ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΩΝ ΚΑΙ ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ EXCEL

ΘΕΟΔΩΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΕΝΗ

ΕΠΟΠΤΕΥΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2017

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ

Οι διαπιστώσεις, τα αποτελέσματα, τα συμπεράσματα και οι πιθανές προτάσεις της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, εκτός των αναφορών που σημαίνονται ως λήμματα, αποτελούν προσωπικές ή εμπειρικές διαπιστώσεις της φοιτήτριας που την επιμελήθηκε και δεν απηχούν κατ' ανάγκη τη γνώμη του εισηγητή εκπαιδευτικού ή του Εκπαιδευτικού Προσωπικού του τμήματος Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής του Α.Τ.Ε.Ι. Δυτικής Ελλάδας.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά αποτελούν τον κλάδο εκείνο του ευρύτερου φάσματος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη, ανάλυση και επίλυση προβλημάτων των καθημερινών οικονομικών συναλλαγών του ανθρώπου.

Στην παρούσα εργασία θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε τα προβλήματα αυτά, τα οποία τα χωρίζουμε σε βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα, με τη χρήση του προγράμματος Excel.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα πτυχιακή παρουσιάζονται εκτενώς οι βραχυπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις και η επίλυση αυτών με τη χρήση του προγράμματος Excel.

Το πρώτο μέρος της εργασίας ασχολείται με τον υπολογισμό των βραχυπρόθεσμων πράξεων. Για το λόγο αυτό στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή κάποιων βασικών εννοιών που θα χρησιμεύσουν στη συνέχεια. Στα κεφάλαια δυο, τρία και τέσσερα αναλύονται μέσα από παραδείγματα οι βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις οι οποίες είναι: ο απλός τόκος, η προεξόφληση και η ισοδυναμία γραμματίων ενώ στο κεφάλαιο που ακολουθεί, δηλαδή το πέμπτο, γίνεται η επίλυση αυτών των πράξεων μέσω του προγράμματος Excel. Η διαδικασία επίλυσης γίνεται με τη βοήθεια εικόνων που αντικατοπτρίζουν τα βήματα που ακολουθούνται.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας αναλύονται εκτενώς οι μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις οι οποίες είναι: ο ανατοκισμός, οι ράντες και τα δάνεια και έχουν ευρύτερη εφαρμογή στην καθημερινή οικονομική πραγματικότητα. Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται η επίλυση των μακροπρόθεσμων οικονομικών πράξεων μέσω του προγράμματος Excel. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούνται και συναρτήσεις του προγράμματος, εκτός από απλές πράξεις.

Η επίλυση των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων οικονομικών πράξεων μέσω των υπολογιστικών φύλλων διευκολύνει τις καθημερινές συναλλαγές και αποτελεί σημαντικό όπλο των επιχειρήσεων λόγω της απλότητας στη χρησιμοποίησή του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ 1

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 2

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 3

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 8

ΜΕΡΟΣ Α’

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 9

1.1. Το Χρήμα 9

1.2. Κεφάλαιο 10

1.3. Τόκος 11

1.4. Επιτόκιο 11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ 12

2.1 Βασικοί τύποι υπολογισμού του απλού τόκου 12

2.2 Μικτό, εμπορικό και πολιτικό έτος 13

2.3 Τοκάριθμος και σταθερός διαιρέτης 15

2.4 Υπολογισμός του τόκου μιας σειράς κεφαλαίων που κατατεθήκαν σε διαφορετικούς χρόνους μεταξύ τους 15

2.5 Τελική αξία κεφαλαίου 17

2.6 Δανεισμός χρημάτων με προκαταβολή του τόκου 18

2.7 Μέσο επιτόκιο 18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ 20

3.1 Εισαγωγικές έννοιες 20

3.2 Βασικοί ορισμοί 21

3.3 Εξωτερική προεξόφληση 22

3.4 Εσωτερική προεξόφληση 24

3.5 Διαφορά προεξοφλημάτων και πραγματικών αξίων 26

3.6 Έξοδα προεξόφλησης 27

3.7 Πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης 29

3.8 Πινάκιο προεξόφλησης 30

3.9 Επισυναλλαγματική 30
3.10 Έντοκα γραμμάτια δημόσιου 31
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΑ 32
4.1 Βασικές έννοιες 32
4.2 Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού (προεξόφληση εσωτερική) 33
4.3 Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη (προεξόφληση εξωτερική) 35
4.4 Εποχή ισοδυναμίας μια χρονική στιγμή l (προεξόφληση εξωτερική) 36
4.5 Μέση Λήξη 38
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ EXCEL 40
5.1 Υπολογισμός πράξεων απλού τόκου με τη χρήση του Excel 40
5.1.2 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες 40
5.1.3 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό. 41
5.1.4 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες σε δίσεκτο έτος. Έτος μικτό. 42
5.1.5 Υπολογισμός της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό. 43
5.1.7 Υπολογισμός του μέσου επιτοκίου 45
5.2 Υπολογισμός του προεξοφλήματος και της πραγματικής αξίας ενός γραμματίου με το Excel 47
5.2.1 Υπολογισμός του εσωτερικού και εξωτερικού προεξοφλήματος. 47
5.2.2 Προεξόφληση με έξοδα – Υπολογισμός της πραγματικής αξίας στην εξωτερική και εσωτερική προεξόφληση 48
5.3 Υπολογισμός του ενιαίου γραμματίου και του χρόνου λήξης του στα ισοδύναμα γραμμάτια με το Excel- Προεξόφληση εξωτερική 49
5.3.1 Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου- Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού 49
5.3.2 Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου- Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη. 51
5.3.3 Υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του- Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού. 53
5.3.4 Υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του- Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη. 54
5.3.5 Υπολογισμός της μέσης λήξης.- Προεξόφληση εξωτερική 56
ΜΕΡΟΣ Β΄
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ 58

6.1 Βασικές έννοιες και τύποι στον ανατοκισμό 58
6.2 Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου K_0 στον ανατοκισμό. 59
6.3 Εύρεση του χρόνου n στον ανατοκισμό 59
6.4 Εύρεση του επιτοκίου i στον ανατοκισμό 60
6.5 Ανάλογα και ισοδύναμα επιτόκια 60
6.6 Προεξόφληση στον ανατοκισμό 61
6.7 Μέσο επιτόκιο 62
6.8 Περιοδικός ανατοκισμός 62
6.9 Συνεχής ή διαρκής ανατοκισμός 63
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΡΑΝΤΕΣ – ΔΑΝΕΙΑ 64
Ράντες 64
7.1 Βασικές έννοιες ραντών 64
7.2 Βασικές κατηγορίες ραντών 64
7.3 Αρχική και τελική αξία ράντας 65
7.4 Ράντα: σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, *ληξιπρόθεσμη* και άμεση 65
7.5 Ράντα: σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, *προκαταβλητέα* και άμεση 66
7.6 Ράντα: σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, *ληξιπρόθεσμη* και *μέλλουσα* 66
7.7 Ράντα: σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, *προκαταβλητέα* και *μέλλουσα* 67
7.8 Ράντα: σταθερή, ακέραια, *διηνεκής,* ληξιπρόθεσμη και άμεση 68
7.9 Ράντα: σταθερή, ακέραια, *διηνεκής, προκαταβλητέα* και άμεση 68
7.10 Αξιολόγηση επενδύσεων – Μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας 68
Δάνεια 70
7.11 Βασικές έννοιες δανείων 70
7.12 Ενιαία δάνεια 71
7.13 Μέθοδος ίσων μερών κεφαλαίου 71
7.14 Μέθοδος σταθερού τόκου και χρεολυσίου 72
7.15 Μέθοδος προοδευτικού χρεολυσίου (Γαλλική μέθοδος) 73
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ EXCEL 75
8.1 Υπολογισμός πράξεων ανατοκισμού με τη χρήση του Excel 75
8.1.1 Υπολογισμός της τελικής αξίας, όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο 75
8.1.2 Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και μήνες και το επιτόκιο είναι ετήσιο. 76

8.1.3 Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και ημέρες και το επιτόκιο είναι ετήσιο. 76
8.1.4 Υπολογισμός του χρόνου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, το ετήσιο επιτόκιο και η τελική αξία του κεφαλαίου 77
8.1.5 Υπολογισμός του επιτοκίου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, ο αριθμός των ετών ανατοκισμού και η τελική αξία του κεφαλαίου 78
8.2 Υπολογισμός πράξεων ραντών με χρήση του προγράμματος Excel 80
8.2.1 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας 80
8.2.2 Υπολογισμός της τελικής αξίας σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας 81
8.2.3 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και προκαταβλητέας ράντας 82
8.2.4 Υπολογισμός της τελικής αξίας σταθερής, άμεσης και προκαταβλητέας ράντας 84
8.2.5 Υπολογισμός της αρχικής και τελικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και ληξιπρόθεσμης ράντας 85
8.2.6 Υπολογισμός της αρχικής και τελικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και προκαταβλητέας ράντας 86
8.2.7 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας 87
8.2.8 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας 88
8.3 Υπολογισμός πράξεων δανείων με χρήση του προγράμματος Excel 89
8.3.1 Υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιο), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου 89
8.3.2 Υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιο), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με την μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου 91
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 94

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συγκεκριμένα η εργασία αυτή ασχολείται με τα προβλήματα που προκύπτουν στις τραπεζικές και οικονομικές συναλλαγές μεταξύ προσώπων φυσικών και νομικών, δηλαδή προβλήματα στα οποία τα εμπλεκόμενα ποσά είναι έννοιες όπως το χρήμα, το κεφάλαιο, το επιτόκιο και ο τόκος.

Η επίλυση των προβλημάτων αυτών θα γίνει με χρήση του προγράμματος Excel, μέσω μαθηματικών πράξεων και με τη βοήθεια συναρτήσεων. Έτσι, θα παρακολουθήσουμε στην πράξη τη διαδικασία υπολογισμού βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων οικονομικών υπολογισμών με τη χρήση Υπολογιστικών Φύλλων.

Πιο αναλυτικά στο πρώτο κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε εισαγωγικές έννοιες Χρηματοοικονομικών μαθηματικών όπως το χρήμα, το κεφάλαιο και ο τόκος. Στο δεύτερο, τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας θα ασχοληθούμε με την επεξήγηση και την ανάλυση των βραχυπρόθεσμων οικονομικών πράξεων και στο κεφάλαιο που ακολουθεί δηλαδή στο πέμπτο, θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι πράξεις επιλύονται με τη βοήθεια του Excel. Η ανάλυση των μακροπρόθεσμων οικονομικών πράξεων θα αποτελέσει το περιεχόμενων των δύο αμέσως επόμενων κεφαλαίων δηλαδή του έκτου και του εβδόμου ενώ στο όγδοο κεφάλαιο θα αποτυπωθεί η επίλυση αυτών στο Excel.

ΜΕΡΟΣ Α’

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Οι βασικές οικονομικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στα Χρηματοοικονομικά μαθηματικά είναι: το χρήμα, το κεφάλαιο, ο χρόνος, ο τόκος, η νομισματική μονάδα και το επιτόκιο.

Παρακάτω αναλύονται οι έννοιες αυτές, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια κάνοντας μια σύντομη αναδρομή στην πορεία του χρήματος.

1.1. Το Χρήμα

Ως χρήμα ορίζεται οτιδήποτε αναγνωρίζεται σε μια κοινωνία ανθρώπων σαν μέσο ανταλλαγής για απόκτηση αγαθών ή ως μέτρο της αξίας διαφόρων πραγμάτων. Μέσω του χρήματος γίνονται σήμερα οι οικονομικές συναλλαγές μεταξύ προσώπων φυσικών ή νομικών. (Γεωργίου, Κούγιας, 2004)

Η σπουδαιότητα του χρήματος έγινε κατανοητή ακόμη και στις πρωτόγονες κοινωνίες του ανθρώπου, ο οποίος στην προσπάθειά του να ικανοποιήσει τις διάφορες ελλείψεις του σε είδη πρώτης ανάγκης, άρχισε να ανταλλάσει εκείνα τα αγαθά που είχε περίσσευμα με άλλα που δεν είχε αλλά χρειαζόταν και τα είχαν άλλοι συνάνθρωποί του.

Τα πολύτιμα μέταλλα έγιναν το κυριότερο μέσο ανταλλαγής και απόκτησης αγαθών, διότι είχαν ανθεκτικότητα, μπορούσαν να κοπούν σε μικρότερα κομμάτια και να μεταφερθούν ευκολότερα. Έτσι αποτέλεσαν την αρχή των πρώτων νομισμάτων, δηλαδή μικρών μεταλλικών τεμαχίων που έφεραν τη σφραγίδα του «κράτους» που τα εξέδιδε και την ονομαστική (εμπορική) τους αξία.

Η χώρα μας, έχοντας έναν από τους αρχαιότερους πολιτισμούς της Γης, έχει μακρά παράδοση στη δημιουργία νομισμάτων (νομισματοκοπία). Από τα έπη του Ομήρου μαθαίνουμε για την ύπαρξη νομισμάτων στην αρχαία Ελλάδα. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι επίσης, έκοψαν πραγματικά νομίσματα χρησιμοποιώντας ράβδους χρυσού καθορισμένου βάρους ήδη από την τέταρτη χιλιετία π.Χ.

Η κοπή πραγματικών νομισμάτων στην αρχαιότητα άρχισε μετά το 650 π.Χ. και αποδίδεται στους Λύδιους. Σύμφωνα με τον ποιητή Ξενοφάνη, ο περίφημος βασιλιάς Κροίσος έδωσε εντολή να δημιουργηθεί ένα διμεταλλικό σύστημα νομισμάτων από κράμα καθαρού χρυσού και αργύρου, τα επονομαζόμενα νομίσματα από ήλεκτρο. Υπάρχουν βέβαια ενδείξεις από ανασκαφές, κυρίως στα θεμέλια του Αρτεμισίου στην αρχαία Έφεσο, ότι οι Έλληνες έκοβαν νομίσματα από ήλεκτρο πριν την εποχή του Κροίσου. (Κούγιας, Γεωργίου, 2004)

Τα πρώτα νομίσματα από ήλεκτρο είχαν βάρος 7-8 γραμμάρια, ήταν μικρά σε σχήμα φασολιού και στη μια πλευρά έφεραν μια ανάγλυφη μορφή φτιαγμένη με σφραγίδα, η δε αξία τους προσδιοριζόταν σύμφωνα με την περιεκτικότητα σε χρυσό και άργυρο. Πολλά ήταν τα αρχαία Ελληνικά νομίσματα, με γνωστότερο όλων τη δραχμή, βάρους 4,25 γραμμαρίων περίπου.

Πολλά ήταν τα στάδια ακμής, αλλά και κρίσεων από τα οποία πέρασε η δραχμή δια μέσω των αιώνων. Στο νεότερο ελληνικό κράτος, μετά την επανάσταση του

1821, η δραχμή έγινε ξανά η νομισματική μονάδα της χώρας με διάταγμα του βασιλιά Όθωνα στις 8 Φεβρουαρίου 1833 και ορίστηκε ισοτιμία με το χρυσό γαλλικό φράγκο ίση με 0,895 και βάρους 4,477 γραμμάρια εκ των οποίων 4,029 γραμμάρια χρυσού και 0,448 γραμμάρια χαλκού. Δέκα έτη μετά κατασκευάστηκα η χάρτινη δραχμή στην Γαλλία , η οποία απεικόνιζε τη μορφή του πρώτου διοικητή της Εθνικής Τράπεζας, Γεωργίου Σταύρου. Το προνόμιο έκδοσης και κυκλοφορίας των ελληνικών χαρτονομισμάτων, έως το 1926 το είχε η Εθνική Τράπεζα και μετά το 1928 έως το τέλος του 2001 αυτό το προνόμιο το είχε η Τράπεζα της Ελλάδος.

Από την Δραχμή στο Ευρώ

Από την 1η Ιανουαρίου 2002, το Ευρώ ή Euro, το κοινό νόμισμα των κρατών – μελών της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε.Ε.) και ειδικότερα των κρατών εκείνων που μετέχουν στην Ευρωζώνη, μπήκε στην καθημερινότητα των λαών αυτών και πιθανότατα, αποτελεί το σπουδαιότερο οικονομικό γεγονός στην ιστορία της ενωμένης Ευρώπης. Η συμφωνία αυτή έγινε με τη συνθήκη του Μάαστριχ το Νοέμβριο του 1993 και το εκδοτικό προνόμιο του ενιαίου πλέον νομίσματος ανατέθηκε στην Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα.

Για τη χώρα μας, από την 1η Ιανουαρίου το επίσημο νόμισμα σε λογιστική μορφή έγινε το Ευρώ και η οικονομική ισοτιμία δραχμής – Ευρώ «κλειδώθηκε» ως εξής:

1 Ευρώ = 100 λεπτά (cents) = 340,75 δρχ.

Με το άρθρο1 του Ν.2842/2000 τέθηκαν οι κανόνες αντικατάστασης και εναρμόνισης της Δραχμής και του Ευρώ. Επίσης, με το άρθρο 2 του ίδιου νόμου προσδιορίστηκαν οι όροι μετατροπής και στρογγυλοποίησης από δραχμές σε ευρώ και αντιστρόφως, σύμφωνα με την πιο πάνω ισοτιμία.

Το Ευρώ κυκλοφορεί σε κέρματα του ενός και δύο Ευρώ και σε υποδιαιρέσεις των 1,2,5,10,20 και 50 λεπτών, καθώς και επίσης σε χαρτονομίσματα (τραπεζογραμμάτια) των 5,10,20,50,100,200 και 500 Ευρώ.

Η σχεδίαση των χαρτονομισμάτων του Ευρώ έγινε από τον Αυστριακό γραφίστα της Κεντρικής Τράπεζας της Αυστρίας Robert Lalina, ο οποίος επέλεξε αρχιτεκτονικά στοιχεία διάσημων Ευρωπαϊκών μνημείων. Τα τραπεζογραμμάτια φέρουν διάφορα χαρακτηριστικά ασφαλείας όπως λωρίδα ελάσματος, ιριδίζουσα λωρίδα, ταινία ασφαλείας, υδατογράφημα τμήμα ελάσματος και μελάνη μεταβλητού χρωματισμού.

1.2. Κεφάλαιο

Κεφάλαιο καλείται κάθε χρηματικό ποσό το οποίο όταν αποταμιευθεί ή δανεισθεί παράγει νέο χρηματικό ποσό. (Γεωργίου, Κούγιας, 2004).

Κεφάλαιο λέγεται το οικονομικό αγαθό που εκφράζεται σε μονάδες νομισμάτων και έχει την ικανότητα να αυξάνεται.(Δασίλας , 2012-2013)

Πιο απλά θα μπορούσαμε να πούμε ότι κεφάλαιο αποτελείται το ποσό των χρημάτων που έχει παραγωγική ικανότητα.

1.3. Τόκος

Τόκος καλείται το χρηματικό ποσό που δίνει ο δανειζόμενος στο δανειστή ως αμοιβή γιατί ο δανειστής έδωσε σε αυτόν ένα κεφάλαιο προκειμένου να το εκμεταλλευτεί για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. (Γεωργίου, Κούγιας, 2004)

Υπάρχουν δύο παραδοχές από μαθηματικής απόψεως για τον υπολογισμό του τόκου (δύο είδη κεφαλαιοποίησης):

I. Ότι το κεφάλαιο παράγει τόκο μόνο κατά τη λήξη του συνολικού χρονικού διαστήματος τοκισμού και όχι ενδιάμεσα(**τοκισμός με απλό τόκο ή απλή κεφαλαιοποίηση**). Εφαρμόζεται στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, που έχουν συνήθως διάρκεια μέχρι ένα έτος .

II. Ότι το κεφάλαιο παράγει τόκο κατά τη λήξη κάθε μίας χρονικής περιόδου τοκισμού (έτους, εξαμήνου, τριμήνου κ.λπ.). Ο τόκος αυτός προστίθεται στο κεφάλαιο και την επόμενη χρονική περίοδο τοκίζεται το κεφάλαιο μαζί με τον τόκο της προηγούμενης περιόδου(**σύνθετη κεφαλαιοποίηση ή ανατοκισμός**). Εφαρμόζεται στις μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, που είναι συνήθως διάρκειας πέραν του έτους, για τη λύση προβλημάτων ανατοκισμού, χρηματικών ροών και απόσβεσης δανείων (χρεολυσίας).

Οριακά μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή το κεφάλαιο μας παράγει τόκο, ο οποίος ενσωματώνεται σ' αυτό και το σύνολο παράγει τόκο την αμέσως επόμενη στιγμή και ο νέος τόκος πάλι ενσωματώνεται στο κεφάλαιο και αυτό συμβαίνει συνέχεια(συνεχής παραγωγή τόκου ή συνεχής κεφαλαιοποίηση).

1.4. Επιτόκιο

Επιτόκιο καλούμε τον τόκο που δίνει μια νομισματική μονάδα για μια ορισμένη χρονική περίοδο. Συνήθως στην Ελλάδα ως χρονική περίοδο παίρνουμε το ένα έτος. Οι παράγοντες που επηρεάζουν την διακύμανση του επιτοκίου συνοπτικά είναι :

a) Η διεθνής οικονομική κατάσταση.
b) Η οικονομική κατάσταση της χώρας.
c) Οι προσωπικές σχέσεις δανειστή και δανειζόμενου.

Στα επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιηθούν, για τις έννοιες των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών που αναφέραμε προηγουμένως, οι παρακάτω συμβολισμοί:

K : Κεφάλαιο

I : Τόκος

i : Επιτόκιο

n : Ο αριθμός των ετών που αποταμιεύεται ή δανείζεται ένα κεφάλαιο.

m : Ο αριθμός των μηνών που αποταμιεύεται ή δανείζεται ένα κεφάλαιο.

t : Ο αριθμός των ημερών που αποταμιεύεται ή δανείζεται ένα κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

2.1 Βασικοί τύποι υπολογισμού του απλού τόκου

Απλό τόκο καλούμε τη διαδικασία τοκισμού χρημάτων κατά την οποία από τη μια χρονική περίοδο τοκισμού στην άλλη ο δανειστής εισπράττει τον τόκο του αρχικού κεφαλαίου που έδωσε στο δανειζόμενο και αφήνει μόνο το αρχικό κεφάλαιο να τοκίζεται για κάθε επόμενη χρονική περίοδο τοκισμού. Ο δανειζόμενος με τη λήξη του δανείου οφείλει και επιστρέφει μόνο το αρχικό κεφάλαιο που δανείσθηκε. (Κούγιας, Γεωργίου, 2004).

$$I = K * i + K * i + \cdots + K * i \text{ (n φορές)}$$

ή

$$I = K * n * i \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) αποτελεί τη **θεμελιώδη εξίσωση του Απλού Τόκου** (Απλή κεφαλαιοποίηση)

- **Παράδειγμα**: Κεφάλαιο 150 € τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 5% για 4 έτη. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των 4 ετών.

$$I = K * n * i = 150 * 4 * 0{,}05 = 30$$

Αν αντί για έτη υπολογίζαμε τη χρονική περίοδο σε μήνες (m) η εξίσωση θα γινόταν:

$$I = \frac{m}{12} * K * i \rightarrow I = \frac{K * m * i}{12} \qquad (2)$$

- **Παράδειγμα**: Κεφάλαιο 150 € τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 5% για 4 μήνες Να βρεθεί ο συνολικός τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό στο τέλος των 4 μηνών.

$$I = \frac{K * m * i}{12} = \frac{150 * 4 * 0{,}05}{12} = \frac{30}{12} = 2{,}5€$$

2.2 Μικτό, εμπορικό και πολιτικό έτος

Όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες ο υπολογισμός του απλού τόκου γίνεται με τις παρακάτω μεθόδους.

1η μέθοδος.(Μικτό έτος)

Θεωρούμε ότι όλοι οι μήνες του έτους έχουν ακριβώς τις ημέρες που έχουν ημερολογιακά και το έτος 360 μέρες. Το έτος αυτό καλείται *μικτό* και εφαρμόζεται στην Ελλάδα, Ιταλία , Γαλλία, Βέλγιο , Αυστρία, Ισπανία, Ολλανδία και στην περιοχή της Γενεύης. Για τον υπολογισμό του τόκου χρησιμοποιούμε τον τύπο: (Κούγιας, Γεωργίου, 2004)

$$I = \frac{\mathrm{K} * \mathrm{t} * \mathrm{i}}{360}$$

2η μέθοδος.(Εμπορικό έτος)

Θεωρούμε ότι κάθε μήνας έχει 30 ημέρες ανεξάρτητα από τις ημέρες που έχει ημερολογιακά και το έτος 360 ημέρες. Το έτος αυτό καλείται *εμπορικό* και εφαρμόζεται στις Σκανδιναβικές χώρες, Γερμανία, Ρωσία και Ελβετία εκτός περιοχή της Γενεύης. Για τον υπολογισμό του τόκου χρησιμοποιούμε τον τύπο: (Κούγιας, Γεωργίου, 2004)

$$I = \frac{\mathrm{K} * \mathrm{t} * \mathrm{i}}{360}$$

3η μέθοδος.(Πολιτικό ή Λογιστικό έτος)

Θεωρούμε ότι όλοι οι μήνες του έτους έχουν ακριβώς τις ημέρες που έχουν ημερολογιακά και το έτος 365 ημέρες ή 366 αν είναι δίσεκτο[1]. Το έτος αυτό καλείται πολιτικό ή λογιστικό και εφαρμόζεται στην Αγγλία, ΗΠΑ, Πορτογαλία και Καναδά. Για τον υπολογισμό του τόκου χρησιμοποιούμε τον τύπο: (Κούγιας, Γεωργίου, 2004)

$$I = \frac{\mathrm{K} * t * i}{365}$$

$$I = \frac{\mathrm{K} * t * i}{366}$$

[1] *Δίσεκτο έτος* θεωρείται εκείνη η χρονολογία που διαιρείται ακριβώς με 4 και δεν διαιρείται με 100. Έτσι δίσεκτο ήταν το 1992 ενώ δεν ήταν το 2001. Εξαίρεση στον κανόνα αυτό είναι το 2000 το οποίο αν και διαιρείται ακριβώς με το 100, είναι δίσεκτο. (Χουβάρδας, 1998).

Έτος	t	Ημέρες
Πολιτικό	Κάθε μήνας μετριέται με όσες ακριβώς ημέρες έχει	365 (366 στα δίσεκτα έτη)
Μικτό	Κάθε μήνας μετριέται με όσες ακριβώς ημέρες έχει	360
Εμπορικό	Κάθε μήνας μετριέται με 30 ημέρες	360

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.2
Πολιτικό, μικτό και εμπορικό έτος

➢ **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 380 € τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 4% από 01/02/2010 έως 01/03/2010. Να βρεθεί ο τόκος που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό όταν το έτος είναι :α) μικτό β) εμπορικό γ) πολιτικό.

α) $I = \frac{K * t * i}{360} = \frac{380 * 28 * 0{,}04}{360} = 1{,}18$

β) $I = \frac{K * t * i}{360} = \frac{380 * 30 * 0{,}04}{365} = 1{,}27$

γ) $I = \frac{K * t * i}{366} = \frac{380 * 28 * 0{,}04}{365} = 1{,}17$

➢ **Παρατήρηση:** Οι τοκοφόρες ημέρες όταν αποταμιεύουμε χρήματα σε μια τράπεζα, αρχίζουν από την επόμενη ημέρα της κατάθεσης του κεφαλαίου και τελειώνουν την ημέρα ανάληψης του κεφαλαίου. Ενώ οι τοκοφόρες ημέρες όταν δανειζόμαστε ένα κεφάλαιο από μια τράπεζα, αρχίζουν την ημέρα δανεισμού του κεφαλαίου και τελειώνουν την ημέρα επιστροφής του.

Στα παραδείγματα της παρούσας πτυχιακής οι τοκοφόρες ημέρες αρχίζουν από την επόμενη ημέρα της κατάθεσης του κεφαλαίου και τελειώνουν την ημέρα ανάληψης αυτού.

➢ **Παράδειγμα**: Κεφάλαιο Κ Ευρώ κατατίθεται σε μια τράπεζα στις 25/03/2010 και γίνεται ανάληψη αυτού στις 22/06/2010. Να υπολογιστούν οι τοκοφόρες ημέρες.

Μάρτιος : 6 ημέρες

Απρίλιος : 30 ημέρες

Μάιος : 31 ημέρες

Ιούνιος : 22 ημέρες

Συνεπώς οι τοκοφόρες ημέρες συνολικά 89 ημέρες

Στις εφαρμογές που ακολουθούν όταν δεν αναφέρεται το είδος του έτους, θα θεωρείται πάντα το μικτό.

2.3 Τοκάριθμος και σταθερός διαιρέτης

Έστω ένα κεφάλαιο Κ Ευρώ που τοκίζεται για t ημέρες και με ετήσιο επιτόκιο i. Τότε το γινόμενο Κ * t συμβολίζεται με Ν και καλείται *τοκάριθμος*. Ενώ το πηλίκο $\frac{360}{i}$ ή $\frac{365}{i}$ συμβολίζεται με Δ και καλείται *σταθερός διαιρέτης*.

Συνεπώς στην εξίσωση απλού τόκου, έχουμε : $I = \frac{K * t * i}{360} = \frac{\frac{K*t}{1}}{\frac{360}{i}} = \frac{K*t}{\frac{360}{i}} \rightarrow$ $I = \frac{N}{\Delta}$

- **Παρατήρηση:** Επειδή συνήθως το επιτόκιο i είναι σταθερό για αρκετό χρονικό διάστημα η ποσότητα : $\Delta = \frac{360}{i}$ είναι σταθερή. Οπότε για τον υπολογισμό του τόκου ενός κεφαλαίου αρκεί να διαιρέσουμε τον τοκάριθμο $N = K * t$ με τη σταθερή ποσότητα (σταθερό διαιρέτη).
- **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 500 € τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 3,5% για 27 ημέρες. Να βρεθούν ο τοκάριθμος, ο σταθερός διαιρέτης Δ και ο τόκος Ι που θα δώσει το κεφάλαιο αυτό. Έτος μικτό.

$$N = K * t = 500 * 27 = 13.500$$

$$\Delta = \frac{360}{i} = \frac{360}{0,035} = 10.285,71$$

$$I = \frac{N}{\Delta} = \frac{13.500}{10.285,71} = 1,31 \text{ €}$$

2.4 Υπολογισμός του τόκου μιας σειράς κεφαλαίων που κατατεθήκαν σε διαφορετικούς χρόνους μεταξύ τους

Είναι σύνηθες φαινόμενο οι πελάτες μιας τράπεζας να καταθέτουν διάφορα ποσά σε λογαριασμούς τους με το ίδιο μεν επιτόκιο, αλλά σε διαφορετικούς χρόνους. Στις περιπτώσεις αυτές ο συνολικός απλός τόκος που προκύπτει ισούται με το άθροισμα των τόκων που αντιστοιχούν σε κάθε κεφάλαιο. Δηλαδή αν υποθέσουμε ότι τα κεφάλαια: $K_1 K_2, \dots, K_\nu$ κατατίθενται για τοκισμό με απλό τόκο, με σταθερό ετήσιο επιτόκιο i και με χρόνους $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ αντίστοιχα, τότε ο συνολικός τόκος δίνεται από τη σχέση:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_\nu$$

ή

$I = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_\nu}{\Delta}$ όπου $N_i = K_i * t_i \ , i = 1,2 \dots, \nu.$

Συνεπώς ο συνολικός τόκος μιας σειράς κεφαλαίων που κατατίθενται για απλή κεφαλαιοποίηση, σε χρόνους διαφορετικούς μεταξύ τους, υπολογίζεται αν διαιρέσουμε το άθροισμα των τοκαρίθμων δια του σταθερού διαιρέτη. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζεται ο τόκος καταθέσεων χρηματικών ποσών σε Ταμιευτήρια, Τράπεζες κ.λ.π.

