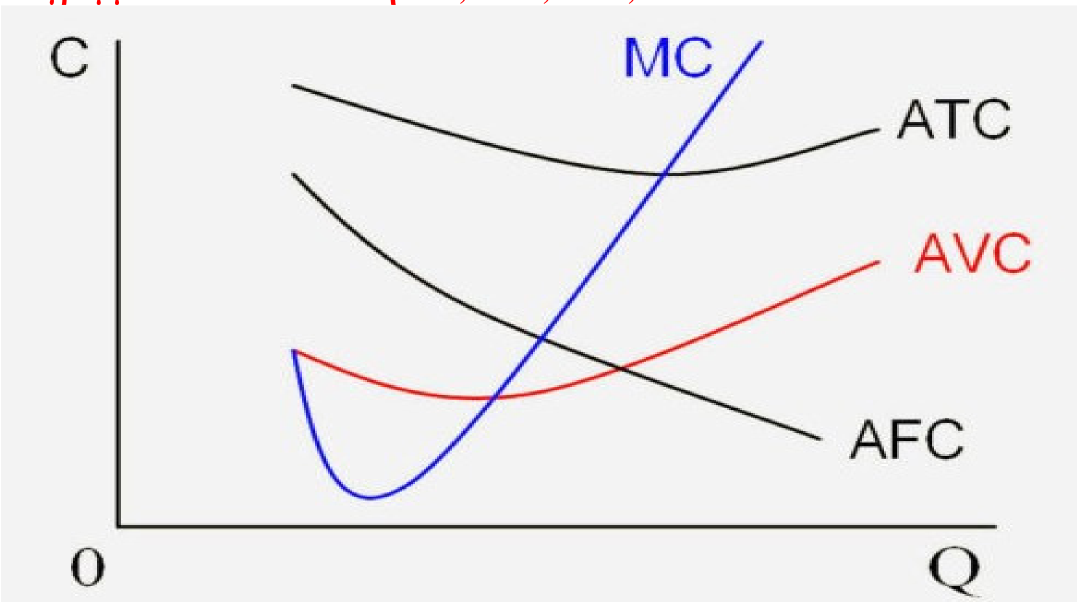
Το μέσο μεταβλητό κόστος μπορεί να *μειώνεται* ή να *αυξάνεται* με την επέκταση της παραγωγής.

Οριακό Κόστος MC

Είναι το κόστος το οποίο απαιτείται για την παραγωγή μιας πρόσθετης μονάδας προϊόντος, δηλαδή για την αύξηση του συνολικού προϊόντος κατά μια μονάδα.

$$MC = \frac{\text{Μεταβολή συνολικού κόστους}}{\text{Μεταβολή του προϊόντος}} = \frac{\Delta(TC)}{\Delta Q}$$

Διάγραμμα 3.1.2: Απεικόνιση MC, ATC, AVC, AFC



Ορισμός Εσόδου

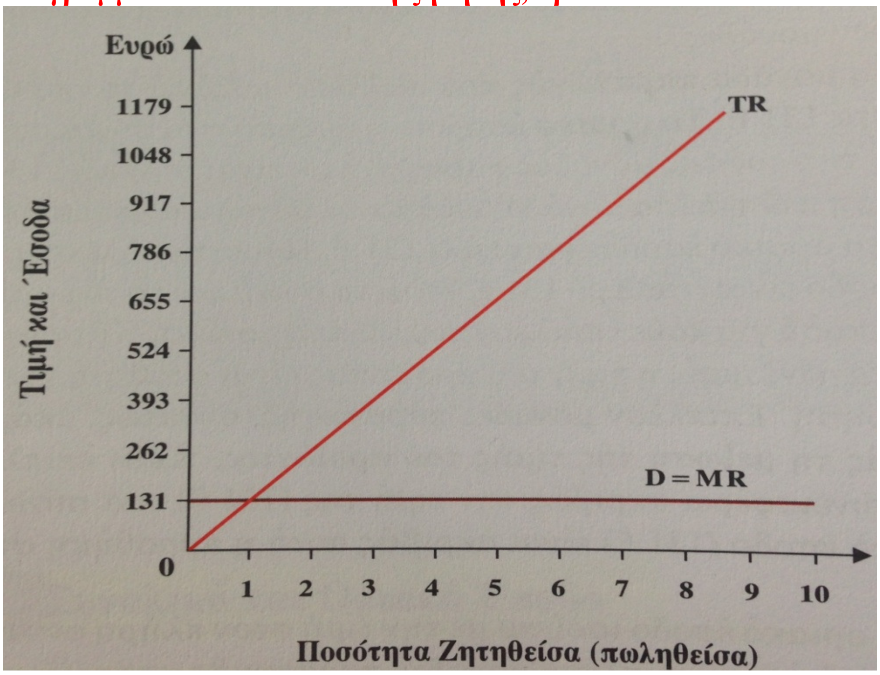
Έσοδο είναι οποιαδήποτε αύξηση που παρουσιάζουν τα οικονομικά στοιχεία μιας επιχείρησης στη διάρκεια της λογιστικής χρήσης της εκάστοτε χρονικής περιόδου, είτε υπό τη μορφή αύξησης στοιχείων του Ενεργητικού είτε με τη μορφή μείωσης στοιχείων του Παθητικού δηλαδή των υποχρεώσεων. Αν υπάρχει εισροή χρηματοοικονομικών πόρων στην επιχείρηση, τότε υπάρχει αύξηση της καθαρής θέσης και αύξηση του ενεργητικού. Αν υπάρχει ακύρωση της εκροής πόρων που θα χρειαζόταν για την εξόφληση υποχρεώσεων, τότε υπάρχει αύξηση της καθαρής θέσης και μείωση των στοιχείων των υποχρεώσεων. Επίσης, τα έσοδα προκύπτουν από πωλήσεις των Αγαθών που πραγματοποιούνται σε μια υπηρεσία ή επιχείρηση, από τις παροχές υπηρεσιών και από την χρησιμοποίηση από τρίτους δηλαδή στοιχεία του Ενεργητικού της.

Όταν μια επιχείρηση σκοπεύει μια μεταβολή στην παραγωγή της, θα εξετάσει πως τα έσοδα της θα μεταβληθούν ως αποτέλεσμα της μεταβολής αυτής στην παραγωγή. Ποιο θα είναι το επιπλέον έσοδο από την πώληση μιας επιπλέον μονάδος παραγωγής; Το **οριακό έσοδο** είναι η μεταβολή στα συνολικά έσοδα, δηλαδή τα επιπλέον έσοδα, τα οποία προέρχονται από την πώληση μιας επιπλέον μονάδας παραγωγής. Γενικά το οριακό έσοδο ισούται με την τιμή στον πλήρη ανταγωνισμό και είναι σταθερό διότι οι επιπλέον μονάδες παραγωγής μπορούν να πωληθούν στην σταθερή τιμή. Οπότε: Οριακό Έσοδο = Τιμή, $MR = T$

Επίσης ισχύει η σχέση: Αγοραία Τιμή = Μέσο Συνολικό Έσοδο = Οριακό Έσοδο $T = ATR = MR$.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρατηρούμε πως διαμορφώνεται η ζήτηση, το οριακό έσοδο και τα συνολικά έσοδα μιας πλήρης ανταγωνιστικής επιχείρησης:

Διάγραμμα 3.1.3: Απεικόνιση ζήτησης, οριακών εσόδων και συνολικών εσόδων



Πηγή: Κιόχος κ.ά., 2005

Σύμφωνα με το Διάγραμμα 3.1.3, επειδή μια πλήρως ανταγωνιστική επιχείρηση μπορεί να πουλάει επιπλέον μονάδες προϊόντος στη διαμορφωμένη τιμή αγοράς, το οριακό έσοδο MR συμπίπτει με την πλήρως ελαστική καμπύλη ζήτησης D. Η καμπύλη των συνολικών εσόδων της επιχείρησης TR είναι μια ευθεία γραμμή με ανοδική κλίση.

<u>Ορισμός Κέρδους</u>

Οικονομικό καθαρό κέρδος είναι η θετική διαφορά μεταξύ του συνόλου των εσόδων μιας επιχείρησης και του οικονομικού κόστους σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Το κέρδος αυτό πρέπει να διακριθεί από το λογιστικό κέρδος που βρίσκεται αν από το σύνολο των εσόδων μιας επιχείρησης αφαιρεθεί το εμφανές λογιστικό κόστος. Στην οικονομική επιστήμη ο όρος κέρδος αναφέρεται στο οικονομικό ή καθαρό κέρδος, δηλαδή στο κέρδος που πραγματοποιείται επιπλέον του φυσιολογικού που είναι απαραίτητο για τη συνέχιση της επιχειρηματικής δραστηριότητας και περιλαμβάνεται στο κόστος.

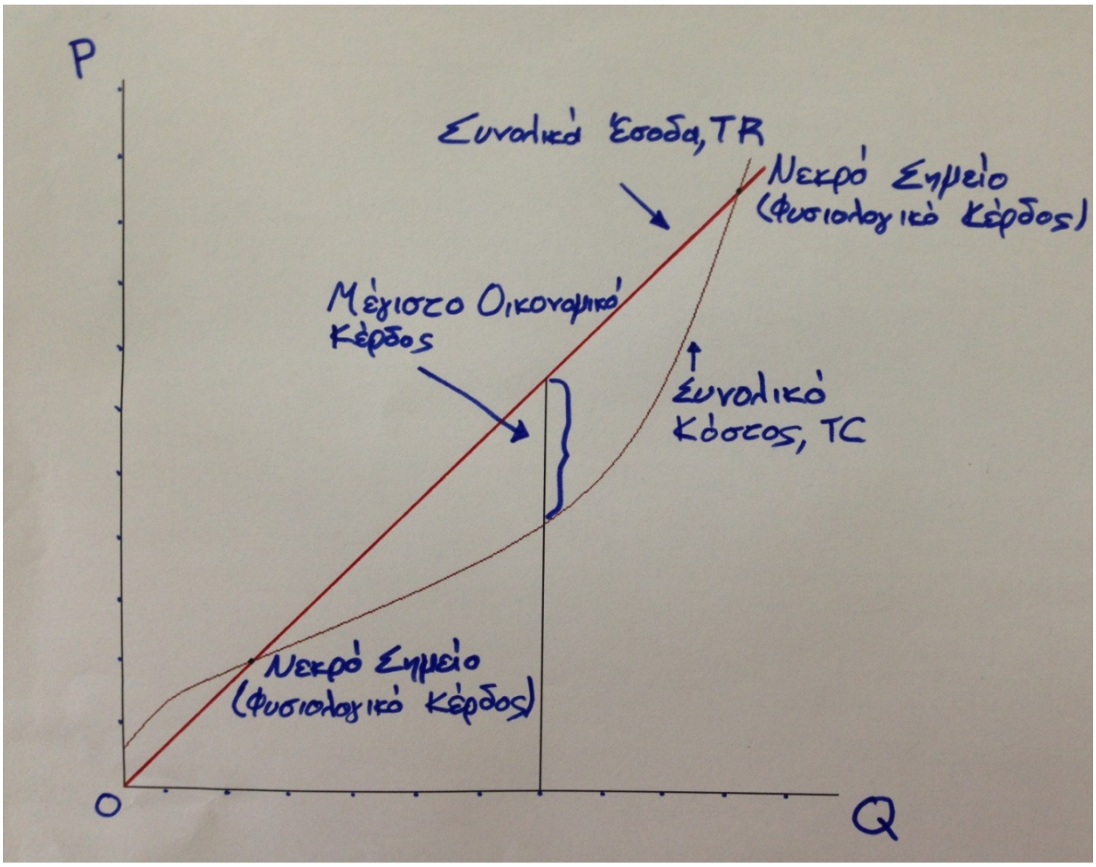
Με άλλα λόγια, σκοπός μιας επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους όσο το δυνατότερο είναι εφικτό να γίνει. Όταν μιλάμε για μια πλήρως ανταγωνιστική επιχείρηση τότε η τιμή του προϊόντος θεωρείται δεδομένη, δηλαδή αυτή που διαμορφώνεται στην αγορά, η επιχείρηση μπορεί να μεγιστοποιήσει το οικονομικό κέρδος της απλά προσαρμόζοντας την παραγωγή της. Σε μια βραχυχρόνια περίοδο μια επιχείρηση έχει σταθερή παραγωγική μονάδα, άρα η επιχείρηση έχει τη δυνατότητα να προσαρμόσει την παραγωγή της μόνο μέσω διάφορων μεταβολών στην ποσότητα των μεταβλητών παραγωγικών συντελεστών που η ίδια χρησιμοποιεί. Το οικονομικό κέρδος που επιδιώκει μια επιχείρηση προσαρμόζοντας τους μεταβλητούς παραγωγικούς συντελεστές είναι η διαφορά μεταξύ συνολικών εσόδων TR και συνολικού κόστους. Επίσης, σημαντικός είναι ο συνδυασμός των στοιχείων των εσόδων με τα στοιχεία του κόστους για να προσδιορίσουμε το επίπεδο της παραγωγής της πλήρως ανταγωνιστικής επιχείρησης, το οποίο μεγιστοποιεί το κέρδος. Γενικά υπάρχουν δυο τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προσδιορίσουμε το επίπεδο παραγωγής στο οποίο μια ανταγωνιστική επιχείρηση είναι εφικτό να πραγματοποιήσει το μέγιστο κέρδος ή την ελάχιστη ζημία.

Ο πρώτος τρόπος είναι να υπολογιστούν τα συνολικά έσοδα TR και το συνολικό κόστος TC σε διάφορα επίπεδα παραγωγής με αποτέλεσμα να βρεθεί αυτό το επίπεδο το οποίο εξασφαλίζει τη μεγαλύτερη διάφορα μεταξύ των συνολικών εσόδων και του συνολικού κόστους όταν η διαφορά αυτή είναι θετική ή την μικρότερη διαφορά η οποία θα είναι αρνητική. Ο δεύτερος τρόπος είναι να συγκριθεί το οριακό κόστος με το οριακό έσοδο για διάφορα επίπεδα παραγωγής και να προσδιοριστεί το επίπεδο το οποίο εξισώνει τα δύο αυτά μεγέθη και επομένως μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης ή ελαχιστοποιεί τις ζημιές της. Τόσο ο πρώτος τρόπος όσο και ο δεύτερος τρόπος, ισχύουν για μια πλήρως ανταγωνιστική επιχείρηση αλλά και για τις επιχειρήσεις οι οποίες λειτουργούν σε οποιαδήποτε από τις άλλες τρεις βασικές μορφές αγοράς.

Το Διάγραμμα 3.1.4 συγκρίνει τα συνολικά έσοδα και το συνολικό κόστος διαγραμματικά για την περίπτωση μεγιστοποίησης του κέρδους. Τα συνολικά έσοδα απεικονίζονται με μια ευθεία γραμμή, επειδή στον πλήρη ανταγωνισμό κάθε επιπλέον μονάδα παραγωγής προσθέτει το ίδιο ποσό στα συνολικά έσοδα. Το συνολικό κόστος αυξάνεται με την παραγωγή με αποτέλεσμα να απαιτεί περισσότερους πόρους, όμως ο ρυθμός αύξησης στο συνολικό κόστος διαφέρει με τη σχετική αποτελεσματικότητα της επιχείρησης. Συγκεκριμένα τα στοιχεία του κόστους αντικατοπτρίζουν το νόμο των φθινουσών οριακών αποδόσεων. Με επιπλέον παραγωγή, το συνολικό κόστος αρχίζει να αυξάνει με συνεχώς αυξανόμενα ποσά εξαιτίας των φθινουσών αποδόσεων λόγω της εντατικότερης χρήσης της παραγωγικής μονάδας.

Στο Διάγραμμα 3.1.4, στα σημεία όπου οι δυο καμπύλες τέμνονται, τα συνολικά έσοδα TR και το συνολικό κόστος TC είναι ίσα. Όλα τα κόστη καλύπτονται από τα έσοδα, αλλά δεν υπάρχει οικονομικό κέρδος. Για το λόγο αυτό οι οικονομολόγοι αποκαλούν αυτήν την παραγωγή Νεκρό Σημείο: (όπως φαίνεται πάνω στο διάγραμμα) μια παραγωγή στην οποία μια επιχείρηση πραγματοποιεί μόνο ένα φυσιολογικό κέρδος. Οποιοδήποτε επίπεδο παραγωγής μεταξύ των δυο Νεκρών σημείων που είναι απεικονισμένα στο Διάγραμμα 3.1.4, θα παράγει ένα οικονομικό κέρδος. Η επιχείρηση πραγματοποιεί το μέγιστο κέρδος, όπου η κάθετη απόσταση μεταξύ των καμπυλών του συνολικού εσόδου και συνολικού κόστους είναι μέγιστη. Όταν όμως οι καμπύλες του συνολικού εσόδου και του συνολικού κόστους τέμνονται, το οικονομικό κέρδος είναι μηδέν.
(Παπανικολάου κ.ά., 2005)

Διάγραμμα 3.1.4: Μεγιστοποίηση Κέρδους



3.2 Συναρτήσεις Ελαστικότητας

Οι οικονομολόγοι είναι σημαντικό να κάνουν κάποιες μετρήσεις σε ορισμένες μεταβλητές για να μπορέσουν να κάνουν προβλέψεις και για να εκτιμήσουν με σχετική ακρίβεια και αποτελεσματικότητα τι συνέπειες και τι αποτέλεσμα θα έχει η μεταβολή μιας μεταβλητής επί μιας άλλης. Παραδείγματος χάρη, μια επιχείρηση η οποία πουλάει υπολογιστές θέλει να μάθει πως θα επηρεαστούν οι πωλήσεις της εάν αποφασίσει να αυξήσει την τιμή των υπολογιστών αυτών. Φυσικά αυτή η μεταβολή της τιμής θα έχει αντίκτυπο στα κέρδη της επιχείρησης και στη γενική απόδοση της.

Ζήτηση

Ζήτηση, καλείται το σύνολο των αγοραζόμενων ποσοτήτων από ένα αγαθό που θα ζητηθεί σε διάφορες τιμές και για μια ορισμένη χρονική περίοδο. Η ζήτηση σε ορισμένα αγαθά και υπηρεσίες είναι πιο ευαίσθητη στις μεταβολές της τιμής (P) ενώ σε άλλα είναι λιγότερο ευαίσθητη. Αυτός ο βαθμός της ευαισθησίας της ζητούμενης ποσότητας ενός αγαθού A στις μεταβολές της τιμής του ονομάζεται ελαστικότητα ζήτησης σε σχέση με την τιμή του αγαθού δίνεται από τον τύπο που δεν είναι άλλος παρά ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής της ζητούμενης ποσότητας προς την ποσοστιαία μεταβολή της τιμής. Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ο νόμος της ζήτησης. Πιο συγκεκριμένα, όταν η τιμή από ένα αγαθό μειώνεται, τότε οι καταναλωτές αυξάνουν τη ζήτηση του, δηλαδή την ζητούμενη ποσότητα. Ενώ αντίστροφα, όταν η τιμή ενός αγαθού αυξάνεται τότε οι καταναλωτές μειώνουν την ζήτηση του αγαθού αυτού δηλαδή την ζητούμενη ποσότητα. Παρατηρούμε ότι ανάμεσα στην ζητούμενη ποσότητα του αγαθού και την τιμή του προκύπτει μια αρνητική σχέση. Η αρνητική αυτή σχέση, ζητούμενης ποσότητας και τιμής αποτελεί τον *Νόμο της Ζήτησης* ο οποίος διατυπώνεται ως εξής: Όταν η τιμή ενός αγαθού μειώνεται, αυξάνεται η ζητούμενη ποσότητα του, και όταν η τιμή του αυξάνεται, μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα από το αγαθό αυτό, όταν οι άλλοι παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν τη ζήτηση παραμένουν σταθεροί (**CETERIS PARIBUS**).

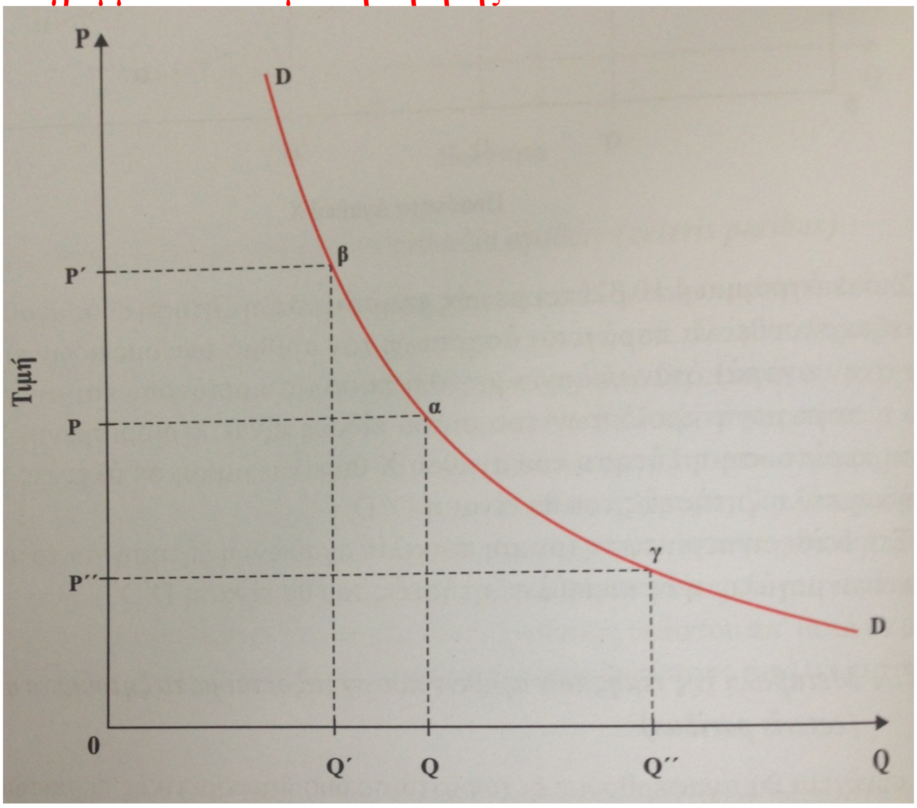
<u>Προσδιοριστικοί Παράγοντες της Ζήτησης</u> D

Οι πιο σημαντικοί παράγοντες της ζήτησης εκτός της τιμής είναι:
α) Το μέγεθος του εισοδήματος
β) Η κατανομή του εισοδήματος
γ) Το μέγεθος του πληθυσμού
δ) Οι προτιμήσεις των καταναλωτών
ε) Η τιμή των αγαθών που σχετίζονται με το ζητούμενο αγαθό
στ) Η ποικιλία των αγαθών
ζ) Οι προσδοκίες των καταναλωτών σχετικά με τις μελλοντικές μεταβολές τιμών και εισοδημάτων.

<u>Καμπύλη Ζήτησης</u>

Η καμπύλη ζήτησης είναι συνεχής καμπύλη. Με αλλά λόγια, αποτελεί το γεωμετρικό τόπο όλων των δυνατών συνδυασμών τιμών και ποσοτήτων. Βέβαια, αυτό προϋποθέτει ότι τόσο η τιμή όσο και η ποσότητα του αγαθού μπορούν να μεταβληθούν κατά πάρα πολύ μικρά διαστήματα.

Διάγραμμα 3.2.1: Καμπύλη Ζήτησης

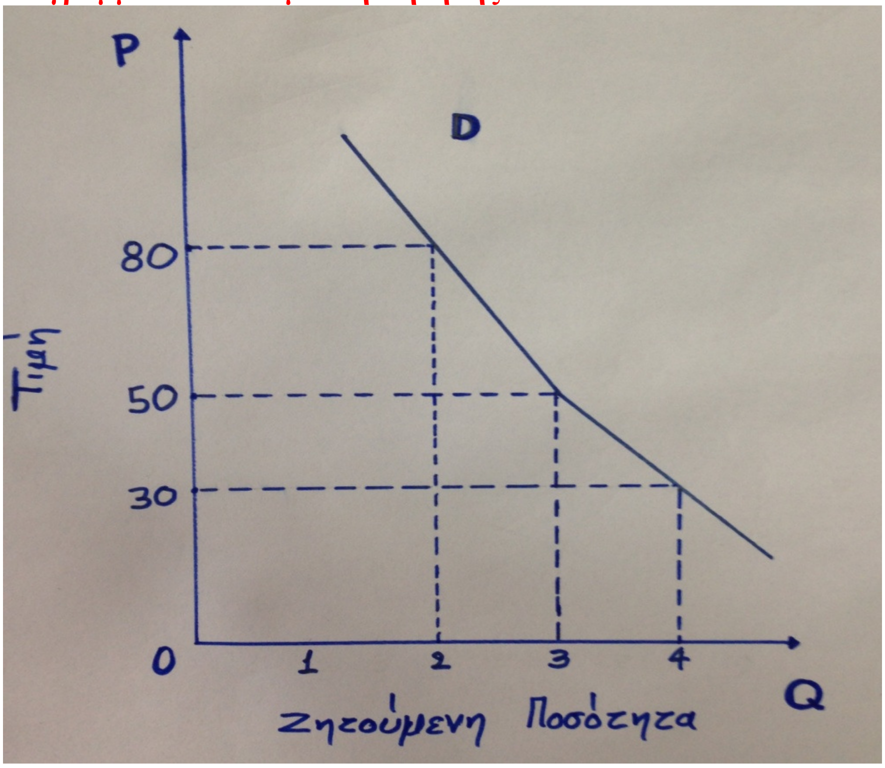


Πηγή: Κιόχος κ.ά., 2005

Παράδειγμα:

Οι καταναλωτές με δεδομένο το εισόδημα αγοράζουν 3 κιλά κρέας όταν η τιμή είναι 50 ευρώ. Αν η τιμή αυξηθεί και φτάσει τα 80 ευρώ, τότε οι καταναλωτές αγοράζουν 2 κιλά κρέας. Αντίθετα, όταν η τιμή μειωθεί στα 30 ευρώ τότε οι καταναλωτές αγοράζουν 4 κιλά κρέας.

Διάγραμμα 3.2.2: Καμπύλη Ζήτησης



Η συνάρτηση ζήτησης

Τα μαθηματικά αποτελούν αναπόσπαστο εργαλείο της οικονομικής επιστήμης. Παρόλα αυτά κατά περιόδους έχουν διατυπωθεί δυσμενείς κριτικές όσον αφορά τη χρήση των μαθηματικών στην οικονομική, με το πρόσχημα ότι η οικονομική με τον τρόπο αυτό αποπροσανατολίζεται του σκοπού της και χάνει την προσωπικότητα της. Εντούτοις έχει αποδειχτεί ότι η σωστή χρήση των μαθηματικών απλοποιεί και αναλύει με μεγαλύτερη ακρίβεια τις οικονομικές έννοιες.

Ανάμεσα στην ζητούμενη ποσότητα και στην τιμή ενός προϊόντος υπάρχει μια συναρτησιακή σχέση της μορφής: $Q_D = f(P)$ όπου Q η ποσότητα και P η τιμή. Η σχέση αυτή διαβάζεται ως εξής: Η ποσότητα είναι συνάρτηση της τιμής. Η μεταβλητή Q ορίζεται σαν εξαρτημένη μεταβλητή ενώ η P σαν ανεξάρτητη μεταβλητή. Έτσι, η παρούσα συνάρτηση μας λέει ότι η ποσότητα εξαρτάται από την τιμή και όχι η τιμή από την ποσότητα. Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης είναι η καμπύλη ζήτησης.

Έτσι, παρουσιάζουμε τη συνάρτηση ζήτησης ως εξής: $Q_D = \alpha + \beta P$ όπου η σταθερά α λαμβάνεται σαν σταθερά πάνω στον κάθετο άξονα. Αν όμως η καμπύλη ζήτησης έχει κανονική μορφή, δηλαδή κατέρχεται από αριστερά προς τα δεξιά, τότε η παράμετρος β είναι αρνητική και η συνάρτηση ζήτησης γίνεται: $Q_D = \alpha - \beta P$

Ελαστικότητα ζήτησης

Η ελαστικότητα ζήτησης μετράει τον τρόπο με τον οποίο η ζητούμενη ποσότητα αντιδρά όταν η τιμή του αγαθού η της υπηρεσίας μεταβάλλεται (αυξάνεται η μειώνεται). Με άλλα λόγια μετράει τον βαθμό ευαισθησίας της ζητούμενης ποσότητας στις μεταβολές της τιμής ενός αγαθού ή υπηρεσίας. Για να αποφύγουμε το πρόβλημα με τις μονάδες μέτρησης, η ελαστικότητα ζήτησης εκφράζεται σε εκατοστιαία βάση. Στα μαθηματικά η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή ορίζεται ως ο λόγος:

$$Ed = \frac{\%\text{Μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα}}{\%\text{μεταβολή στην τιμή}}$$

ή

$$\text{E}d = \frac{\text{μεταβολή στη ζητούμενη ποσότητα}}{\text{αρχική ποσότητα}} \div \frac{\text{μεταβολή στην τιμή}}{\text{αρχική τιμή}}$$

ή

$$Ed = \frac{\Delta Q}{Q} \div \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P}{Q}$$

Οι τιμές του συντελεστή ελαστικότητας εd είναι αρνητικές λόγω της αντίστροφης σχέσης που υπάρχει μεταξύ τιμής και ζητούμενης ποσότητας. Εάν ο συντελεστής ελαστικότητας είναι, ας πούμε, $\varepsilon d = -5$, αυτό σημαίνει ότι εάν η τιμή του αγαθού αυξηθεί, για παράδειγμα, κατά 10% η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί μόνο κατά 5%.

<u>Παράδειγμα</u>
Η τιμή ενός αγαθού μειώνεται από 10€ σε 7€ και σαν συνέπεια η ζητούμενη ποσότητα αυξάνει από 1300 μονάδες σε 1720. Ποιος είναι ο συντελεστής ελαστικότητας;

$$Ed = \frac{\Delta Q}{Q} \div \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P}{Q} = \frac{420}{1300} \div \frac{-3}{10} = -1{,}06$$

Δηλαδή, μια αύξηση της τιμής κατά 10% έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά 106% ή μια αύξηση της τιμής κατά 1% έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά 1,06%.

<u>Ανελαστική και Ελαστική ζήτηση</u>

Όταν η ελαστικότητα είναι μεγαλύτερη της μονάδος, δηλαδή $|\varepsilon| > 1$ τότε η ζήτηση είναι **ελαστική** με αποτέλεσμα μια ποσοστιαία αύξηση ή μείωση της τιμής να προκαλεί μεγαλύτερη ποσοστιαία μείωση ή αύξηση αντίστοιχα της ζητούμενης ποσότητας.

Όταν η ελαστικότητα είναι μικρότερη της μονάδος, δηλαδή $|\varepsilon| < 1$ τότε η ζήτηση είναι **ανελαστική** με αποτέλεσμα μια ποσοστιαία αύξηση ή μείωση της τιμής να προκαλεί μικρότερη ποσοστιαία μείωση ή αύξηση αντίστοιχα της ζητούμενης ποσότητας.

Όταν η ελαστικότητα είναι ίση με τη μονάδα, δηλαδή $|\varepsilon| = 1$ τότε η ζήτηση έχει **μοναδιαία ελαστικότητα** με αποτέλεσμα μια ποσοστιαία αύξηση ή μείωση της τιμής να προκαλεί ισόποση ποσοστιαία μείωση ή αύξηση αντίστοιχα της ζητούμενης ποσότητας.

Πιο αναλυτικά, η ελαστικότητα ζήτησης ενός αγαθού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το πόσο στενά υποκατάστατα έχει. Ας θεωρήσουμε το κρέας ως αγαθό το οποίο διακρίνεται σε χοιρινό και μοσχαρίσιο. Αν η τιμή του χοιρινού κρέατος πέσει επειδή ο καταναλωτής δεν ενδιαφέρεται για το είδος του κρέατος θα στραφεί αποκλειστικά στην κατανάλωση του μοσχαρίσιου κρέατος. Άρα, η ζήτηση για το χοιρινό κρέας θα είναι απείρως ελαστική αφού τα τελευταία είναι τέλεια υποκατάστατα με το μοσχαρίσιο κρέας.