- **Παράδειγμα:** κατέθεσε κάποιος στην Εμπορική Τράπεζα στις 7 Ιανουαρίου 2004, 5.000€, στις 21 Φεβρουαρίου 2004 άλλα 2.600 €, στις 27 Μαρτίου 2004 άλλα 3.400 €, στις 16 Μαΐου 2004 άλλα 4.000 € και στις 5 Ιουνίου 2004, άλλα 1.800 €. Να υπολογιστεί ο τόκος που θα εισπράξει ο πελάτης της τράπεζας στις 23 Οκτωβρίου 2004, αν το επιτόκιο είναι 1,5%. α) Έτος πολιτικό , β) Έτος μικτό, γ) Έτος εμπορικό. (Σημείωση: η 23η Οκτωβρίου 2004, θεωρείται τοκοφόρος ημέρα).

Καταρχάς θα συντάξουμε τους πίνακες υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών και των τοκαρίθμων για τις πέντε καταθέσεις, ως εξής:

			Τοκοφόρες ημέρες	
Κεφάλαια	**Έναρξη**	**Λήξη**	**Πολιτικό-Μικτό**	**Εμπορικό**
5.000	07/01/04	23/10/04	290	286
2.600	21/02/04	23/10/04	245	242
3.400	27/03/04	23/10/04	210	207
4.000	16/05/04	23/10/04	160	157
1.800	05/06/04	23/10/04	140	138

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.1
Υπολογισμός των τοκοφόρων ημερών

	Τοκάριθμοι	
Κεφάλαια	**Πολιτικό-Μικτό**	**Εμπορικό**
5.000	1.450.000	1.430.000
2.600	637.000	629.200
3.400	714.000	703.800
4.000	640.000	628.000
1.800	252.000	248.400
Άθροισμα τοκαρίθμων	3.693.000	3.639.400

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.4.2
Υπολογισμός των τοκαρίθμων

Οπότε, έχουμε:

α) Πολιτικό έτος : $\Delta \;= \frac{366}{0{,}015} \;=\; 24.400$

Άρα $I \;= \frac{3.693.000}{24.400} =\; 151{,}35€$

β) Μικτό έτος : $\Delta \;= \;\frac{360}{0{,}015} =\; 24.000$

Άρα $I = \frac{3.693.000}{24.000} =\; 153{,}88\;€$

γ) Εμπορικό έτος: $\Delta \;= \;\frac{360}{0{,}015} \;=\; 24.000$

Άρα $I \;= \;\frac{3.693.400}{24.000} \;=\; 151{,}64€$

2.5 Τελική αξία κεφαλαίου

Ως τελική αξία κεφαλαίου ή τελικό κεφάλαιο ορίζεται το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου συν τον τόκο που αναλογεί σε αυτό, σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Δηλαδή,

Τελική αξία κεφαλαίου = Αρχικό κεφάλαιο + Τόκος κεφαλαίου

Οπότε η τελική αξία K_τ για n έτη είναι:

$$K_\tau = K + I = K + K * n * I = K * (1 + n + i) \rightarrow K_\tau = K + I$$

- **Παρατήρηση:** Αν τα n έτη αντικατασταθούν με α)m μήνες και β)με t ημέρες, τότε θα έχουμε:

$$\text{α) } K_m = K + I = K + \frac{\mathrm{K*m*i}}{12} = K * (1 + \frac{\mathrm{m*i}}{12})$$

$$\text{β) } K_t = K + I = K + \frac{\mathrm{K*t*i}}{360} = K * (1 + \frac{\mathrm{t*i}}{360})$$

ή

$$\text{γ) } K_t = K + I = K + \frac{\mathrm{K*t*i}}{365} = K * (1 + \frac{\mathrm{t*i}}{365})$$

- **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 700 € τοκίζεται με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 4% για 65 ημέρες. Να βρεθεί η τελική αξία αυτού.

Οπότε η τελική αξία αυτού K_{65} είναι:

$$K_{65} = K * (1 + \frac{\mathrm{t*i}}{360}) = 700 * (1 + \frac{65*0{,}04}{360}) = 705{,}06\;€$$

2.6 Δανεισμός χρημάτων με προκαταβολή του τόκου

Πολλές φορές ο δανειζόμενος, κατά της στιγμή του δανεισμού, καταβάλλει στο δανειστή του το ποσό που αναλογεί στους τόκους της χρονικής διάρκειας του δανεισμού, δηλαδή προκαταβάλλει τους τόκους και κατά συνέπεια, στη λήξη του δανεισμού οφείλει να επιστρέψει μόνο το ποσό που αρχικώς δανείσθηκε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε προκαταβολή κράτησης του τόκου.

Έστω Κ Ευρώ το κεφάλαιο που δανείσθηκε κάποιος με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i για n έτη. Ο πιστωτής του δανείου κράτησε προκαταβολικά τον τόκο του δανείου την ημέρα σύναψής του. Να βρεθεί το καθαρό ποσό K_δ που θα εισπράξει ο δανειζόμενος.

Για n έτη ο δανειζόμενος πρέπει να πληρώσει τόκο:

$$I = K * n * i$$

Οπότε το καθαρό ποσό K_δ που θα εισπράξει ο δανειζόμενος την ημέρα σύναψης του δανείου είναι:

$$K_\delta = K - I = K - K * n * I = K * (1 - n * i):$$

Παρατήρηση: Αν αντί τα n έτη αντικατασταθούν α)με m μήνες και β)με t ημέρες έχουμε:

$$\text{α) } K_\delta = K - I = K - \frac{K*m*i}{12} = K * \left(1 - \frac{m*i}{12}\right)$$

$$\text{β) } K_\delta = K - I = K - \frac{K*t*i}{360} = K * \left(1 - \frac{t*i}{360}\right)$$

- **Παράδειγμα:** δανείσθηκε κάποιος το ποσό των 2.000 € με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 6% για 3 έτη. Αν ο πιστωτής κράτησε προκαταβολικά τον τόκο τότε να βρεθεί το καθαρό ποσό που θα εισπράξει ο δανειζόμενος την ημέρα σύναψης του δανείου.

Έχουμε :

$$K_\delta = K * (1 - n * i) = 2.000\,(1 - 3 * 0{,}06) = 1.640\,€$$

Συνεπώς ο δανειζόμενος την ημέρα σύναψης του δανείου θα πάρει 1.640 € και στο τέλος των 3 ετών θα επιστρέψει στον πιστωτή το ποσό που δανείσθηκε, δηλαδή 2.000 €.

2.7 Μέσο επιτόκιο

Έστω ότι τα κεφάλαια K_j, $j = 1,2,\dots,m$ τοκίσθηκαν για t_j ημέρες, $j = 1,2,\dots,m$ με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο i_j, $j = 1,2,\dots,m$.

Ο συνολικός τόκος που θα δώσουν τα κεφάλαια αυτά είναι:

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_m$$

$$= \frac{K_1 * t_1 * i_1}{360} + \cdots + \frac{K_m * t_m * i_m}{360}$$

$$= \frac{K_1 * t_1 * i_1 \; + \cdots + K_m * t_m * i_m}{360}.$$

Τώρα έστω ότι τα κεφάλαια $K_{j,}$ $j = 1,2, \dots, m$ τοκίσθηκαν για t_j ημέρες, $j = 1,2, \dots, m$ με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο *i*.

Ο συνολικός τόκος που θα δώσουν τα κεφάλαια αυτά είναι:

$$I' = I'_1 + I'_2 + \cdots + I'_m$$

$$= \frac{K_1 * t_1 * i}{360} + \cdots + \frac{K_m * t_m * i}{360}$$

$$= \frac{K_1 * t_1 * i \; + \cdots + K_m * t_m * i}{360}.$$

Μέσο επιτόκιο των επιτοκίων $i_1, i_2, \dots, i_m$ καλούμε εκείνο το επιτόκιο για το οποίο έχουμε:

$$I = I' \qquad (5)$$

Και το υπολογίζουμε βάση του τύπου:

$$i = \frac{K_1 * \; t_1 \; * \mathrm{i}_1 + \; \dots + K_m * \mathrm{t_m} \; * \mathrm{i_m}}{K_1 * \; \mathrm{t}_1 + \dots + K_m * \mathrm{t_m}}$$

➢ **Παράδειγμα:** Κεφάλαια 500 € και 600€ τοκίζονται με απλό τόκο και ετήσια επιτόκια 4% και 7% για 27 και 35 ημέρες αντίστοιχα. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο των επιτοκίων 4 % και 7 %.

$$i = \frac{K_1 * \; t_1 \; * \mathrm{i}_1 + \; K_2 * \mathrm{t}_2 \; * \mathrm{i}_2}{K_1 * \; \mathrm{t}_1 + \; K_2 * \mathrm{t}_2}$$

$$= \frac{500 \, * \, 27 \, * \, 0{,}04 + 600 \, * \, 35 \, * \, 0{,}07}{500 \, * \, 27 + \, 600 \, * 35} = 0{,}05826 \text{ ή } 5{,}826\ \%$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ

3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Οι έμποροι πολλές φορές δίνουν εμπορεύματα στους πελάτες τους με πίστωση, δηλαδή τους δίνεται η δυνατότητα να εξοφλήσουν το ποσό της αξίας του σε κάποιο καθορισμένο χρονικό διάστημα. Για να εξοφλήσουν την καταβολή των χρημάτων τους από αυτούς, τους καλούν να υπογράψουν ένα πιστωτικό τίτλο ο οποίος ονομάζεται *γραμμάτιο ή συναλλαγματική*. Με τον τρόπο αυτό διασφαλίζεται η εξόφληση του χρέους των πελατών προς τους εμπόρους στην αναγραφόμενη στον πιστωτικό τίτλο ημερομηνία.

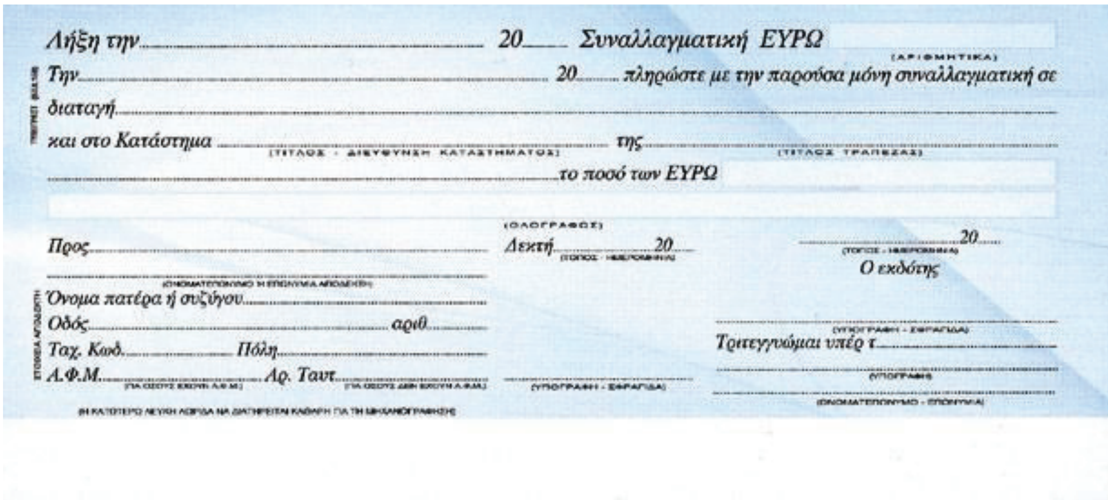
Οι υπηρεσίες που προσφέρουν τα γραμμάτια και οι συναλλαγματικές στην τόνωση των εμπορικών συναλλαγών και την ανάπτυξη του εμπορίου είναι μεγάλες. Για το λόγο αυτό κυκλοφορούν ευρύτατα στην αγορά και αντικαθιστούν πολλές φορές, όταν δεν έχουν λήξει ή όταν λήγουν το χρήμα.

Η ουσιαστική διαφορά μεταξύ γραμματίου και συναλλαγματικής έγκειται στον τρόπο χρήσης του κάθε πιστωτικού τίτλου. Το γραμμάτιο αποτελεί *υπόσχεση* του οφειλέτη προς τον πιστωτή ότι θα καταβάλει το αναγραφόμενο στον πιστωτικό τίτλο ποσό και στην αναγραφόμενη ημερομηνία. Η δε συναλλαγματική αποτελεί *εντολή* του πιστωτή προς τον οφειλέτη να πληρώσει το αναγραφόμενο ποσό στην αναγραφόμενη ημερομηνία.

Αν ο οφειλέτης δεν εξοφλήσει το γραμμάτιο ή τη συναλλαγματική στον πιστωτή, τότε ο πιστωτής έχει το δικαίωμα να προβεί σε διαμαρτύρηση του γραμματίου ή της συναλλαγματικής και να διεκδικήσει δικαστικώς την εξόφληση αυτού του πιστωτικού τίτλου από τον οφειλέτη.

Η μεταβίβαση της είσπραξης μιας συναλλαγματικής από ένα πρόσωπο (φυσικό ή νομικό) σε άλλο πρόσωπο (φυσικό ή νομικό) μπορεί να γίνει με οπισθογράφηση στο ειδικό έντυπο που υπάρχει στο πίσω μέρος της συναλλαγματικής.

Αν και όπως προαναφέραμε δεν υπάρχει ουσιώδης διαφορά μεταξύ των δύο τίτλων, στην πράξη χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά οι συναλλαγματικές και σπάνια τα γραμμάτια. Παρακάτω θα χρησιμοποιείται η λέξη συναλλαγματική και θα εννοείται συναλλαγματική ή γραμμάτιο.


Λήξη την .... 20___ Συναλλαγματική ΕΥΡΩ
(ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ)
Την .... 20...... πληρώστε με την παρούσα μόνη συναλλαγματική σε
διαταγή ....
και στο Κατάστημα .... της ....
(ΤΙΤΛΟΣ - ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΟΣ) (ΤΙΤΛΟΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ)
.... το ποσό των ΕΥΡΩ
(ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ)
Προς .... Δεκτή .... 20... .... 20.....
Ο εκδότης
Όνομα πατέρα ή συζύγου ....
Οδός .... αριθ. ....
Ταχ. Κωδ. .... Πόλη .... Τριτεγγυώμαι υπέρ τ ....
Α.Φ.Μ. .... Αρ. Ταυτ. ....
(ΥΠΟΓΡΑΦΗ - ΣΦΡΑΓΙΔΑ)

Εικόνα 3.1 Συναλλαγματική
Πηγή: http://www.enet.gr/?i=news.el.article&id=220985

3.2 Βασικοί ορισμοί

Σε κάθε συναλλαγματική διακρίνουμε τις παρακάτω αξίες:

i. *Ονομαστική αξία* ενός γραμματίου ή μια συναλλαγματικής ονομάζεται η αξία (το χρηματικό ποσό) που αναγράφεται πάνω στο έντυπο και την οποία έχει αυτός ο πιστωτικός τίτλος στη λήξη του. *Εκδότης* ονομάζεται ο οφειλέτης ενός τέτοιου πιστωτικού τίτλου, ενώ πιστωτής εκείνος που θα εισπράξει το ποσό της ονομαστικής αξίας αυτού.

ii. *Πραγματική αξία ή παρούσα αξία* καλείται η αξία που έχει η συναλλαγματική κάθε χρονική στιγμή πριν από τη λήξη της. Η αξία αυτή συνεχώς αυξάνει καθώς πλησιάζουμε προς τη λήξη της συναλλαγματικής. Την ημέρα λήξης της συναλλαγματικής η ονομαστική και η πραγματική αξία είναι ίσες.

Λήξη ενός γραμματίου ή συναλλαγματικής καλείται η ημερομηνία εκείνη που αναγράφεται επάνω σε αυτό το έντυπο και είναι η ημερομηνία κατά την οποία πρέπει να γίνει η εξόφληση αυτού του πιστωτικού τίτλου δηλαδή του γραμματίου ή της συναλλαγματικής.

Προεξόφληση συναλλαγματικής καλείται η ρευστοποίηση, δηλαδή μετατροπή σε χρήμα της συναλλαγματικής πριν από τη λήξη της.

Προεξόφλημα καλείται το χρηματικό ποσό, ο τόκος, που κρατάει η τράπεζα ή ο ιδιώτης κατά την προεξόφληση της συναλλαγματικής.

Χρόνος προεξόφλησης ονομάζεται το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ της ημερομηνίας προεξόφλησης και λήξης μιας συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου.

Επιτόκιο προεξόφλησης ονομάζεται το επιτόκιο εκείνο με το οποίο ο κάτοχος (ή κομιστής) μιας συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου και η τράπεζα συμφωνούν να γίνει η προεξόφληση του.

Υπάρχουν 2 είδη προεξοφλήσεων: η *εξωτερική* και η *εσωτερική* οι οποίες αναλύονται εκτενώς παρακάτω.

3.3 Εξωτερική προεξόφληση

Εξωτερική προεξόφληση καλείται η προεξόφληση κατά την οποία το προεξόφλημα υπολογίζεται με βάση την ονομαστική αξία της συναλλαγματικής.

Τόσο στην Ελλάδα, όσο και στην υπόλοιπη Ευρώπη, πλην της Αγγλίας χρησιμοποιείται ή εξωτερική προεξόφληση.

Συμβολισμοί

Κ : Ονομαστική αξία της συναλλαγματικής.
Ε : Εξωτερικό προεξόφλημα.
i : Επιτόκιο προεξόφλησης.
Α : Πραγματική ή παρούσα αξία συναλλαγματικής.
t : Αριθμός ημερών πριν από τη λήξη της συναλλαγματικής.

Μια συναλλαγματική ονομαστικής αξίας Κ, προεξοφλείται εξωτερικά t ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο προεξόφλησης i. Αν το έτος είναι μικτό ή εμπορικό, τότε για το προεξόφλημα Ε και την πραγματική αξία αυτού του τίτλου, ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

$$E = \frac{K * t * i}{360}$$

ή

$$E = \frac{K * t}{\Delta}$$

Όπου $\Delta = \frac{360}{i}$ και $A = K - E$.

- **Παρατήρηση:** Αν ο χρόνος των t ημερών είναι m μήνες ή t έτη, τότε το προεξόφλημα υπολογίζεται από τους τύπους:

$$E = K * n * i$$

$$E = \frac{K * m * i}{12}$$

- **Παράδειγμα**: Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 200 Ευρώ προεξοφλείται εξωτερικά σήμερα, 40 ημέρες από τη λήξη της με επιτόκιο 4%. Να βρεθεί το προεξόφλημα και η πραγματική της αξία. Έτος μικτό.

Έχουμε:

$$E = \frac{K * t * i}{360} = \frac{200 * 40 * 0{,}04}{360} = 0{,}89 \text{ €}$$

Και

$$A = K - E = 200 - 0{,}89 = 199{,}11\text{€}$$

- **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική προεξοφλείται εξωτερικά σήμερα 40 ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο 4% και δίνει πραγματική αξία 198 €. Να βρεθεί η ονομαστική αξία αυτής και το προεξόφλημα.

Έχουμε:

$$E = \frac{\mathrm{K} * t * i}{360}$$

Και

$$A = K - E = K - \frac{\mathrm{K} * t * i}{360}$$

Οπότε:

$$198 = K - \frac{\mathrm{K} * 40 * 0{,}04}{360}$$

$$K = 198{,}88€$$

Επιπλέον

$$E = \frac{198{,}88 * 40 * 0{,}04}{360} = 0{,}88$$

➢ **Παράδειγμα**: Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 200 € προεξοφλείται εξωτερικά 50 ημέρες πριν από τη λήξη της και δίνει πραγματική αξία 197 €. Να βρεθεί το προεξόφλημα και το επιτόκιο προεξόφλησης.

Έχουμε:

$$E = K - A = 200 - 197 = 3$$

Επίσης

$$E = \frac{\mathrm{K} * t * i}{360}$$

Δηλαδή

$$3 = \frac{200 * 50 * i}{360}$$

Δηλαδή

$$i = 0{,}108 \text{ ή } i = 10{,}8\%$$

➢ **Παρατήρηση**: Αν στον τύπο $E = \frac{\mathrm{K} * t}{\Delta}$ έχουμε:

a) $t = \Delta$, τότε $E = K$

b) $t > \Delta$, τότε $E > K$ δηλαδή το εξωτερικό προεξόφλημα μπορεί να γίνει μεγαλύτερο ή ίσο της ονομαστικής του αξίας.

3.4 Εσωτερική προεξόφληση

Εσωτερική προεξόφληση καλείται η προεξόφληση κατά την οποία το προεξόφλημα υπολογίζεται με βάση την πραγματική αξία της συναλλαγματικής.

Συμβολισμοί

K : Ονομαστική αξία της συναλλαγματικής.
E_1 : Εξωτερικό προεξόφλημα.
i : Επιτόκιο προεξόφλησης.
A_1 : Πραγματική ή παρούσα αξία συναλλαγματικής.

t : Αριθμός ημερών πριν από τη λήξη της συναλλαγματικής

Έστω ότι έχουμε μια συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K, η οποία προεξοφλείται εσωτερικά t ημέρες πριν τη λήξη της με επιτόκιο i και δίνει πραγματική αξία A_1. Αν το έτος είναι μικτό, τότε για το προεξόφλημα και την πραγματική αξία αυτής προφανώς ισχύουν οι τύποι:

$$E_1 = \frac{A_1 * t * i}{360}$$

ή

$$E_1 = \frac{A_1 * t}{\Delta}$$

Όπου $\Delta = \frac{360}{i}$ και $A_1 = K - E_1$

- **Παρατήρηση:** Αν ο χρόνος t ημερών είναι n έτη ή m μήνες τότε το εσωτερικό προεξόφλημα υπολογίζεται από τους τύπους:

$$E_1 = A_1 * n * i$$

Και

$$E_1 = \frac{A_1 * m * i}{12}$$

- **Παρατήρηση:** Οι τύποι που αναφέραμε για τον υπολογισμό του εσωτερικού προεξοφλήματος έχουν το μειονέκτημα ότι έχουν δύο άγνωστες ποσότητες, το A_1 και το E_1. Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε ένα πιο εύχρηστο τρόπο για τον υπολογισμό του εσωτερικού προεξοφλήματος από την ονομαστική αξία της συναλλαγματικής.

Έχουμε:

$$E_1 = K - A_1$$

ή

$$A_1 = K - E_1.$$

Οπότε:

$$E_1 = \frac{\mathrm{A}_1 * t * i}{360}$$

ή

$$E_1 = \frac{(\mathrm{K} - \mathrm{E}_1) * t * i}{360}$$

ή

$$E_1 = \frac{\mathrm{K} * t}{\Delta + t}.$$

Τον τύπο $E_1 = \frac{\mathrm{K} * t}{\Delta + t}$ θα χρησιμοποιούμε από εδώ και στο εξής στη λύση των προβλημάτων για τον υπολογισμό του εσωτερικού προεξοφλήματος.

➢ **Παρατήρηση:** Επειδή πάντα ισχύει $t < t + \Delta$ έχουμε ότι $\frac{t}{\mathrm{t} + \Delta} < 1$. Συνεπώς $\frac{\mathrm{K} * t}{\mathrm{t} + \Delta} < K$ και επιπλέον $E_1 < K$. Δηλαδή το εσωτερικό προεξόφλημα δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί την ονομαστική αξία.

➢ **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 200 € προεξοφλείται εσωτερικά 40 ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο 8%. Να βρεθούν η πραγματική αξία αυτής και το εσωτερικό προεξόφλημα.

Έχουμε:

$$E_1 = \frac{\mathrm{K} * t}{\Delta + t} = \frac{200 * 40}{\frac{360}{0{,}08} + 40} = 1{,}76.$$

Οπότε:

$$A_1 = K - E_1 = 200 - 1{,}76 = 198{,}24.$$

➢ **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική προεξοφλείται εσωτερικά 60 ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο προεξόφλησης 8 % και δίνει πραγματική αξία 199 €. Να βρεθεί η ονομαστική αξία αυτής και το εσωτερικό προεξόφλημα.

Έχουμε:

$$A_1 = K - E_1$$

$$\rightarrow \mathrm{A}_1 = K - \frac{\mathrm{K} * t}{\Delta + t} \rightarrow 199 = K\left(1 - \frac{60}{\frac{360}{0{,}08} + 60}\right) \rightarrow K = 201{,}65\ €.$$

Οπότε:

$$E_1 = K - A_1 = 201{,}65 - 199 = 2{,}65\ .$$

➤ **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 300€ προεξοφλείται εσωτερικά 100 ημέρες πριν από τη λήξη της και δίνει πραγματική αξία 295 €. Να βρεθεί το επιτόκιο προεξόφλησης.

Έχουμε:

$$E_1 = 300 - 295 = 5.$$

Οπότε:

$E_1 = \frac{K * t}{\Delta + t} = \frac{300 * 100}{\Delta + 100} \rightarrow 5\,(\Delta + 100) = 30.000 \rightarrow \Delta = 5.900 \rightarrow i = \frac{360}{5.900}$ $\rightarrow i = 0{,}0610.$

3.5 Διαφορά προεξοφλημάτων και πραγματικών αξίων

Έστω συναλλαγματική ονομαστικής αξίας Κ η οποία προεξοφλείται t ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο i. Τότε από τους τύπους των προεξοφλημάτων έχουμε:

$$E = \frac{K * t}{\Delta}$$

Και

$$E_1 = \frac{K * t}{\Delta + t}$$

Είναι προφανές ότι:

$$E > E_1$$

Οπότε:

$$E - E_1 = \frac{K * t}{\Delta} - \frac{K * t}{\Delta + t}$$

$$= \frac{K * t\,(\Delta + t) - K * t * \Delta}{\Delta\,(\Delta + t)}$$

$$= \frac{K * t^2}{\Delta\,(\Delta + t)}$$

Επίσης είναι γνωστό ότι $A_1 = K - E_1$ και $A = K - E$. Είναι προφανές ότι

$$A_1 > A$$

$$A_1 - A = K - E_1 - (K - E) = E - E_1 = \frac{K * t^2}{\Delta\,(\Delta + t)}$$

➢ **Παρατήρηση**: Συγκρίνοντας τον τύπο της εσωτερικής και εξωτερικής προεξόφλησης και γνωρίζοντας ότι $K > A_1$ συμπεραίνουμε ότι $E > E_1$. Οι τράπεζες εφαρμόζουν την εξωτερική προεξόφληση με αποτέλεσμα όσων φέρουν γραμμάτια για προεξόφληση να είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Με αυτό τον τρόπο κρατούν περισσότερο τόκο. Συνήθως όμως η προεξόφληση γραμματίων ή συναλλαγματικών γίνεται λίγες ημέρες πριν από τη λήξη τους, οπότε η διαφορά $E - E_1$ είναι πολύ μικρή. Βέβαια η διαφορά $E - E_1$ μεγαλώνει τόσο περισσότερο όσο ο αριθμός των ημερών t αυξάνει.

➢ **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 500 € προεξοφλείται 40 ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η διαφορά των προεξοφλημάτων και των πραγματικών αξιών.

Έχουμε:

$$A_1 - A = E - E_1 = \frac{K * t^2}{\Delta\,(\Delta + t)} = \frac{500 * 40^2}{\frac{360}{0,06}\,(\frac{360}{0,06} + 40)} = 0,02$$

➢ **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική προεξοφλείται 50 ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο 9% και δίνει διαφορά προεξοφλημάτων 2 €. Να βρεθεί η ονομαστική αξία.

Έχουμε:

$$E - E_1 = \frac{K * t^2}{\Delta\,(\Delta + t)}$$

$$\rightarrow 2 = \frac{K * 50^2}{\frac{360}{0,09}\,(\frac{360}{0,09} + 50)}$$

$$K = 12.960€$$

3.6 Έξοδα προεξόφλησης

Οι τράπεζες, κατά την προεξόφληση των γραμματίων, εκτός από το προεξόφλημα, προβαίνουν και σε άλλες κρατήσεις όπως προμήθεια(Π), χαρτόσημο[2](Χ) και εισπρακτικά έξοδα(Ε)

[2]Στις μέρες μας, το χαρτόσημο έχει καταργηθεί και στη θέση του οι Τράπεζες έχουν επιβάλλει τον Ειδικό Φόρο Τραπεζικών Εργασιών (Ε.Φ.Τ.Ε.). Στις δικές μας εφαρμογές χάριν ευκολίας θα χρησιμοποιούμε τον όρο χαρτόσημο.

➢ **Πρόβλημα**: Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K προεξοφλείται t ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο *i*. Επιπλέον κατά την προεξόφληση κρατείται προμήθεια π %, έξοδα ε % και χαρτόσημο χ €. Να βρεθεί η παρούσα αξία αυτής όταν η προεξόφληση είναι a) εξωτερική b) εσωτερική.

Λύση:

a) Κατά την εξωτερική προεξόφληση της συναλλαγματικής παρακρατούνται τα παρακάτω ποσά από την τράπεζα:

Εξωτερικό προεξόφλημα : $E = \frac{K * t}{\Delta}$

Προμήθεια: $\Pi = \frac{\pi * K}{100}$

Διάφορα έξοδα: $E_\delta = \frac{\varepsilon * K}{100}$

Χαρτόσημο : χ

Οπότε

$$A = K - E - \Pi - E_\delta - \chi = K - \frac{K * t}{\Delta} - \frac{\pi * K}{100} - \frac{\varepsilon * K}{100} - \chi.$$

b) Κατά την εσωτερική προεξόφληση της συναλλαγματικής παρακρατούνται τα παρακάτω ποσά από την τράπεζα:

Εσωτερικό προεξόφλημα : $E = \frac{K * t}{\Delta + t}$

Προμήθεια: $\Pi = \frac{\pi * K}{100}$

Διάφορα έξοδα: $E_\delta = \frac{\varepsilon * K}{100}$

Χαρτόσημο : χ

Οπότε:

$$A = K - E_1 - \Pi - E_\delta - \chi = K - K - \frac{K * t}{\Delta + t} - \frac{\pi * K}{100} - \frac{\varepsilon * K}{100} - \chi.$$

Παρατήρηση: Στις ασκήσεις που ακολουθούν στο κεφάλαιο αυτό θα συναντήσουμε τις εκφράσεις «κατά μήνα και ολόκληρο μήνα» και «κατά χιλιάδα και ολόκληρη χιλιάδα». Η πρώτη έκφραση σημαίνει ότι αν μετρώντας τον χρόνο σε μήνες προκύψει δεκαδικός αριθμός m,d τότε στη θέση του m,d θα παίρνουμε m+1, θα στρογγυλοποιούμε δηλαδή προς τα επάνω. Το ίδιο και η δεύτερη έκφραση, αν μετρώντας το κεφάλαιό μας σε χιλιάδες Ευρώ και προκύψει δεκαδικός αριθμός k,d τότε στη θέση του k,d θα παίρνουμε k+1 θα στρογγυλοποιούμε δηλαδή προς τα επάνω.

Δίνονται δύο παραδείγματα:

a) Αν η προεξόφληση ενός γραμματίου Κ= 1000€ γίνεται 78 ημέρες πριν από τη λήξη του και η τράπεζα ζητήσει προμήθεια π = 2% κατά μήνα και ολόκληρο μήνα τότε στρογγυλοποιούμε το χρόνο των 78 ημερών (που αντιστοιχεί σε 2 μήνες και 18 ημέρες) σε 3 μήνες.

Έτσι:

$$\Pi = \frac{2}{100} 1000 * 3 = 60€$$

b) Αν τώρα προεξοφλείται γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 11.200 € και η τράπεζα κρατήσει έξοδα Ε= 1,5% κατά χιλιάδα και ολόκληρη χιλιάδα τότε για τον υπολογισμό των εξόδων στρογγυλοποιούμε την ονομαστική αξία στην αμέσως επόμενη χιλιάδα.

Έτσι:

$$E = \frac{1,5}{100} 12.000 = 180€$$

3.7 Πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι συνολικές κρατήσεις των τραπεζών είναι σαφώς μεγαλύτερες από το προεξόφλημα. Αυτό σημαίνει ότι στην πραγματικότητα ο κομιστής ενός γραμματίου για προεξόφληση δεν επιβαρύνεται με το προεξοφλητικό επιτόκιο υπολογισμού του προεξοφλήματος αλλά με ένα μεγαλύτερο επιτόκιο που ονομάζεται *πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης*. (Χουβάρδας Βασίλης, 1998)

Αν έχουμε μια συναλλαγματική ονομαστικής αξίας Κ Ευρώ, η οποία προεξοφλείται με έξοδα t ημέρες πριν από τη λήξη της και δίνει πραγματική αξία Α, τότε το πραγματικό επιτόκιο j είναι εκείνο το επιτόκιο που πρέπει να τοκίσουμε το ποσό Α για t ημέρες ώστε να πάρουμε τόκο το συνολικό ποσό που κρατάει η τράπεζα κατά την προεξόφληση, που είναι Κ – Α.

Έτσι ο τύπος που δίνει το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης είναι :

$$j = \frac{(K - A)\ 360}{A * t}$$

- **Παρατήρηση:** Στην περίπτωση του πολιτικού έτους ο παραπάνω τύπος γίνεται:

$$j = \frac{(K - A)\ 365}{A * t}$$

- **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 5.000 € προεξοφλείται εξωτερικά 45 ημέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο 2%. Επιπλέον κρατείται προμήθεια 0,2% για κάθε μήνα και ολόκληρο μήνα και χαρτόσημο 2 € για κάθε χιλιάδα και ολόκληρη χιλιάδα. Να βρεθεί η πραγματική αξία της συναλλαγματικής αυτής και το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης.

Κατά την προεξόφληση της συναλλαγματικής κρατούνται τα παρακάτω ποσά.

Προεξόφλημα:

$$E = \frac{K * t}{\Delta} = \frac{5.000 * 45}{\frac{360}{0,02}} = 12,5 €$$

Προμήθεια:

$$\Pi = 2\ \frac{\pi * K}{100} = 2\frac{0,2 * 5.000}{100} = 20 €$$

Χαρτόσημο:

$$\chi = 5 * 2 = 10€$$

Οπότε:

$$A = K - E - \Pi - \chi = 5.000 - 12,5 - 20 - 10 = 4.957,5€$$

Επίσης το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης είναι:

$$j = \frac{(K - A) * 360}{A * t} = \frac{(5.000 - 4.957,5) * 360}{4.957,5 * 45} = 0,0686$$

$$j = 6,86\%$$

3.8 Πινάκιο προεξόφλησης

Όταν ένας πιστωτής προσκομίζει στην τράπεζα συναλλαγματικές οφειλετών για προεξόφληση, συμπληρώνει ένα ειδικό έντυπο, το λεγόμενο *πινάκιο προεξόφλησης*. Στο έντυπο αυτό αναγράφονται όλα τα απαραίτητα για την προεξόφληση στοιχεία. Έτσι θα πρέπει να περιέχει, για κάθε γραμμάτιο την ονομαστική του αξία, την ημερομηνία λήξης του, το πλήθος των τοκοφόρων ημερών καθώς και όλες τις κρατήσεις στις οποίες προβαίνει η τράπεζα. Η χρήση του πινακίου προεξόφλησης έχει αρχίσει να καταργείται διότι η συμπλήρωσή του είναι χρονοβόρα και η χρήση του δύσκολη.

3.9 Επισυναλλαγματική

Πολλές φορές ο οφειλέτης μιας συναλλαγματικής δεν μπορεί να πληρώσει αυτή κατά τη λήξη της. Έτσι αναγκάζεται να εκδώσει μια νέα συναλλαγματική για την κάλυψη της οφειλής της παλιάς συναλλαγματικής, η οποία έληξε και δεν πληρώθηκε. Η νέα αυτή συναλλαγματική καλείται επισυναλλαγματική και έχει πραγματική αξία την ημέρα λήξης της παλαιάς συναλλαγματικής ίση με την ονομαστική αξία αυτής.

- **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 400 € λήγει σήμερα και δεν εξοφλείται. Για την κάλυψη αυτής εκδίδεται επισυναλλαγματική, η οποία λήγει μετά από 70 ημέρες. Να βρεθεί η ονομαστική αξία της επισυναλλαγματικής όταν το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης είναι 3%, προμήθεια 4% και χαρτόσημο 1,5 €. Έχουμε:

$$A = K - E - \Pi - \chi \rightarrow 400 = K - \frac{70*K}{\frac{360}{0,03}} - \frac{0,4*K}{100} - 1,5$$

$$\rightarrow 401,5 = K\left(1 - \frac{70}{\frac{360}{0,03}} - \frac{0,4}{100}\right)$$

$$\rightarrow 401,5 = K\,0,990166667 \rightarrow K = 405,49$$

3.10 Έντοκα γραμμάτια δημόσιου

Το κράτος για την κάλυψη των βραχυπρόθεσμων αναγκών του προσφεύγει σε δανεισμό με τα γνωστά σε όλους έντοκα γραμμάτια. Είναι τίτλοι στον κομιστή, δηλαδή ανώνυμοι. Το κράτος πληρώνει κατά την ημερομηνία λήξης τους, στον κομιστή, το αναγραφόμενο ποσό (ονομαστική αξία). Ο τόκος των έντοκων γραμματίων υπολογίζεται με το σύστημα της εσωτερικής προεξόφλησης. Κατά την αγορά τους ο ιδιώτης πληρώνει ποσό ίσο με την παρούσα αξία τους (ονομαστική αξία – τόκος). Συνήθως εκδίδονται στο τέλος κάθε μήνα και δίνεται ένα περιθώριο δύο – τριών ημερών για την αγορά τους.

Ο κόσμος γενικά τα προτιμά γιατί έχουν υψηλότερο επιτόκιο από τα περισσότερα είδη καταθέσεων, ενώ παρέχονται από το κράτος με τις παρακάτω διευκολύνσεις :

α) Μπορούν να εξοφληθούν πριν τη λήξη τους και όταν ο κομιστής έχει ανάγκη ρευστού, και

β) Μπορούν να ανανεωθούν για μια ή περισσότερες χρονικές περιόδους ίσες με τη χρονική διάρκειά τους. (Χουβάρδας Βασίλης, 1998)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΑ

4.1 Βασικές έννοιες

Πολλές φορές, στις εμπορικές συναλλαγές μεταξύ φυσικών ή νομικών προσώπων, όταν υπάρχει πρόβλημα πληρωμής συναλλαγματικών, ο οφειλέτης μπορεί να ζητήσει από τον πιστωτή την αντικατάσταση δύο ή περισσοτέρων συναλλαγματικών από μια ενιαία η οποία λήγει σε τέτοιο χρονικό διάστημα όπου δεν υπάρχει πρόβλημα εξόφλησής της. Για να γίνει όμως αυτό χρειάζεται να υπάρχει, όπως λέμε, *οικονομική ισοδυναμία* μεταξύ των συναλλαγματικών που αντικαθιστάται και της ενιαίας συναλλαγματικής που τις αντικαθιστά.

Η αντικατάσταση αυτή πρέπει να γίνει κατά τρόπο που να μην αποφέρει κέρδος ή ζημιά ούτε στον χρεώστη ούτε στον πιστωτή. Για να το πετύχουμε αυτό θα πρέπει την ημερομηνία που θα συμφωνηθεί η αντικατάστασή τους να ισχύει:

Άθροισμα παρουσών αξιών αρχικών γραμματίων = Άθροισμα παρουσών αξιών νέων γραμματίων

Έχουμε έτσι τον παρακάτω ορισμό ισοδυναμίας γραμματίων ή συναλλαγματικών:

Μια σειρά συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες K_1, $K_2,\ldots,K_m$ οι οποίες λήγουν μετά από t_1, t_2 $,\ldots,t_m$ ημέρες αντίστοιχα από σήμερα, θα λέμε ότι είναι *οικονομικά ισοδύναμη,* σε μια χρονική στιγμή μετά από l ημέρες από σήμερα, με μια ενιαία συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K η οποία λήγει μετά από t ημέρες, όταν τη χρονική στιγμή l, το άθροισμα των πραγματικών αξιών των συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες K_1, $K_2,\ldots,K_m$ είναι ίσο με την πραγματική αξία της συναλλαγματικής με ονομαστική αξία K τη χρονική στιγμή l. Προϋπόθεση για το παραπάνω είναι όλες οι συναλλαγματικές να εξοφλούνται με τον ίδιο τρόπο (εσωτερικά ή εξωτερικά) και με το ίδιο επιτόκιο.

Η χρονική στιγμή l καλείται εποχή ισοδυναμίας. Συνήθως σαν εποχή ισοδυναμίας θεωρούμε:

a) Την ημέρα υπολογισμού, δηλαδή την ημερομηνία που γίνεται η αντικατάσταση των συναλλαγματικών με την ενιαία συναλλαγματική και
b) Την κοινή λήξη, δηλαδή την ημέρα που λήγει η ενιαία συναλλαγματική.
c) Μια χρονική στιγμή l ανεξάρτητη από τις ημερομηνίες λήξης των συναλλαγματικών.

Ανάλογα με την εποχή ισοδυναμίας που επιλέγουμε προκύπτουν και διαφορετικά αποτελέσματα για τις ζητούμενες ονομαστικές αξίες. Γι’ αυτό έχει σημασία να γνωρίζουμε ποια από τις τρείς περιπτώσεις εποχής ισοδυναμίας που προηγούμενα αναφέραμε, χρησιμοποιούμε.

4.2 Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού (προεξόφληση εσωτερική)

- **Προβλημα1:** Μια σειρά συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες K_1, $K_2,\ldots,K_m$ οι οποίες λήγουν μετά από t_1, t_2 ,…,t_m ημέρες από σήμερα αντίστοιχα, αντικαθίσταται από μία ενιαία συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K η οποία λήγει μετά από t ημέρες. Να εκφραστούν οι μεταβλητές K και t ως συνάρτηση των μεταβλητών K_1, $K_2,\ldots,K_m$ και t_1, t_2 ,…,t_m . Έτος μικτό προεξόφληση εσωτερική.

Λύση: Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι:

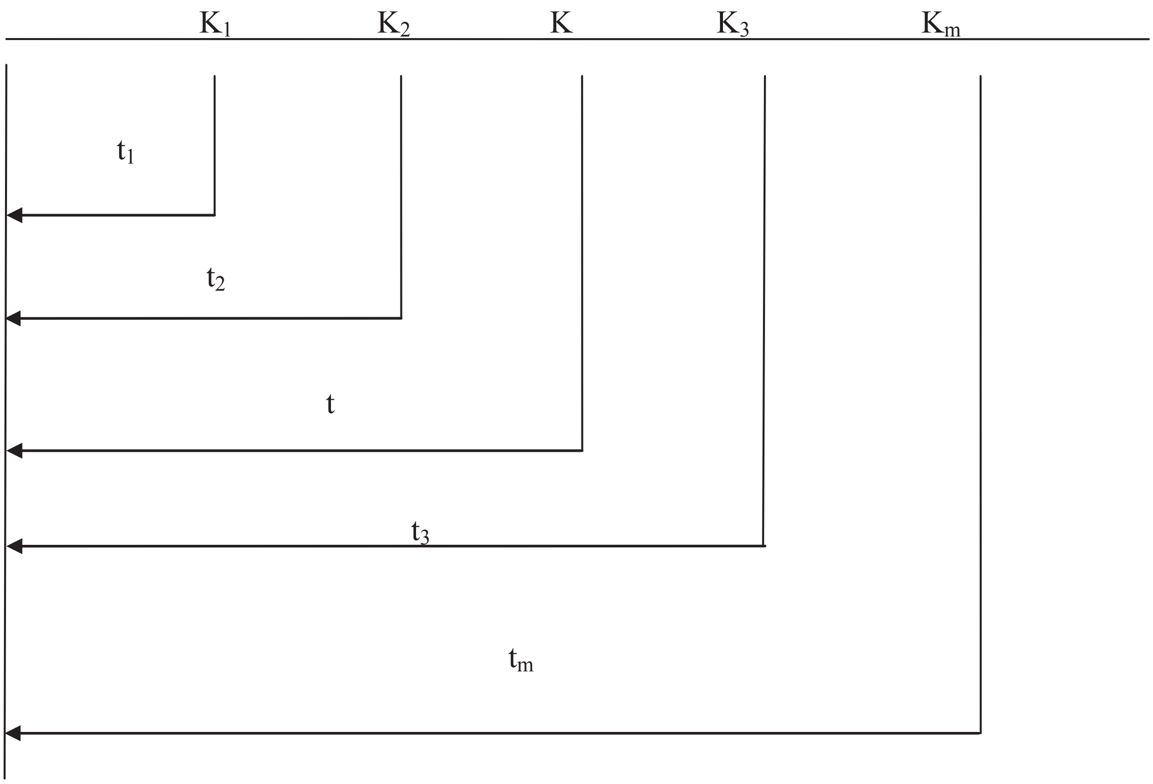
$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_m.$$

Βρίσκουμε τις πραγματικές αξίες των συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες K_1, $K_2,\ldots,K_m$ την ημέρα υπολογισμού. Οπότε έχουμε:

Η συναλλαγματική με ονομαστική αξία K_1 έχει πραγματική αξία:

$$A^1 = K_1 - \frac{K_1 * t_1}{\Delta + t_1}$$

Ομοίως οι πραγματικές αξίες των συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες K_1, $K_2,\ldots,K_m$ είναι:



$$A^2 = K_2 - \frac{K_2 * t_2}{\Delta + t_2}$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$A^m = K_m - \frac{K_m * t_m}{\Delta + t_m}$$

Και

$$A = K - \frac{\mathrm{K} * \ t}{\Delta + t}$$

Επειδή εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού ισχύει η σχέση:

$$\mathrm{A}^1 + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^{\mathrm{m}} = \mathrm{A}$$

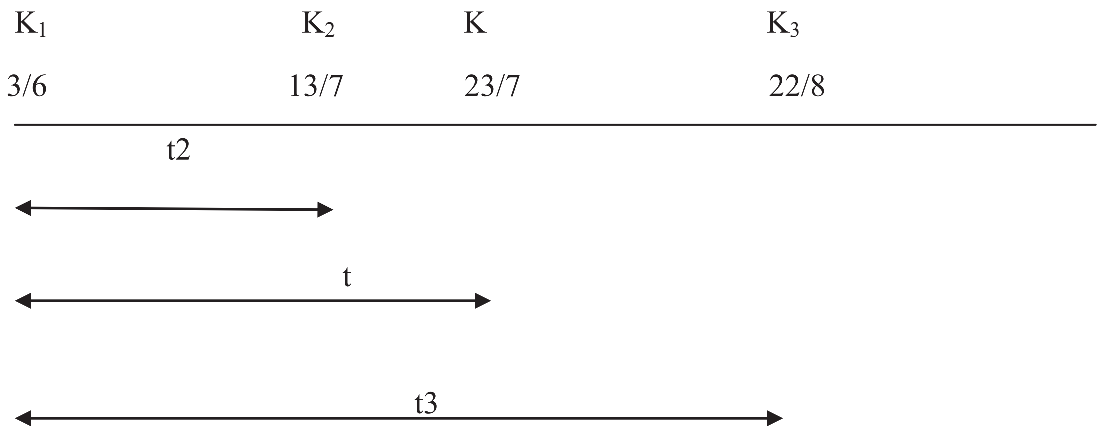
Και

$$l = 0$$

Άρα

$$\boxed{K - \frac{\mathrm{K} * t}{\Delta + t} = \mathrm{K}_1 - \frac{\mathrm{K}_1 * t_1}{\Delta + t_1} + \cdots + K_{m-} \frac{\mathrm{K_m} * \mathrm{t_m}}{\Delta + \mathrm{t_m}}} \qquad (1)$$

- **Παράδειγμα:** Οφείλουμε συναλλαγματική 1.000€ που λήγει στις 23 Ιουλίου 2012 και θέλουμε να την αντικαταστήσουμε με τις συναλλαγματικές α) 400€ λήξης 3 Ιουνίου 2012 β)300€ λήξης 13 Ιουλίου 2012και γ) συναλλαγματική λήξης 22 Αυγούστου 2012. Να βρεθεί η ονομαστική αξία της τρίτης συναλλαγματικής. Επιτόκιο 4% , έτος μικτό και προεξόφληση εσωτερική.



$t_1 = 0$

t_2 = 27 (Ιούνιος) + 13 (Ιούλιος) = 40 ημέρες

t_3 = 27 (Ιούνιος) + 31 (Ιούλιος) + 22 (Αύγουστος) = 60 ημέρες

t = 27 (Ιούνιος) + 23 (Ιούλιος) = 50 ημέρες

Συνεπώς από τη σχέση:

$$K - \frac{\mathrm{K} * \ t}{\Delta + t} = \mathrm{K}_1 - \frac{\mathrm{K}_1 * \ t_1}{\Delta + t_1} + K_2 - \frac{K_2 * \ t_2}{\Delta + t_2} + K_3 - \frac{K_3 * \ t_3}{\Delta + t_3}$$

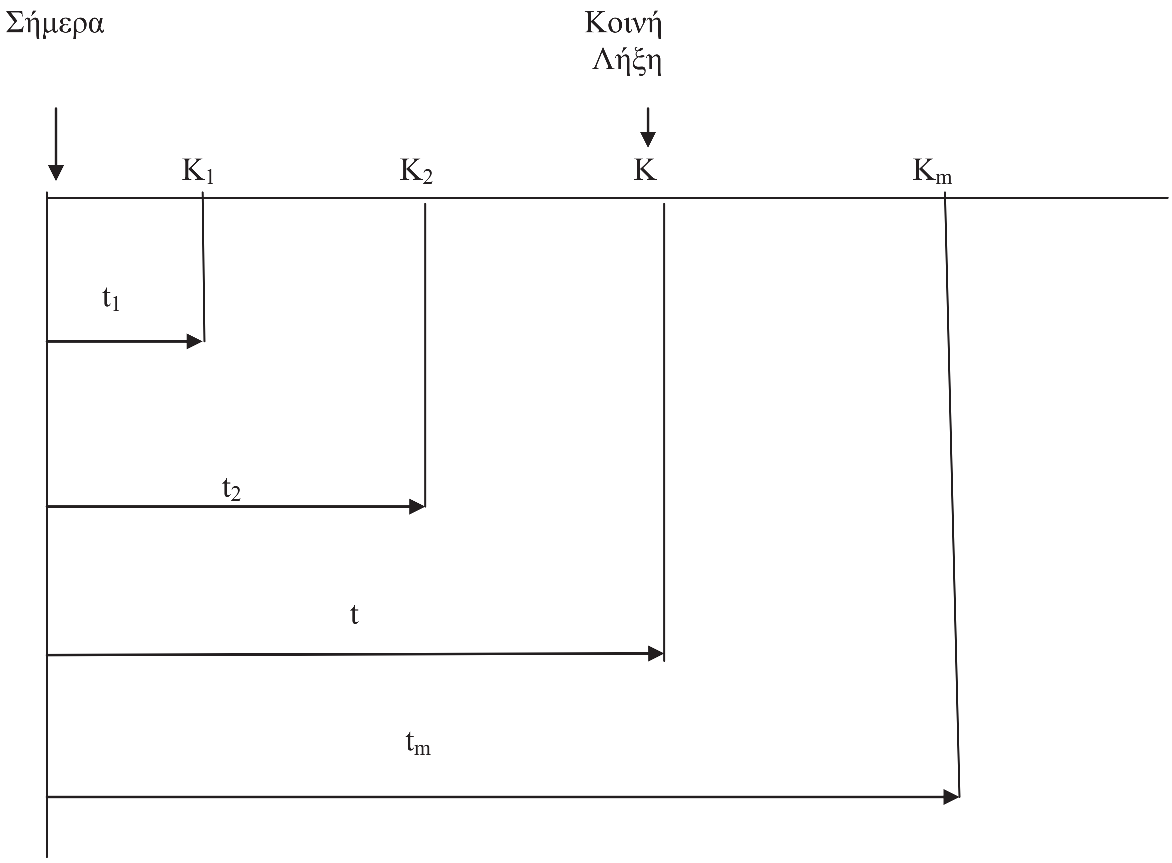
Έχουμε:

$$1.000 - \frac{1.000 * 50}{\frac{360}{0{,}04} + 50} = 400 - \frac{400 * \ 0}{\frac{360}{0{,}04} + 0} + 300 - \frac{300 * \ 40}{\frac{360}{0{,}04} + 40} + K_3 - \frac{\mathrm{K}3 * \ 80}{\Delta + 80}$$

$$\rightarrow 1.000 \ - \ 5{,}5 \ = \ 400 \ + \ 300 \ - \ 1{,}32 \ + \ K_3 \ * 0{,}9911$$

$$\rightarrow K_3 = \ 298{,}45€$$

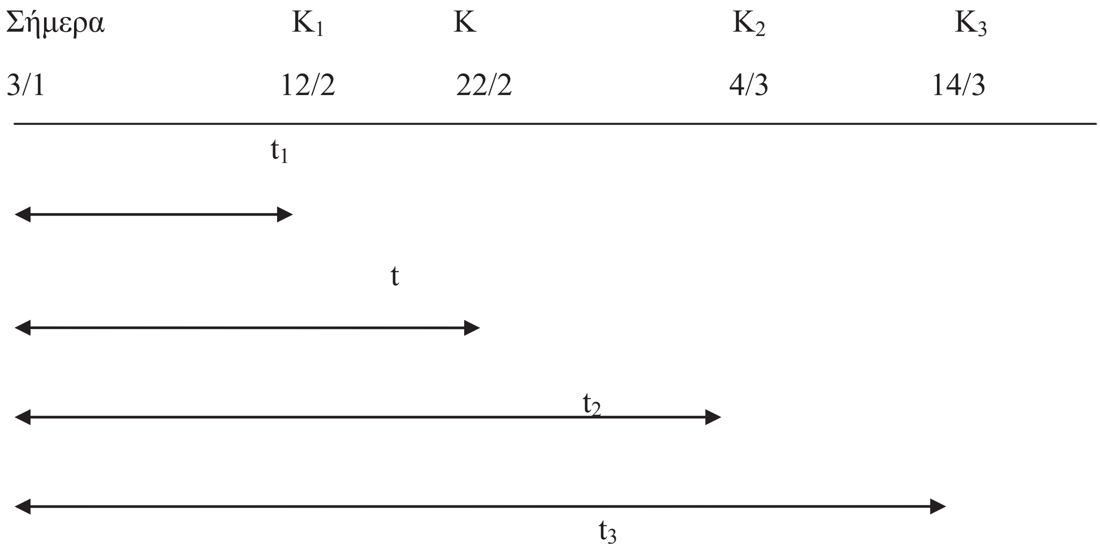
4.3 Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη (προεξόφληση εξωτερική)



Αν εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη τότε l = t. Οπότε ο τύπος υπολογισμού του K και του t είναι:

$$\boxed{K = K_1 - \frac{K_1 * (t_1 - t)}{\Delta} + \cdots + K_m - \frac{K_m * (t_m - t)}{\Delta}} \qquad (2)$$

- **Παράδειγμα**: Οφείλουμε συναλλαγματική 10.000€ που λήγει στις 22 Φεβρουαρίου 2013 και θέλουμε στις 3 Ιανουαρίου να την αντικαταστήσουμε με τις συναλλαγματικές α) 4000€ λήξης 12 Μαρτίου 2013 β)3000€ λήξης 4 Μαρτίου 2013και και γ) συναλλαγματική που λήγει στις 14 Μαρτίου 2013. Να βρεθεί η ονομαστική αξία της τρίτης συναλλαγματικής. Επιτόκιο 5%, έτος πολιτικό και προεξόφληση εξωτερική.



t_1 = 28 (Ιανουάριος) + 12 (Φεβρουάριος) = 40 ημέρες

t = 28 (Ιανουάριος) + 22 (Φεβρουάριος) = 50 ημέρες

t_2 = 28 (Ιανουάριος) + 28 (Φεβρουάριος) + 4 (Μάρτιος) = 60 ημέρες

t_3 = 28 (Ιανουάριος) + 28 (Φεβρουάριος) + 14 (Μάρτιος) = 70 ημέρες

Έχουμε:

$$K = K_1 - \frac{K_1 * (t_1 - t)}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2 * (t_2 - t)}{\Delta} + K_3 - \frac{K_3 * (t_3 - t)}{\Delta} + K_4 - \frac{K_4 * (t_4 - t)}{\Delta}$$

→

$$10.000 = 4.000 - \frac{4.000 * (40-50)}{\frac{360}{0{,}05}} + 3.000 - \frac{3.000 * (60-50)}{\frac{360}{0{,}05}} + K_3 - \frac{K_3 * (70-50)}{\frac{360}{0{,}05}}$$

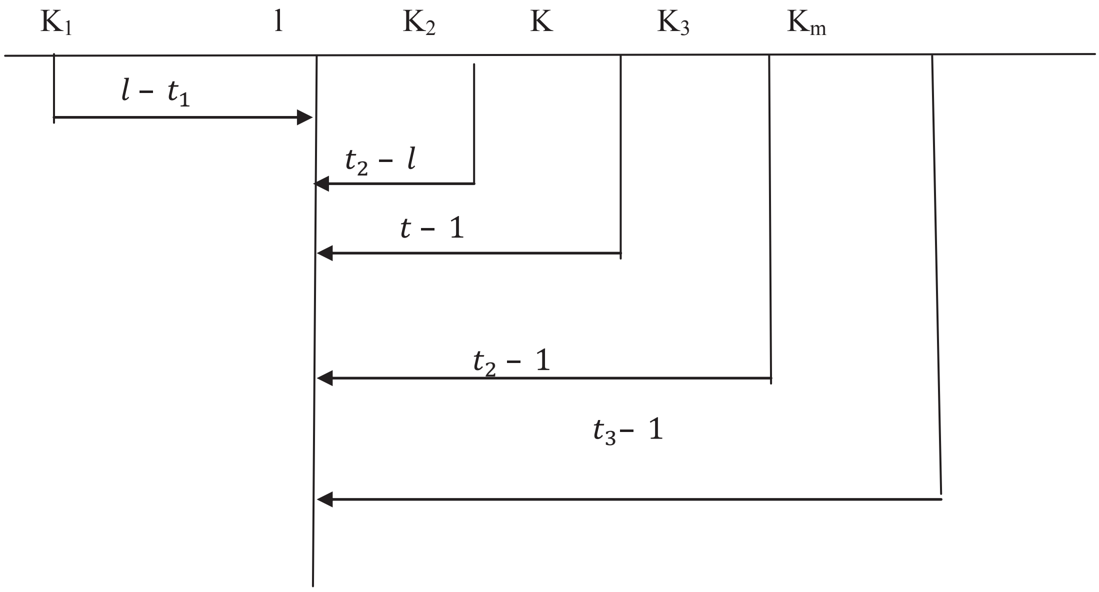
→ K_3 = 3.006,87€

4.4 Εποχή ισοδυναμίας μια χρονική στιγμή Ι (προεξόφληση εξωτερική)

➢ **Πρόβλημα2:** Μια σειρά συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες K_1, K_2,…,K_m οι οποίες λήγουν μετά από t_1, t_2 ,…,t_m ημέρες από σήμερα αντίστοιχα, αντικαθίσταται από μία ενιαία συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K η οποία λήγει μετά από t ημέρες. Να εκφραστούν οι μεταβλητές K και t ως συνάρτηση των μεταβλητών K_1, K_2,…,K_m και t_1, t_2 ,…,t_m . Έτος μικτό και επιτόκιο *i.*

Λύση: Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι:

$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots t_m$$

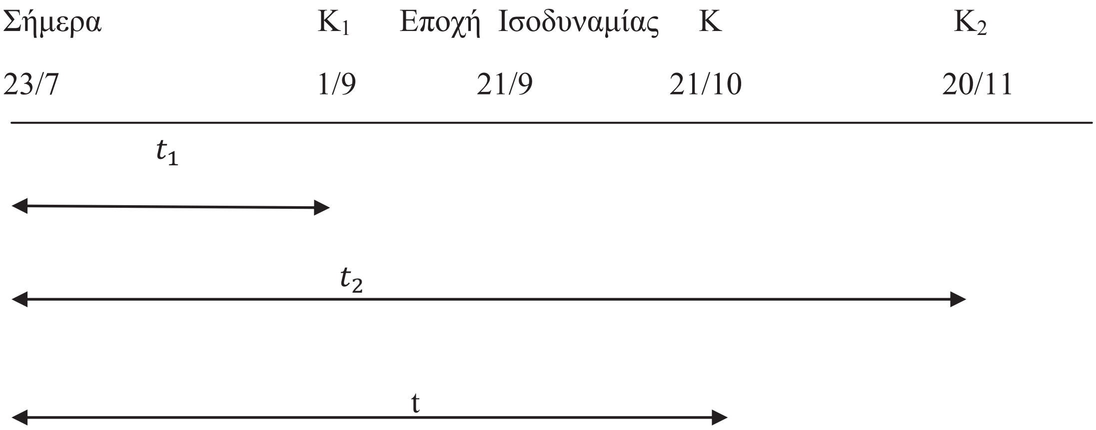


Επειδή τη χρονική στιγμή l έχουμε οικονομική ισοδυναμία ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_m$$

$$\boxed{K - \frac{\mathrm{K} * (t-l)}{\Delta} = \mathrm{K}_1 - \frac{\mathrm{K}_1 * (t_1 - l)}{\Delta} + \dots + \mathrm{K_m}\frac{\mathrm{K_m} * (\mathrm{t_m} - l)}{\Delta}} \qquad (3)$$

➢ **Παράδειγμα:** Έστω ότι έχουμε τις συναλλαγματικές Κ1 ονομαστικής αξίας 1800€ και Κ2 2400€ οι οποίες λήγουν την 1/9/2011 και 20/11/2011 αντίστοιχα. Θέλουμε να τις αντικαταστήσουμε στις 23/7/2011 με μια συναλλαγματική που λήγει στις 21/10/2011. Να βρεθεί η ονομαστική αξία της νέας συναλλαγματικής αν το επιτόκιο είναι 6% και η εποχή ισοδυναμίας είναι 21/9/2011. Προεξόφληση εξωτερική. Έτος μικτό.



l

t_1 = 8 (Ιούλιος) + 3 (Αύγουστος) +1 (Σεπτέμβριος) = 40 ημέρες

t_2 = 8 (Ιούλιος) + 31 (Αύγουστος) +30 (Σεπτέμβριος) + 31 (Οκτώβριος) + 20 (Νοέμβριος) = 120 ημέρες

t = 8 (Ιούλιος) + 31 (Αύγουστος) +30 (Σεπτέμβριος) + 21 (Οκτώβριος) = 90 ημέρες

l = 8 (Ιούλιος) + 31 (Αύγουστος) +21 (Σεπτέμβριος) = 60 ημέρες

Έχουμε :

$$K - \frac{\mathrm{K} * \ (t-l)}{\Delta} = \mathrm{K}_1 - \frac{\mathrm{K}_1 * \ (t_1 - l)}{\Delta} + \mathrm{K}_2 \frac{\mathrm{K}_2 * \ (\mathrm{t}_2 - l)}{\Delta}$$

Οπότε:

$$K - \frac{\mathrm{K} * \ (90-60)}{\frac{360}{0{,}06}} = 1.800 - \frac{1.800 * \ (40-60)}{\frac{360}{0{,}06}} + 2.400 - \frac{2.400 * \ (120-60)}{\frac{360}{0{,}06}}$$

$$\rightarrow K \ = \ 4.203€$$

4.5 Μέση Λήξη

Σε ένα πρόβλημα ισοδύναμων συναλλαγματικών, δηλαδή σε ένα πρόβλημα που μια σειρά συναλλαγματικών με ονομαστικές αξίες $K_1, K_2, \ldots K_m$ αντικαθίστανται ή αντικαθιστά μια ενιαία συναλλαγματική με ονομαστική αξία Κ λέμε ότι έχουμε πρόβλημα μέσης λήξης όταν:

$$K \ = \ K_1 \ + \ K_2 + \ \ldots \ + \ K_m$$

.