<u>Η ελαστικότητα ζήτησης σημείου και ελαστικότητας ζήτησης τμήματος</u>

Η ελαστικότητα ζήτησης σημείου μετράει τον τρόπο με τον οποίο η ζητούμενη ποσότητα αντιδρά όταν η τιμή του αγαθού ή της υπηρεσίας μεταβάλλεται (αυξάνει ή μειώνεται) σε ένα συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης. Επειδή όμως η ελαστικότητα θα είναι διαφορετική αν την υπολογίσουμε από το αρχικό ή το τελικό σημείο, οι οικονομολόγοι υπολογίζουν την μέση ελαστικότητα παίρνοντας τις μέσες μεταβαλλόμενες τιμές. Δηλαδή υπολογίζουν την ελαστικότητα ζήτησης επί ενός τμήματος της καμπύλης αντί να το κάνουν επί ενός σημείου.
Με άλλα λόγια, η ελαστικότητα τμήματος ζήτησης ή η μέση ελαστικότητα ζήτησης μετράει τον τρόπο με τον οποίο η ζητούμενη ποσότητα αντιδρά όταν η τιμή του αγαθού ή της υπηρεσίας μεταβάλλεται σε ένα ορισμένο τμήμα της καμπύλης ζήτησης.

$Ed = \dfrac{\Delta Q}{Q_0 + Q_1} \div \dfrac{\Delta P}{P_0 + P_1} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta P} \times \dfrac{P_0 + P_1}{Q_0 + Q_1}$, όπου ΔQ είναι η διαφορά $(Q_0 - Q_1)$ και ΔP είναι η διαφορά $(P_0 - P_1)$ καθώς επίσης το 0 δείχνει την αρχική τιμή και το 1 την τελική τιμή.

<u>Παράδειγμα</u>

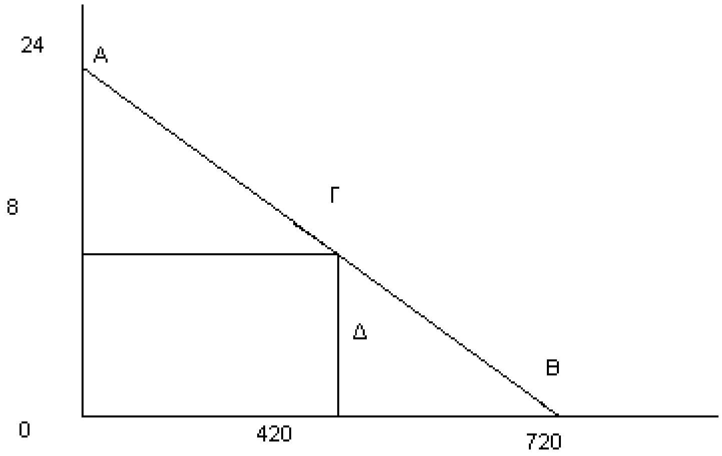
Η τιμή ενός αγαθού μειώνεται από 10€ σε 7€ και σαν συνέπεια η ζητούμενη ποσότητα αυξάνεται από 1300 μονάδες σε 1720. Ποιος είναι ο μέσος συντελεστής ελαστικότητας;

$$Ed = \frac{\Delta Q}{Q_0 + Q_1} \div \frac{\Delta P}{P_0 + P_1} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P_0 + P_1}{Q_0 + Q_1} = \frac{1300 - 1720}{10 - 7} \times \frac{10 + 7}{1300 + 1720} = \frac{-420}{3} \times \frac{17}{3020} =$$
$$= (-140) \times 0.0056291 = -0.78$$

Δηλαδή μια αύξηση της τιμής κατά 10% έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά 7,8% ή μια αύξηση της τιμής κατά 100% έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά 78% ή μια αύξηση της τιμής κατά 1% έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της ζητούμενης ποσότητας κατά 0,78%.

<u>Βαθμός ελαστικότητας</u>
Η καμπύλη ζήτησης δεν έχει την ίδια ελαστικότητα σε όλα τα τμήματα της ή σε όλα τα σημεία της αν και η κλίση της δεν αλλάζει. Για να βρούμε την ελαστικότητα ζήτησης γεωμετρικά αρκεί να εντοπίσουμε το σημείο που μας ενδιαφέρει και μετρικά αρκεί να εντοπίσουμε το σημείο που μας ενδιαφέρει και να διαιρέσουμε το κάτω τμήμα της καμπύλης με το πάνω. Ο λόγος των δυο μας δίνει τον βαθμό ελαστικότητας.

Διάγραμμα 3.2.3: Ελαστικότητα Ζήτησης



Αν χρησιμοποιήσουμε τον κατακόρυφο άξονα, η ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο Γ υπολογίζεται γεωμετρικά ως εξής:

$$\varepsilon^{\Gamma} d = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{8}{24-8} = 0{,}5$$

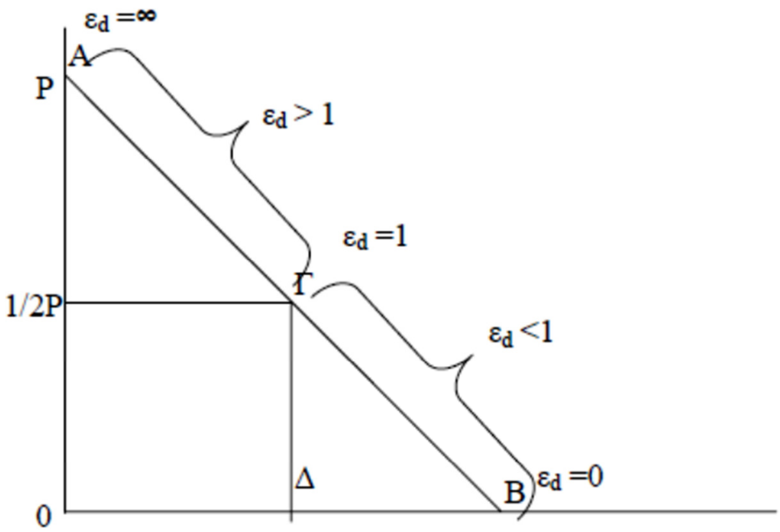
Αν χρησιμοποιήσουμε τον οριζόντιο άξονα, η ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο Γ υπολογίζεται γεωμετρικά ως εξής:

$$\varepsilon^{\Gamma} d = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\Delta 0} = \frac{720-480}{480} = 0{,}5$$

Παράδειγμα
Η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού είναι $Q = 20 - 4P$. Βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης γεωμετρικά όταν η τιμή μειώνεται στα 2€.

Όταν η καμπύλη ζήτησης διαιρεθεί στην μέση έτσι ώστε το κάτω τμήμα της καμπύλης να είναι ίσο με το πάνω, η ελαστικότητα ζήτησης είναι ίση με την μονάδα. Στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρανομαστή τότε η ελαστικότητα ζήτησης είναι μεγαλύτερη από την μονάδα και αντιστρόφως, δηλαδή:

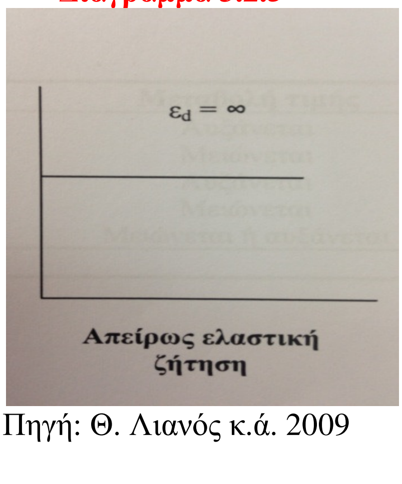
Διάγραμμα 3.2.4: Ελαστικότητα Ζήτησης



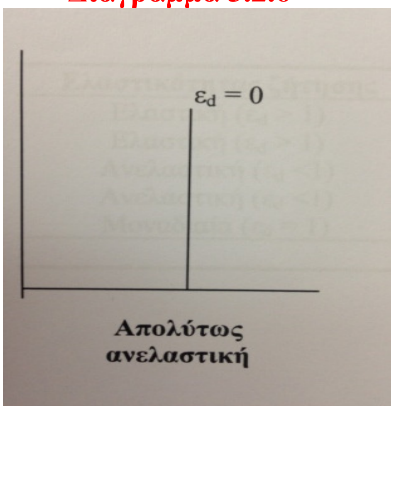
Η ελαστικότητα ζήτησης ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει μπορεί να ταξινομηθεί σε:

- Ελαστική: δηλαδή μεγαλύτερη από τη μονάδα $(\varepsilon d > 1)$
- Ανελαστική: δηλαδή μικρότερη από την μονάδα $(\varepsilon d < 1)$
- Μοναδιαία: δηλαδή ίση με τη μονάδα $(\varepsilon d = 1)$, σημείο Γ στο Διάγραμμα
- Απείρως ελαστική: δηλαδή ίση με το μηδέν $(\varepsilon d = 0)$, σημείο Β στο Διάγραμμα
- Απολύτως ανελαστική: δηλαδή ίση με το ∞, σημείο Α στο Διάγραμμα.

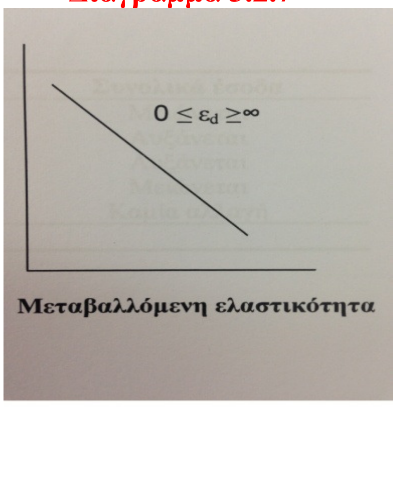
Διάγραμμα 3.2.5



Διάγραμμα 3.2.6



Διάγραμμα 3.2.7



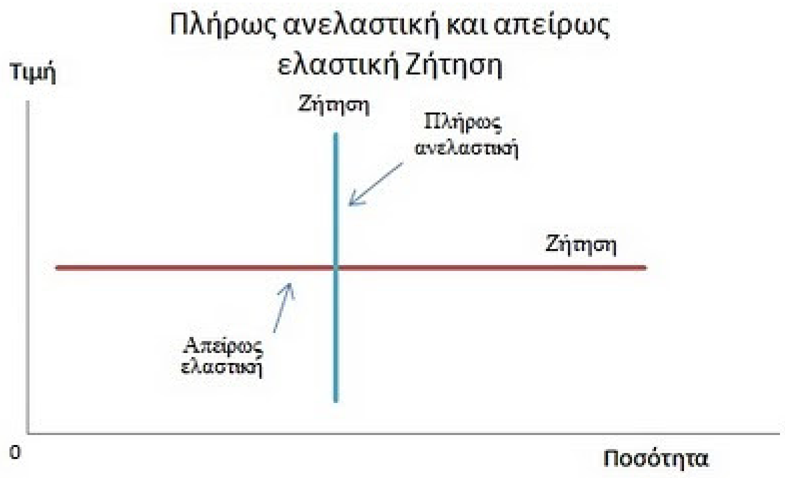
Πηγή: Θ. Λιανός κ.ά. 2009

Όταν η ζήτηση είναι **ελαστική** τότε, αύξηση της τιμής σημαίνει αύξηση της συνολικής δαπάνης, ενώ μείωση της τιμής σημαίνει αύξηση της συνολικής δαπάνης.

Όταν η ζήτηση είναι **ανελαστική** τότε, αύξηση της τιμής σημαίνει αύξηση της συνολικής δαπάνης ενώ μείωση της τιμής σημαίνει μείωση της συνολικής δαπάνης.

Μοναδιαία ελαστικότητα ζήτησης σημαίνει ότι η μεταβολή στην τιμή δεν επιφέρει ουδεμία μεταβολή στη συνολική δαπάνη.

Διάγραμμα 3.2.8: Πλήρως ανελαστική και απείρως ελαστική ζήτηση



Ο βαθμός ελαστικότητας είναι αρκετά σημαντικός για τις επιχειρήσεις για τις κυβερνήσεις και για διάφορους οργανισμούς με οικονομικό χαρακτήρα όπως αυτοί είναι οι συνεταιρισμοί και οι ομοσπονδίες παραγωγών ή πωλητών διάφορων προϊόντων ή αγαθών. Και αυτό γιατί οι οργανισμοί μπορούν να υπολογίσουν τι αντίκτυπο μπορεί να έχει η μεταβολή της τιμής επί των εσόδων τους ή των κερδών τους. Έτσι, αν η ελαστικότητα είναι μοναδιαία μια μεταβολή της τιμής δεν έχει κανένα αντίκτυπο στα έσοδα. Αντιθέτως, αν η ζήτηση είναι ελαστική, μια μείωση της τιμής αυξάνει τα έσοδα της επιχείρησης, ενώ αν είναι ελαστική η μείωση της τιμής μειώνει τα έσοδα της επιχείρησης. Πιο αναλυτικά στον παρακάτω πίνακα:

Ελαστικότητα Ζήτησης	**Μεταβολή Τιμής**	**Συνολικά Έσοδα**
Ελαστική $(\varepsilon d > 1)$	Αυξάνεται	Μειώνεται
Ελαστική $(\varepsilon d > 1)$	Αυξάνεται	Αυξάνεται
Ανελαστική $(\varepsilon d < 1)$	Αυξάνεται	Αυξάνεται
Ανελαστική $(\varepsilon d < 1)$	Μειώνεται	Μειώνεται
Μοναδιαία $(\varepsilon d = 1)$	Μειώνεται ή Αυξάνεται	Καμία Αλλαγή

Ο βαθμός ελαστικότητας της ζήτησης ως προς την τιμή ενός προϊόντος εξαρτάται από τους παρακάτω παράγοντες:

α) Αριθμός και συγγένεια υποκατάστατων προϊόντων

β) Σπουδαιότητα του προϊόντος στους οικογενειακούς προϋπολογισμούς
γ) Σπουδαιότητα της ανάγκης που ικανοποιεί το προϊόν
δ) Διάρκεια χρονικής περιόδου
ε) Διάρκεια ζωής των προϊόντων
ζ) Ο βαθμός κορεσμού της αγοράς ως προς το συγκεκριμένο προϊών
η) Διανομή του εισοδήματος και εισοδηματική ομάδα που αγοράζει το προϊόν.
θ) Οι προσδοκίες των καταναλωτών σχετικά με τις μελλοντικές μεταβολές των τιμών και των εισοδημάτων.

Προσφορά

Πρόσφορα ενός αγαθού είναι οι ποσότητες που επιθυμούν να πουλήσουν οι παραγωγοί του συγκεκριμένου αγαθού στην παραγωγή σε διάφορες τιμές σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Όπως είδαμε προηγουμένως στη ζήτηση όπου η τιμή παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, έτσι γίνεται και εδώ, δηλαδή η τιμή του αγαθού παίζει αποφασιστικό ρόλο στη διαμόρφωση της προσφοράς. Οι προσφερόμενες ποσότητες ενός αγαθού δεν παραμένουν ίδιες σε όλες τις τιμές. Πιο συγκεκριμένα, όταν μεταβάλλεται η τιμή ενός αγαθού τότε μεταβάλλονται και οι προσφερόμενες ποσότητες του. Έτσι, όταν η τιμή του αγαθού είναι χαμηλή, οι παραγωγοί προσφέρουν μικρές ποσότητες αγαθού. Αντιθέτως, όταν η τιμή του αγαθού είναι υψηλή, τότε οι παραγωγοί σπεύδουν να προσφέρουν μεγάλες ποσότητες αγαθού. Με λίγα λόγια όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή ενός αγαθού, τόσο αυξάνονται οι προσφερόμενες ποσότητες του.

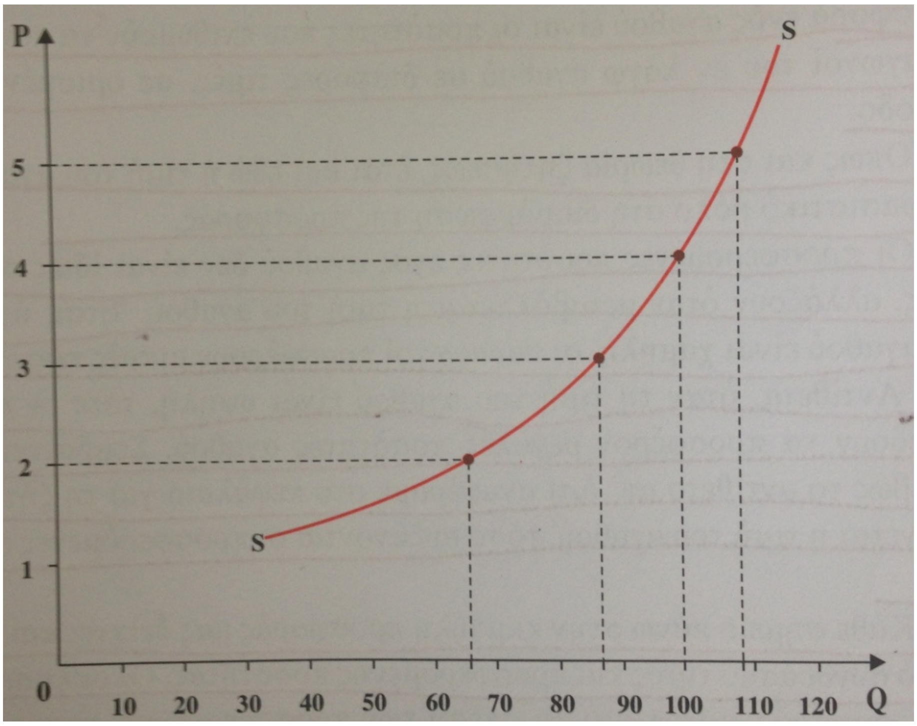
Καμπύλη Προσφοράς

Όλα τα σημεία πάνω στην καμπύλη προσφοράς μας δείχνουν και ένα ξεχωριστό συνδυασμό τιμής και προσφερόμενης ποσότητας. Ολόκληρη η καμπύλη προσφοράς διατυπώνει τη σχέση των προσφερόμενων ποσοτήτων ενός αγαθού ανά μονάδα χρόνου και των αντιστοιχών τιμών του. Επίσης, η σχέση μεταξύ των τιμών και των προσφερόμενων ποσοτήτων είναι θετική και συνιστά τον Νόμο της Προσφοράς ο οποίος διατυπώνεται ως εξής: Όταν αυξάνεται η τιμή ενός αγαθού, τόσο αυξάνεται και η προσφερόμενη ποσότητα του και αντίθετα, όταν μειώνεται η τιμή ενός αγαθού τότε μειώνεται και η προσφερόμενη ποσότητα του.

Προσδιοριστικοί παράγοντες της προσφοράς *S*

Οι κυριότεροι προσδιοριστικοί παράγοντες της προσφοράς, εκτός της τιμής, είναι οι εξής:
α) Οι στόχοι που θέτουν οι επιχειρήσεις
β) Το επίπεδο της τεχνολογίας
γ) Οι τιμές των λοιπών αγαθών
δ) Οι τιμές των συντελεστών της παραγωγής
ε) Οι προβλέψεις των παραγωγών
στ) Αστάθμητοι παράγοντες

Διάγραμμα 3.2.9: Καμπύλη Προσφοράς



Πηγή: Κιόχος κ.ά., 2005

<u>Η συνάρτηση προσφοράς</u>

Ανάμεσα στην προσφερόμενη ποσότητα και στην τιμή ενός προϊόντος υπάρχει μια συναρτησιακή σχέση της μορφής: $Q_S = f(P)$ όπου Q η ποσότητα και P η τιμή. Με τον ίδιο τρόπο η συνάρτηση προσφοράς διατυπώνεται ως εξής: $Q_S = \gamma + \delta P$ όπου, η παράμετρος γ είναι η σταθερά πάνω στον κάθετο άξονα και η παράμετρος δ παρουσιάζει την κλίση της καμπύλης προσφοράς. Αν η καμπύλη προσφοράς έχει κανονική μορφή, δηλαδή ανέρχεται από αριστερά προς τα δεξιά, η παράμετρος δ είναι θετική. Η ποσότητα Q και η τιμή P, δεν μπορούν να έχουν αρνητικές τιμές και ισχύει: $Q_S \geq 0$ και $P \geq 0$.

<u>Ελαστικότητα Προσφοράς</u>

Η σχέση ανάμεσα στην τιμή και στην προσφερόμενη ποσότητα ενός αγαθού, είναι μεγέθη που συνδέονται μεταξύ τους θετικά. Έτσι συνεπάγεται ότι ισχύει από τον Νόμο της Προσφοράς, δηλαδή όταν αυξάνεται η τιμή, αυξάνεται και η προσφερόμενη ποσότητα από μια δεδομένη μεταβολή στην τιμή. Αυτό που μας αφορά είναι να μετρήσουμε το μέγεθος της αλλαγής που προκαλείται από τις μεταβολές της τιμής. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί αν εφαρμόσουμε τον τύπο της ελαστικότητας προσφοράς:

Η ελαστικότητα προσφοράς, λοιπόν, μετρά την ποσοστιαία μεταβολή της προσφερόμενης ποσότητας που προκαλείται από δεδομένη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή. Στα μαθηματικά η ελαστικότητα της προσφοράς ορίζεται ως το πηλίκο της διαίρεσης της ποσοστιαίας μεταβολής της προσφερόμενης ποσότητας δια της ποσοστιαίας μεταβολής της τιμής. Το ποσοστό μεταβολής στην προσφερόμενη ποσότητα είναι το πηλίκο της διαίρεσης της μεταβολής που επήλθε δια της αρχικά προσφερόμενης ποσότητας. Έτσι προκύπτει η εξής σχέση:

$$E_S = \frac{\frac{\text{Μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα}}{\text{Αρχική ποσότητα}}}{\frac{\text{Μεταβολή στην τιμή}}{\text{Αρχική τιμή}}}$$

$$\text{ή } E_S = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

Όπου, Q : η προσφερόμενη ποσότητα
ΔQ : η μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα
P : η τιμή
ΔP : η μεταβολή στην τιμή

Παράδειγμα:
Η τιμή ενός αγαθού αυξάνεται κατά 10% και η προσφερόμενη ποσότητα του αυξάνεται κατά 20%, τότε η ελαστικότητα προσφοράς του αγαθού αυτού θα είναι ίση με 2.

$$E_S = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta P / P} = \frac{0{,}20}{0{,}10} = 2.$$

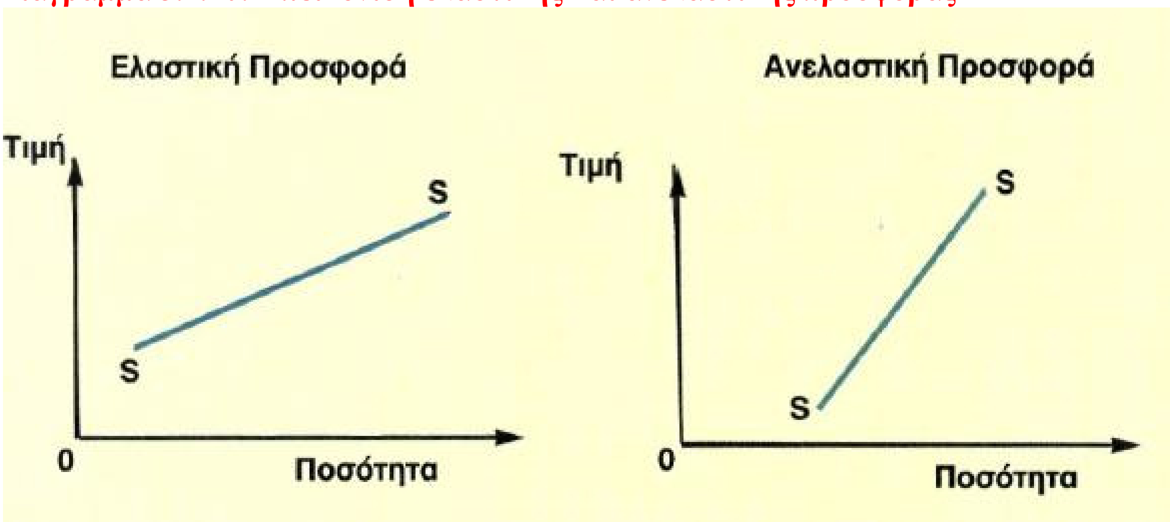
Αυτό σημαίνει ότι αν αυξηθεί η τιμή κατά 1%, η προσφερόμενη ποσότητα θα αυξηθεί κατά 2% και αντίστροφα, αν η τιμή μειωθεί κατά 1%, τότε η προσφερόμενη ποσότητα θα μειωθεί κατά 2%.

Ανελαστική και ελαστική προσφορά

Όταν η ελαστικότητα της προσφοράς ενός αγαθού είναι μικρότερη της μονάδας δηλαδή $E_S < 1$, τότε η ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή προκαλεί μικρότερη ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα, τότε λέμε ότι η προσφορά είναι **ανελαστική**.(Διάγραμμα 3.2.10)

Όταν η ελαστικότητα της προσφοράς ενός αγαθού είναι μεγαλύτερη της μονάδας δηλαδή $E_S > 1$, τότε μια δεδομένη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή προκαλεί μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα, τότε λέμε ότι η προσφορά είναι **ελαστική**. (Διάγραμμα 3.2.10)

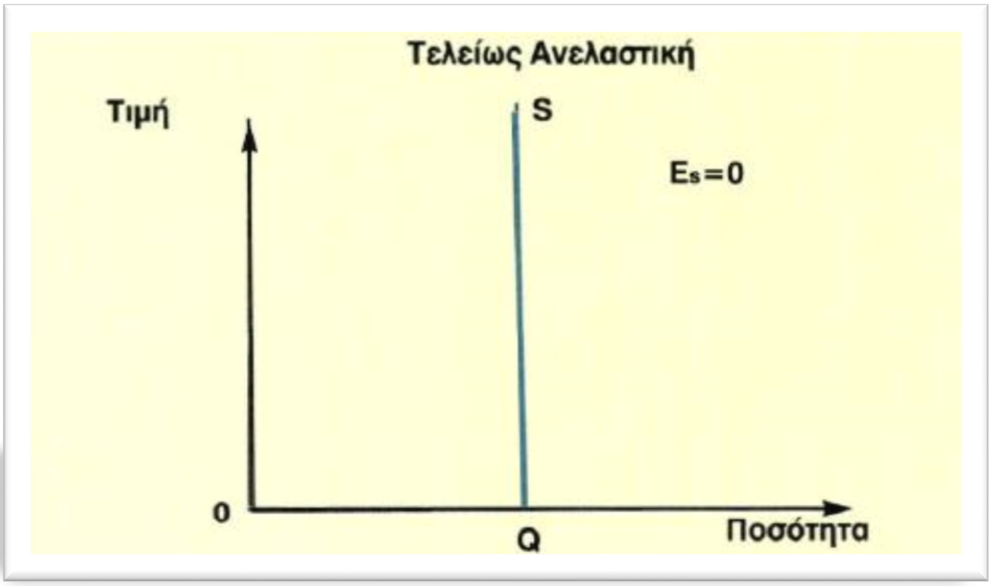
Διάγραμμα 3.2.10: Απεικόνιση ελαστικής και ανελαστικής προσφοράς



Πηγή: Λιανός κ.ά.

Όταν η ελαστικότητα της προσφοράς ενός αγαθού είναι ίση με το μηδέν δηλαδή $E_S = 0$, η προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού παραμένει σταθερή, ανεξάρτητα από το ύψος της τιμής του. Με αλλά λόγια οι παραγωγοί προσφέρουν την ίδια ποσότητα αγαθού και όταν η τιμή του είναι χαμηλή στην αγορά και όταν πάλι αυτή κυμαίνεται σε υψηλά επίπεδα. Σε αυτήν την περίπτωση, η καμπύλη προσφοράς των αγαθών παριστάνεται με μια κάθετη γραμμή προς τον οριζόντιο άξονα. Τότε λέμε ότι η προσφορά είναι **τελείως ή πλήρως ανελαστική**.

Διάγραμμα 3.2.11: Τελείως ή πλήρως ανελαστική προσφορά



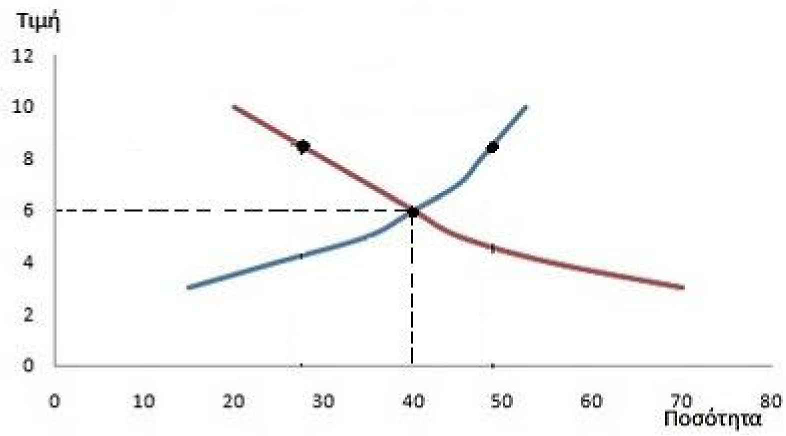
Πηγή: Λιανός κ.ά.

Τιμή και Ποσότητα ισορροπίας

Ύστερα από την ανάλυση των προηγούμενων δυο κεφαλαίων, δηλαδή της ζήτησης και της προσφοράς, είναι πιο εφικτό τώρα να αναφερθούμε στο πως σχηματίζεται η τιμή ενός αγαθού στην αγορά. Πάνω σε ένα σύστημα συντεταγμένων απεικονίζουμε τις καμπύλες προσφοράς και ζήτησης όπως κάναμε στα προηγούμενα κεφαλαία της ζήτησης και της προσφοράς απλώς τώρα αυτές τις καμπύλες τις συμπεριλαμβάνουμε σε ένα σχήμα. Η καμπύλη ζήτησης έχει μεταξύ τιμών και ζητούμενων ποσοτήτων αρνητική κλίση και παριστάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς μεταξύ διαφόρων τιμών και ζητούμενων ποσοτήτων. Βλέπουμε ότι, όσο αυξάνεται η τιμή τόσο μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα και αντίστροφα, όσο μειώνεται η τιμή, τόσο αυξάνεται η ζητούμενη ποσότητα. Επίσης η καμπύλη ζήτησης μας δείχνει τις ποσότητες που επιθυμούν οι καταναλωτές να αγοράσουν σε διάφορες τιμές. Η καμπύλη προσφοράς έχει θετική κλίση, ανέρχεται δηλαδή από αριστερά προς τα δεξιά και παριστάνει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς μεταξύ διάφορων τιμών και προσφερόμενων ποσοτήτων. Όσο υψώνεται η τιμή του αγαθού στην αγορά, τόσο αυξάνεται η προσφερόμενη ποσότητα από τους παραγωγούς και αντίθετα όσο μειώνεται η τιμή του αγαθού τόσο μειώνεται και η προσφερόμενη ποσότητα του αγαθού. Δηλαδή, η καμπύλη προσφοράς δείχνει τις ποσότητες που επιθυμούν να προσφέρουν οι παραγωγοί στην αγορά του αγαθού σε διάφορες τιμές σε ορισμένη χρονική περίοδο. Όπως βλέπουμε και από το Διάγραμμα 3.2.12 οι καμπύλες προσφοράς και ζήτησης τέμνονται μεταξύ τους. Στο σημείο αυτό όπου τέμνονται, οι ζητούμενες ποσότητες και οι προσφερόμενες ποσότητες είναι ίσες. Το σημείο αυτό ονομάζεται **σημείο ισορροπίας**. Σε αυτό το σημείο οι καταναλωτές επιθυμούν να αγοράσουν ποσότητα ίση με αυτή που επιθυμούν να προσφέρουν οι παραγωγοί. Αν από αυτό το σημείο

φέρουμε την κάθετο προς τον άξονα των τιμών, τότε η τιμή που θα προσδιοριστεί λέγεται **τιμή ισορροπίας.** Με τον ίδιο τρόπο αν φέρουμε την κάθετο προς τον άξονα των ποσοτήτων θα προσδιορίσουμε την ποσότητα ισορροπίας.
Εν ολίγοις, κατάσταση ισορροπίας έχουμε όταν η ζήτηση ενός αγαθού είναι ίση με την πρόσφορα του.

Διάγραμμα 3.2.12: Τιμή ισορροπίας



3.3 Οικονομικές Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Μια βιομηχανία παράγει Q μονάδες ενός προϊόντος με κόστος το οποίο δίνεται από τη συνάρτηση $C(Q) = 7500 + 5Q$. Τα έσοδα από την πώληση Q ποσότητας του προϊόντος δίνονται από την συνάρτηση $R(Q) = 20Q$. Πότε η επιχείρηση έχει κέρδος και πότε χάνει τα χρήματα της, δηλαδή πότε έχει ζημιά;

Λύση :

Η συνάρτηση κέρδους είναι $K(Q) = R(Q) - C(Q) = 20Q - (7500 + 5Q) = 15Q - 7500$.

Επομένως η επιχείρηση έχει κέρδος αν ενώ χάνει χρήματα για $0 \le Q < 500$.