Στην περίπτωση αυτή το t καλείται μέση λήξη.

Όταν η προεξόφληση είναι εξωτερική, ανεξάρτητα από τη εποχή ισοδυναμίας που έχουμε, προκύπτει ο τύπος:

$$t = \frac{\mathrm{K}_1 * t_1 + \ \mathrm{K}_2 * t_2 + \ \ldots \ + \ \mathrm{K_m} \ * \mathrm{t_m}.}{\mathrm{K}}$$

- **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 1.000 € αντικαθίσταται από δύο συναλλαγματικές: α) 550 € λήξης μετά από 30 ημέρες από σήμερα και β) 450 € λήξης 40 ημέρες από σήμερα. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 4%, εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού, έτος μικτό και προεξόφληση εξωτερική, τότε να βρεθεί μετά από πόσες ημέρες από σήμερα είναι η λήξη της ενιαίας συναλλαγματικής.

$$t = \frac{\mathrm{K}_1 * t_1 + \ \mathrm{K}_2 * t_2}{\mathrm{K}}$$

$$\rightarrow t = \frac{550 * 30 + \ 450 * 40}{1.000}$$

$$\rightarrow t = \frac{16.500 + 18.000}{1.000}$$

$$\rightarrow t = 34{,}5$$

Άρα η μέση λήξη είναι 35 ημέρες από σήμερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ EXCEL

5.1 Υπολογισμός οικονομικών πράξεων απλού τόκου με το Excel

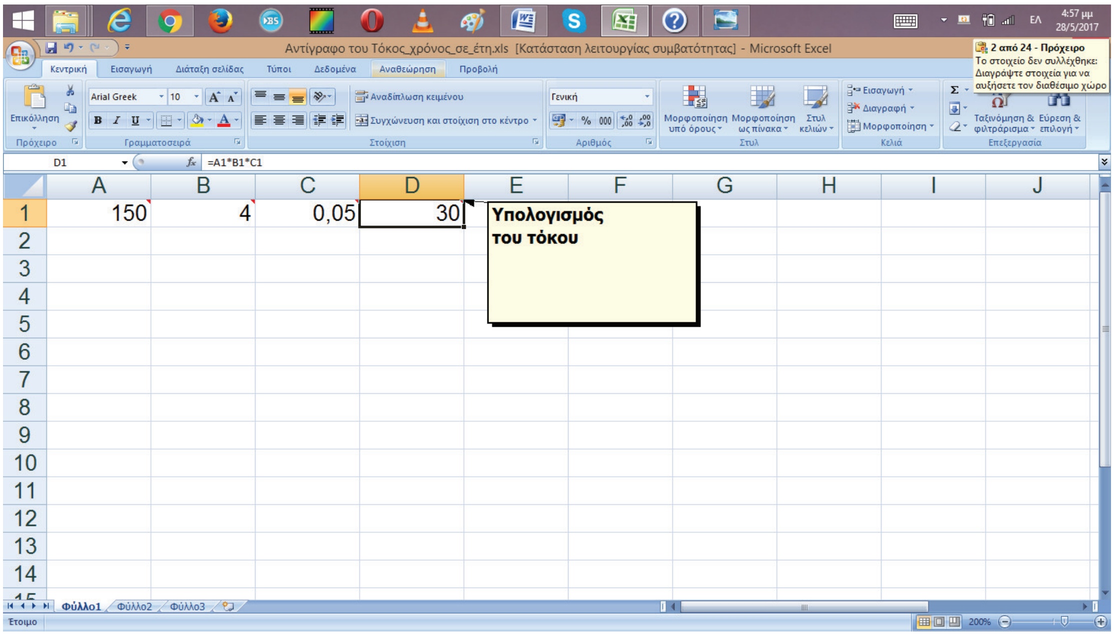
5.1.1 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη

Στην Εικόνα 5.1.1 γίνεται ο υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη.

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο (π.χ. 150) στο κελί B1 των αριθμό των ετών (π.χ. 4) και στο κελί C1 το επιτόκιο (π.χ. 0,05). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 30, που είναι ο τόκος που δίνει το Κεφάλαιο 150€ για 4 έτη με ετήσιο επιτόκιο 5%.

Ο υπολογισμός του τόκου στο κελί D1 έγινε στο Excel με τη χρήση του τύπου:

$$= A1 * B1 * C1$$



Εικόνα 5.1.1 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη

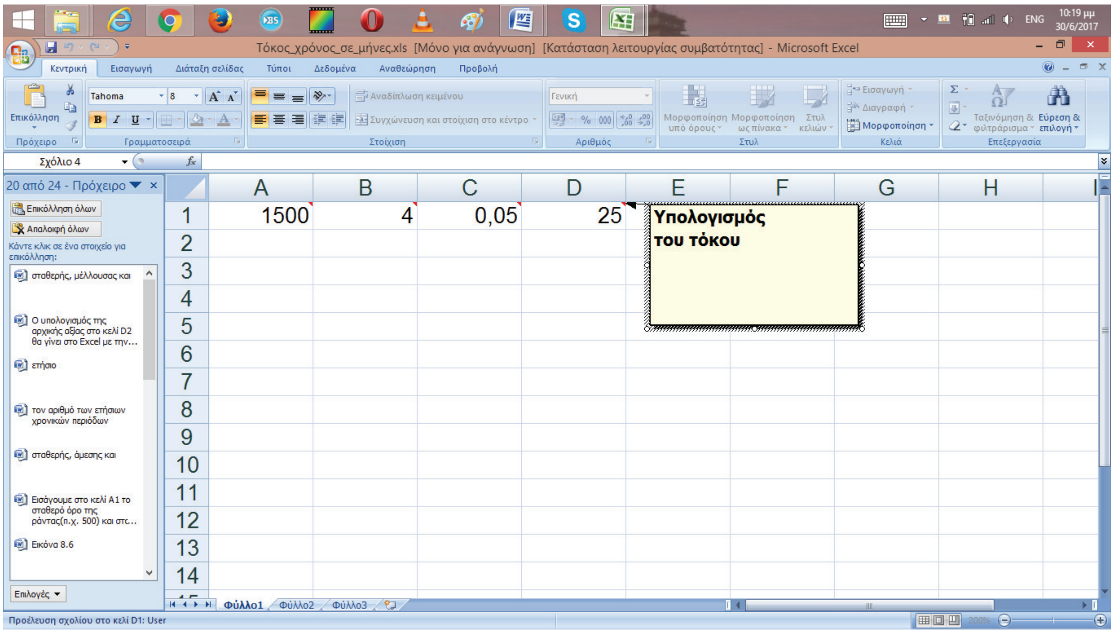
5.1.2 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες

Στην Εικόνα 5.1.2 γίνεται ο υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες.

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο (π.χ. 1500) στο κελί B1 των αριθμό των ετών (π.χ. 4) και στο κελί C1 το επιτόκιο (π.χ. 0,05). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 25, που είναι ο τόκος που δίνει το Κεφάλαιο 150€ για 4 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 5%.

Ο υπολογισμός του τόκου στο κελί D1 έγινε στο Excel με τη χρήση του τύπου:

$$=\frac{A1*B1*C1}{12}$$



Εικόνα 5.1.2 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες

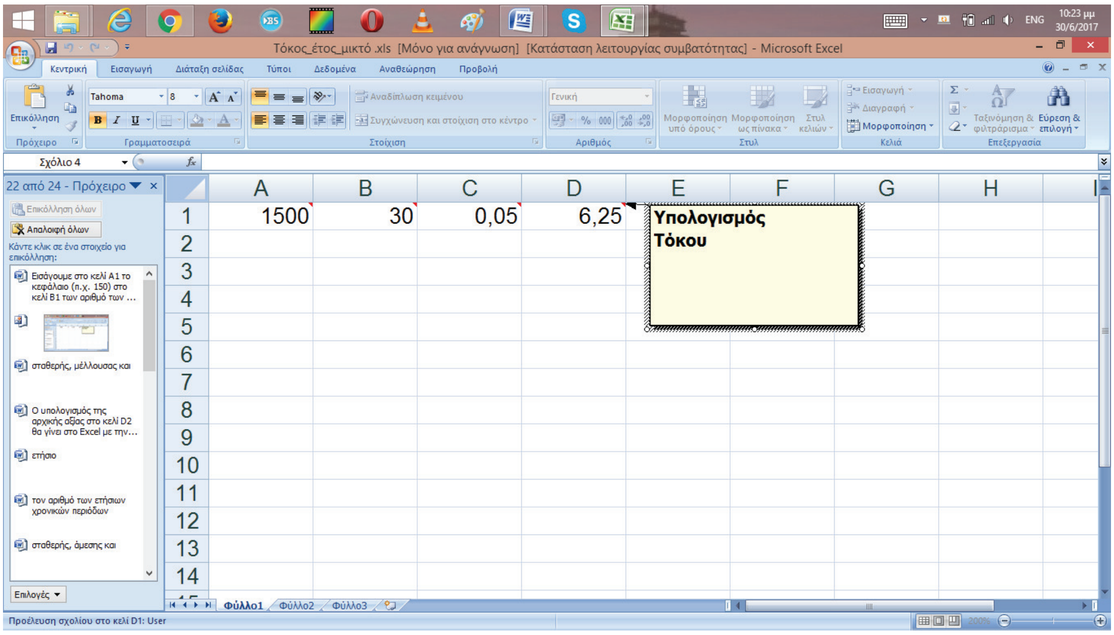
5.1.3 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό.

Στην Εικόνα 5.1.3 γίνεται ο υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες.

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο (π.χ. 1500) στο κελί B1 των αριθμό των ημερών (π.χ. 30) και στο κελί C1 το επιτόκιο (π.χ. 0,05). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 6,25 που είναι ο τόκος που δίνει το κεφάλαιο 1500€ για 30 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο 5%.

Ο υπολογισμός του τόκου στο κελί D1 έγινε στο Excel με τη χρήση του τύπου:

$$=\frac{A1*B1*C1}{360}$$



Εικόνα 5.1.3 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό.

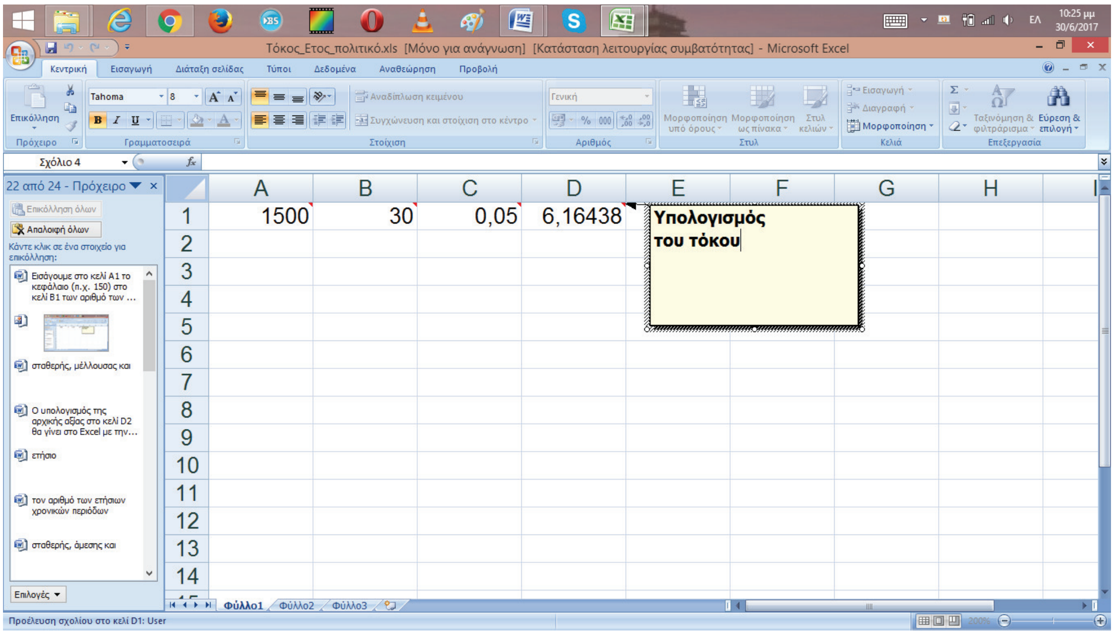
5.1.4 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες σε δίσεκτο έτος. Έτος πολιτικό.

Στην Εικόνα 5.1.4 γίνεται ο υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες όταν έχουμε δίσεκτο έτος. Έτος πολιτικό.

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο (π.χ. 1500) στο κελί B1 των αριθμό των ημερών (π.χ. 30) και στο κελί C1 το επιτόκιο (π.χ. 0,05). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 6,16438 που είναι ο τόκος που δίνει το Κεφάλαιο 1500€ για 30 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο 5%.

Ο υπολογισμός του τόκου στο κελί D1 έγινε στο Excel με τη χρήση του τύπου:

$$= \frac{A1 * B1 * C1}{366}$$



Εικόνα 5.1.4 Υπολογισμός του τόκου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες σε δίσεκτο έτος. Έτος πολιτικό.

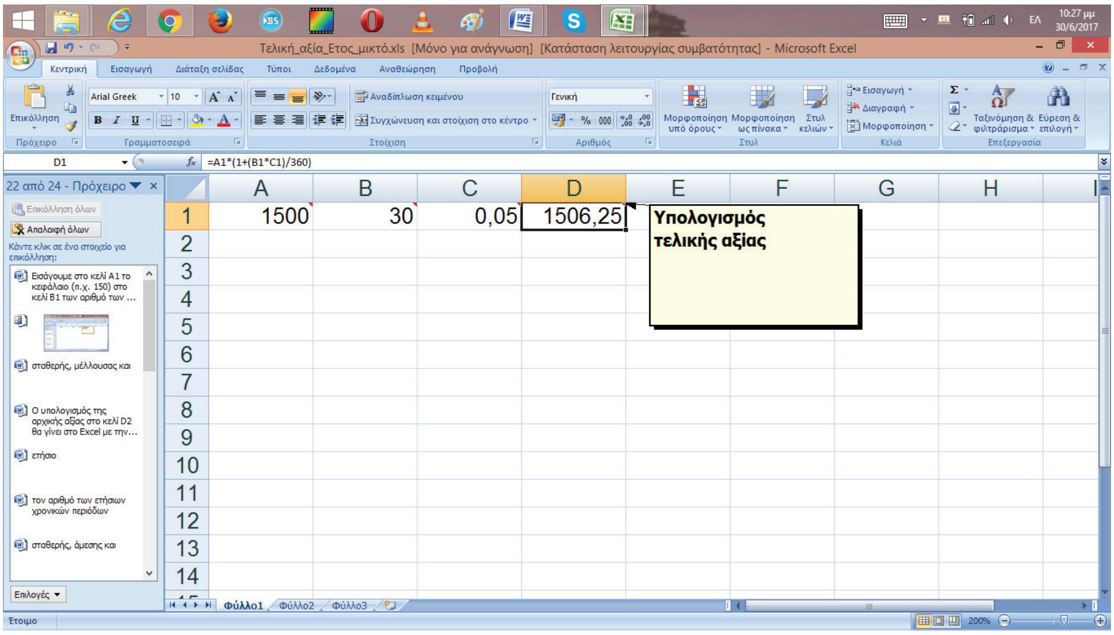
5.1.5 Υπολογισμός της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό.

Στην Εικόνα 5.1.5 γίνεται ο υπολογισμός της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό.

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο (π.χ. 1500) στο κελί B1 των αριθμό των ημερών (π.χ. 30) και στο κελί C1 το επιτόκιο (π.χ. 0,05). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1.506,25 που είναι η τελική αξία του κεφαλαίου των 1500€ που τοκίζονται για 30 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο 5% και έτος μικτό.

Ο υπολογισμός του τόκου στο κελί D1 έγινε στο Excel με τη χρήση του τύπου:

$$= A1\left(1 + \frac{B1 * C1}{360}\right)$$



Εικόνα 5.1.5 Υπολογισμός της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό.

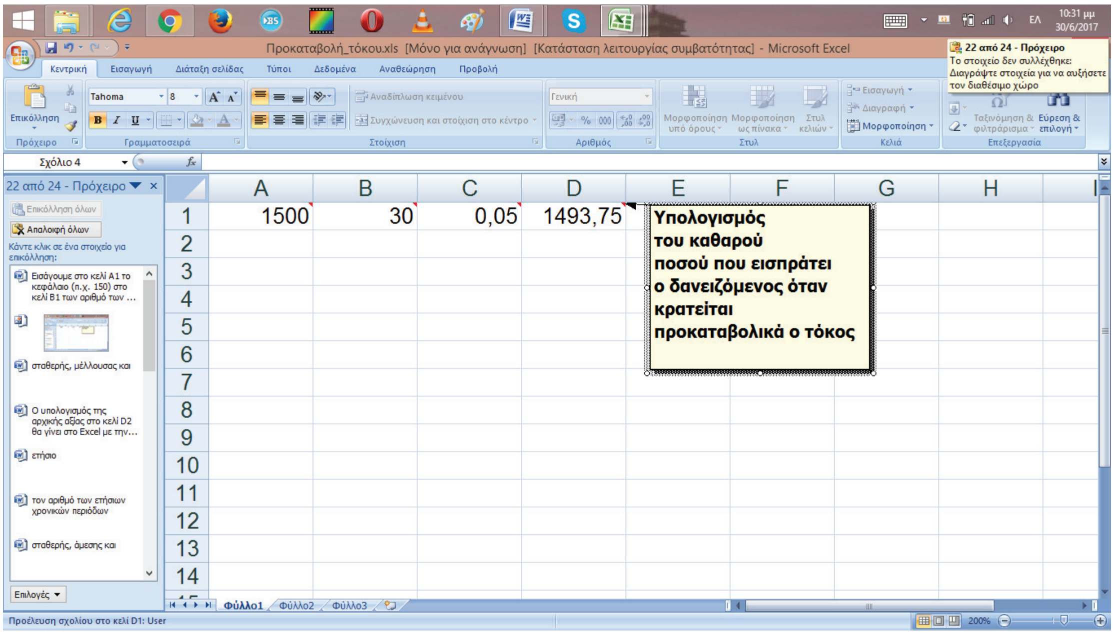
5.1.6 Υπολογισμού του καθαρού ποσού ενός κεφαλαίου που εισπράττει ο δανειζόμενος, όταν έχουμε δανεισμό χρημάτων με προκαταβολή του τόκου και ο χρόνος δίνεται σε ημέρες.

Στην Εικόνα 5.1.6 γίνεται ο υπολογισμός του καθαρού ποσού ενός κεφαλαίου που εισπράττει ο δανειζόμενος, όταν έχουμε δανεισμό χρημάτων με προκαταβολή του τόκου και ο χρόνος δίνεται σε ημέρες. Έτος μικτό.

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο (π.χ. 1500) στο κελί B1 των αριθμό των ημερών (π.χ. 30) και στο κελί C1 το επιτόκιο (π.χ. 0,05). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1.473,75 που είναι το καθαρό ποσό που εισπράττει ο δανειζόμενος ενός κεφαλαίου 1500€ που τοκίζονται για 30 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο 5% και έτος μικτό όταν κρατηθεί προκαταβολικά ο τόκος των 30 ημερών από το δανειστή.

Ο υπολογισμός του τόκου στο κελί D1 έγινε στο Excel με τη χρήση του τύπου:

$$= A1\left(1 - \frac{B1 * C1}{360}\right)$$



Εικόνα 5.1.6 Υπολογισμού του καθαρού ποσού ενός κεφαλαίου που εισπράττει ο δανειζόμενος, όταν έχουμε δανεισμό χρημάτων με προκαταβολή του τόκου και ο χρόνος δίνεται σε ημέρες.

5.1.7 Υπολογισμός του μέσου επιτοκίου

Στην παρακάτω εφαρμογή γίνεται υπολογισμός του μέσου επιτοκίου, όταν δίνονται σε ένα πρόβλημα μέχρι και έξι επιτόκια.

➢ **Παράδειγμα:** Τα κεφάλαια 1000, 2000, 4000, 5000, 2000 και 7000€ τοκίσθηκαν αντίστοιχα με απλό τόκο για 10, 15, 30, 20, 50 και 60 ημέρες με επιτόκια 5%, 5%, 6%, 9%, 8% και 11%. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο αυτών.

Στην Εικόνα 5.1.7 γίνεται ο υπολογισμός του μέσου επιτοκίου.

Εισάγουμε:

1) Στο κελί A1 το κεφάλαιο (π.χ. 1000), στο κελί B1 τον αριθμό των ημερών (π.χ. 10) και στο κελί C1 το επιτόκιο (π.χ. 0,05).

2) Στο κελί A2 το κεφάλαιο (π.χ. 2000), στο κελί B2 τον αριθμό των ημερών (π.χ. 15) και στο κελί C2 το επιτόκιο (π.χ. 0,05).

3) Στο κελί A3 το κεφάλαιο (π.χ. 4000), στο κελί B3 τον αριθμό των ημερών (π.χ. 30) και στο κελί C3 το επιτόκιο (π.χ. 0,06).

4) Στο κελί A4 το κεφάλαιο (π.χ. 5000), στο κελί B4 τον αριθμό των ημερών (π.χ. 20) και στο κελί C4 το επιτόκιο (π.χ. 0,09).

5) Στο κελί A5 το κεφάλαιο (π.χ. 2000), στο κελί B5 τον αριθμό των ημερών (π.χ. 50) και στο κελί C5 το επιτόκιο (π.χ. 0,08).

6) Στο κελί A6 το κεφάλαιο (π.χ. 7000), στο κελί B6 τον αριθμό των ημερών (π.χ. 60) και στο κελί C6 το επιτόκιο (π.χ. 0,11).

Ο υπολογισμός του μέσου επιτοκίου στο κελί F7 έγινε στο Excel ως εξής:

i. Υπολογίσαμε στα κελιά Di τις ποσότητες = Ai* Bi*Ci και στα κελιά Ei τις ποσότητες = Ai*Bi όπου i = 1,2,3,4,5,6.

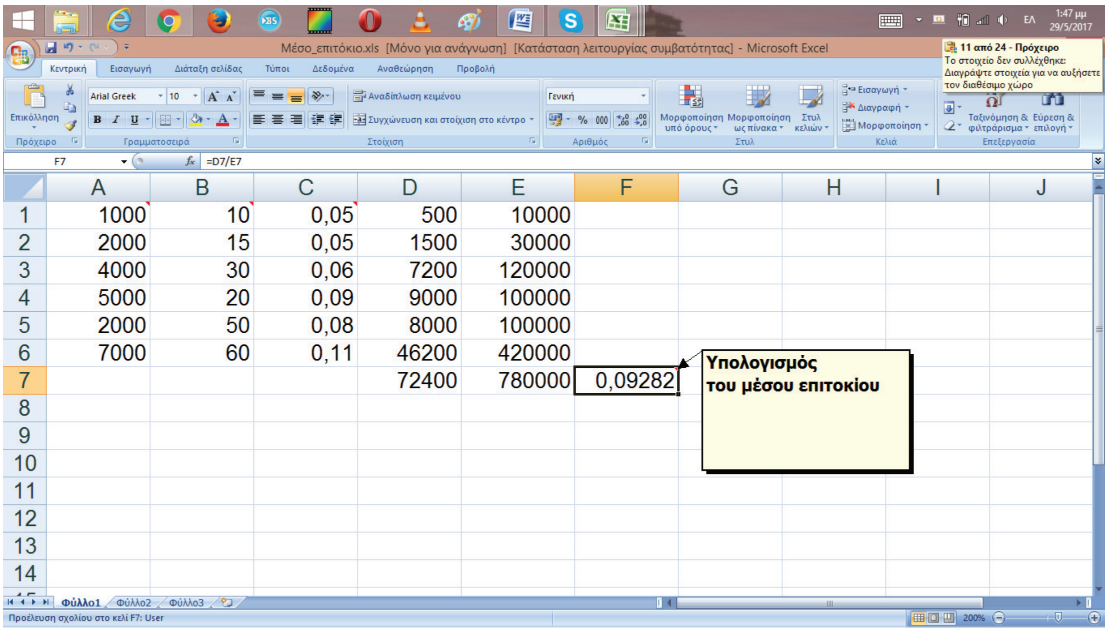
ii. Στη συνέχεια υπολογίσαμε στο κελί D7 το άθροισμα $A1 * B1 * C1 + \cdots + A6 * B6 * C6$ και στο κελί E7 το άθροισμα $A1 * B1 + \cdots A6 * B6$ με χρήση των τύπων του Excel:

$=SUM(D1: D6)$ και $= SUM(E1: E6)$

αντίστοιχα.

iii. Τέλος το μέσο επιτόκιο υπολογίζεται στο κελί F7 με χρήση του τύπου:

$$= \frac{D7}{E7}$$



	A	B	C	D	E	F
1	1000	10	0,05	500	10000	
2	2000	15	0,05	1500	30000	
3	4000	30	0,06	7200	120000	
4	5000	20	0,09	9000	100000	
5	2000	50	0,08	8000	100000	
6	7000	60	0,11	46200	420000	
7				72400	780000	0,09282

Εικόνα 5.1.7 Υπολογισμός του μέσου επιτοκίου

5.2 Υπολογισμός του προεξοφλήματος και της πραγματικής αξίας ενός γραμματίου με το Excel

5.2.1 Υπολογισμός του εσωτερικού και εξωτερικού προεξοφλήματος.

Στην Εικόνα 5.2.1 γίνεται ο υπολογισμός του εξωτερικού και εσωτερικού προεξοφλήματος.

Εισάγουμε στο κελί A1 την ονομαστική αξία (π.χ. 500) στο κελί B1 των αριθμό των ημερών (π.χ. 30) και στο κελί C1 το επιτόκιο προεξόφλησης (π.χ. 0,06).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 2,5 που είναι το εξωτερικό προεξόφλημα. Ενώ μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί E1 θα δούμε το αποτέλεσμα 2,487562 που είναι το εσωτερικό προεξόφλημα. Τέλος μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί F1 θα δούμε το αποτέλεσμα 0,01244 που είναι η διαφορά του εξωτερικού από το εσωτερικό προεξόφλημα.