Εφαρμογή 2

Μια επιχείρηση καθορίζει την τιμή πώλησης $P(Q)$ κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει της ποσότητας Q των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $P(Q) = 1200 - 3Q$. Το κόστος παραγωγής Q μονάδων ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση $C(Q) = -6Q^2 - 600Q$.

α) Να βρεθούν οι συναρτήσεις εσόδων $R(Q)$ και κερδών $K(Q)$.

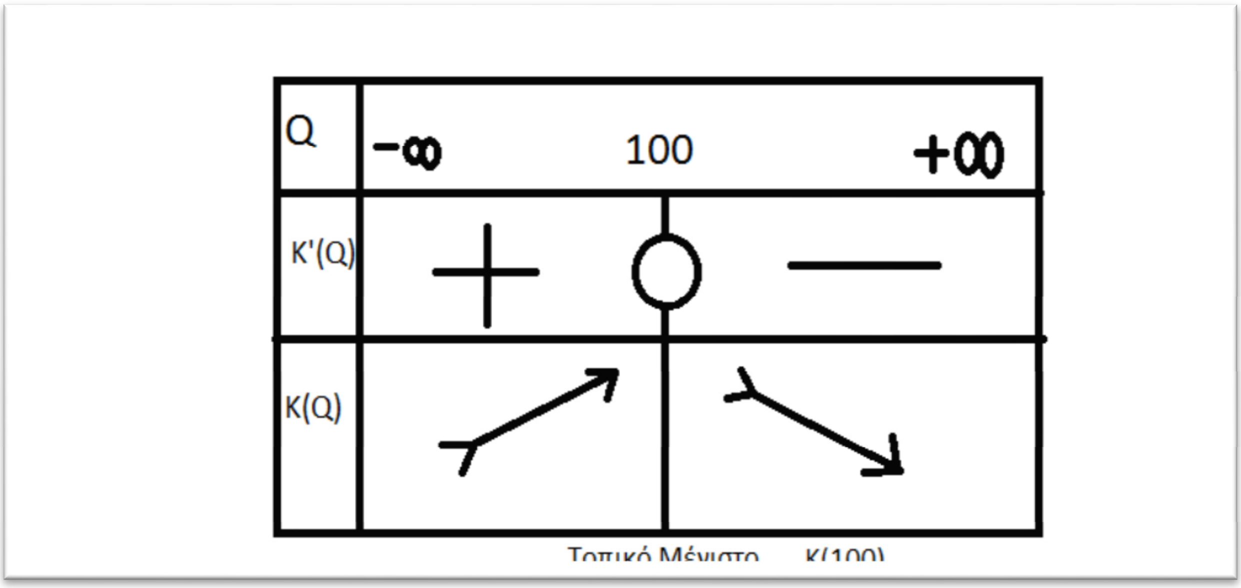
β) Να προσδιοριστεί η ποσότητα του προϊόντος που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση των κερδών και το μέγιστο κέρδος.

<u>Λύση:</u>

α) Η συνάρτηση των εσόδων $R(Q)$ είναι:
$R(Q) = P(Q)Q = (1200 - 3Q) \cdot Q$
και η συνάρτηση των κερδών είναι:
$K(Q) = R(Q) - C(Q) = 1200Q - 3Q^2 - 6Q^2 + 600Q = 9Q^2 + 1800Q$.

β) Βρίσκουμε την μονοτονία της K(Q)
$K'(Q) = -18Q + 1800 \Rightarrow K'(Q) = 0 \Rightarrow Q = 100$

Η μονοτονία και τα ακρότατα του μέγιστου κέρδους $K(Q)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.



Επομένως η ποσότητα του προϊόντος που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση των κερδών είναι η Q=100 και το μέγιστο κέρδος είναι: $K(100) = -9 \cdot (100)^2 + 1800 \cdot 100 = -9 \cdot 10^4 + 18 \cdot 10^4 = 90.000$

<u>Εφαρμογή 3</u>
Σε μια βιομηχανία το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $3x^2 - 20x + 300$. Το συνολικό κόστος παραγωγής 2 μονάδων είναι 868. Ποιο είναι το συνολικό κόστος παραγωγής των πρώτων 10 μονάδων;

<u>Λύση:</u>
Έστω $C(x)$ το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων του προϊόντος. Τότε, $C'(x) = MC(x) = 3x^2 - 20x + 300$.
Άρα,
$C(x) = \int (3x^2 - 20x + 300)dx = 3\int x^2 dx - 20\int xdx + 300\int dx = x^3 - 10x^2 + 300x + c$, $c \in \Re$.

Από την υπόθεση, $C(2) = 868$. Οπότε, $c = 300$. Συνεπώς το συνολικό κόστος παραγωγής των 10 μονάδων είναι: $C(10) = 1000 - 1000 + 3000 + 300 = 3300$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

4.1 Βασικές έννοιες – Ολική και Μερική παραγώγιση

Συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών (Μερική Παραγώγιση)

Όταν μια συνάρτηση αποτελείται παραπάνω από μια μεταβλητές, τότε υπάρχουν δυο ειδών παραγωγίσεις που μπορούν να εφαρμοστούν, η μερική παραγώγιση και η ολική παραγώγιση.

Γενικά, η ολική παραγώγιση μπορεί να επιτρέπει ταυτόχρονα τη μεταβολή όλων των μεταβλητών, ενώ αντίθετα η μερική παραγώγιση μπορεί να επιτρέπει τη μεταβολή μιας και μόνο μεταβλητής έχοντας τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές. Με την έννοια αυτή, η μερική παραγώγιση αποτελείται από μια επέκταση του λογισμού σε πολυμεταβλητές συναρτήσεις. Στο παρακάτω παράδειγμα μερικής παραγώγισης εξετάζεται η περίπτωση δυο και μόνο μεταβλητών με την προϋπόθεση ότι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Διαφορετικά, το να εξεταστούν περισσότερες μεταβλητές είναι μια απλή γενίκευση της περίπτωσης των δυο μεταβλητών.

Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y)$ από την οποία συνάρτηση οι μεταβλητές x και y θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μια τέτοια συνάρτηση βρίσκεται πολύ συχνά σε παραδείγματα περί οικονομίας μια επιχείρησης. Για παράδειγμα θα μπορούσε να περιγράφει το παραγόμενο προϊόν μιας επιχείρησης ή μιας οικονομίας. Για το λόγο αυτό, στην συνάρτηση παραγωγής η εξαρτημένη μεταβλητή z αναφέρεται στο προϊόν το όποιο παράγεται από τις εισροές κεφαλαίου (x), και εργασίας (y). Αν εν συνεχεία, υποθέτοντας πως οι εισροές συμβάλλουν μεμονωμένα και ανεξάρτητα στην παραγωγή του προϊόντος, τότε δημιουργείται το ερώτημα της μεταβολής στο παραγόμενο προϊόν από μια μεταβολή στην ποσότητα του κεφαλαίου με δεδομένη την ποσότητα της εργασίας. Θέτουμε λοιπόν όπου $y = y_0 = c$ και γραφούμε: $z = f(x, y_0) = f(x, c)$. Με άλλα, λόγια η παραγόμενη ποσότητα μετατρέπεται ουσιαστικά σε μια συνάρτηση της ποσότητας του κεφαλαίου. Σε αυτήν την περίπτωση, η παράγωγος της z ως προς την x γράφεται: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}\right]$ με την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει.

Με τον ίδιο τρόπο, αν ενδιαφερόμαστε για την παράγωγο της z ως προς την y με δεδομένη τη $x = x_0$ έχουμε: $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0}\left[\frac{f(x_0, y+\Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}\right]$.

Το σύμβολο ∂ προφέρεται θήτα και αναφέρεται στη μερική παραγώγιση. Η μερική παραγώγιση παριστάνεται επίσης ως: $\frac{\partial f}{\partial x}, f_x(x, y), f_x, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), D_x$ όπου το πρόσημο x αναφέρεται στη μεταβλητή που παραγωγίζουμε.

Αν έχουμε μια συνάρτηση με n μεταβλητές $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, τότε οι μερικές παράγωγοι γράφονται: $\nabla f = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right] = [f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n]$ όπου το σύμβολο ∇ προφέρεται **ανάδελτα** (del) και πρόκειται για το ανεστραμμένο δέλτα.

Παράδειγμα 1:

Να υπολογιστούν όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης: $z = xy^2 + x^2 y$.

Λύση:

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη $\partial z / \partial x$, θεωρούμε ότι η y είναι σταθερά, επομένως έχουμε: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 2xy$

Για να υπολογίσουμε τη $\partial z / \partial x$ θεωρούμε ότι η x είναι σταθερά, επομένως έχουμε: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy + x^2$.

Παράδειγμα 2:

Να υπολογιστούν όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης: $z = f(x, y) = 4xy + 3x + 7y^{-1}$ και να εκτιμηθούν στο σημείο $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Λύση:

$f_x(x, y) = \partial f / \partial x = 4y + 3$ και $f_x(1,2) = 4(2) + 3 = 11$

$f_x(x, y) = \partial f / \partial y = 4x - 7y^{-2}$ και $f_x(1,2) = 4(1) - 7(2)^{-2} = 2{,}25$

Ορισμός συνάρτησης πολλών μεταβλητών:

Έστω $\Delta \subseteq \Re^2$, αντίστοιχα $\Delta \subseteq \Re^3$ και $\mathrm{K} \subseteq \Re$ δυο τυχόντα μη κενά σύνολα. Τότε μια συνάρτηση, δυο αντίστοιχα τριών μεταβλητών με πεδίο ορισμού το Δ και πεδίο τιμών το K είναι μια μονοσήμαντη απεικόνιση, έστω f, του συνόλου Δ στο K, τέτοια ώστε: $\Delta \ni (x, y) \to f(x, y) = W \in \mathrm{K}$, Αντίστοιχα
$\Delta \ni (x, y, z) \to f(x, y, z) = W \in \mathrm{K}$.

Τα x, y αντίστοιχα x, y, z είναι στην περίπτωση αυτή οι ανεξάρτητες μεταβλητές ή απλά για μεγαλύτερη ευκολία στο εξής μεταβλητές ή όπως επίσης λέγεται τα στοιχεία της f, ενώ η w είναι η εξαρτημένη μεταβλητή. Με παρόμοιο τρόπο, όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, η f ορίζει τον τύπο της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η παραπάνω απεικόνιση.

Ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού Δ γίνεται όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης με μια μεταβλητή, με τη διαφορά ότι προσδιορίζονται οι τιμές για τις οποίες ορίζεται η f για κάθε μεταβλητή x, y, αντίστοιχα x, y, z χωριστά και στη συνέχεια το Δ ως η ένωση των επιμέρους πεδίων ορισμού. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Δ θα συμβολίζεται στο εξής με $f\Delta$ ή αναλυτικά $f(x, y)\Delta$, αντίστοιχα $f(x, y, z)\Delta$. Τα πεδία ορισμού και τιμών είναι μια καμπύλη επιφάνεια ή γενικότερα μια τρισδιάστατη περιοχή του χώρου.

Έστω $w = f(x, y)\Delta$, αντίστοιχα $w = f(x, y, z)\Delta$. Τότε η γραφική παράσταση της f θα είναι το σύνολο των σημείων $((x, y), w) \in \Delta \times \mathrm{K}$, αντίστοιχα $((x, y, z), w) \in \Delta \times \mathrm{K}$.

Παράδειγμα 3:

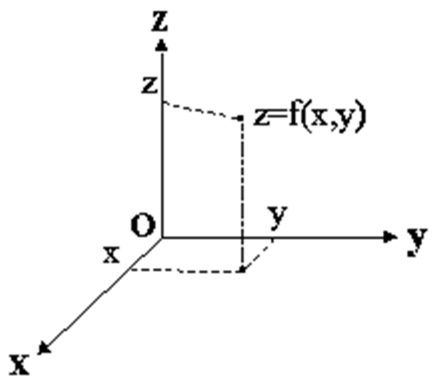
Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f_1(x, y) = \sqrt{x + y}$, $f_2(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ και $f_3(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$.

Λύση:
Επειδή από τον τύπο της f_1 πρέπει να προκύπτει πραγματικός αριθμός, το πεδίο ορισμού Δ_1 θα είναι $\Delta_1 = \{(x, y) \in \Re^2 : x + y \geq 0\}$.

Οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών συναντιούνται πολύ συχνά και έχουν τεράστιες εφαρμογές σε πολλά πεδία εφαρμογών. Για παράδειγμα τα ολικά έσοδα TR από τις πωλήσεις δυο αγαθών με ποσότητες $q1$, $q2$ και αντίστοιχες τιμές 3 και 4 χρηματικές μονάδες είναι μια συνάρτηση δυο μεταβλητών $q1$, $q2$ διότι: $TR = 3q1 + 4q2$
Ο όγκος V ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι: $V = x \cdot y \cdot z$, όπου x, y, z τα μήκη των ακμών του, δηλαδή είναι μια συνάρτηση τριών μεταβλητών με $x > 0$, $y > 0$ και $z > 0$.

Γεωμετρική απεικόνιση μερικής παραγώγου
Θεωρούμε τη συνάρτηση z με δυο μεταβλητές: x, y , με πεδίο ορισμού το εμβαδόν Α του επιπέδου $x0y$. Σε κάθε σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) φέρνουμε κάθετη ευθεία στο επίπεδο $x0y$ και παίρνουμε ένα τμήμα ίσο με το z. Έτσι προκύπτουν άπειρα τα σημεία Σ στο χώρο με συντεταγμένες: $x, y, z : z \equiv f(x, y)$.

Διάγραμμα 4.1.1: Γεωμετρική απεικόνιση μερικής παραγώγου



Πηγή: Ευάγγελος Φούντας, 1997

Οριακή τιμή συνάρτησης δυο μεταβλητών.
Το όριο μιας συνάρτησης $z = f(x, y)$, όταν το x τείνει στο x_0 και το y τείνει στο y_0, ορίζεται με τρόπο ανάλογο με τον ορισμό του ορίου της συνάρτησης μιας μεταβλητής. Το όριο αυτό είναι κ, δηλαδή $\lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y) = \kappa$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ που εξαρτάται από το ε και το (x_0, y_0) τέτοιο ώστε $|f(x, y) - \kappa| < \varepsilon$, για όλα τα x και τα y για τα οποία $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - y_0| < \delta$. Αν το όριο αυτό υπάρχει, τότε θα υπάρχουν και τα δυο διπλά όρια: $\lim\limits_{x \to x_0} \left\{ \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) \right\}$, $\lim\limits_{y \to y_0} \left\{ \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) \right\}$ και θα είναι ίσα. Στο πρώτο από τα όρια αυτά, υπολογίζεται πρώτα το όριο μέσα στην αγκύλη, θεωρώντας το x ως σταθερά, και μετά το όριο ως προς x. Ανάλογα υπολογίζεται και το δεύτερο όριο. Αν τα όρια αυτά είναι ίσα δεν είμαστε βέβαιοι για την ύπαρξη ή όχι του ορίου, $\lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} f(x, y) = \kappa$.
Αν όμως τα δυο αυτά όρια είναι διαφορετικά τότε σίγουρα το παραπάνω όριο δεν υπάρχει.

<u>Συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών (Ολική Παραγώγιση)</u>

Προηγουμένως ασχοληθήκαμε κυρίως στην περίπτωση όπου οι μεταβλητές x και y στην συνάρτηση $z = f(x,y)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτήν την φορά όμως επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση όπου οι x και y είναι εξαρτημένες από μια τρίτη μεταβλητή. Συναρτήσεις τέτοιου είδους συνηθίζουν να υπάρχουν στα οικονομικά, όπως για παράδειγμα η $z = f(x,y)$ παριστάνει μια συνάρτηση παραγωγής όπου οι συντελεστές παραγωγής κεφάλαιο και εργασία μεταβάλλονται στην διάρκεια του χρόνου (t). Έτσι, αν μας ζητείται να βρούμε τη μεταβολή ενός παραγόμενου προϊόντος διαχρονικά, δηλαδή dz/dt, τότε θα πρέπει να εκτιμηθεί:

A) Η μεταβολή στην z που οφείλεται σε μια μικρή μεταβολή του t η οποία βασίζεται στη z μέσω της x, δηλαδή $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$.

B) Η μεταβολή στην z που οφείλεται σε μια μικρή μεταβολή του t η οποία βασίζεται στη z μέσω της y, δηλαδή $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$.

Επομένως συνολικά θα έχουμε: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x\frac{dx}{dt} + f_y\frac{dy}{dt}$.

Η dz/dt λέγεται **ολική παράγωγος** (total derivative) της z ως προς την t.