Ο υπολογισμός του εξωτερικού προεξοφλήματος στο κελί D1 έγινε στο Excel με τη χρήση του τύπου:

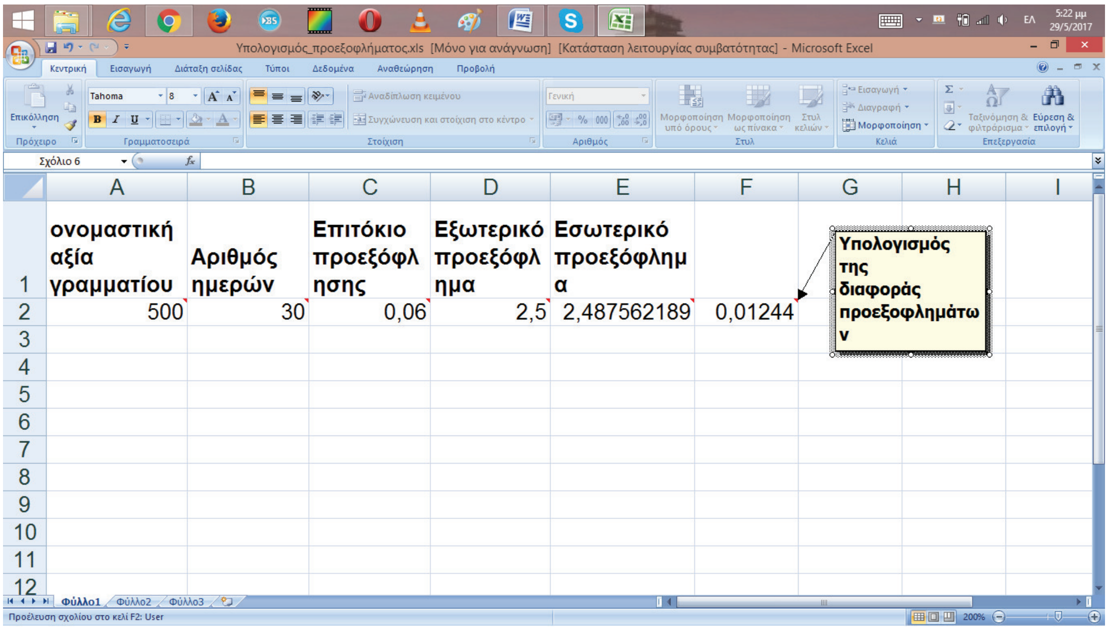
$$= \frac{A1 * B1 * C1}{360}$$

Ενώ ο υπολογισμός του εσωτερικού προεξοφλήματος στο κελί E1 έγινε στο Excel με τη χρήση του τύπου:

$$= \frac{A1 * B1}{\frac{360}{C1} + B1}$$

Τέλος ο υπολογισμός της διαφοράς προεξοφλημάτων στο κελί F1 έγινε στο Excel με τη χρήση του τύπου:

$$= D1 - E1$$



Εικόνα 5.2.1 Υπολογισμός του εσωτερικού και εξωτερικού προεξοφλήματος.

5.2.2 Προεξόφληση με έξοδα – Υπολογισμός της πραγματικής αξίας στην εξωτερική και εσωτερική προεξόφληση

Στην Εικόνα 5.2.2 γίνεται ο υπολογισμός της πραγματικής αξίας στην εσωτερική και εξωτερική προεξόφληση.

Εισάγουμε στο κελί A1 την ονομαστική αξία του γραμματίου (π.χ. 2000) στο κελί B1 των αριθμό των ημερών (π.χ. 40), στο κελί C1 το επιτόκιο προεξόφλησης (π.χ. 0,05), στο κελί D1 to ποσοστό της προμήθειας (π.χ. αν η προμήθεια είναι 0,25% τότε θέτουμε 0,25), στο κελί E1 το ποσοστό των εξόδων (π.χ. αν τα έξοδα είναι 0,5% θέτουμε 0,5) και στο κελί F1 το χαρτόσημο (π.χ. 1,5).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί G1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1972,45 που είναι η πραγματική αξία του γραμματίου όταν η προεξόφληση είναι εσωτερική.

Ενώ μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί H1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1972,39 που είναι που είναι η πραγματική αξία του γραμματίου όταν η προεξόφληση είναι εξωτερική.

Τέλος μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί I1 θα δούμε το αποτέλεσμα 0,12559, που είναι το πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης.

Ο υπολογισμός της πραγματικής αξίας στην εξωτερική προεξόφληση στο κελί G1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

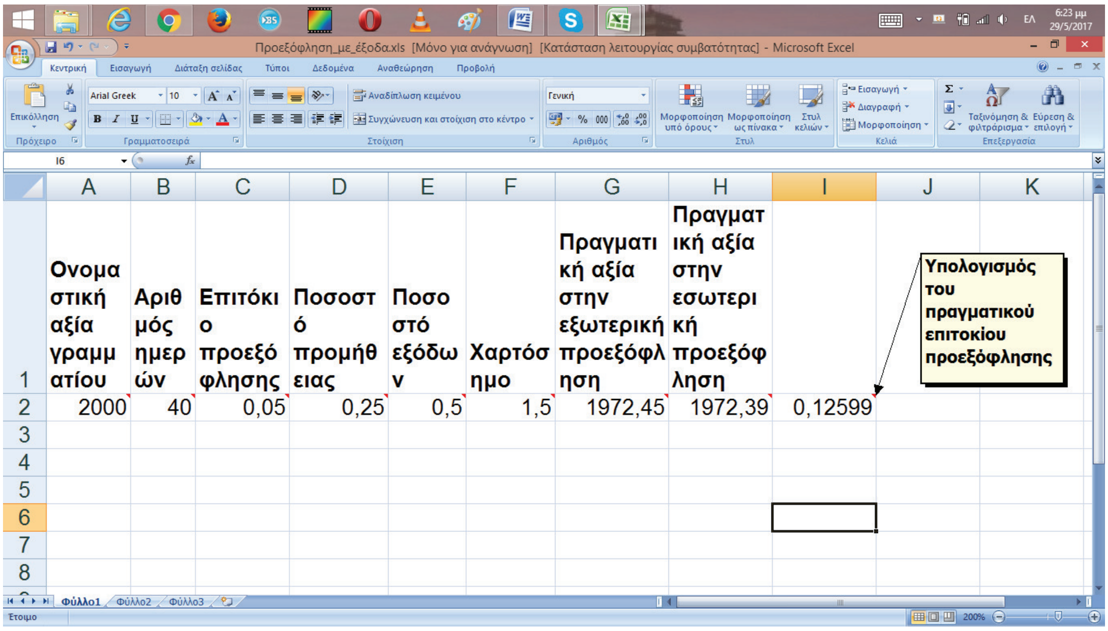
$$= A1 - \frac{A1 * B1 * C1}{360} - \frac{D1 * A1}{100} - \frac{E1 * A1}{100} - F1$$

Ο υπολογισμός της πραγματικής αξίας στην εσωτερική προεξόφληση στο κελί H1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= A1 - \frac{A1 * B1}{\frac{360}{C1} + B1} - \frac{D1 * A1}{100} - \frac{E1 * A1}{100} - F1$$

Τέλος ο υπολογισμός του πραγματικού επιτοκίου προεξόφλησης στο κελί I1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= \frac{(A1 * G1) * 360}{G1 * B1}$$



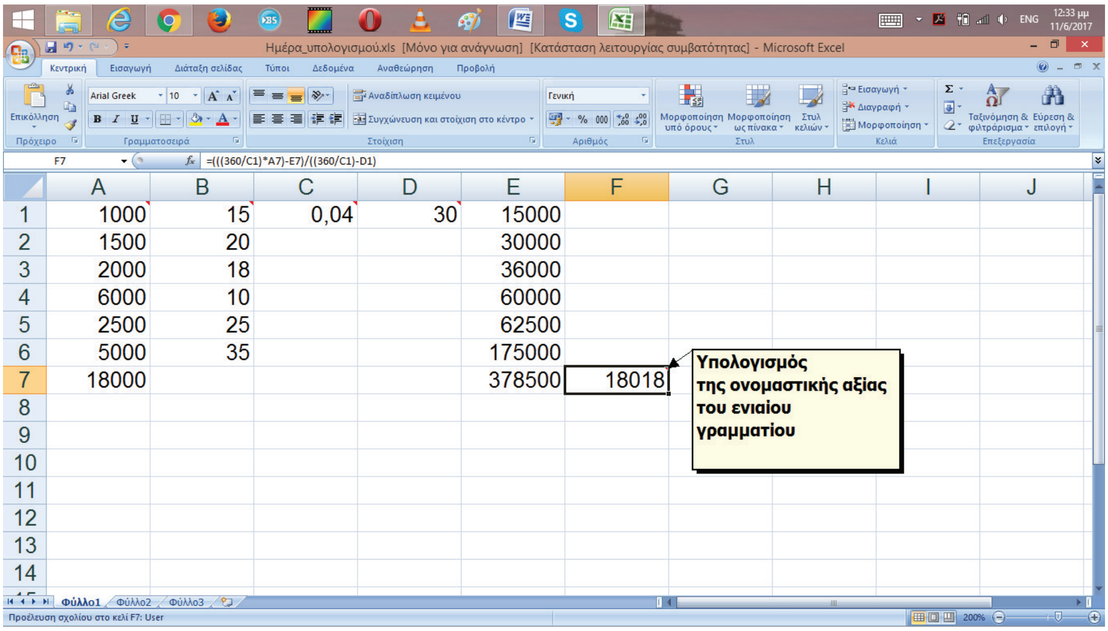
Εικόνα 5.2.2 Προεξόφληση με έξοδα – Υπολογισμός της πραγματικής αξίας στην εξωτερική και εσωτερική προεξόφληση

5.3 *Υπολογισμός του ενιαίου γραμματίου και του χρόνου λήξης του στα ισοδύναμα γραμμάτια με το Excel- Προεξόφληση εξωτερική*

5.3.1 Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου- Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού

Στις παρακάτω εφαρμογές δίνονται έξι γραμμάτια τα οποία αντικαθιστά ένα ενιαίο γραμμάτιο και εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού. Στη συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός του ενιαίου γραμματίου και του χρόνου λήξης με το Excel.

➢ **Παράδειγμα:** Μια σειρά γραμματίων με ονομαστικές αξίες 1000, 1500, 2000, 6000, 2500 και 5000 Ευρώ τα οποία λήγουν μετά από 15, 20, 18, 10, 25 και 35 ημέρες αντίστοιχα αντικαθίσταται από ένα ενιαίο γραμμάτιο που λήγει μετά από 30 ημέρες. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 4%, η προεξόφληση εξωτερική και εποχή ισοδυναμίας η μέρα υπολογισμού, τότε να βρεθεί η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου. Έτος μικτό.



Εικόνα 5.3.1 Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου- Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού

Στην Εικόνα 5.3.1 γίνεται ο υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου όταν εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού.

Εισάγουμε:

1) Στο κελί A1 το πρώτο γραμμάτιο 1000 και στο κελί B1 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 15.

2) Στο κελί A2 το δεύτερο γραμμάτιο 1500 και στο κελί B2 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 20.

3) Στο κελί A3 το τρίτο γραμμάτιο 2000 και στο κελί B3 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 18.

4) Στο κελί A4 το τέταρτο γραμμάτιο 6000 και στο κελί B4 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 10.

5) Στο κελί A5 το πέμπτο γραμμάτιο 2500 και στο κελί B5 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 25.

6) Στο κελί A6 το έκτο γραμμάτιο 5000 και στο κελί B6 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 35.

7) Στο κελί C1 το επιτόκιο 0,04 και στο κελί D1 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 35.

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί F7 θα δούμε το αποτέλεσμα 18018 που είναι η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου.

Ο υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου στο κελί E7 έγινε στο Excel ως εξής:

i. Υπολογίσαμε στα κελιά E*i, i=1,2,3,4,5,6* τις ποσότητες $= A_i * B_i$, αντίστοιχα.

ii. Στη συνέχεια στα κελιά A7 και E7 υπολογίσαμε τα αθροίσματα $A1 + \cdots + A6$ και $A1 * B1 + \cdots + A6 * B6$ με τη χρήση των τύπων του Excel $= SUM(A1{:}A6)$ και $= SUM(E1{:}E6)$.

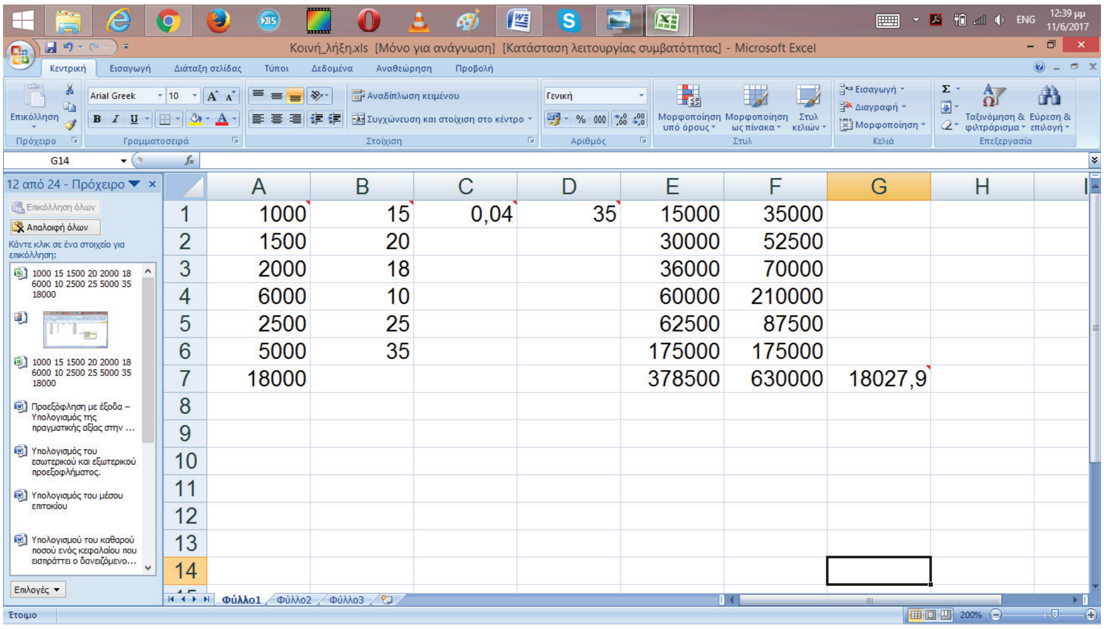
iii. Τέλος η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου στο κελί E7 υπολογίστηκε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= \frac{\left(\left(\frac{360}{C1}\right) * A7\right) - E7}{\left(\frac{360}{C1}\right) - D1}$$

5.3.2 Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου- Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

- **Παράδειγμα:** Μια σειρά γραμματίων με ονομαστικές αξίες 1000, 1500, 2000, 6000, 2500 και 5000 Ευρώ τα οποία λήγουν μετά από 15, 20, 18, 10, 25 και 35 ημέρες αντίστοιχα αντικαθίσταται από ένα ενιαίο γραμμάτιο που λήγει μετά από 30 ημέρες. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 4%, η προεξόφληση εξωτερική και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη, τότε να βρεθεί η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου. Έτος μικτό.

Στην Εικόνα 5.3.2 γίνεται ο υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου όταν εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη.



Εικόνα 5.3.2 Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου- Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

Εισάγουμε:

1) Στο κελί A1 το πρώτο γραμμάτιο 1000 και στο κελί B1 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 15.

2) Στο κελί A2 το δεύτερο γραμμάτιο 1500 και στο κελί B2 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 20.

3) Στο κελί A3 το τρίτο γραμμάτιο 2000 και στο κελί B3 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 18.

4) Στο κελί A4 το τέταρτο γραμμάτιο 6000 και στο κελί B4 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 10.

5) Στο κελί A5 το πέμπτο γραμμάτιο 2500 και στο κελί B5 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 25.

6) Στο κελί A6 το έκτο γραμμάτιο 5000 και στο κελί B6 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 35.

7) Στο κελί C1 το επιτόκιο 0,04 και στο κελί D1 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 35.

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί G7 θα δούμε το αποτέλεσμα 18027,9 που είναι η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου.

Ο υπολογισμός της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου στο κελί G7 έγινε στο Excel ως εξής:

i. Υπολογίσαμε στα κελιά E*i,* και *Fi, i=1,2,3,4,5,6* τις ποσότητες $= A_i * B_i$, και $A_i * D_1$ αντίστοιχα.

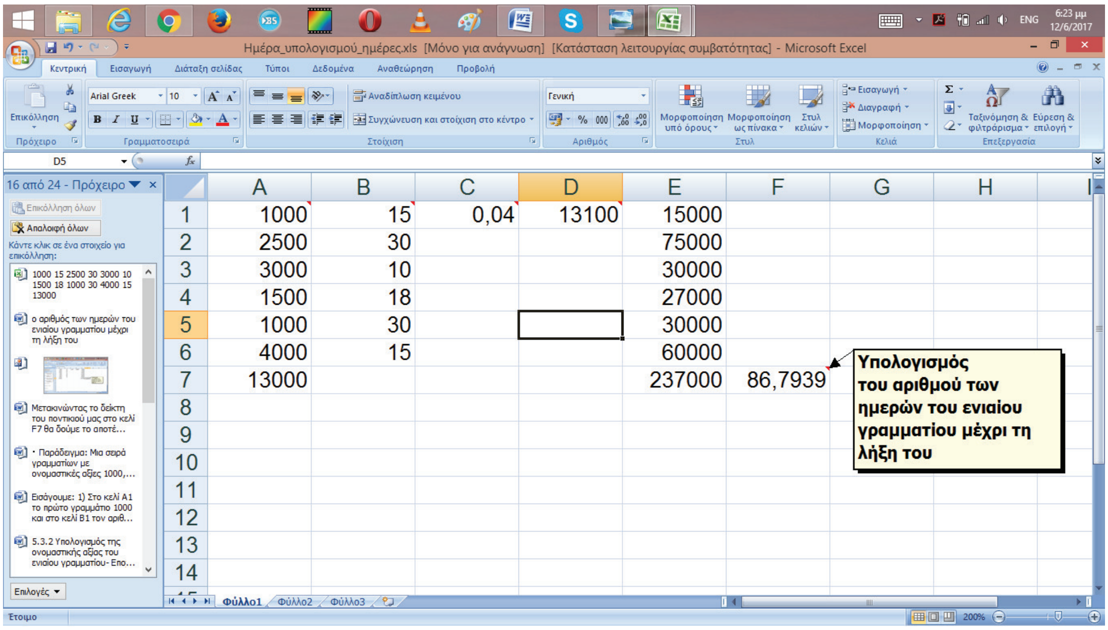
ii. Στη συνέχεια στα κελιά A7, E7 και F7 υπολογίσαμε τα αθροίσματα $A1 + \cdots + A6$, $A1 * B1 + \cdots + A6 * B6$ και $A1 * D1 + \cdots + A6 * D1$ με τη χρήση των τύπων του Excel $= SUM(A1{:}A6)$, $= SUM(E1{:}E6)$ και $= SUM(F1{:}F6)$.

iii. Τέλος η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου στο κελί G7 υπολογίστηκε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= A7 - \left(\frac{E7 - F7}{\frac{360}{C1}} \right)$$

5.3.3 Υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του- Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

➢ **Παράδειγμα:** Μια σειρά γραμματίων με ονομαστικές αξίες 1000, 2500, 3000, 1500, 1000 και 4000 Ευρώ τα οποία λήγουν μετά από 15, 30, 10, 18, 25 και 15 ημέρες αντίστοιχα αντικαθίσταται από ένα ενιαίο γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 13100 Ευρώ. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 4%, η προεξόφληση εξωτερική και εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού, τότε να βρεθεί ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του. Έτος μικτό.



Εικόνα 5.3.3 Υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του- Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

Στην Εικόνα 5.3.3 γίνεται ο υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του όταν εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού.

Εισάγουμε:

1) Στο κελί A1 το πρώτο γραμμάτιο 1000 και στο κελί B1 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 15.

2) Στο κελί A2 το δεύτερο γραμμάτιο 2500 και στο κελί B2 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 30.

3) Στο κελί A3 το τρίτο γραμμάτιο 3000 και στο κελί B3 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 10.

4) Στο κελί A4 το τέταρτο γραμμάτιο 1500 και στο κελί B4 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 18.

5) Στο κελί A5 το πέμπτο γραμμάτιο 1000 και στο κελί B5 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 30.

6) Στο κελί A6 το έκτο γραμμάτιο 4000 και στο κελί B6 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 15.

7) Στο κελί C1 το επιτόκιο 0,04 και στο κελί D1 την ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου 13100.

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί F7 θα δούμε το αποτέλεσμα 86,7939 που είναι ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του.

Ο υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του στο κελί F7 έγινε στο Excel ως εξής:

i. Υπολογίσαμε στα κελιά E*i, i=1,2,3,4,5,6* τις ποσότητες $= A_i * B_i$, αντίστοιχα.

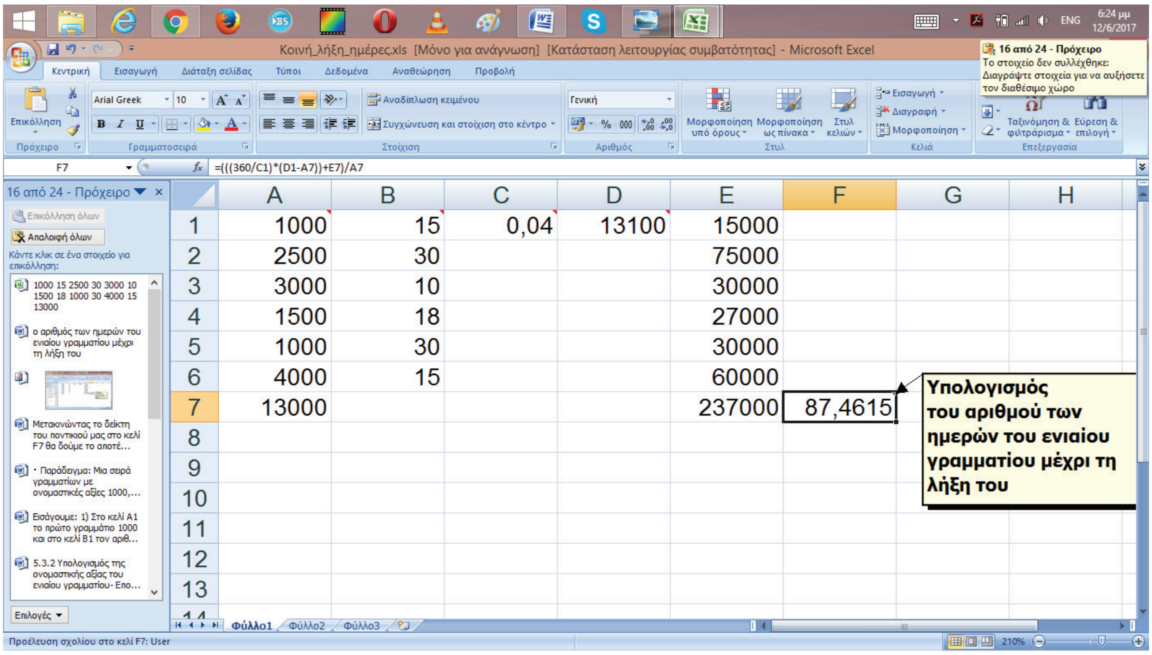
ii. Στη συνέχεια στα κελιά A7 και E7 υπολογίσαμε τα αθροίσματα $A1 + \cdots + A6$ και $A1 * B1 + \cdots + A6 * B6$ με τη χρήση των τύπων του Excel $= SUM(A1{:}A6)$ και $= SUM(E1{:}E6)$.

iii. Τέλος ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του υπολογίστηκε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= \frac{\left(\left(\frac{360}{C1}\right) * (D1 - A7)\right) + E7}{D1}$$

5.3.4 Υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του- Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

➢ **Παράδειγμα:** Μια σειρά γραμματίων με ονομαστικές αξίες 1000, 2500, 3000, 1500, 1000 και 4000 Ευρώ τα οποία λήγουν μετά από 15, 30, 10, 18, 25 και 15 ημέρες αντίστοιχα αντικαθίσταται από ένα ενιαίο γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 13100 Ευρώ. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 4%, η προεξόφληση εξωτερική και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη, τότε να βρεθεί ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του. Έτος μικτό.



Εικόνα 5.3.4 Υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του- Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

Στην Εικόνα 5.3.4 γίνεται ο υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του όταν εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη.

Εισάγουμε:

1) Στο κελί A1 το πρώτο γραμμάτιο 1000 και στο κελί B1 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 15.

2) Στο κελί A2 το δεύτερο γραμμάτιο 2500 και στο κελί B2 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 30.

3) Στο κελί A3 το τρίτο γραμμάτιο 3000 και στο κελί B3 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 10.

4) Στο κελί A4 το τέταρτο γραμμάτιο 1500 και στο κελί B4 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 18.

5) Στο κελί A5 το πέμπτο γραμμάτιο 1000 και στο κελί B5 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 30.

6) Στο κελί A6 το έκτο γραμμάτιο 4000 και στο κελί B6 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη του 15.

7) Στο κελί C1 το επιτόκιο 0,04 και στο κελί D1 την ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου 13100.

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί F7 θα δούμε το αποτέλεσμα 87,4615 που είναι ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του.

Ο υπολογισμός του αριθμού των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του στο κελί F7 έγινε στο Excel ως εξής:

i. Υπολογίσαμε στα κελιά Ε*i*, *i=1,2,3,4,5,6* τις ποσότητες $= A_i * B_i$, αντίστοιχα.

ii. Στη συνέχεια στα κελιά Α7 και Ε7 υπολογίσαμε τα αθροίσματα $A1 + \cdots + A6$ και $A1 * B1 + \cdots + A6 * B6$ με τη χρήση των τύπων του Excel $= SUM(A1{:}A6)$ και $= SUM(E1{:}E6)$.

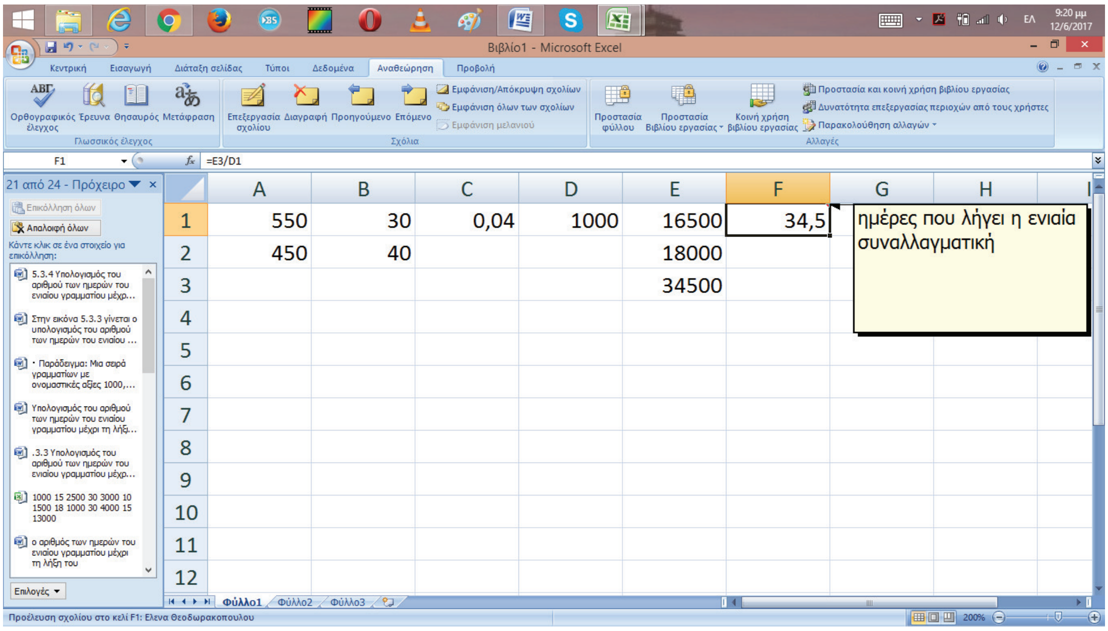
iii. Τέλος ο αριθμός των ημερών του ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του στο κελί Ε7 υπολογίστηκε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= \frac{\left(\left(\frac{360}{C1}\right) * (D1 - A7)\right) + E7}{A7}$$

➢ **Παρατήρηση :** Στον υπολογισμό του αριθμού των ημερών ενός ενιαίου γραμματίου μέχρι τη λήξη του η διαφορά όταν έχουμε εποχή ισοδυναμίας την ημέρα υπολογισμού και την κοινή λήξη είναι ότι, στην ημέρα υπολογισμού διαιρούμε με το σύνολο των ονομαστικών αξιών των γραμματίων ενώ στην κοινή λήξη διαιρούμε με την ονομαστική αξία της ενιαίας συναλλαγματικής.

5.3.5 Υπολογισμός της μέσης λήξης.- Προεξόφληση εξωτερική

➢ **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 1.000 € αντικαθίσταται από δύο συναλλαγματικές: α) 550 € λήξης μετά από 30 ημέρες από σήμερα και β) 450 € λήξης 40 ημέρες από σήμερα. Αν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 4%, εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού, έτος μικτό και προεξόφληση εξωτερική, τότε να βρεθεί μετά από πόσες ημέρες από σήμερα είναι η λήξη της ενιαίας συναλλαγματικής.



Εικόνα 5.3.5 Υπολογισμός της μέσης λήξης.- Προεξόφληση εξωτερική

Στην Εικόνα 5.3.5 γίνεται ο υπολογισμός του αριθμού των ημερών της ενιαίας συναλλαγματικής μέχρι τη λήξη της όταν υπάρχει πρόβλημα μέσης λήξης.

Εισάγουμε:

1) Στο κελί A1 τη πρώτη συναλλαγματική 550 και στο κελί B1 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη της 30.

2) Στο κελί A2 τη δεύτερη συναλλαγματική 450 και στο κελί B2 τον αριθμό των ημερών μέχρι τη λήξη της 40

3) Στο κελί C1 το επιτόκιο 0,04 και στο κελί D1 την ονομαστική αξία της ενιαίας συναλλαγματικής 1000.

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί F1 θα δούμε το αποτέλεσμα 34,5 που είναι ο αριθμός των ημερών της ενιαίας συναλλαγματικής μέχρι τη λήξη της.