<u>Παράδειγμα 4:</u>

Έστω η συνάρτηση $z = f(x,y) = x^3 + 2y^2$ με $x = g(t) = 2t^2 + 1$ και $y = h(t) = t^2$. Να βρεθεί η dz/dt.

<u>Λύση:</u>

$\frac{dz}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} + 4y\frac{dy}{dt}$ αλλά $dx/dt = 4t$ και $dy/dt = 2t$, άρα έχουμε:

$\frac{dz}{dt} = 3x^2(4t) + 4y(2t) = 12t(2t^2+1) + 8\left(t^2\right)\left(t\right)$.

4.2 Οικονομικές εφαρμογές συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

<u>Η συνάρτηση ζήτησης πολλών μεταβλητών</u>

Η ζήτηση ενός αγαθού είναι συνάρτηση της ίδιας του της τιμής, καθώς επίσης είναι συνάρτηση της τιμής των σχετιζόμενων αγαθών του διαθέσιμου εισοδήματος κλπ. Για να κάνουμε πιο απλή την παρουσίαση, ας υποθέσουμε ότι η ζήτηση του αγαθού $x,(q_x)$ εξαρτάται από την τιμή του (p_x), όπως επίσης και από την τιμή του αγαθού $y,(p_y)$. Αν μια τέτοια σχέση υπάρχει ανάμεσα στα δυο αγαθά, τότε οι συναρτήσεις ζήτησης των αγαθών x και y εξαρτώνται από τις τιμές των δυο αγαθών. Άρα έχουμε: $q_x = f\left(p_x, p_y\right)$, η ζήτηση για το αγαθό x και $q_y = g(p_x, p_y)$ η ζήτηση για το αγαθό y. Από τις δυο συναρτήσεις ορίζουμε τέσσερις μερικές παραγώγους:

$\partial q_x / \partial p_x =$ η οριακή ζήτηση για το αγαθό x ως προς την τιμή p_x

$\partial q_x / \partial p_y =$ η οριακή ζήτηση για το αγαθό x ως προς την τιμή p_y

$\partial q_y / \partial p_x =$ η οριακή ζήτηση για το αγαθό y ως προς την τιμή p_x

$\partial q_y / \partial p_y =$ η οριακή ζήτηση για το αγαθό y ως προς την τιμή p_y

Σύμφωνα με τον Νόμο της Ζήτησης γνωρίζουμε ότι με δεδομένη την τιμή του αγαθού y αν η τιμή του αγαθού x αυξάνεται τότε μειώνεται η ζητούμενη ποσότητα του x.

Η συνάρτηση μεικτού κόστους

Ας υποθέσουμε μια βιομηχανία η οποία παράγει τα αγαθά x και y. Το συνολικό κόστος c αυτών των μονάδων είναι συνάρτηση της παραγόμενης ποσότητας των x και y και ονομάζεται συνάρτηση μεικτού κόστους. Αν γράψουμε μια τέτοια συνάρτηση της μορφής: $c = f(x, y)$

τότε το $\partial c / \partial x$ καλείται μερικό οριακό κόστος ως προς το x και συμβολίζει τον ρυθμό μεταβολής του c ως προς το x, όταν το y κρατείται σταθερό. Ταυτόχρονα, το $\partial c / \partial y$ είναι η μερική οριακή παράγωγος ως προς το y και συμβολίζει το ρυθμό μεταβολής του c ως προς το y όταν το x κρατείται σταθερό.

Αν για παράδειγμα βρούμε πως το $\partial c / \partial y$=45 τότε αυτό σημαίνει πως το κόστος παραγωγής μιας επιπλέον μονάδας του x, με δεδομένο το επίπεδο παραγωγής του y, είναι 45 νομισματικές μονάδες. Από εδώ μπορούμε να γενικεύσουμε για την περίπτωση που έχουμε n μεταβλητές, τότε θα υπάρχουν n μερικές οριακές συναρτήσεις κόστους.

Η συνάρτηση παραγωγής

Σε μια συνηθισμένη μικροοικονομική ανάλυση η παραγωγή ενός προϊόντος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως το κεφάλαιο, η εργασία, το έδαφος κλπ. Η ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής $Q = f(K, L)$ δίνει τη μέγιστη συνολική παραγωγή από την απασχόληση δυο μόνο παραγωγικών συντελεστών, του κεφαλαίου και της εργασίας. Η $\partial Q / \partial K$ συμβολίζει την οριακή παραγωγικότητα του παραγόμενου προϊόντος Q ως προς τον συντελεστή κεφάλαιο, όταν ο συντελεστής εργασία παραμένει σταθερός. Με τον ίδιο τρόπο, ως $\partial Q / \partial L$ συμβολίζουμε την οριακή παραγωγικότητα ως προς τη συντελεστή εργασία, όταν ο συντελεστής κεφάλαιο κρατείται σταθερός.

Η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

Έστω η συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas $Q = AK^a L^b$. Πιο συγκεκριμένα $A > 0$ και $0 < a < 1$, $0 < b < 1$. Πολύ σημαντικό σημείο χαρακτηριστικό της συνάρτησης αυτής την οποία έκανε αρκετά σημαντική στις οικονομικές μελέτες, είναι ότι κάποιες παράγωγοι ως προς τους παραγωγικούς συντελεστές K, δηλαδή το κεφάλαιο, αλλά και L, δηλαδή η εργασία, είναι θετικές. Τις πρώτες παραγώγους τις λέμε οριακά προϊόντα του κεφαλαίου MP_K και της εργασίας MP_L αντίστοιχα. Έτσι λοιπόν ισχύει:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = aAK^{a-1}L^b = a\frac{Q}{K} > 0 \text{ και } MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = bAK^a L^{b-1} = b\frac{Q}{L} > 0 \text{ αντίστοιχα.}$$

Γενικά, όταν οι οριακές παράγωγοι είναι θετικές τότε δηλώνουν πως το παραγόμενο προϊόν αυξάνεται ή μειώνεται, όταν κάποιος από τους παραγωγικούς συντελεστές επίσης αυξάνεται ή μειώνεται αντίστοιχα.
Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό της συνάρτησης παραγωγής είναι ο «Νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας» των παραγωγικών συντελεστών. Ο νόμος αυτός υποδεικνύει ότι αν η ποσότητα ενός παραγωγικού συντελεστή αυξάνεται, ενώ οι ποσότητες των άλλων συντελεστών παραμένουν σταθερές, τότε το οριακό προϊόν του αυξανόμενου συντελεστή προοδευτικά μειώνεται. Αυτό σημαίνει πως η δεύτερη παράγωγος κάθε παραγωγικού συντελεστή πρέπει να είναι αρνητική. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, η μερική παράγωγος του παραγόμενου προϊόντος ως προς την εργασία είναι:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = a(a-1)AK^{a-2}L^b < 0$$

Επειδή, ο όρος στην παρένθεση είναι αρνητικός $(a-1<0)$, συνεπάγεται ότι η δεύτερη μερική παράγωγος είναι αρνητική και άρα ισχύει ο «Νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας». Άρα, ομοίως για το οριακό προϊόν της εργασίας ισχύει:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = b(b-1)AK^{a}L^{b-2} < 0 \text{ επειδή } (b-1<0).$$

<u>Εφαρμογή 1</u>

Μια βιομηχανία παράγει τα αγαθά x και y. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μεικτού κόστους αυτών των δυο αγαθών είναι: $c = f(x,y) = 6x^2 + 7xy + 10y^2 + 1000$

Να προσδιοριστεί το οριακό μερικό κόστος παραγωγής του κάθε αγαθού, όταν $x = 100$ και $y = 50$. Να ερμηνευτούν τα αποτελέσματα.

<u>Λύση:</u> $\frac{\partial c}{\partial x} = 12x + 7y, \frac{\partial c}{\partial y} = 20y + 7x$

Επομένως στο σημείο (100,50) θα έχουμε:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x=100, y=50) = 12(100) + 7(50) = 1550 \nu.\mu$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(x=100, y=50) = 20(50) + 7(100) = 1700 \nu.\mu$$

Αυτό σημαίνει ότι αυξάνοντας την παραγωγή του αγαθού x από 100 σε 101 μονάδες διατηρώντας την παραγωγή του αγαθού υ στις 50 μονάδες, αυξάνεται το συνολικό κόστος κατά 1.550ν.μ. Στο αγαθό y αυξάνοντας την παραγωγή του από 50 σε 51 μονάδες, κρατώντας σταθερή την παραγωγή του x στις 100 μονάδες θα οδηγήσει σε αύξηση του κόστους περίπου κατά 1.700 νομισματικές μονάδες.

Εφαρμογή 2

Σε μια επιχείρηση, η συνάρτηση παραγωγής της είναι: $Q = F(K, L) = \sqrt{KL}$

α) Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις οριακής παραγωγικότητας και να εκτιμηθούν για $K = 4$ και $L = 100$.

β) Να ερμηνευτούν οικονομικά τα αποτελέσματα.

γ) Να διερευνηθεί αν ισχύει ο νόμος της φθίνουσας οριακής παραγωγικότητας των συντελεστών παραγωγής.

Λύση:

α) $\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{2}(LK)^{-\frac{1}{2}} L = \frac{L}{2\sqrt{LK}}$ και $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{1}{2}(LK)^{-\frac{1}{2}} K = \frac{K}{2\sqrt{LK}}$

Όταν οι μερικές παράγωγοι εκτιμώνται για την περίπτωση που $L = 100$ και $K = 4$ παίρνουμε:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{100}{2\sqrt{(100)(4)}} = \frac{100}{80}1{,}25 \text{ και } \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{4}{2\sqrt{(100)(4)}} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

β) Έτσι αν $K = 4$ και $L = 100$ και αν το K αυξηθεί στις 5 μονάδες ενώ η εργασία παραμένει σταθερή στις 100 μονάδες, τότε η παραγωγή αυξάνεται περίπου κατά 1,25 μονάδες. Στην περίπτωση που το L αυξάνει σε 101 ενώ το K παραμένει στις 4 η παραγωγή θα αυξάνεται περίπου κατά 0,05 μονάδες.

γ) Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι ως προς K και L δίνουν

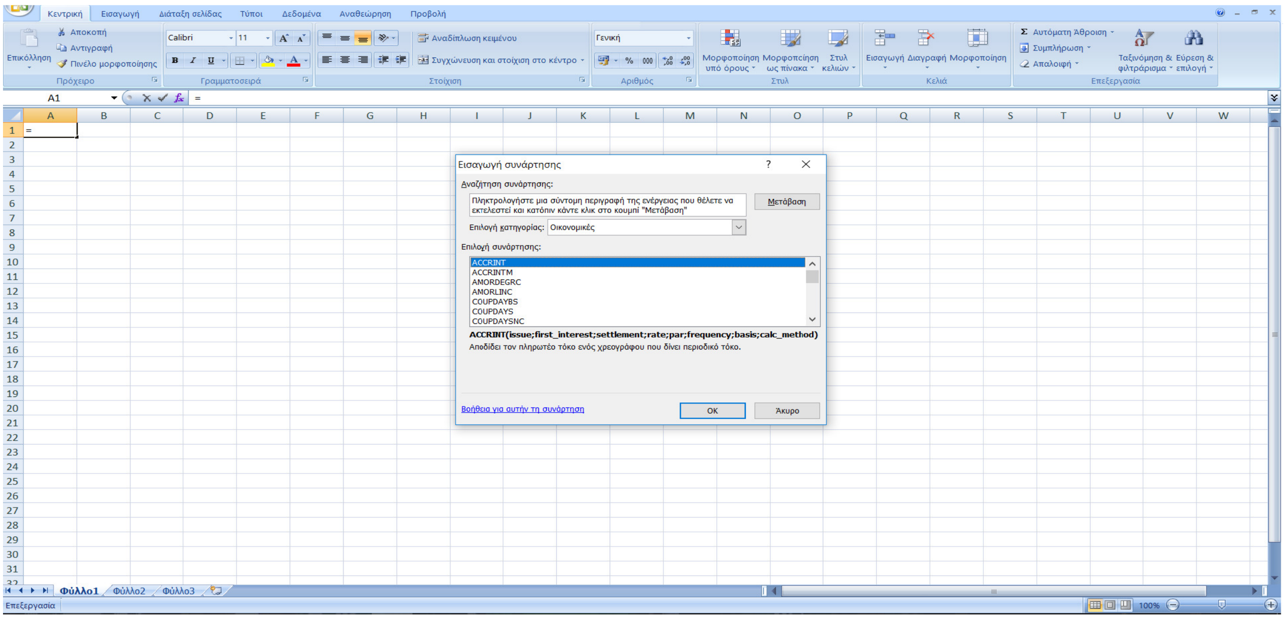
$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\frac{1}{4}(LK)^{-\frac{3}{2}} L^2 < \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\frac{1}{4}(LK)^{-\frac{3}{2}} K^2 < 0$ άρα για την συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas διαπιστώνεται η φθίνουσα οριακή παραγωγικότητα των συντελεστών παραγωγής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Οικονομικές συναρτήσεις με τη χρήση του EXCEL

Λόγω της ραγδαίας εξέλιξης της επιστήμης της πληροφορικής των τελευταίων δεκαετιών, πολλές εργασίες οι οποίες γίνονταν χειρόγραφα και με πολύ χρόνο και κόπο από τον εργαζόμενο πραγματοποιούνται πλέον με την χρήση των υπολογιστών ταχύτερα, πιο εύκολα και σε πολλές περιπτώσεις με μεγαλύτερη ασφάλεια. Στην οικονομική επιστήμη η συνεισφορά των υπολογιστών στον χρήστη είναι τεράστια καθώς έχουν δημιουργηθεί πολλά προγράμματα τα όποια τυποποιούν της εργασίες και δεν απαιτούν εξειδικευμένες γνώσεις από τον εργαζόμενο, πέρα από αυτές για τη σωστή χρήση του προγράμματος. Ενώ λοιπόν στα προηγούμενα κεφάλαια αναφέρθηκαν στην εισαγωγή και στην ανάλυση των συναρτήσεων σε αυτό θα αναλυθούν οι πιο σημαντικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στην επιστήμη των οικονομικών με την χρήση του πιο ευρέως διαδεδομένου προγράμματος στον κλάδο του, του MICROSOFT EXCEL.

Όπως φαίνεται και από την παρακάτω εικόνα το EXCEL παρέχει μια μεγάλη γκάμα από οικονομικές συναρτήσεις. Όταν λοιπόν, ο χρήστης επιλεγεί μια εξ'αυτών, στην περιγραφή το πρόγραμμα τον ενημερώνει για την χρήση της συγκεκριμένης συνάρτησης.



Εικόνα excel 1

Όπως γίνεται κατανοητό δεν μπορεί να γίνει αναφορά και ανάλυση σε όλες τις οικονομικές συναρτήσεις που χρησιμοποίει το EXCEL λόγω του πλήθους τους. Για αυτόν το λόγο θα αναλυθούν οι συναρτήσεις με την μεγαλύτερη χρήση.

ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ PV(ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ) ΚΑΙ FV (ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΑΞΙΑ)

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ FV (FUTURE VALUE)

Ορισμός:
Η συνάρτηση FV είναι μια οικονομική συνάρτηση η όποια υπολογίζει την μελλοντική αξία μιας επένδυσης με βάση ένα σταθερό επιτόκιο. Η συνάρτηση FV μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε με περιοδικές, σταθερές πληρωμές είτε με εφάπαξ πληρωμή.

ΤΥΠΟΣ:

$$FV = CF_0 + CF_1 (1+i)^1 + CF_2 (1+i)^2 + CF_3 (1+i)^3 + \ldots + CF_{t-1} (1+i)^{t-1} + CFt(1+i)^t$$

$$FV = \sum_{n=0}^{t} CF_n (1+i)^n$$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ PV (PRESENT VALUE)
Ορισμός:
Η συνάρτηση PV είναι μια οικονομική συνάρτηση η οποία υπολογίζει την παρούσα αξία ενός κεφαλαίου, δανείου ή επένδυσης με βάση ένα σταθερό επιτόκιο. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε με περιοδικές, σταθερές πληρωμές είτε με μια μελλοντική τιμή που είναι ο επενδυτικός στόχος.