Ο υπολογισμός του αριθμού των ημερών της ενιαίας συναλλαγματικής μέχρι τη λήξη της στο κελί F1 έγινε στο Excel ως εξής:

i. Υπολογίσαμε στα κελιά E*i, i=1,2* τις ποσότητες $= A_i * B_i$, αντίστοιχα

ii. Στη συνέχεια στο κελί E3 υπολογίσαμε το άθροισμα $E1 + E2$ με τη χρήση του τύπου του Excel $= SUM(E1:E2)$

iii. Τέλος ο αριθμός των ημερών της ενιαίας συναλλαγματικής στο κελί E3 υπολογίστηκε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= \frac{E3}{D1}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

6.1 Βασικές έννοιες και τύποι στον ανατοκισμό

Με τον όρο ανατοκισμό καλούμε τη διαδικασία στην οποία ο τόκος που παράγεται από την κατάθεση ενός κεφαλαίου στην τράπεζα δεν λαμβάνεται με τη λήξη μιας χρονικής περιόδου, όπως γίνεται στον απλό τόκο, αλλά προστίθεται στο αρχικό κεφάλαιο και παράγει νέο τόκο την επόμενη χρονική περίοδο. (Χουβάρδας Βασίλης, 1998)

Η πρόσθεση του τόκου στο αρχικό κεφάλαιο λέγεται *κεφαλαιοποίηση*. Η κεφαλαιοποίηση μπορεί να γίνεται κάθε χρόνο, ή εξάμηνο, ή τρίμηνο κ.λ.π. Το χρονικό διάστημα αυτό ονομάζεται *περίοδος ανατοκισμού*.

Ο ανατοκισμός επιτρέπεται σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα σε καταθέσεις ταμιευτηρίου, για περιορισμένο αριθμό ετών και γενικά μέσα στα πλαίσια του πνεύματος αποταμίευσης των οικονομιών των πολιτών. Μέσω της αποταμίευσης των πολιτών οφείλεται επίσης και η εθνική οικονομία. Ο ανατοκισμός μεγάλων χρηματικών ποσών και για μεγάλα χρηματικά διαστήματα δεν επιτρέπεται από τον νόμο, διότι έτσι μπορεί να παραχθούν τεράστια κεφάλαια που δεν θα ήταν δυνατόν να αποπληρωθούν. (Γεωργίου, Κούγιας, 2004).

Στα προβλήματα ανατοκισμού θα χρησιμοποιούμε τους παρακάτω **συμβολισμούς**:

K_0 : Αρχικό κεφάλαιο

K_n : Τελική αξία κεφαλαίου

i : Επιτόκιο ανατοκισμού

n : Αριθμός χρονικών περιόδων που ανατοκίζεται το αρχικό κεφάλαιο K_0

Θεμελιώδης εξίσωση του ανατοκισμού

$$\boldsymbol{K_n = K_0\,(1+i)^n} \qquad (1)$$

- **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 200€ ανατοκίζεται για 2 έτη με ετήσιο επιτόκιο 4% . Να βρεθεί η τελική αξία αυτού.

$$K_2 = K_0\,(1+i)^2 = 200\,(1+0{,}04)^2 = 216{,}32\ €$$

Αν αντί για n έτη έχουμε n έτη και m μήνες η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\boldsymbol{K_{n+\frac{m}{12}} = K_0\,(1+i)^n * \left(1+\frac{m*i}{12}\right)} \qquad (2)$$

- **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 100€ ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 3% για 4 έτη και 5 μήνες. Να βρεθεί η τελική αξία αυτού.

$$K_{4+\frac{5}{12}} = K_0\,(1+i)^4 * \left(1+\frac{5*i}{12}\right) = 100\,(1+0{,}03)^4 * \left(1+\frac{5*0{,}03}{12}\right)$$
$$= 113{,}95€$$

Αν αντί για n έτη έχουμε n έτη και t ημέρες η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\boldsymbol{K_{n+\frac{t}{360}} = K_0\,(1+i)^n * (1+\frac{t*i}{360})} \qquad (3)$$

➤ **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 150€ ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 5% για 3 έτη και 20 ημέρες. Να βρεθεί η τελική αξία αυτού.

$$K_{3+20} = 150\,(1+i)^3 * \left(1+\frac{20*i}{360}\right) = 150\,(1+0{,}05)^3 * \left(1+\frac{20*0{,}05}{360}\right) = 174{,}12€$$

6.2 Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου *K₀* στον ανατοκισμό.

Από τους τύπους (1), (2) και (3) της προηγούμενης παραγράφου προκύπτουν οι παρακάτω τύποι για την εύρεση του αρχικού κεφαλαίου K_0, όταν γνωρίζουμε όλες τις άλλες μεταβλητές ποσότητες του προβλήματος του ανατοκισμού.

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

$$K_0 = \frac{K_{n+\frac{m}{12}}}{(1+i)^n * \left(1+\frac{m*i}{12}\right)}$$

$$K_0 = \frac{K_{n+\frac{t}{360}}}{(1+i)^n * \left(1+\frac{t*i}{360}\right)}$$

➤ **Παράδειγμα**: Κεφάλαιο ανατοκίζεται για 4 έτη και 3 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 7% και δίνει τελική αξία 500€. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο.

$$K_0 = \frac{K_{4+\frac{3}{12}}}{(1+i)^4 * \left(1+\frac{3*i}{12}\right)} = \frac{500}{(1+0{,}07)^4 * \left(1+\frac{3*0{,}07}{12}\right)} = 374{,}80€$$

6.3 Εύρεση του χρόνου *n* στον ανατοκισμό

Για την εύρεση του χρόνου *n* και του επιτοκίου *i* στον ανατοκισμό θα χρησιμοποιήσουμε τους λογάριθμους.

Ας ξεκινήσουμε με την εύρεση του χρόνου *n.*

➤ **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 100€ ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 4% και δίνει τελική αξία 120 €. Να βρεθεί ο χρόνος που τοκίσθηκε το κεφάλαιο αυτό.

$$K_n = K_0 (1+i)^n$$

$$\rightarrow 120 = 100 (1+0{,}04)^n$$

$$\rightarrow (1+0{,}04)^n = 1{,}2$$

$$\rightarrow log(1+0{,}04)^n = log1{,}2$$

$$\rightarrow n * log1{,}04 = log1{,}2$$

$$\rightarrow n = \frac{log1{,}2}{log\,1{,}04} = \frac{0{,}079181246}{0{,}017033339}$$

$$\rightarrow n = 4{,}64\ \chi\rho\acute{o}\nu\iota\alpha$$

6.4 Εύρεση του επιτοκίου i στον ανατοκισμό

Αναφέρουμε μέσω ενός απλού παραδείγματος τη διαδικασία εύρεσης του επιτοκίου i όταν γνωρίζουμε όλες τια άλλες μεταβλητές στον τύπο του ανατοκισμού.

- **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 100 € ανατοκίζεται για 5 έτη και δίνει τελική αξία 125€. Να βρεθεί το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού.

$$K_5 = K_0 (1+i)^5$$

$$\rightarrow 125 = 100 (1+i)^5$$

$$\rightarrow (1+i)^5 = 1{,}25$$

$$\rightarrow log(1+i)^5 = log1{,}25$$

$$\rightarrow 5 * \log(1+i) = log1{,}25$$

$$\rightarrow \log(1+i) = \frac{log1{,}25}{5}$$

$$\rightarrow \log(1+i) = 0{,}019382002$$

$$\rightarrow 1+i = 1{,}0456396$$

$$\rightarrow i = 0{,}0456396$$

6.5 Ανάλογα και ισοδύναμα επιτόκια

Ανάλογα επιτόκια

Δύο επιτόκια i_1, i_2 καλούνται ανάλογα όταν ο λόγος των επιτοκίων i_1, i_2 είναι ίδιος με τον λόγο των αντίστοιχων χρονικών περιόδων τοκισμού t_1, t_2 που αντιστοιχούν στα δύο αυτά επιτόκια. Δηλαδή $\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$. (Γεωργίου, Κούγιας, 2004)

Τα ανάλογα επιτόκια έχουν εφαρμογή κυρίως στην απλή κεφαλαιοποίηση.

- **Παράδειγμα**: Δίνεται το εξαμηνιαίο επιτόκιο 8%. Να βρεθεί το ανάλογο διμηνιαίο.

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{6}{2} \rightarrow \frac{0{,}08}{i_2} = 3 \rightarrow i_2 = \frac{0{,}08}{3} \rightarrow i_2 = 0{,}266 \text{ ή } 2{,}66\%$$

Ισοδύναμα επιτόκια

Δύο επιτόκια i_1, i_2 στα οποία αντιστοιχούν διαφορετικές περίοδοι ανατοκισμού, καλούνται ισοδύναμα όταν δίνουν ίδια τελική αξία σε ένα κεφάλαιο που θα ανατοκισθεί με τα δύο αυτά επιτόκια για ίδιο χρονικό διάστημα. (Γεωργίου, Κούγιας, 2004).

Τα ισοδύναμα επιτόκια έχουν εφαρμογή κυρίως στη σύνθετη κεφαλαιοποίηση.

Ο τύπος των ισοδύναμων επιτοκίων είναι:

$$(1+i) = (1+i_\lambda)^\lambda$$

Ο δείκτης λ του τύπου φανερώνει το είδος του επιτοκίου, ενώ ο εκθέτης λ το πόσες φορές γίνεται ανατοκισμός με επιτόκιο i_λ μέσα σε αυτή τη χρονική περίοδο.

- **Παράδειγμα:** Δίνεται το τριμηνιαίο επιτόκιο 3%. Να βρεθεί το ισοδύναμο ετήσιο.

$$(1+i) = (1+0{,}03)^4 \rightarrow i = (1+0{,}03)^4 - 1 \rightarrow i = 0{,}1255088$$

6.6 Προεξόφληση στον ανατοκισμό

Στην προεξόφληση με ανατοκισμό έχουμε τους παρακάτω **συμβολισμούς:**

K_0 : Πραγματική αξία συναλλαγματικής
K_n : Ονομαστική αξία συναλλαγματικής
i : Επιτόκιο προεξόφλησης
n : Αριθμός χρονικών περιόδων του ανατοκισμού πριν από τη λήξη της συναλλαγματικής.

Ο τύπος της πραγματικής αξίας της συναλλαγματικής είναι ο εξής:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

Επίσης για το προεξόφλημα έχουμε:

$$E = K_n - K_0 = K_n - \frac{K_n}{(1+i)^n}.$$

ή

$$E = K_n - K_0 = K_0 * (1+i)^n - K_0$$

➤ **Παράδειγμα:** Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας 100€ προεξοφλείται με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 4%, 3 έτη πριν από τη λήξη της. Να βρεθούν το προεξόφλημα και η ονομαστική αξία αυτής.

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{100}{(1+0{,}04)^3} = 88{,}89€$$

Και

$$E = K_n - K_0 = 100 - 88{,}89 = 11{,}11€$$

6.7 Μέσο επιτόκιο

Κάποιες φορές ένα χρηματικό ποσό διαιρείται σε μικρότερα κεφάλαια και κατατίθεται με διαφορετικά επιτόκια για κάποιο χρόνο. Θέλοντας να αποτιμήσουμε τη συνολική απόδοση των κεφαλαίων, ζητάμε να βρούμε το μέσο επιτόκιο, δηλαδή το κοινό επιτόκιο εκείνο που θα έδινε την ίδια απόδοση των κεφαλαίων στον ίδιο χρόνο. (Αποστολόπουλος, 2003).

Σε ένα σύνολο $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ επιτοκίων για αντίστοιχα κεφάλαια $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ ονομάζουμε μέσο επιτόκιο i το επιτόκιο που δίνει την ίδια τελική αξία των κεφαλαίων για τον ίδιο χρόνο. (Αποστολόπουλος, 2003)

Ο τύπος υπολογισμού του μέσου επιτοκίου είναι:

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_1(1+i_1)^n + K_2(1+i_2)^n + \cdots + K_n(1+i_n)^n}{K_1 + K_2 + \cdots + K_n}} - 1$$

$\text{Όπου n} = \text{έτη ανατοκισμού}$

➤ **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 10.000€ ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 3%, κεφάλαιο 9.000 € ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 2%, και κεφάλαιο 8.000 € ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 2,5%. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο.

$$i = \sqrt[5]{\frac{10.000(1+0.03)^5 + 9.000(1+0.02)^5 + 8.000(1+0{,}025)^5}{10.000 + 9.000 + 8.000}} - 1$$

$$\rightarrow i = \sqrt[5]{\frac{10.000 * 1{,}1593 + 9.000 * 1{,}1041 + 8.000 * 1{,}1314}{27.000}} - 1$$

$$\rightarrow i = 0.0252 \text{ ή } 2{,}25\%$$

6.8 Περιοδικός ανατοκισμός

Όταν ο ανατοκισμός γίνεται σε χρονική περίοδο k διαφορετική του έτους, δηλαδή κάθε εξάμηνο ή τρίμηνο κ.λ.π. και το επιτόκιο i που δίνεται είναι ετήσιο, τότε για να υπολογίσουμε την τελική αξία ενός κεφαλαίου χρησιμοποιούμε το ισοδύναμο ή το ανάλογο επιτόκιο δηλαδή το $\frac{i}{k}$. Στις περιπτώσεις αυτές ο ανατοκισμός γίνεται *περιοδικός*. Από την θεμελιώδη εξίσωση του ανατοκισμού ένα αρχικό κεφάλαιο K_0 ανατοκίζεται $n * k$ φορές στα n έτη με επιτόκιο $\frac{i}{k}$ και δίνει τελική αξία:

$$K_{n*k} = K_0(1 + \frac{i}{k})^{n*k}$$

➢ **Παράδειγμα**: Δανείσθηκε κάποιος 16.000 € για 3 έτη με ανατοκισμό και με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 9%. Να υπολογισθεί το ποσό που θα επιστρέψει, αν ο ανατοκισμός γίνεται περιοδικά : α) κάθε εξάμηνο, β) κάθε τρίμηνο.

α) $K_6 = 16.000\ (1 + 0{,}045)^6 = 20.839{,}80€$
β) $K_{12} = 16.000\ (1 + 0{,}025)^{12} = 20.896{,}80€$

6.9 Συνεχής ή διαρκής ανατοκισμός

Συνεχή ανατοκισμό έχουμε όταν ένα αρχικό κεφάλαιο K_0 ανατοκίζεται διαρκώς μέσα στο έτος για *n* έτη και με ετήσιο επιτόκιο *i,* δηλαδή όταν οι ποσότητες K_0, *i, n* παραμένουν σταθερές και $k \to +\infty$.

Στην περίπτωση αυτή η τελική αξία του κεφαλαίου K_0 δίνεται από την εξίσωση:

$$K_\tau = K_0 * e^{i*n}$$

➢ **Παράδειγμα:** Κεφάλαιο 6.000€ ανατοκίζεται συνεχώς για 8 έτη με σταθερό ετήσιο επιτόκιο 8%. Να υπολογιστεί το ποσό που θα συγκεντρωθεί στο τέλος του όγδοου έτους.

$$K_\tau = 6.000 * e^{0{,}08*8} = 6.000 * 1{,}8965 = 11.379€$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΡΑΝΤΕΣ – ΔΑΝΕΙΑ

Ράντες

7.1 Βασικές έννοιες ραντών

Ράντα καλούμε ένα σύνολο χρηματικών ποσών που καταβάλλονται ή λαμβάνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Οι ράντες έχουν εξελιχθεί σε ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο αξιολόγησης επενδύσεων και άλλων οικονομικών μακράς διάρκειας πράξεων.
(Χουβαρδάς , 1998).

Τα προβλήματα που αναφέρονται σε ράντες είναι συνήθως δημιουργία κεφαλαίου με ανατοκισμό καταθέσεων σε ίσα χρονικά διαστήματα ή εξόφληση ενός χρέους (δανείου κ.λ.π.) με δόσεις που καταβάλλονται επίσης σε ίσα χρονικά διαστήματα.
(Γεωργίου, Κούγιας, 2004).

Παραδείγματα ραντών από την καθημερινή ζωή του ανθρώπου είναι το ενοίκιο που καταβάλλει κάποιος, οι μηνιαίες κρατήσεις στον μισθό των εργαζομένων για τα διάφορα ασφαλιστικά ταμεία, οι ετήσιες ή εξαμηνιαίες ή μηνιαίες δόσεις για την εξόφληση δανείων κ.λ.π.
(Γεωργίου, Κούγιας, 2004).

Όρος ράντας καλείται το χρηματικό ποσό που καταβάλλεται κάθε φορά.

Περίοδος ράντας καλείται το διαδοχικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών όρων αυτής.

Αρχή ράντας καλείται η αρχή της $1^{ης}$ περιόδου της ράντας.

Τέλος της ράντας καλείται το τέλος της τελευταίας περιόδου της ράντας.

7.2 Βασικές κατηγορίες ραντών

- ***Σταθερές – μεταβλητές***

  Σταθερή λέγεται η ράντα στην οποία όλοι οι όροι είναι ίσοι μεταξύ τους.

  Μεταβλητή λέγεται η ράντα στην οποία υπάρχουν όροι που δεν είναι ίσοι μεταξύ τους.
- ***Πρόσκαιρες – Διηνεκής***

  Πρόσκαιρη λέγεται η ράντα της οποίας το πλήθος των όρων είναι πεπερασμένο.

  Διαρκής λέγεται η ράντα με άπειρο πλήθος όρων.
- ***Ακέραιες - Κλασματικές***

  Ακέραιη λέγεται η ράντα της οποίας η περίοδος είναι ίση με το χρονικό διάστημα στο οποίο αναφέρεται το επιτόκιο (περίοδος ανατοκισμού). Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε η ράντα λέγεται *κλασματική*.
- ***Άμεσες - μέλλουσες - Αρξάμενες***

  Άμεση καλείται η ράντα στην οποία ο $1^{ος}$ της όρος καταβάλλεται στην πρώτη περίοδο της ράντας.

Μέλλουσα καλείται η ράντα στην οποία ο $1^{ος}$ της όρος καταβάλλεται μετά από ορισμένους περιόδους της ράντας.

Αρξάμενη καλείται η ράντα στη οποία ο $1^{ος}$ της όρος καταβάλλεται πριν από ορισμένες περιόδους της ράντας.

- ***Ληξιπρόθεσμες - Προκαταβλητέες***

Ληξιπρόθεσμη λέγεται η ράντα της οποίας ο όρος καταβάλλεται ή λαμβάνεται στο τέλος κάθε περιόδου.

Ενώ ονομάζεται *προκαταβλητέα* όταν ο όρος της καταβάλλεται ή λαμβάνεται στην αρχή κάθε περιόδου.

7.3 Αρχική και τελική αξία ράντας

Το άθροισμα των πραγματικών αξιών των όρων μιας ράντας ονομάζεται *αρχική αξία* αυτής ή *παρούσα αξία*, ενώ το άθροισμα των τελικών αξιών των όρων της ράντας ονομάζεται *τελική αξία* αυτής.

Συμβολισμοί:
A: Αρχική αξία ράντας.
S: Τελική αξία ράντας.

- **Παράδειγμα:** Καταθέτει κάποιος στο τέλος κάθε έτους και για 3 συνεχή έτη τα χρηματικά ποσά 100€, 150€ και 300€. Αν το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού είναι 3%, τότε να βρεθούν η αρχική και τελική αξία της ράντας.

Για να βρούμε την τελική αξία S της ράντας θα πρέπει να βρούμε την αξία όλων των όρων της μαζί στο τέλος της, δηλαδή στο τέλος του $3^{ου}$ έτους.

Ο $1^{ος}$ όρος της 100€ θα ανατοκισθεί για 2 έτη, ο δεύτερος όρος της 150€ θα ανατοκισθεί για 1 έτος και ο $3^{ος}$ όρος της 300€ θα προστεθεί στο λογαριασμό, αφού δεν υπάρχει χρόνος ανατοκισμού του.

Οπότε:

$$S = 100 * (1 + 0{,}03)^2 + 150 * (1 + 0{,}03) + 300 = 560{,}59€$$

Για να βρούμε την αρχική αξία A της ράντας θα πρέπει να βρούμε την πραγματική αξία όλων των όρων της ράντας μαζί στην αρχή της, δηλαδή στη αρχή του $1^{ου}$ έτους.

Οπότε:

$$A = \frac{100}{(1 + 0{,}03)} + \frac{150}{(1 + 0{,}03)^2} + \frac{300}{(1 + 0{,}03)^3} = 513€$$

7.4 Ράντα: σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, *<u>ληξιπρόθεσμη</u>* και άμεση

Αν καταβάλλει κάποιος στο τέλος κάθε περιόδου για *n* συνεχόμενες περιόδους, το ίδιο ποσό R, τότε η αρχική και η τελική αξία της ράντας δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$A = R\frac{1 - U^n}{i}$$

Όπου $U = \frac{1}{1+i}$

Και

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

➢ **Παράδειγμα:** Καταθέτει κάποιος με ανατοκισμό για 3 συνεχόμενα έτη και στο τέλος κάθε έτους το ίδιο πάντα ποσό, 200€. Αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι ετήσιο 3%, τότε να βρεθεί η αξία των καταθέσεων στην αρχή του 1ου έτους και στο τέλος του 3ου έτους.

$$A = R\frac{1 - U^n}{i} = 200\frac{1 - (\frac{1}{1+0{,}03})^3}{0{,}03} = 565{,}72€$$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 200\frac{(1+0{,}03)^3 - 1}{0{,}03} = 618{,}18€$$

7.5 Ράντα: σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, ***προκαταβλητέα*** και άμεση

Αν καταβάλλει κάποιος στην αρχή κάθε περιόδου για *n* συνεχόμενες περιόδους, το ίδιο ποσό R, τότε η αρχική και η τελική αξία της ράντας δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$A = R * \frac{1 - U^n}{i} * (1+i)$$

Και

$$S = R * \frac{(1+i)^n - 1}{i} * (1+i)$$

➢ **Παράδειγμα:** Καταθέτει κάποιος με ανατοκισμό για 3 συνεχόμενα έτη στην αρχή κάθε έτους το ίδιο πάντα ποσό, 200€. Αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι ετήσιο 3%, τότε να βρεθεί η αξία των καταθέσεων στην αρχή του 1ου έτους και στο τέλος του 3ου έτους.

$$A = R\frac{1 - U^n}{i}(1+i) = 200\frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}03}\right)^3}{0{,}03}(1+0{,}03) = 582{,}69€$$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = 200\frac{(1+0{,}03)^3 - 1}{0{,}03}(1+0{,}03) = 636{,}72€$$

7.6 Ράντα: σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, ***ληξιπρόθεσμη*** και ***μέλλουσα***

Αν καταβάλλει κάποιος μετά από r χρονικές περιόδους, στο τέλος κάθε περιόδου και για *n* συνεχόμενες περιόδους το ίδιο ποσό R, τότε η αρχική και η τελική αξία της ράντας δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$A = R\frac{1-U^n}{i}(1+i)^{-r}$$

Και

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

➢ **Παράδειγμα:** Καταθέτει κάποιος μετά από 3 έτη από σήμερα και για 2 συνεχή έτη στο τέλος κάθε έτους το ίδιο πάντα ποσό, 200€. Αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι ετήσιο 2%, τότε να βρεθεί η αξία των καταθέσεων σήμερα και στο τέλος του $5^{ου}$ έτους από σήμερα.

$$A = R\frac{1-U^n}{i}(1+i)^{-r} = 200\frac{1-(\frac{1}{1+0{,}02})^2}{0{,}02}(1+0{,}02)^{-3} = 365€$$

Και

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 200\frac{(1+0{,}02)^2 - 1}{0{,}02} = 404€$$

7.7 Ράντα: σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, *προκαταβλητέα* και *μέλλουσα*

Αν καταβάλλει κάποιος μετά από *r* χρονικές περιόδους, στην αρχή κάθε περιόδου και για *n* συνεχόμενες περιόδους το ίδιο ποσό *R*, τότε η αρχική και η τελική αξία της ράντας δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$A = R\frac{1-U^n}{i}(1+i)^{1-r}$$

Και

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

➢ **Παράδειγμα:** Καταθέτει κάποιος μετά από 4 έτη από σήμερα και για 2 συνεχή έτη στην αρχή κάθε έτους το ίδιο πάντα ποσό, 200€. Αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι ετήσιο 2%, τότε να βρεθεί η αξία των καταθέσεων σήμερα και στο τέλος του $6^{ου}$ έτους από σήμερα.

$$A = R\frac{1-U^n}{i}(1+i)^{1-r} = 200\frac{1-(\frac{1}{1+0{,}02})^2}{0{,}02}(1+0{,}02)^{1-4} = 365€$$

Και

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = 200\frac{(1+0{,}02)^2 - 1}{0{,}02}(1+0{,}02) = 412{,}08€$$

7.8 Ράντα: σταθερή, ακέραια, ***διηνεκής***, ληξιπρόθεσμη και άμεση

Αν καταβάλλει κάποιος συνεχώς και στο τέλος κάθε περιόδου το ίδιο ποσό R, τότε η αρχική αξία της ράντας δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$A = R\frac{1}{i}$$

Η τελική αξία S της ράντας είναι: $S = \infty$

- **Παράδειγμα:** Ένας οργανισμός καταθέτει συνέχεια και στο τέλος κάθε μήνα το ίδιο πάντοτε ποσό 10.000€ για την πληρωμή των τόκων ενός δανείου. Αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι 3% μηνιαίο, τότε να βρεθεί η αξία των καταθέσεων αυτών σήμερα.

$$A = R\frac{1}{i} = 10.000\frac{1}{0{,}03} = 333.333{,}33€$$

7.9 Ράντα: σταθερή, ακέραια, ***διηνεκής***, ***προκαταβλητέα*** και άμεση

Αν καταβάλλει κάποιος συνεχώς και στην αρχή κάθε περιόδου το ίδιο ποσό R, τότε η αρχική αξία της ράντας δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$A = R\frac{1}{i}(1+i)$$

Η τελική αξία S της ράντας είναι: $S = \infty$

- **Παράδειγμα:** Ένας οργανισμός καταθέτει συνέχεια και στην αρχή κάθε μήνα το ίδιο πάντοτε ποσό 10.000€ για την πληρωμή των τόκων ενός δανείου. Αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι 3% μηνιαίο, τότε να βρεθεί η αξία των καταθέσεων αυτών σήμερα.

$$A = R\frac{1}{i}(1+i) = 10.000\frac{1}{0{,}03}(1+0{,}03) = 343.333{,}33€$$

7.10 Αξιολόγηση επενδύσεων – Μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας

Η αρχική αξία μια ράντας χρησιμοποιείται στην αξιολόγηση επενδύσεων, δηλαδή κατά πόσο μια επένδυση που σκεφτόμαστε να κάνουμε είναι συμφέρουσα ή μη. Η αξιολόγηση και λήψη επενδυτικών αποφάσεων στον επιχειρηματικό τομέα γίνεται με βάσει τον προϋπολογισμό κεφαλαίου, δηλαδή κατά πόσο το αρχικό κεφάλαιο θα επενδυθεί και τι θα αποφέρει αυτό μελλοντικά στην επιχείρηση που αποφάσισε τη συγκεκριμένη επένδυση. Πολλές φορές υπάρχουν περισσότερες από μια επενδύσεις από τις οποίες μπορεί να επιλέξει μια επιχείρηση, και πρέπει να επιλεγεί, όπως είναι φυσικό εκείνη που θα είναι η πλέον συμφέρουσα. (Κούγιας, Γεωργίου, 2004)

Η μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας στηρίζεται στον υπολογισμό του αθροίσματος των πραγματικών αξιών όλων των ταμειακών ροών που καταβάλλονται σε μια επένδυση. Και ο τύπος που υπολογίζεται η καθαρή παρούσα αξία είναι:

$$A_K = \frac{K_1}{(1+i)^1} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{K_n}{(1+i)^n} - K_0$$

Όπου K_0 το αρχικό κόστος της επένδυσης, $K_j, j = 1,2,\dots,n$ οι καθαρές ταμειακές ροές (έσοδα- έξοδα), i το ισχύον επιτόκιο κόστους κεφαλαίου και n η χρονική διάρκεια της επένδυσης. (Καφούσιας, 2013)

Το κριτήριο με το οποίο αποφασίζεται η πραγματοποίηση της επένδυσης είναι: Αν $A_K > 0$, τότε η επένδυση είναι συμφέρουσα, ενώ αν $A_K < 0$ η επένδυση είναι μη συμφέρουσα και δεν πρέπει να πραγματοποιηθεί, διότι θα επιφέρει ζημιά στη επιχείρηση. Σε περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες επιλογές επενδύσεων, αλλά πρέπει να επιλεγεί μόνο μια, επιλέγεται φυσικά, αυτή με τη μεγαλύτερη παρούσα αξία.

- **Παράδειγμα:** Ένας επενδυτής εξετάζει την περίπτωση επένδυσης για την οποία απαιτείται άμεση εκταμίευση ποσού της τάξεως των 2.500 € και έχει δύο εναλλακτικά πλάνα επένδυσης οι ταμειακές ροές των οποίων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Έτη	Πλάνο 1	Πλάνο 2
1	550	0
2	1950	100
3	900	100
4	-800	2300
5	-900	3100

Πίνακας 7.10 Ταμειακές Ροές

Αν το επιτόκιο είναι 5% ποια είναι η πιο συμφέρουσα επένδυση;

Πλάνο 1

$$A_K = \frac{K_1}{(1+i)^1} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + \frac{K_3}{(1+i)^3} + \frac{K_4}{(1+i)^4} + \frac{K_5}{(1+i)^5} - K_0$$

$$A_K = \frac{550}{(1+0{,}05)^1} + \frac{1950}{(1+0{,}05)^2} + \frac{900}{(1+0{,}05)^3} - \frac{800}{(1+0{,}05)^4} - \frac{900}{(1+0{,}05)^5} - 2500$$

$$\rightarrow A_K = 523{,}81 + 1772{,}72 + 782{,}61 - 661{,}16 - 708{,}66 - 2500$$

$$\rightarrow A_K = -790{,}68$$

Πλάνο 2

$$A_K = \frac{K_1}{(1+i)^1} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + \frac{K_3}{(1+i)^3} + \frac{K_4}{(1+i)^4} + \frac{K_5}{(1+i)^5} - K_0$$

$$A_K = \frac{0}{(1+0{,}05)^1} + \frac{100}{(1+0{,}05)^2} + \frac{100}{(1+0{,}05)^3} - \frac{2300}{(1+0{,}05)^4} - \frac{3100}{(1+0{,}05)^5} - 2500$$

$$\rightarrow A_K = 90{,}49 + 86{,}38 + 1829{,}22 + 2429{,}08 - 2500$$

$$\rightarrow A_K = 1935{,}17$$

Άρα η πιο συμφέρουσα επένδυση είναι το πλάνο 2.