ΤΥΠΟΣ:

$$PV = \frac{CF_0}{(1+i)^0} + \frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{CF_{t-1}}{(1+i)^{t-1}} + \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

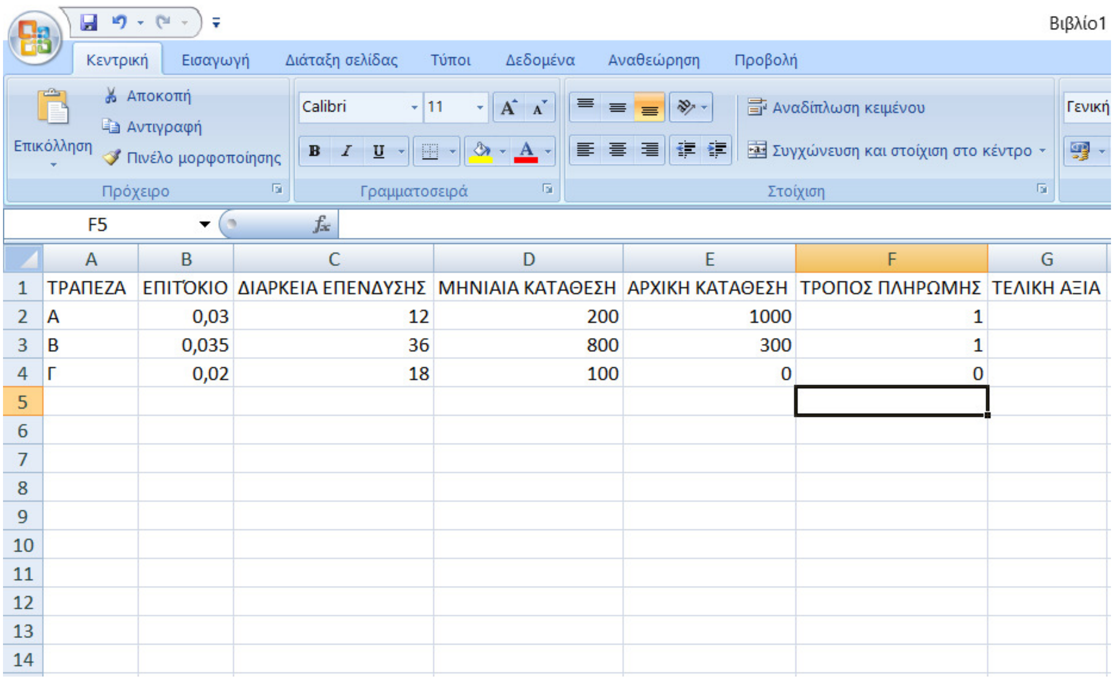
$$PV = \sum_{n=0}^{t} \frac{CF_n}{(1+i)^n}$$

όπου:
CF_n = Οι χρηματορροές (cash flows) και
t = ο χρονικός ορίζοντας, περιόδων (ετών)
i = το επιτόκιο

Παράδειγμα με συνάρτηση μέλλουσας αξίας (FV)
Έστω ότι ένα άτομο έχει 3 τραπεζικούς λογαριασμούς σε διαφορετικές τράπεζες και με διαφορετικά δεδομένα ανά λογαριασμό(επιτόκιο, χρονικοί περίοδοι). Να βρεθεί το τελικό ποσό των λογαριασμών στο τέλος της επένδυσης.
Τράπεζα Α: επιτόκιο=3%, διάρκεια επένδυσης 12 περίοδοι, κατάθεση ανά περίοδο 200, αρχική κατάθεση 1000, τρόπος πληρωμής 1.
Τράπεζα Β: επιτόκιο=3,5%, διάρκεια επένδυσης 36 περίοδοι, κατάθεση ανά περίοδο 800, αρχική κατάθεση 300, τρόπος πληρωμής 1.
Τράπεζα Γ: επιτόκιο=2%, διάρκεια επένδυσης 18 περίοδοι, κατάθεση ανά περίοδο 100, αρχική κατάθεση 0, τρόπος πληρωμής 0.

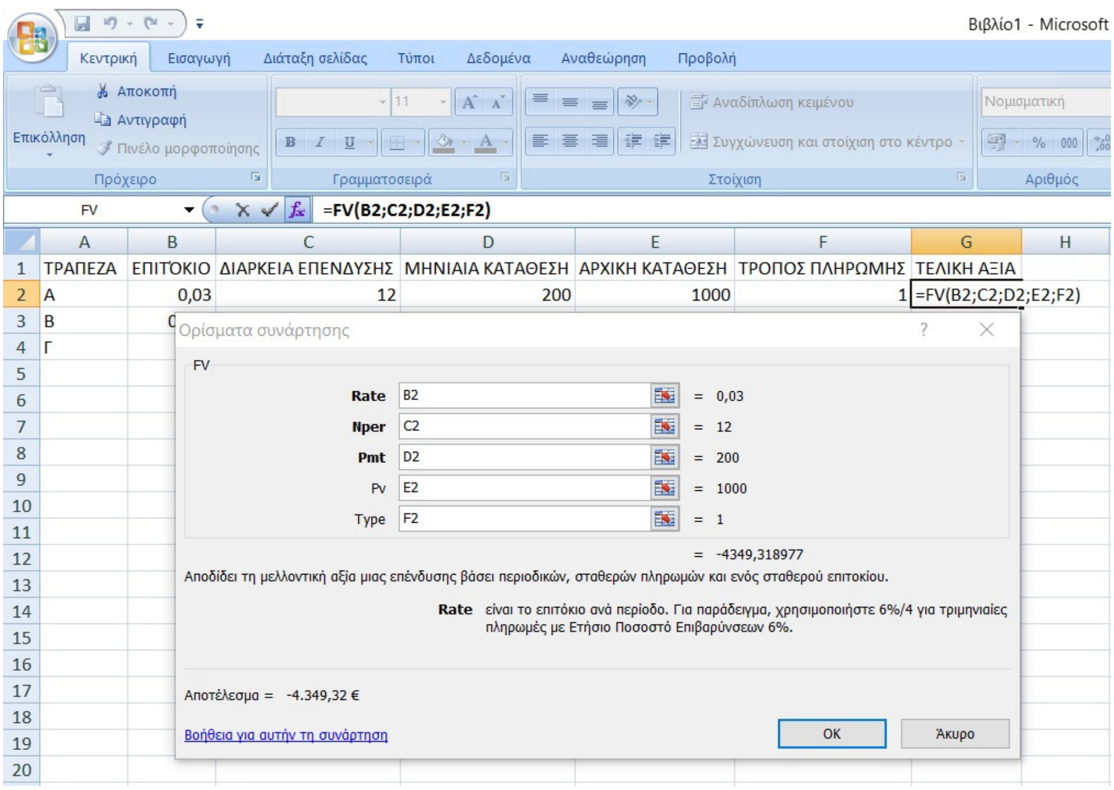
Λύση:

Αρχικά θα ξεκινήσουμε με το φτιάξουμε τους πίνακες στο EXCEL.



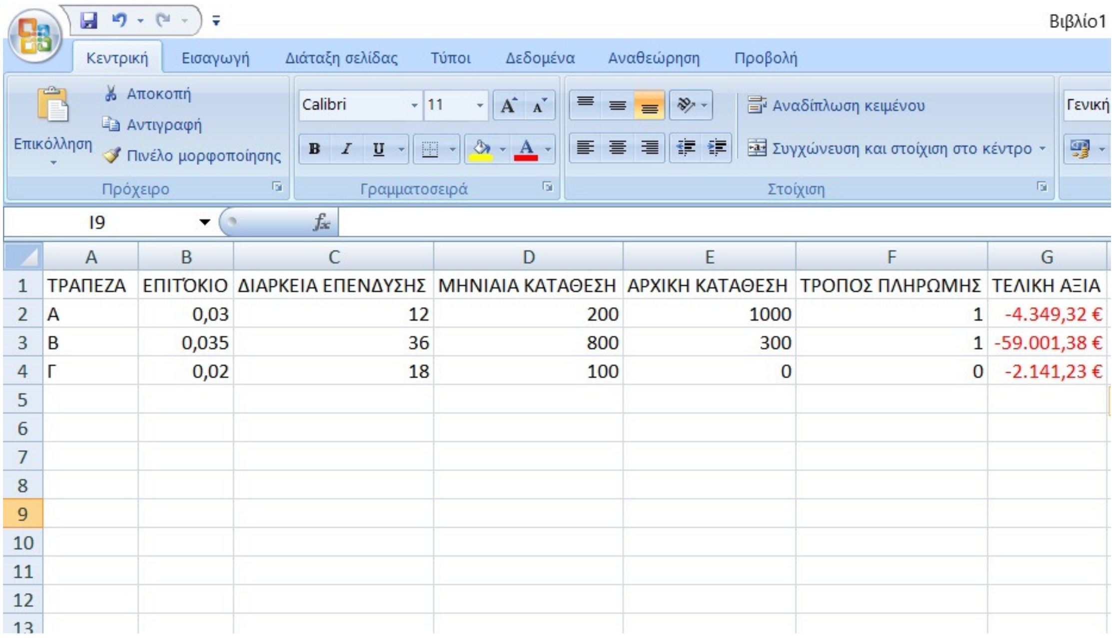
Εικόνα excel 2

Στη συνέχεια θα διαλέξουμε το κελί όπου θέλουμε να υπολογίσουμε την τελική αξία και από τις συναρτήσεις θα επιλέξουμε την FV. Όταν μας εμφανίσει τον πίνακα εμείς θα τον συμπληρώσουμε με τα στοιχειά της αντίστοιχης τράπεζας.



Εικόνα excel 3

Με τον ίδιο τρόπο θα συμπληρώσουμε και τα άλλα 2 ώστε να λυθεί η άσκηση.



	A	B	C	D	E	F	G
1	ΤΡΑΠΕΖΑ	ΕΠΙΤΟΚΙΟ	ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ	ΜΗΝΙΑΙΑ ΚΑΤΑΘΕΣΗ	ΑΡΧΙΚΗ ΚΑΤΑΘΕΣΗ	ΤΡΟΠΟΣ ΠΛΗΡΩΜΗΣ	ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ
2	Α	0,03	12	200	1000	1	-4.349,32 €
3	Β	0,035	36	800	300	1	-59.001,38 €
4	Γ	0,02	18	100	0	0	-2.141,23 €

Εικόνα excel 4

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ NPV, Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΚΑΘΑΡΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΞΙΑΣ

Ορισμός:

Η μέθοδος NPV μπορεί να υπολογίσει τη συμβολή της επένδυσης στην αξία της επιχείρησης που την αναλαμβάνει γιατί με αυτήν τη μέθοδο οι χρηματορροές της επιχείρησης ανάγονται σε επιμέρους παρούσες αξίες.

Η μέθοδος υπολογίζει την καθαρή αξία των προϋπολογιζόμενων χρημματορροών μετά από φόρους προεξοφλημένων με ένα επιτόκιο το ύψος του οποίου είναι ανάλογο με την απόδοση που προσφέρουν ανάλογες επενδύσεις στην αγορά.

Τύπος: $NPV = \frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{CF_{t-1}}{(1+i)^{(t-1)}} + \frac{CF_t}{(1+i)^t}$

Ή $NPV = \sum_{n=1}^{t} \frac{CF_n}{(1+i)^n}$

Εφαρμογή: Η επιχείρηση ΒΗΤΑ Α.Ε επιθυμεί την ανάληψη ενός επενδυτικού σχεδίου εκμετάλλευσης αιολικής ενέργειας. Οι χρηματορροές της επιχείρησης μετά από φόρους απεικονίζονται στον πίνακα που ακολουθεί. Το προεξοφλητικό επιτόκιο του προγράμματος είναι 8%. Με την μέθοδο της καθαρής παρούσας αξίας δώστε τη γνώμη σας για το αν ή επένδυση θα πρέπει να αναληφθεί ή όχι από την επιχείρηση ΒΗΤΑ Α.Ε.

	Αρχικό ποσό	1^{ο} έτος	2^{ο} έτος	3^{ο} έτος	4^{ο} έτος
Χρημ/ροες σε €	-40.000	15.000	12.000	10.000	9.500

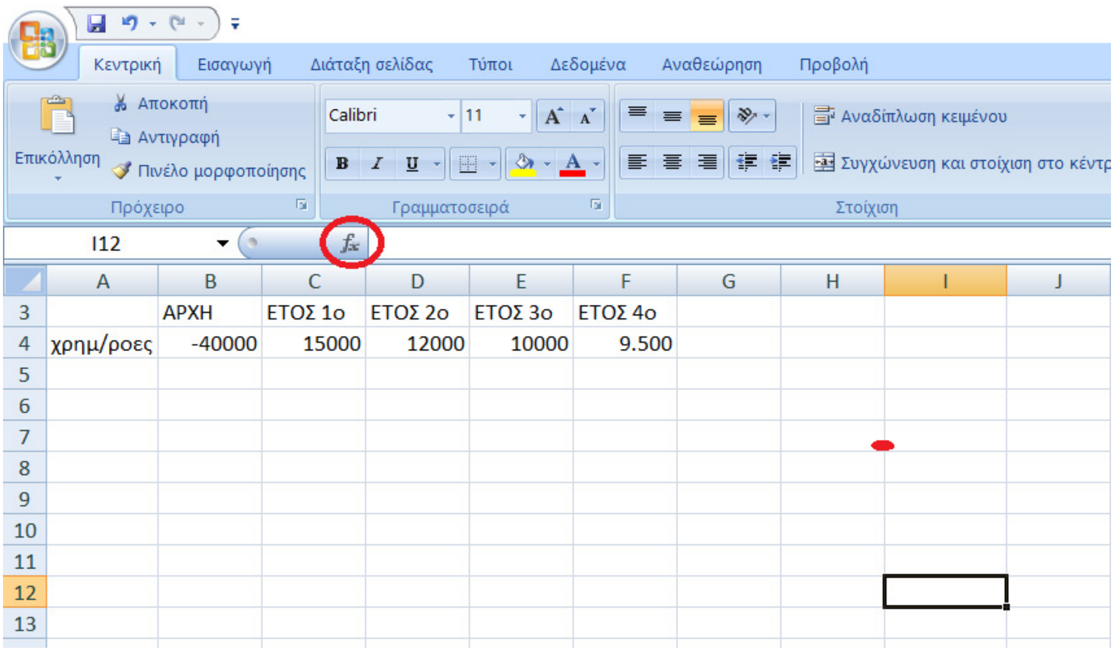
ΛΥΣΗ

Με βάση τον τύπο της NPV θα να λυθεί η ακόλουθη εξίσωση:

$$-40.000+\left(\frac{15.0000}{(1+0{,}08)^1}+\frac{12.0000}{(1+0{,}08)^2}+\frac{10.0000}{(1+0{,}08)^3}+\frac{9.500}{(1+0{,}08)^4}\right)=$$

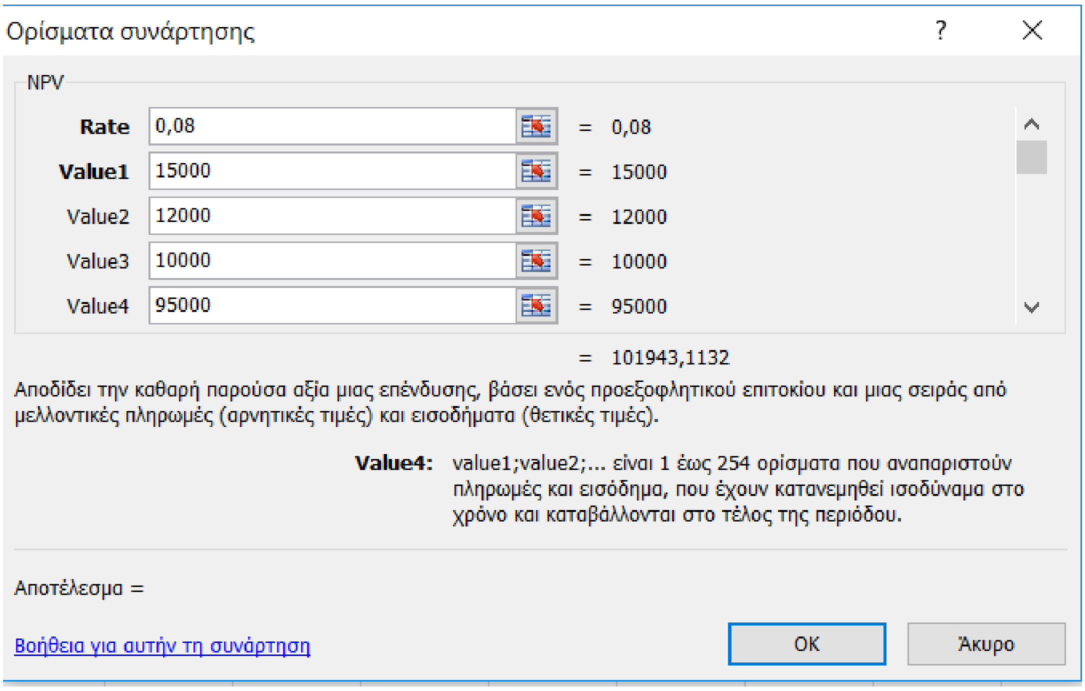
Με την χρήση του excel θα υπολογίσουμε ότι βρίσκεται στην αγκύλη, ωστόσο εμείς θα πρέπει να αφαιρέσουμε τις -40.000€ από το αποτέλεσμα της αγκύλης.