Δάνεια

7.11 Βασικές έννοιες δανείων

Πολλές φορές η αντιμετώπιση των οικονομικών αναγκών ενός ιδιώτη ή μιας επιχείρησης απαιτεί τη σύναψη δανείων από τράπεζες ή άλλους φορείς. Κατά τη σύναψη ενός δανείου τα μέρη που λαμβάνουν μέρος είναι ο *δανειστής*, δηλαδή αυτός που δίνει τα χρήματα και *ο δανειζόμενος*, ο οποίος αποδέχεται τα χρήματα.

Στη συνέχεια αναφέρονται οι βασικοί ορισμοί για την ανάλυση του κεφαλαίου αυτού.

Διάρκεια δανείου καλούμε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την ημέρα που συνάπτεται το δάνειο ως τη μέρα που εξοφλείται.

Εξόφληση δανείου καλούμε την επιστροφή του δανείου και την πληρωμή των τόκων που δημιουργήθηκαν μέχρι την ημέρα επιστροφής του δανείου.

Απόσβεση δανείου καλούμε το σύνολο των αριθμητικών πράξεων που γίνονται για την εξόφληση του δανείου.

Τα δάνεια, ανάλογα με την διάρκεια τους, διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα.

Βραχυπρόθεσμα καλούμε τα δάνεια, το οποία λήγουν το πολύ σε ένα έτος, ενώ *μακροπρόθεσμα* εκείνα που έχουν χρονική διάρκεια μεγαλύτερη του ενός έτους. Στα βραχυπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο απλός τόκος και αυτά συνήθως συνάπτονται μεταξύ φυσικών ή νομικών προσώπων και εξοφλούνται με συναλλαγματικές. Στα μακροπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο ανατοκισμός. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα γνωστά σε όλους δάνεια όπως είναι τα στεγαστικά, καταναλωτικά, κ.λ.π.

(Γεωργίου, Κούγιας, 2004)

Τα μακροπρόθεσμα δάνεια διακρίνονται σε δύο κατηγορίες τα *ενιαία* και τα *ομολογιακά.*

Ενιαία καλούμε τα δάνεια στα οποία ο δανειστής είναι μόνο ένα πρόσωπο φυσικό ή νομικό ενώ *ομολογιακά* καλούμε τα δάνεια στα οποία οι δανειστές είναι πολλοί. Τα ομολογιακά δάνεια αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια τα οποία δεν μπορούν να διατεθούν μόνο από ένα πρόσωπο φυσικό ή νομικό και για αυτό το λόγο το δάνειο διαιρείται σε τμήματα μικρών ποσών που καλούνται ομολογίες.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την κατηγορία των ενιαίων δανείων.

7.12 Ενιαία δάνεια

Τα ενιαία δάνεια ανάλογα με το χρόνο εξόφλησής τους διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Τα πάγια και τα εξοφλητέα.

Πάγια ονομάζουμε τα δάνεια στα οποία ο οφειλέτης δεν υποχρεούται να τα εξοφλήσει σε ορισμένο χρονικό διάστημα.

Εξοφλητέα καλούμε τα δάνεια των οποίων ο χρόνος εξόφλησης είναι καθορισμένος.

Η εξόφληση ενός δανείου μπορεί να γίνει είτε με την πληρωμή ολόκληρου του ποσού μια φορά στο τέλος της διάρκειας του (στη λήξη του) οπότε το δάνειο αυτό ανήκει στην κατηγορία: *Δάνεια εξοφλητέα εφάπαξ* είτε σιγά-σιγά, με δόσεις οπότε ανήκει στην κατηγορία : *Δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικώς.*

Στην ανάλυση των ενιαίων δανείων θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω έννοιες και συμβολισμούς:

Χρεολύσιο καλούμε το ποσό που διατίθεται σε κάθε δόση του δανείου για την εξόφληση του κεφαλαίου που δανεισθήκαμε.

Τόκο καλούμε το ποσό που δίνεται σε κάθε δόση του δανείου για την εξόφληση του κεφαλαίου που δανεισθήκαμε.

Τοκοχρεολύσιο καλούμε τη συνολική δόση του δανείου και είναι το ποσό που δίνουμε κάθε φορά για την εξόφληση του αρχικού κεφαλαίου που δανεισθήκαμε και του αντίστοιχου τόκου του δανείου.

Τοκοχρεολύσιο = τόκος + χρεολύσιο

Συμβολισμοί

K: Το χρηματικό ποσό του δανείου σε Ευρώ
n: Διάρκεια του δανείου.
i: Επιτόκιο του δανείου.
X_m: Χρεολύσιο της $m^{ης}$ περιόδου.
I_m: Τόκος της $m^{ης}$ περιόδου του δανείου.
R_m: Τοκοχρεολύσιο της $m^{ης}$ περιόδου.
Y_m: Υπόλοιπο δανείου της $m^{ης}$ περιόδου.

7.13 Μέθοδος ίσων μερών κεφαλαίου

Είναι ένα απλό σύστημα, που εφαρμόζεται για δάνεια μικρής διάρκειας. Η απόσβεση με τη μέθοδο αυτή γίνεται ως εξής: Το κεφάλαιο του δανείου διαιρείται σε τόσα ίσα μέρη, όσες είναι και οι χρονικές περίοδοι απόσβεσης του δανείου.

Ο οφειλέτης πληρώνει στο τέλος κάθε μιας χρονικής περιόδου ένα από αυτά τα ίσα μέρη, το οποίο αφαιρείται από το χρέος του. Δηλαδή το χρεολύσιο (X_m) θα είναι το 1/n του κεφαλαίου του δανείου : $X_m = \frac{K}{n}$ όπου $m = 1,2, \ldots, n$

Επίσης στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου ο τόκος θα είναι:

$$I_m = K * i - (m-1)\frac{K}{n}i$$

Και το τοκοχρεολύσιο:

$$R_m = X_m + I_m, \quad όπου\ m = 1,2, \ldots, n$$

Ενώ το υπόλοιπο του δανείου της $m^{ης}$ περιόδου είναι:

$$Y_m = K - m\frac{K}{n}, \quad όπου\ m = 1,2,\dots,n$$

➢ **Παράδειγμα:** να γίνει απόσβεση του δανείου 10.000€ σε 4 έτη προς 6% με τη μέθοδο των ίσων κεφαλαίων.

$$X_m = \frac{K}{n} = \frac{10.000}{4} = 2.500€\ , \ όπου\ m = 1,2,3,4$$

$$I_m = K * i - (m-1)\frac{K}{n}i$$

$$\rightarrow I_m = 10.000 * 0{,}06 - (m-1)\frac{10.000}{4} * 0{,}06$$

$$\rightarrow I_m = 600 - (m-1) * 150$$

$$\rightarrow I_1 = 600, I_2 = 450, I_3 = 300, I_4 = 150$$

Άρα :

$$R_m = X_m + I_m, \quad όπου\ m = 1,2,3,4$$

Ενώ το υπόλοιπο του δανείου υπολογίζεται:

$$Y_m = K - m\frac{K}{n}$$

$$\rightarrow Y_m = 10.000 - m\frac{10.000}{4}$$

$$\rightarrow Y_m = 10.000 - m * 2.500$$

Οπότε ο πίνακας απόσβεσης κεφαλαίου με τη μέθοδο των ίσων μερών κεφαλαίου είναι:

m	I_m	X_m	R_m	Y_m
1	600	2.500	3.100	7.500
2	450	2.500	2.950	5.000
3	300	2.500	2.800	2.500
4	150	2.500	2.650	0

Πίνακας 7.13 Απόσβεση κεφαλαίου με τη μέθοδο των ίσων μερών.

7.14 Μέθοδος σταθερού τόκου και χρεολυσίου

Σύμφωνα με το σύστημα αυτό, ο οφειλέτης πληρώνει στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου τον τόκο I_m ο οποίος παραμένει σταθερός μέχρι την πλήρη εξόφληση του δανείου. Επίσης πληρώνει το χρεολύσιο της χρονικής περιόδου που επίσης παραμένει σταθερό. Άρα και το άθροισμα R_m των δύο αυτών ποσών, που είναι το τοκοχρεολύσιο της περιόδου παραμένει σταθερό.

Οι τόκοι των χρεολυσίων προστίθενται στο εξοφλημένο ποσό, δηλαδή συνυπολογίζονται στην εξόφληση του δανείου. Άρα οι τύποι του τόκου, του χρεολυσίου και του τοκοχρεολυσίου είναι:

$$I_m = K * i$$

$$X_m = K\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Και

$$R_m = X_m + I_m, \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ m = 1,2,\dots,n$$

- **Παράδειγμα** : Ένας δήμος πήρε δάνειο 100.000€ για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 12 %. Το δάνειο θα εξοφληθεί με ίσες ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις. Να βρεθεί το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και να συνταχθεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου.

Ο ετήσιος τόκος θα είναι:

$$I_m = K * i = 100.000 * 0{,}12 = 12.000€$$

Το ετήσιο χρεολύσιο θα είναι:

$$X_m = K\frac{i}{(1+i)^n - 1} = 100.000\frac{0{,}12}{(1+0{,}12)^5 - 1} = 15.940{,}970€$$

Άρα το ετήσιο τοκοχρεολύσιο θα είναι:

$$R_m = X_m + I_m = 12.000 = 15.940{,}970 = 27.940{,}970€$$

Έτος	I_m	X_m	R_m	Y_m
1	12.000	15.940,970	27.940,970	84.259,030
2	12.000	15.940,970	27.940,970	66.629,141
3	12.000	15.940,970	27.940,970	46.883,668
4	12.000	15.940,970	27.940,970	24.768,739
5	12.000	15.940,970	27.940,970	0

Πίνακας 7.14 Απόσβεση κεφαλαίου με τη μέθοδο σταθερού τόκου και χρεολυσίου.

7.15 Μέθοδος προοδευτικού χρεολυσίου (Γαλλική μέθοδος)

Σύμφωνα με το σύστημα αυτό χρησιμοποιούμε αρχικά πάλι τον τύπο που δίνει την ετήσια τοκοχρεολυτική δόση:

$$R_m = K * i + K\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Όμως ο τόκος κάθε χρονικής περιόδου, μετά από την πρώτη, υπολογίζεται πάνω στο ανεξόφλητο ποσό, δηλαδή στο υπόλοιπο του δανείου. Και επειδή το υπόλοιπο συνεχώς μειώνεται κατά το χρεολύσιο της προηγούμενης περιόδου, μειώνεται και ο τόκος. Όμως το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό.

$$R_m = R, \qquad m = 1,2,\dots n.$$

Για να βρούμε τον τόκο της πρώτης περιόδου πολλαπλασιάζουμε το κεφάλαιο με το επιτόκιο:

$$I_1 = K * i$$

Για να βρούμε τον τόκο της κάθε περιόδου πολλαπλασιάζουμε το υπόλοιπο του κεφαλαίου με το επιτόκιο:

$$I_m = Y_{m-1} * i$$

Για να βρούμε το χρεολύσιο κάθε περιόδου, εκτός της πρώτης, αφαιρούμε από το τοκοχρεολύσιο τον νέο ελαττωμένο τόκο, οπότε προκύπτει αυξημένο χρεολύσιο.

$$X_m = R - I_m$$

Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο, εκτός από την πρώτη, ο τόκος μειώνεται και το χρεολύσιο αυξάνεται. Γι' αυτό και η μέθοδος αυτή λέγεται *μέθοδος του προοδευτικού χρεολυσίου.*

Επίσης το εξοφλημένο ποσό είναι κάθε φορά το άθροισμα των χρεολυσίων.

Ενώ το υπόλοιπο του δανείου είναι το υπόλοιπο του αρχικού κεφαλαίου του δανείου μείον το εξοφλημένο.

$$Y_m = K - X_m$$

- **Παράδειγμα** : Ένας δήμος πήρε δάνειο 100.000€ για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο 12 %. Το δάνειο θα εξοφληθεί με ίσες ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις. Να βρεθεί το ετήσιο τοκοχρεολύσιο και να συνταχθεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου.

Το ετήσιο τοκοχρεολύσιο είναι :

$$R_m = K * i + K \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 100.000 * 0{,}12 + 100.000 \frac{0{,}12}{(1+0{,}12)^5 - 1}$$
$$= 27.740{,}970€.$$

Τα ποσά των τόκων, των χρεολυσίου και των υπολοίπων του δανείου για κάθε έτος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	I_m	X_m	R_m	Y_m
1	12.000	15.740,970	27.740,970	84.259,030
2	10.111,083	17.629,887	27.740,970	66.629,143
3	7.995,4971	19.745,473	27.740,970	46.883,670
4	5.626,0404	22.114,930	27.740,970	24.768,740
5	2.972,2488	24.768,722	27.740,970	0

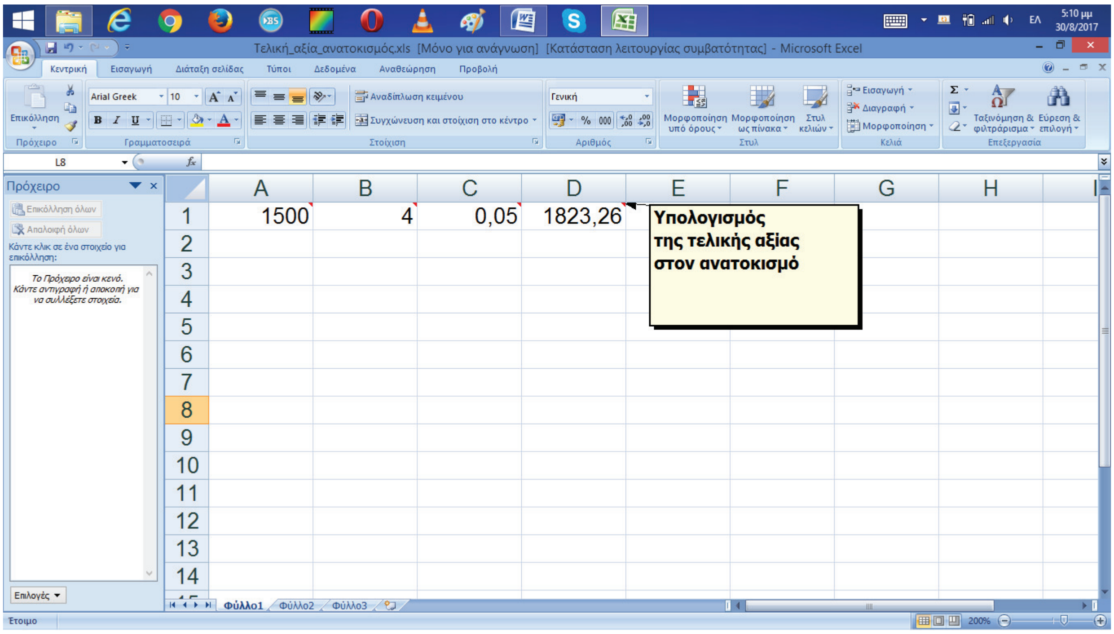
Πίνακας 7.15 Απόσβεση κεφαλαίου με τη μέθοδο προοδευτικού και χρεολυσίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ EXCEL

8.1 Υπολογισμός πράξεων ανατοκισμού με τη χρήση του Excel

8.1.1 Υπολογισμός της τελικής αξίας, όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο

Στην Εικόνα 8.1.1 γίνεται ο υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο.



Εικόνα 8.1.1 Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη, εξάμηνα και το επιτόκιο είναι αντίστοιχα ετήσιο, εξαμηνιαίο.

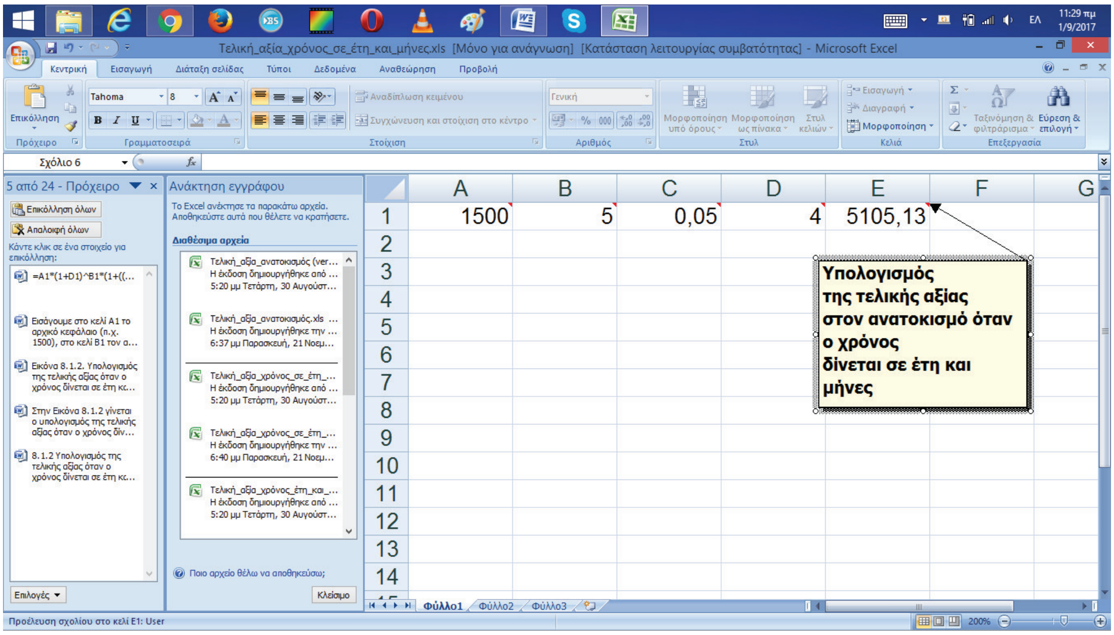
Εισάγουμε στο κελί Α1 το αρχικό κεφάλαιο (π.χ. 1500), στο κελί Β1 τον αριθμό των ετών (αντίστοιχα εξαμήνων) (π.χ. 4) και στο κελί C1 το ετήσιο (αντίστοιχα εξαμηνιαίο) επιτόκιο (π.χ. 0,05). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1823,26 € που είναι η τελική αξία που δίνει το αρχικό κεφάλαιο των 1500 € για 4 χρονικές περιόδους ανατοκισμού με επιτόκιο 0,05.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί D1 έγινε με τη χρήση του τύπου:

$$= A1 * (1 + C1)^{B1}$$

8.1.2 Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και μήνες και το επιτόκιο είναι ετήσιο.

Στην Εικόνα 8.1.2 γίνεται ο υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και μήνες και το επιτόκιο είναι ετήσιο.



Εικόνα 8.1.2 Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και μήνες και το επιτόκιο είναι ετήσιο

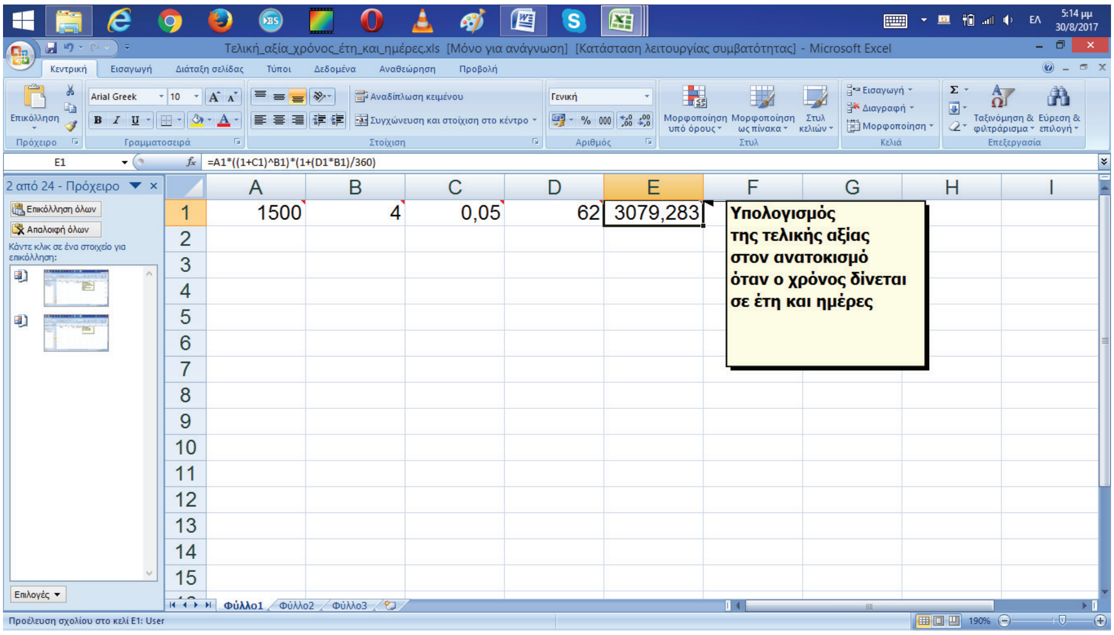
Εισάγουμε στο κελί A1 το αρχικό κεφάλαιο (π.χ. 1500), στο κελί B1 τον αριθμό των ετών (π.χ. 5), στο κελί C1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05) και στο κελί D1 τον αριθμό των μηνών(π.χ. 4). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικού μας στο κελί E1 θα δούμε το αποτέλεσμα 5105,13€ που είναι η τελική αξία που δίνει το αρχικό κεφάλαιο των 1500 € για 5 έτη και 4 μήνες με επιτόκιο 0,05.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί E1 έγινε με τη χρήση του τύπου:

$$= A1 * (1 + D1)^{B1} * (1 + (\frac{C1 * D1}{12}))$$

8.1.3 Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και ημέρες και το επιτόκιο είναι ετήσιο.

Στην Εικόνα 8.1.3 γίνεται ο υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και ημέρες και το επιτόκιο είναι ετήσιο.



Εικόνα 8.1.3 Υπολογισμός της τελικής αξίας όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη και ημέρες και το επιτόκιο είναι ετήσιο

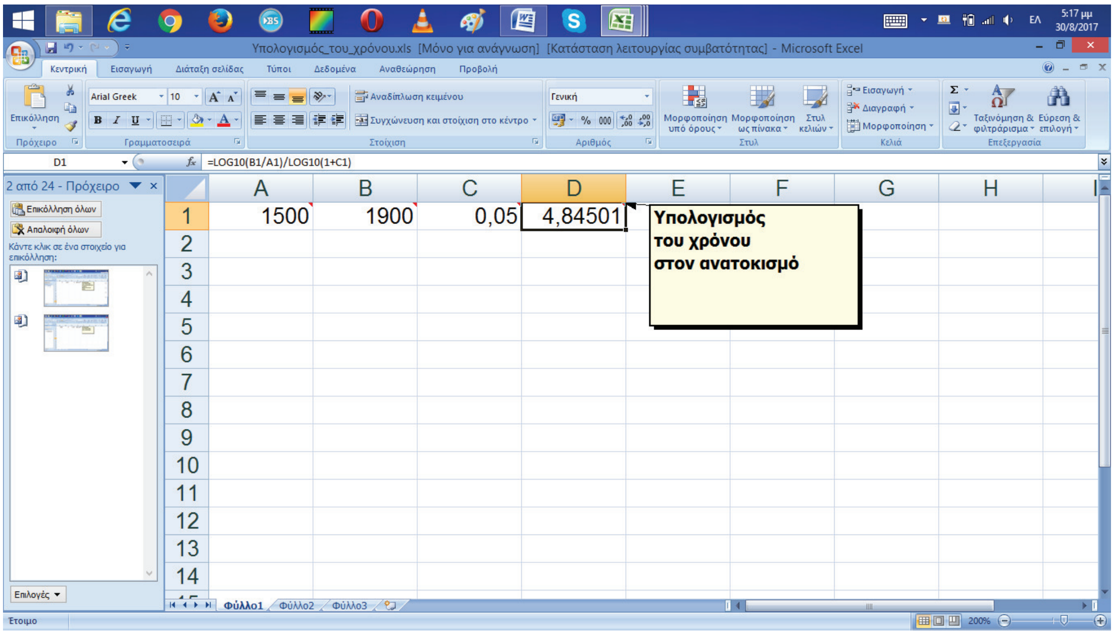
Εισάγουμε στο κελί A1 το αρχικό κεφάλαιο (π.χ. 1500), στο κελί B1 τον αριθμό των ετών (π.χ. 4), στο κελί C1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05) και στο κελί D1 τον αριθμό των ημερών (π.χ. 62). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικού μας στο κελί E1 θα δούμε το αποτέλεσμα 3079,28€ που είναι η τελική αξία που δίνει το αρχικό κεφάλαιο των 1500 € για 4 έτη και 62 ημέρες με επιτόκιο 0,05.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί E1 έγινε με τη χρήση του τύπου:

$$= A1 * (1 + D1)^{B1} * (1 + (\frac{C1 * D1}{360}))$$

8.1.4 Υπολογισμός του χρόνου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, το ετήσιο επιτόκιο και η τελική αξία του κεφαλαίου

Στην εικόνα 8.1.4 γίνεται ο υπολογισμός του χρόνου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, το ετήσιο επιτόκιο και η τελική αξία του κεφαλαίου.



Εικόνα 8.1.4 Υπολογισμός του χρόνου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, το ετήσιο επιτόκιο και η τελική αξία του κεφαλαίου.

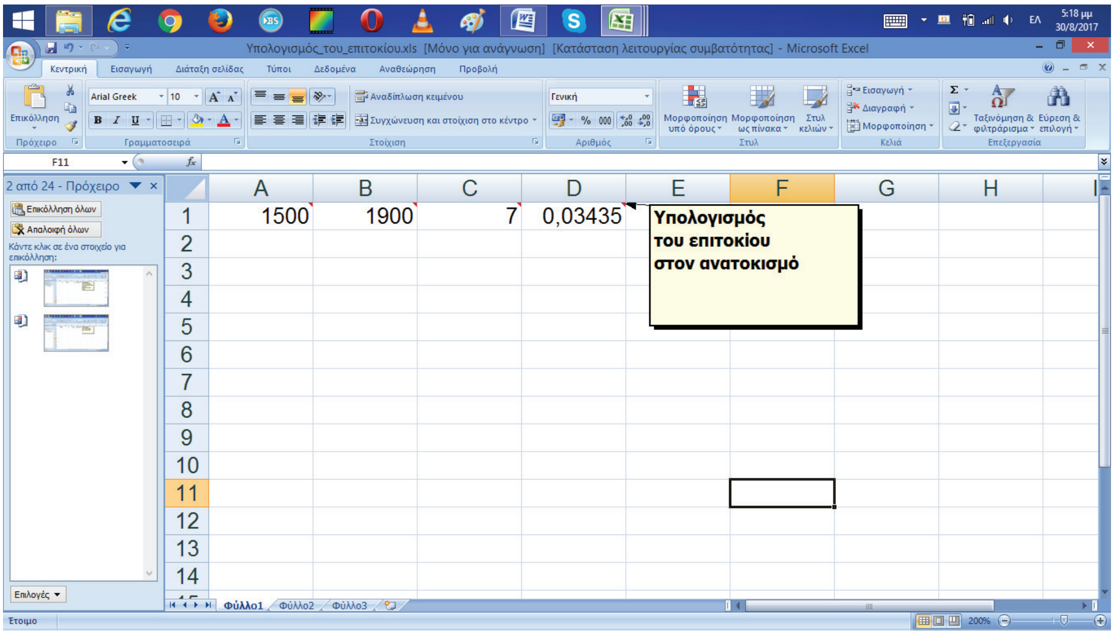
Εισάγουμε στο κελί A1 το αρχικό κεφάλαιο (π.χ. 1500), στο κελί B1 την τελική αξία του κεφαλαίου (π.χ. 1900) και στο κελί C1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 4,8450 που είναι ο χρόνος που πρέπει να ανατοκισθεί το αρχικό κεφάλαιο των 1500 € με ετήσιο επιτόκιο 0,05 για να δώσει τελική αξία 1900€.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση LOG και έτσι ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί D1 έγινε με τη χρήση του τύπου:

$$= \frac{LOG(\frac{B1}{A1})}{LOG(1 + C1)}$$

8.1.5 Υπολογισμός του επιτοκίου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, ο αριθμός των ετών ανατοκισμού και η τελική αξία του κεφαλαίου

Στην εικόνα 8.1.5 γίνεται ο υπολογισμός του επιτοκίου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, ο αριθμός των ετών ανατοκισμού και η τελική αξία του κεφαλαίου.



Εικόνα 8.1.5 Υπολογισμός του επιτοκίου στον ανατοκισμό όταν δίνονται το αρχικό κεφάλαιο, ο αριθμός των ετών ανατοκισμού και η τελική αξία του κεφαλαίου

Εισάγουμε στο κελί A1 το αρχικό κεφάλαιο (π.χ. 1500), στο κελί B1 την τελική αξία του κεφαλαίου (π.χ. 1900) και στο κελί C1 τον αριθμό των ετών που γίνεται ο ανατοκισμός (π.χ. 7). Μετακινώντας το δείκτη του ποντικού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 0,3435 που είναι το επιτόκιο που πρέπει να ανατοκισθεί το αρχικό κεφάλαιο των 1500 € για να δώσει τελική αξία 1900€.

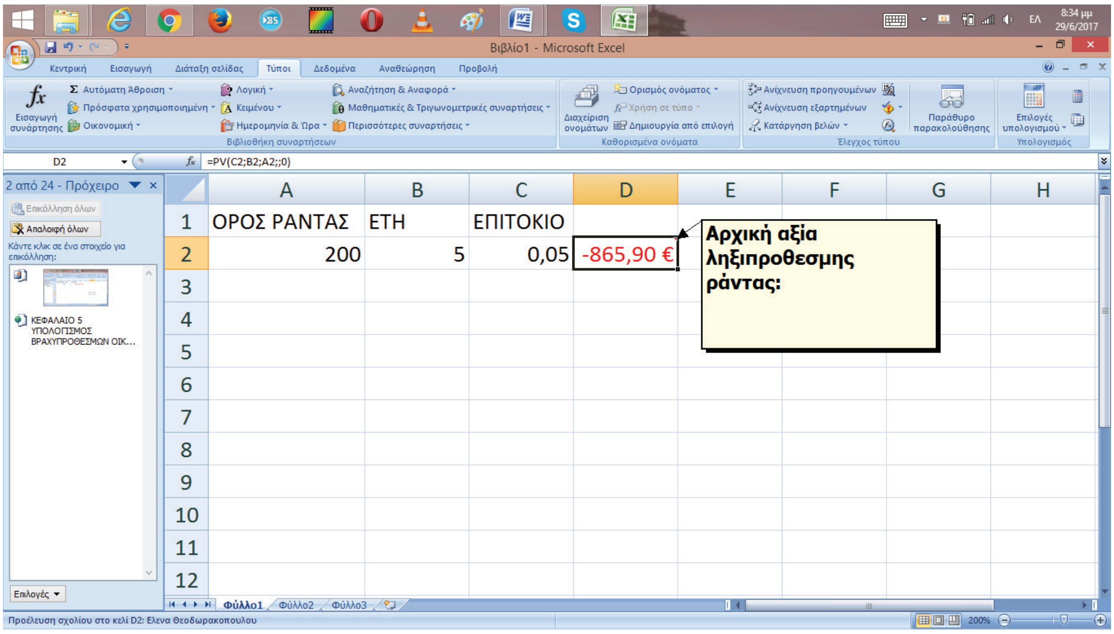
Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση EXP και έτσι ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί D1 έγινε με τη χρήση του τύπου:

$$= EXP\frac{LN(\frac{B1}{A1})}{C1} - 1$$

8.2 Υπολογισμός πράξεων ραντών με χρήση του προγράμματος Excel

8.2.1 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας

Στην Εικόνα 8.2.1 γίνεται ο υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας.