Αρχικά θα ανοίξουμε ένα φύλλο εργασίας του excel και θα βάλλουμε τα δεδομένα της άσκησης σε μορφή πίνακα, όπως φαίνεται και από την ακόλουθη εικόνα.



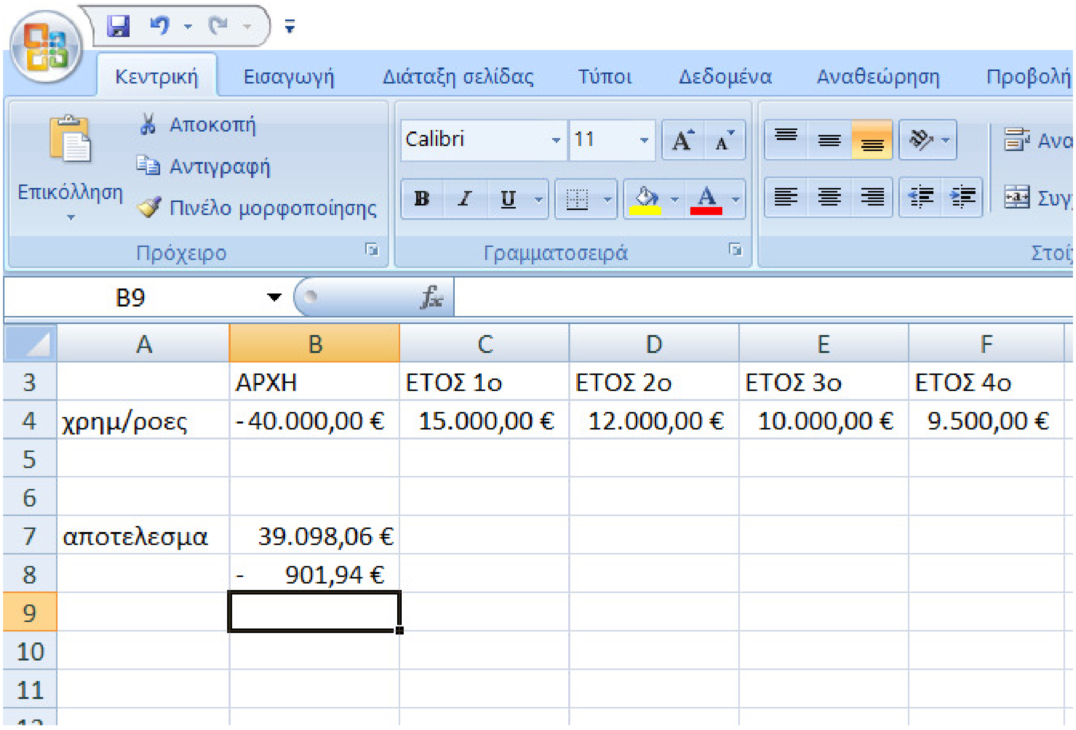
Εικόνα excel 5

Στη συνέχεια θα επιλέξουμε ένα κελί του φυλλου εργασίας του excel στο οποίο θα δημιουργήσουμε και θα λυσουμε την συνάρτηση. Από το μενου τον οικονομικών συναρτήσεων θα επιλέξουμε την συνάρτηση NPV που μας ενδιαφερει και στο νέο παράθυρο θα βαλλουμε τα δεδομένα.



Εικόνα excel 6

Και τελος από το αποτέλεσμα της συναρτησης που δημιουργήθηκε θα αφαιρέσουμε την αρχικη δαπάνη -40000+39098.06=-901,94



Εικόνα excel 7

Εφόσον -901,94 > 0 δεν συμφέρει την επιχείρηση να αναλάβει την επένδυση.

Η ΣΥΝΆΡΤΗΣΗ IRR ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

Ορισμός:

Η μέθοδος συγκρίνει το προεξοφλητικό επιτόκιο των ετήσιων χρημματορροών του επενδυτικού σχεδίου μετά από φόρους με το οποίο μηδενίζεται η καθαρή παρούσα αξία του επενδυτικού προγράμματος. Με τη μέθοδο αυτή συγκρίνεται ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης.

Αν ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης (IRR) είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το επιτόκιο απαιτούμενης απόδοσης η επιχείρηση αναλαμβάνει την επένδυση. Αν ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης είναι μικρότερος από το επιτόκιο απαιτούμενης απόδοσης η επένδυση απορρίπτεται.

Αν ο χρονικός ορίζοντας είναι μία μόνο περίοδος/έτος, υπάρχει δηλαδή μόνο μια χρηματορροή τότε χρησιμοποιείται ο ακόλουθος τύπος.

$$\mathrm{IRR} = \frac{\mathrm{CF}_1 - \mathrm{CF}_0}{\mathrm{CF}_0}$$

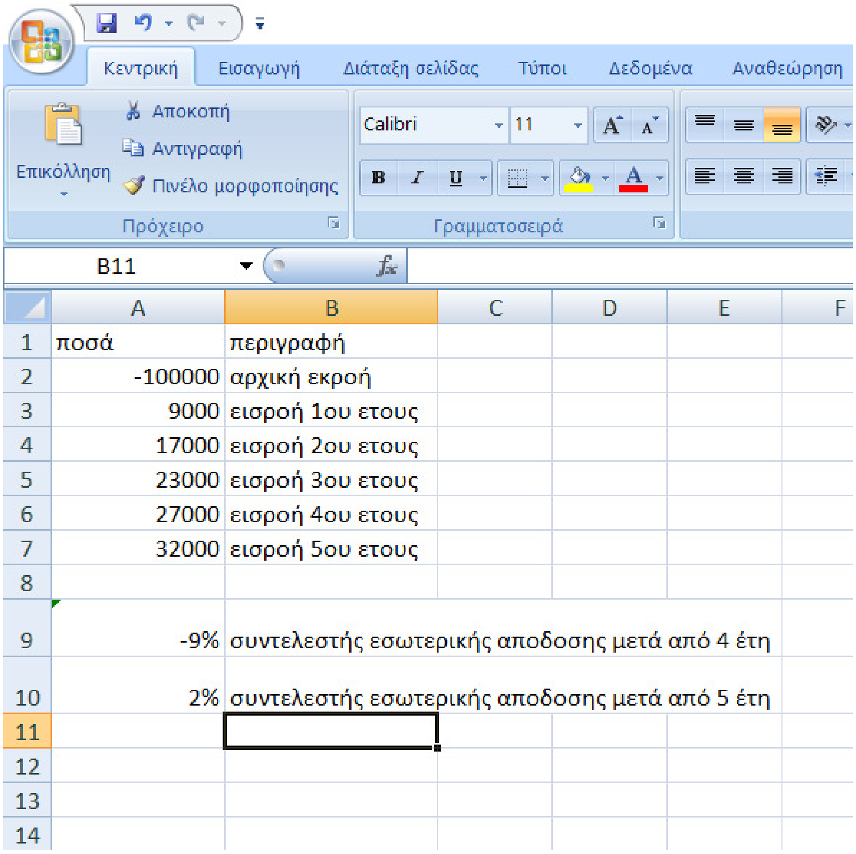
Αν το επενδυτικό σχέδιο εκτείνεται σε παραπάνω από ένα έτη τότε χρησιμοποιείται η ακόλουθη σχέση.

$$\mathrm{IRR} = (\mathrm{IRR})_S + \frac{(\mathrm{IRR})_b + (\mathrm{IRR})_s * \mathrm{NPV}_S}{\mathrm{NPV}_{(\mathrm{IRR})s} + \mathrm{NPV}_{(\mathrm{IRR})_b}}$$

Όπου (IRR)s το μικρό (small) δοκιμαστικό προεξοφλητικό επιτόκιο και (IRR)b το μεγάλο (big) δοκιμαστικό προεξοφλητικό επιτόκιο.

Εφαρμογή εσωτερικού βαθμού απόδοσης IRR

Στον παρακάτω πινάκα δίνονται τα ποσά σε χιλιάδες ευρώ ανά έτος. Να βρεθεί ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης της επένδυσης με διάρκεια αρχικά 4 έτη και στη συνέχεια για 5 έτη.



	A	B
1	ποσά	περιγραφή
2	-100000	αρχική εκροή
3	9000	εισροή 1ου ετους
4	17000	εισροή 2ου ετους
5	23000	εισροή 3ου ετους
6	27000	εισροή 4ου ετους
7	32000	εισροή 5ου ετους
8		
9	-9%	συντελεστής εσωτερικής αποδοσης μετά από 4 έτη
10	2%	συντελεστής εσωτερικής αποδοσης μετά από 5 έτη

Εικόνα excel 8

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα έτσι και τώρα θα ανοίξουμε το μενού των οικονομικών συναρτήσεων και θα επιλέξουμε την συνάρτηση IRR που υπολογίζει τον εσωτερικό βαθμό απόδοσης μιας σειράς χρημματορροών. Από την εικόνα φαίνεται η επένδυση να είναι πενταετούς διάρκειας με τα δεδομένα να εμφανίζονται στην αριστερή στήλη. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι το αρχικό της ποσό είναι πάντα αρνητικό, γιατί σε αντίθεση με τα υπόλοιπα είναι εκροή για την επιχείρηση. Προκειμένου να υπολογίσουμε το IRR θα χρειαστούμε τα δεδομένα της πρώτης στήλης.

Για να υπολογίζουμε τον εσωτερικό βαθμό απόδοσης για μια περίοδο τεσσάρων ετών πρέπει να επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε κελί του EXCEL και να γράψουμε **=IRR(A2:A6).** Η εντολή που δόθηκε ήταν να δημιουργηθεί και να λυθεί μια συνάρτηση IRR για τα ποσά που εμφανίζονται στα κελία A2,A3,A4,A5 και A6. Σε αυτήν την περίπτωση το αποτέλεσμα της εξίσωσης είναι -9%. Δηλαδή ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης της επένδυσης για μια διάρκεια τεσσάρων ετών είναι -9%.

Για να υπολογίσουμε τον εσωτερικό βαθμό απόδοσης για μια περίοδο πέντε ετών η διαδικασία είναι περίπου ίδια με πριν. Θα επιλέξουμε ένα κελί του excel και θα γράψουμε **=IRR(A2:A7).** Το αποτέλεσμα σε αυτήν την περίπτωση είναι 2%, δηλαδή ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης της επένδυσης για μια περίοδο πέντε ετών είναι 2%.

Γενικά μια επένδυση είναι ωφέλιμη όταν ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το συντελεστή απόρριψης. Εάν όμως ο εσωτερικός βαθμός απόδοσης είναι μικρότερος από τον συντελεστή απόρριψης η επένδυση θα πρέπει να απορριφθεί.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Καθώς όλη η μελέτη αυτής της εργασίας έφτασε στο τέλος της, βλέποντας τη συμβολή των οικονομικών συναρτήσεων στην επίλυση οικονομικών προβλημάτων ανά μεγάλα χρονικά διαστήματα, είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε τις εξής παρατηρήσεις και συμπεράσματα.

Αφού λοιπόν η οικονομία μιας κοινωνίας επηρεάζει πάρα πολύ κόσμο σε επιμέρους ζητήματα, οι αποφάσεις που θα ληφθούν για την βελτιστοποίηση της είναι πολύ σημαντικές. Και φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι αν οι συναρτήσεις βοηθούν στη λήψη των αποφάσεων που ειπώθηκαν είναι εξίσου σημαντικές.

Όδηγηθήκαμε λοιπόν στο συμπέρασμα, πως οι συναρτήσεις γενικότερα βοήθησαν άμεσα στην επίλυση του εκάστοτε οικονομικού προβλήματος. Για παράδειγμα για το αν συμφέρει ή όχι μια επιχείρηση να αναλάβει μια επένδυση ή για το αν μια βιομηχανία θα έχει κέρδος ή ζημία. Η επίλυση των ασκήσεων αυτών μέσω των συναρτήσεων δεν οδηγεί απλά στη απάντηση των παραπάνω ερωτημάτων αλλά στην απάντηση τους με απόλυτη ακρίβεια και εάν όλη η διαδικασία έχει γίνει σωστά, και χωρίς να μπορεί να αμφισβητηθεί.

Στο πέρασμα του χρόνου οι συναρτήσεις έχουν δείξει τη μεγάλη συνεισφορά τους. Παρότι οι μαθηματικοί τύποι τροποποιήθηκαν και συνεχίζουν να το κάνουν για να ικανοποιήσουν τις ανάγκες που αλλάζουν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αδαμόπουλος Λ. , Δαμιανού Χ. , Σβέρκος Α. , *Μαθηματικά Και Στοιχεία Στατιστικής*, – Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών Και Εκδόσεων «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ» 1999.
- Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Μέτης Στέφανος, Μπρουχούτας Κων/νος, Παπασταυρίδης Σταύρος, Πολύζος Γεώργιος - *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης*, Γ' Τάξη Γενικού Λυκείου – ΟΕΔΒ, 1999.
- Ανδρεαδάκης Σ. ,Κατσαργύρης Β. , Παπασταυρίδης Σ. , Πολύζος Γ. , Σβέρκος Α. - *Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων*, Α' Γενικού Λυκείου - Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων Αθήνας,1991.
- Απέργης Νικόλαος - *Σύγχρονη Μακροοικονομική,2005*.
- Βασιλείου Δ. , Ηρειώτης Ν. - *Χρηματοοικονομική Διοίκηση (Rosili, 2008)*.
- Βουκούτης Νικόλαος – *Συναρτήσεις,* Δεύτερη έκδοση 1983 GUTENBERG.
- Γεωργίου Δ. , Ηλιάδης Σ. , Μεγαρίτης Θ. - *Πραγματική Ανάλυση*, Πάτρα 2010.
- Γεωργούσης, Λαζάρου - *Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών, 2015*.
- Κιόχος, Παπανικολάου - *Μικροοικονομική Θεωρία, 2005*.
- Κιόχος, Παπανικολάου - *Μακροοικονομική Θεωρία, 2005*.
- Κιόχος - *Στατιστική Για Τις Επιχειρήσεις Και Την Οικονομία,2010*.
- Λιανός Θ. , Παπαβασιλείου Α. , Χατζηανδρέου Α. , *Αρχές Οικονομικής Θεωρίας, Μικροοικονομία / Μακροοικονομία*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων Αθήνας 2009.
Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο:

http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C117/130/944,3455/

- Λουρίδας Σωτήρης Ε. - *Ολοκληρώματα Ι, 2016*.
- Λουρίδας Σωτήρης Ε. - *Ολοκληρώματα ΙΙ* ,2016.
- Νεγρεπόντης Σ. , Γιωτόπουλος Σ. , Γιαννακούλιας Ε. – Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι, 1999.
- Παλαιολόγου Μ. - *Σύγχρονη Μικροοικονομική Θεωρία,2009*.
- Παπαδημητράκης Μ. Απειροστικός Λογισμός Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής (2013).
Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο:

http://fourier.math.uoc.gr/~papadim/calculus1.pdf

- Σαχινίδης Νίκος - *Ολοκληρώματα,* Γ' Ενιαίου Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, 2002.
- Σπανδάγος Βαγγέλης – *Στοιχεία από τις Συναρτήσεις, Στοιχεία από Παραγώγους, Στοιχεία από Ολοκληρώματα,* Έκδοση Ενδέκατη – GUTENBERG, 2007.
- Τσουλφίδης Λευτέρης - *Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης Μέθοδοι και Υποδείγματα Β' Έκδοση,* GUTENBERG, 2005.
- Φούντας Ευάγγελος - *Μαθηματικά Οικονομικών και Διοικητικών Επιστημών*, 1997.
- Bunt L. Jones, J. Bedient – *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών*, Αθήνα 1981.
- Don E. Waldman - *Βιομηχανική Οργάνωση Θεωρία Και Πράξη,2001*.
- Michael Spivak - *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* - Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2010.

Πνευματικά Δικαιώματα

ΜΑΚΡΥΝΙΚΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ – ΜΠΙΝΤΟΥΔΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