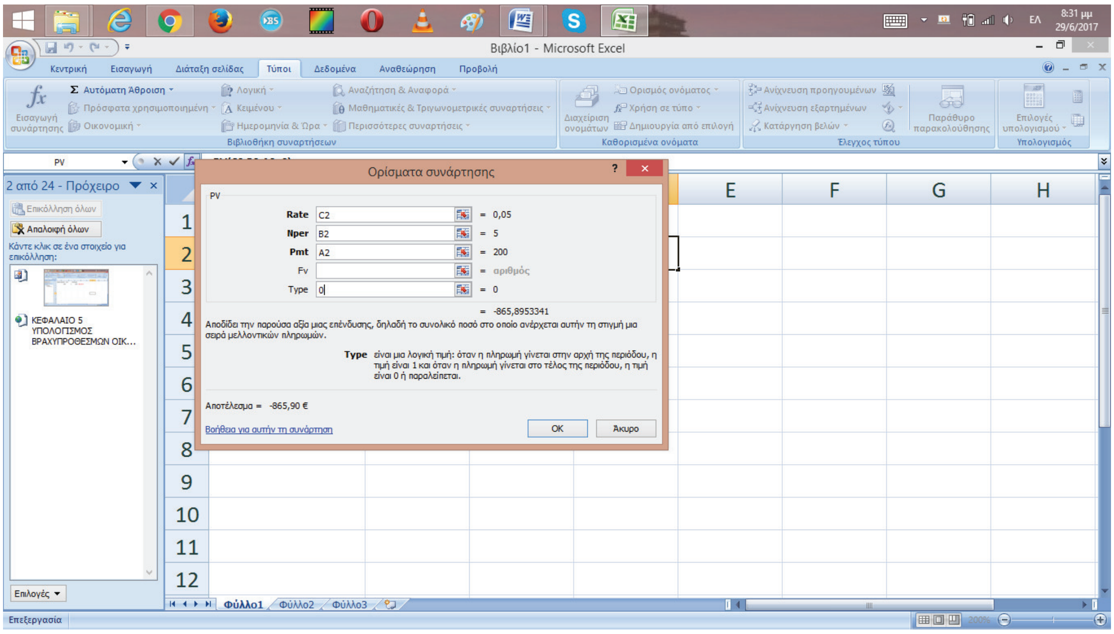
Εικόνα 8.2.1 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας.

Εισάγουμε στο κελί A2 τον σταθερό όρο της ράντας (π.χ. 200), στο κελί B2 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων (π.χ. 5) και στο κελί C2 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05).

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας στο κελί D2 θα γίνει στο Excel με την συνάρτηση PV.

Στο πεδίο Rate θα επιλέξουμε το κελί C2 στο πεδίο NPER το κελί B2, στο πεδίο Pmt θα επιλέξουμε το κελί A2 και στο πεδίο Type βάζουμε την τιμή 0 γιατί πρόκειται για ληξιπρόθεσμη ράντα.

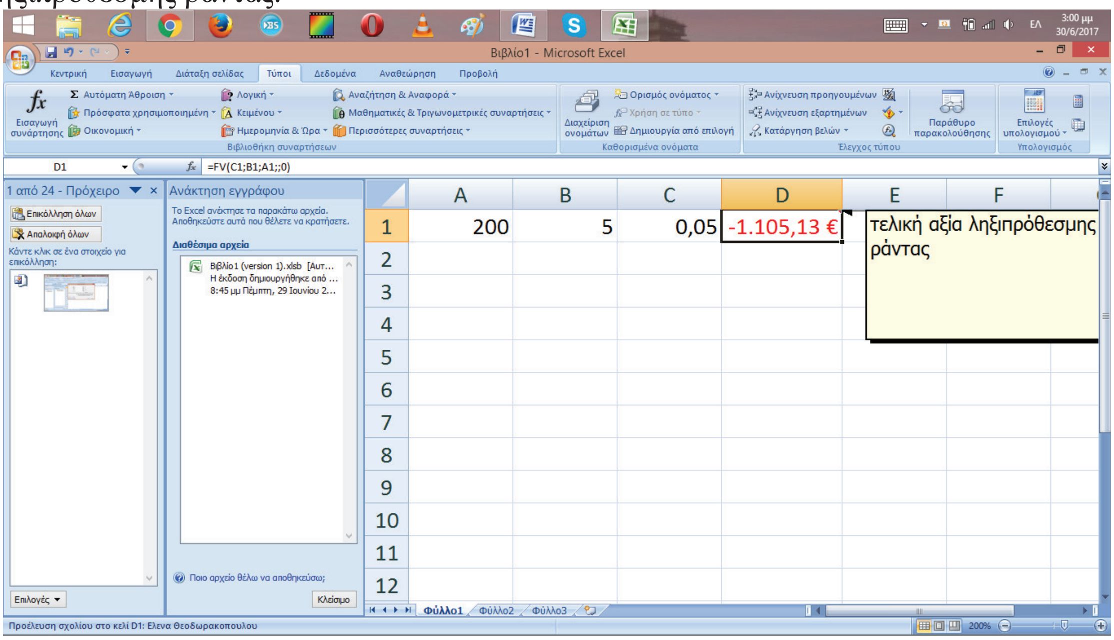
Το αποτέλεσμα φαίνεται στο κελί D2 και η τιμή του είναι αρνητική γιατί πρόκειται για κατάθεση χρημάτων.



Εικόνα 8.2.1.1 Ορίσματα της συνάρτησης PV για ληξιπρόθεσμη ράντα

8.2.2 Υπολογισμός της τελικής αξίας σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας

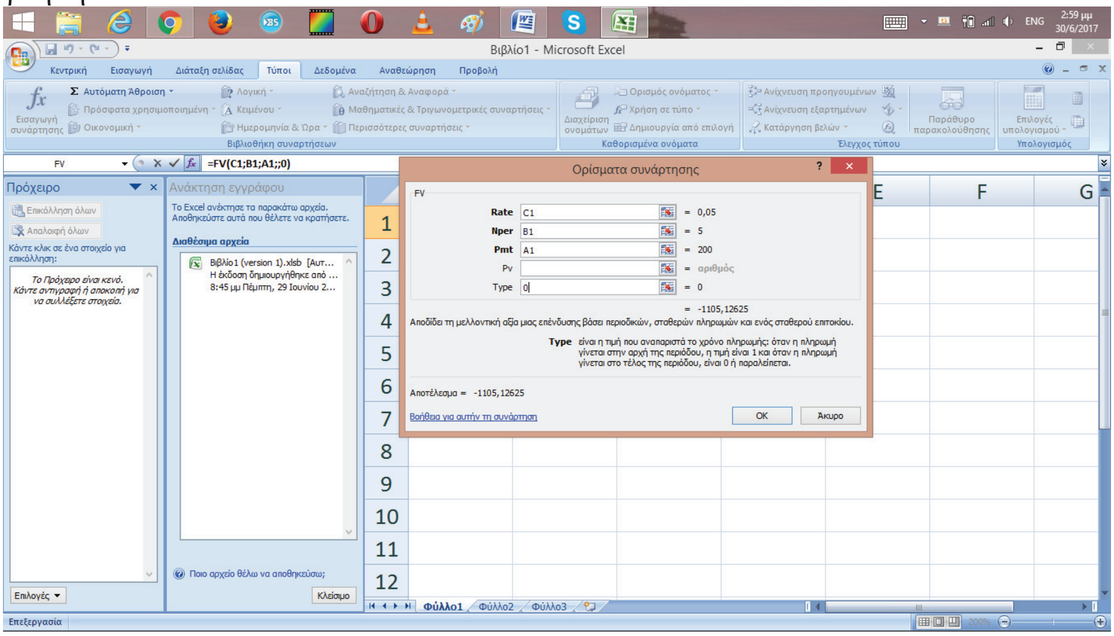
Στην Εικόνα 8.2.2 γίνεται ο υπολογισμός της τελικής αξίας σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας.



Εικόνα 8.2.2 τελική αξία σταθερής, άμεσης και ληξιπρόθεσμης ράντας

Εισάγουμε στο κελί A1 τον σταθερό όρο της ράντας (π.χ. 200), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων (π.χ. 5) και στο κελί C1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05).

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί D1 θα γίνει στο Excel με την συνάρτηση FV.



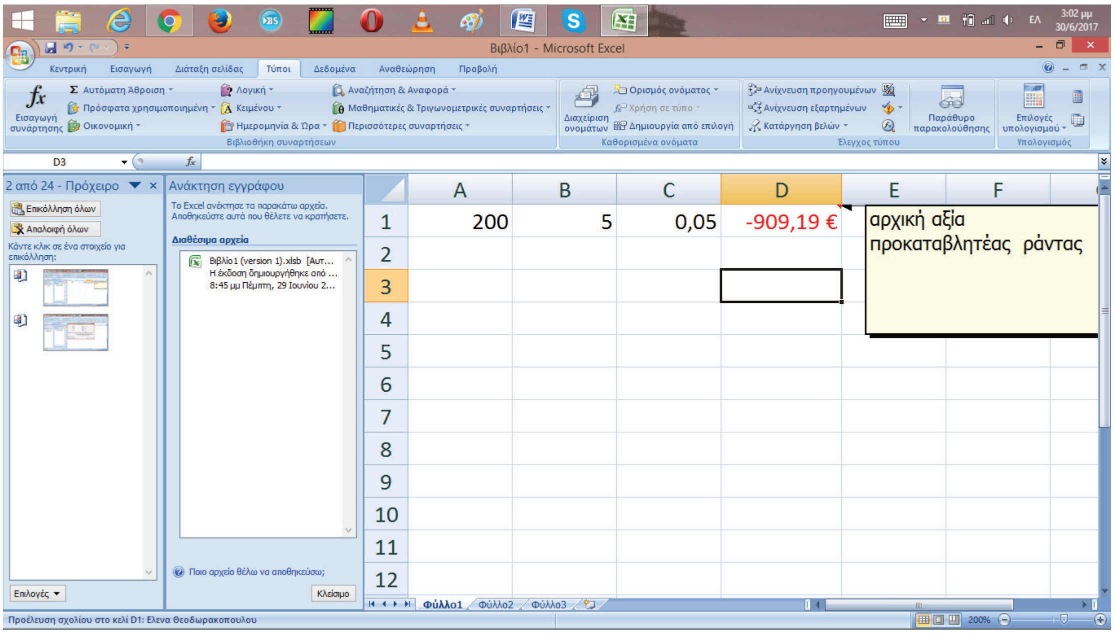
Εικόνα 8.2.2.1 Ορίσματα της συνάρτησης FV για ληξιπρόθεσμη ράντα

Στο πεδίο Rate θα επιλέξουμε το κελί C1 στο πεδίο NPER το κελί B1, στο πεδίο Pmt θα επιλέξουμε το κελί A1 και στο πεδίο Type βάζουμε την τιμή 0 γιατί πρόκειται για ληξιπρόθεσμη ράντα.

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο κελί D1 και η τιμή του είναι αρνητική γιατί πρόκειται για κατάθεση χρημάτων.

8.2.3 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και προκαταβλητέας ράντας

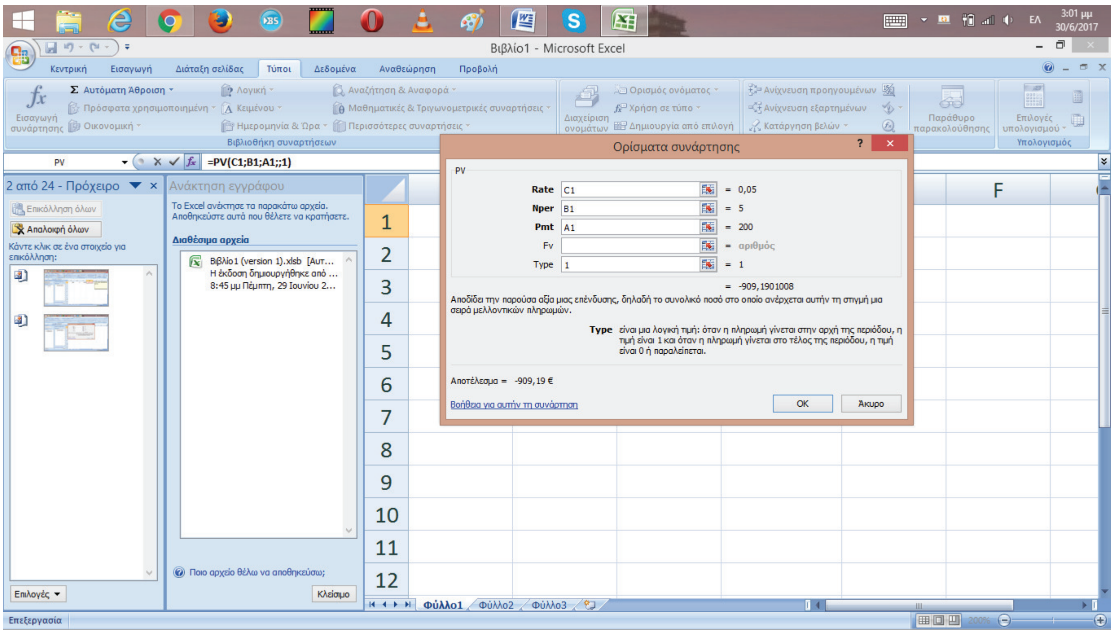
Στην Εικόνα 8.2.3 γίνεται ο υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και προκαταβλητέας ράντας.



Εικόνα 8.2.3 Υπολογισμός αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και προκαταβλητέας ράντας

Εισάγουμε στο κελί A1 τον σταθερό όρο της ράντας (π.χ. 200), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων (π.χ. 5) και στο κελί C1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05).

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας στο κελί D1 θα γίνει στο Excel με την συνάρτηση PV.



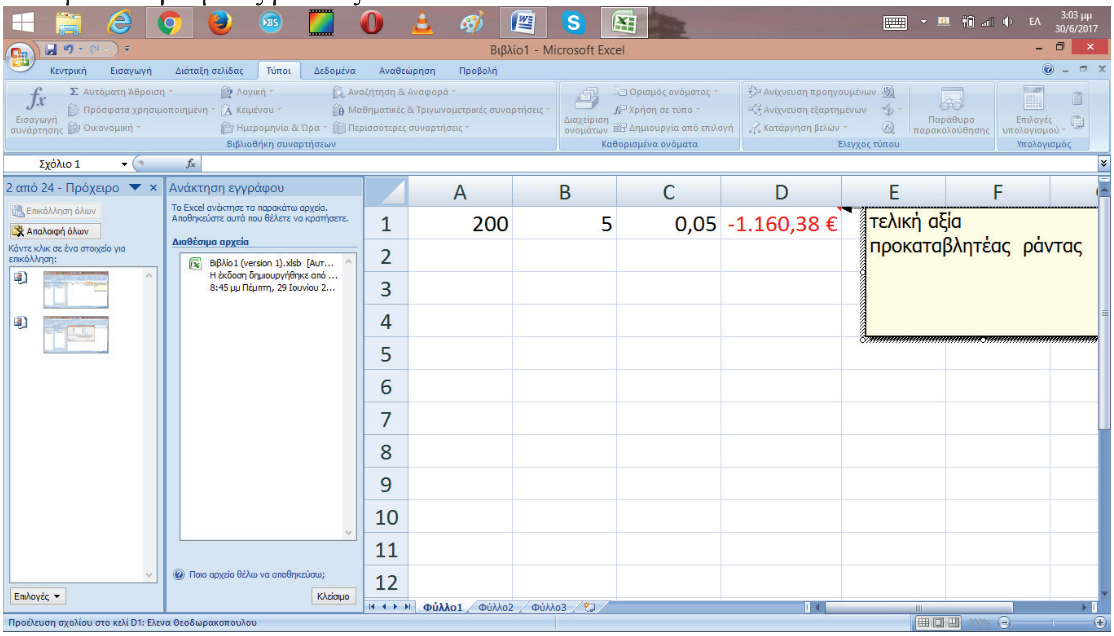
Εικόνα 8.2.3.1 Ορίσματα της συνάρτησης PV για προκαταβλητέα ράντα

Στο πεδίο Rate θα επιλέξουμε το κελί C1 στο πεδίο NPER το κελί B1, στο πεδίο Pmt θα επιλέξουμε το κελί A1 και στο πεδίο Type βάζουμε την τιμή 1 γιατί πρόκειται για προκαταβλητέα ράντα.

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο κελί D1 και η τιμή του είναι αρνητική γιατί πρόκειται για κατάθεση χρημάτων.

8.2.4 Υπολογισμός της τελικής αξίας σταθερής, άμεσης και προκαταβλητέας ράντας

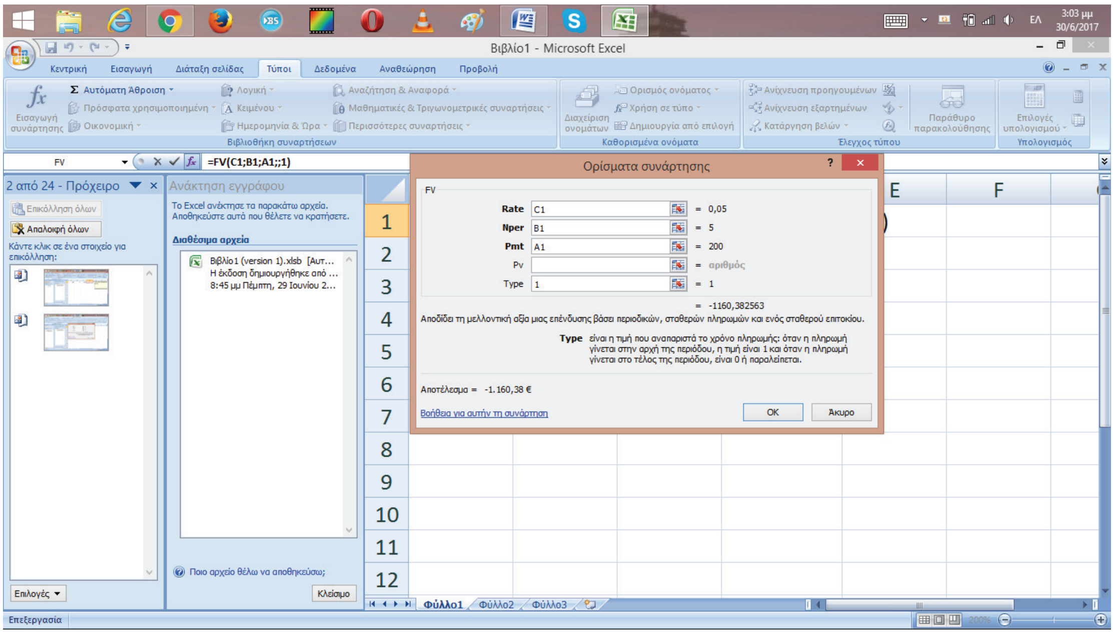
Στην Εικόνα 8.2.4 γίνεται ο υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και προκαταβλητέας ράντας.



Εικόνα 8.2.4 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, άμεσης και προκαταβλητέας ράντας

Εισάγουμε στο κελί A1 τον σταθερό όρο της ράντας (π.χ. 200), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων (π.χ. 5) και στο κελί C1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05).

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας στο κελί D1 θα γίνει στο Excel με την συνάρτηση FV.



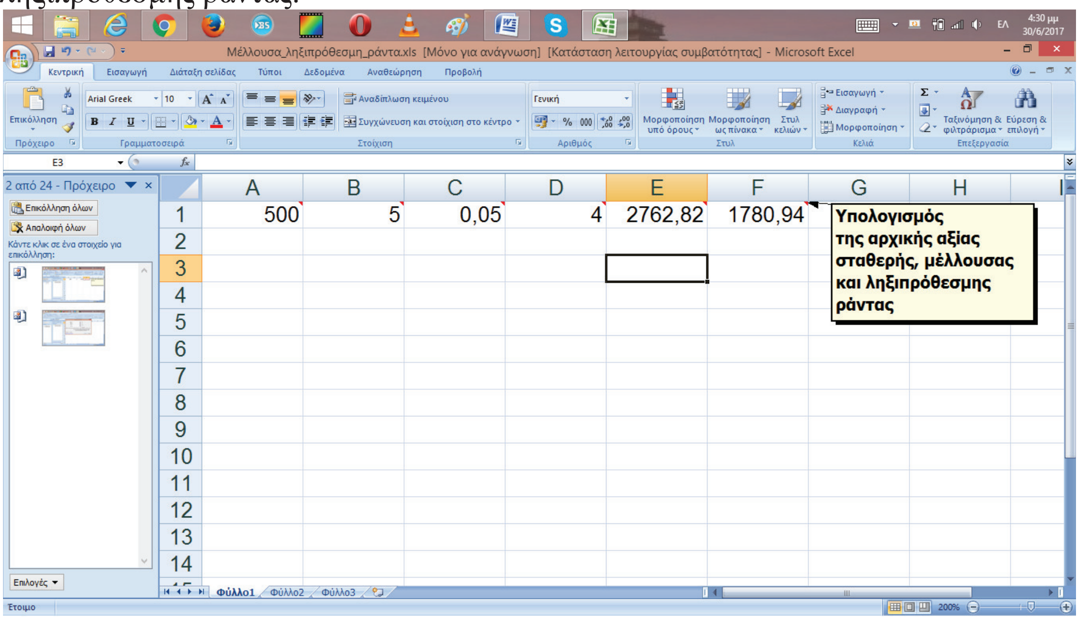
Εικόνα 8.2.4.1 Ορίσματα της συνάρτησης FV για προκαταβλητέα ράντα

Στο πεδίο Rate θα επιλέξουμε το κελί C1 στο πεδίο NPER το κελί B1, στο πεδίο Pmt θα επιλέξουμε το κελί A1 και στο πεδίο Type βάζουμε την τιμή 1 γιατί πρόκειται για προκαταβλητέα ράντα.

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο κελί D1 και η τιμή του είναι αρνητική γιατί πρόκειται για κατάθεση χρημάτων.

8.2.5 Υπολογισμός της αρχικής και τελικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και ληξιπρόθεσμης ράντας

Στην Εικόνα 8.2.5 γίνεται ο υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και ληξιπρόθεσμης ράντας.



Εικόνα 8.2.5 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και ληξιπρόθεσμης ράντας.

Εισάγουμε στο κελί A1 τον σταθερό όρο της ράντας (π.χ. 500), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων της ράντας που γίνονται καταθέσεις (π.χ. 5) στο κελί C1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05) και στο κελί D1 τον αριθμό των χρονικών περιόδων της μέλλουσας ράντας μέχρι την καταβολή του πρώτου όρου (π.χ. 4).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί E1 θα δούμε το αποτέλεσμα 2.762,82, που είναι η τελική αξία της σταθερής, μέλλουσας και ληξιπρόθεσμης ράντας η οποία έχει: σταθερό όρο 500 €, η καταβολή του πρώτου όρου έγινε μετά από 4 χρονικές περιόδους, ο αριθμός των χρονικών περιόδων που έγιναν καταβολές είναι 5 και το επιτόκιο είναι 5 %.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί E1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= A1 * \frac{(1 + C1)^{B1} - 1}{C1}$$

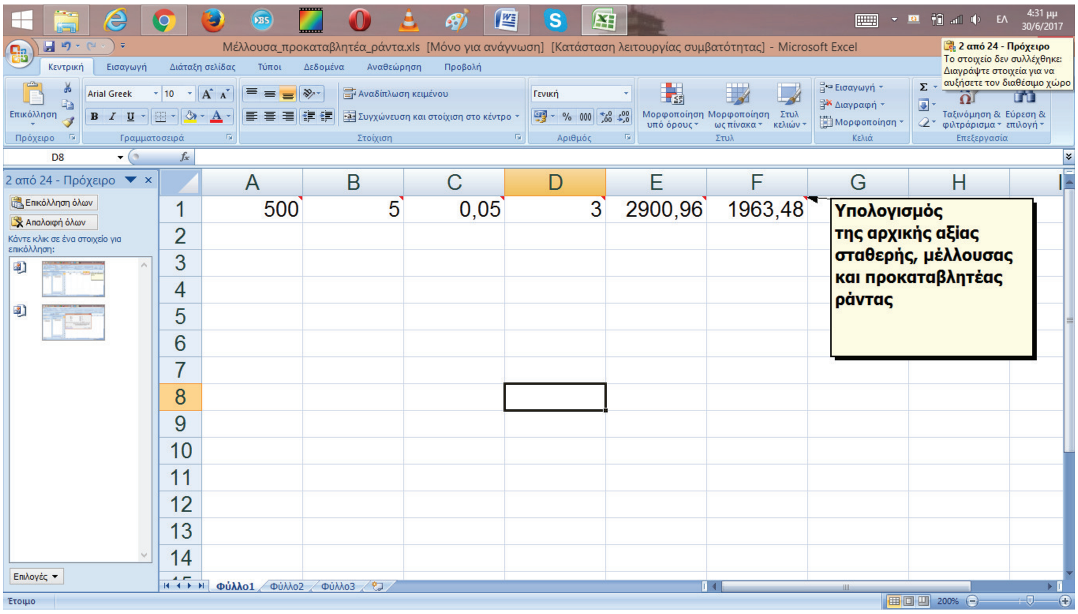
Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί F1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1.780.94, που είναι η αρχική αξία της σταθερής, μέλλουσας και ληξιπρόθεσμης ράντας με τα παραπάνω δεδομένα.

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας στο κελί F1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= \mathrm{A1} * \frac{1 - \frac{1}{1 + C1}^{\mathrm{B1}}}{\mathrm{C1}} * (1 + \mathrm{C1})^{-D1}$$

8.2.6 Υπολογισμός της αρχικής και τελικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και προκαταβλητέας ράντας

Στην Εικόνα 8.2.6 γίνεται ο υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και προκαταβλητέας ράντας.



Εικόνα 8.2.6 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, μέλλουσας και προκαταβλητέας ράντας.

Εισάγουμε στο κελί A1 τον σταθερό όρο της ράντας (π.χ. 500), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων της ράντας που γίνονται καταθέσεις (π.χ. 5) στο κελί C1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05) και στο κελί D1 τον αριθμό των χρονικών περιόδων της μέλλουσας ράντας μέχρι την καταβολή του πρώτου όρου (π.χ. 3).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί E1 θα δούμε το αποτέλεσμα 2.900,96, που είναι η τελική αξία της σταθερής, μέλλουσας και προκαταβλητέας ράντας η οποία έχει: σταθερό όρο 500 €, η καταβολή του πρώτου όρου έγινε μετά από 3 χρονικές περιόδους, ο αριθμός των χρονικών περιόδων που έγιναν καταβολές είναι 5 και το επιτόκιο είναι 5 %.

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας στο κελί E1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= A1 * \frac{(1 + C1)^{B1} - 1}{C1} * (1 + C1)$$

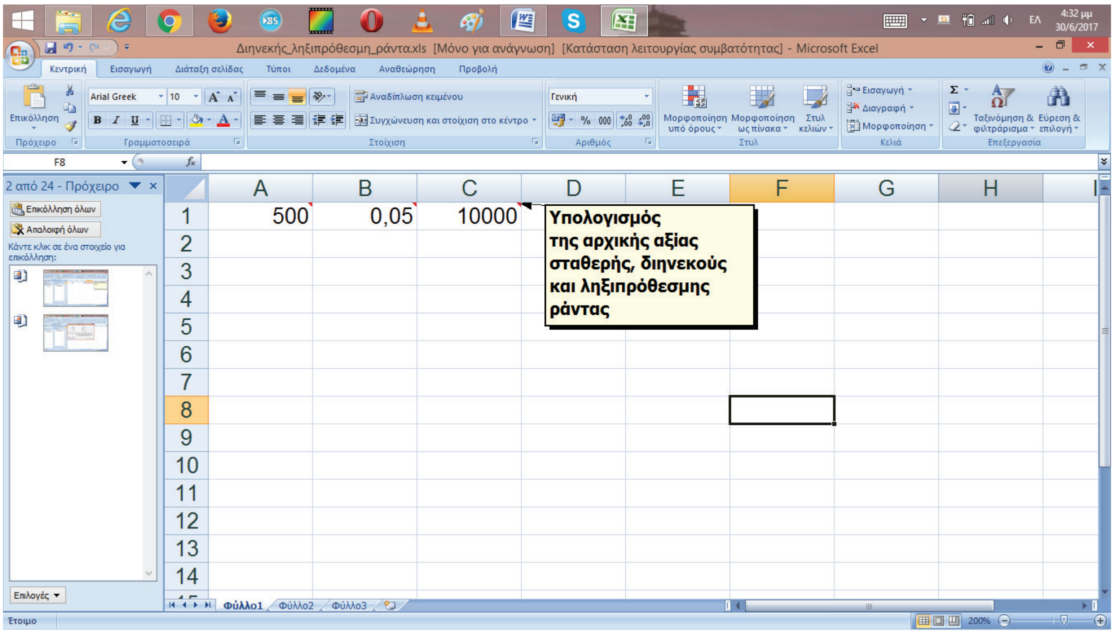
Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί F1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1.963.48, που είναι η αρχική αξία της σταθερής, μέλλουσας και προκαταβλητέας ράντας με τα παραπάνω δεδομένα.

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας στο κελί F1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= \mathrm{A1} * \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + C1}\right)^{\mathrm{B1}}}{\mathrm{C1}} * (1 + \mathrm{C1})^{-\mathrm{D1}+1}$$

8.2.7 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας

Στην Εικόνα 8.2.7 γίνεται ο υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας.



Εικόνα 8.2.7 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας

Εισάγουμε στο κελί A1 το σταθερό όρο της ράντας(π.χ. 500) και στο κελί B1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05).

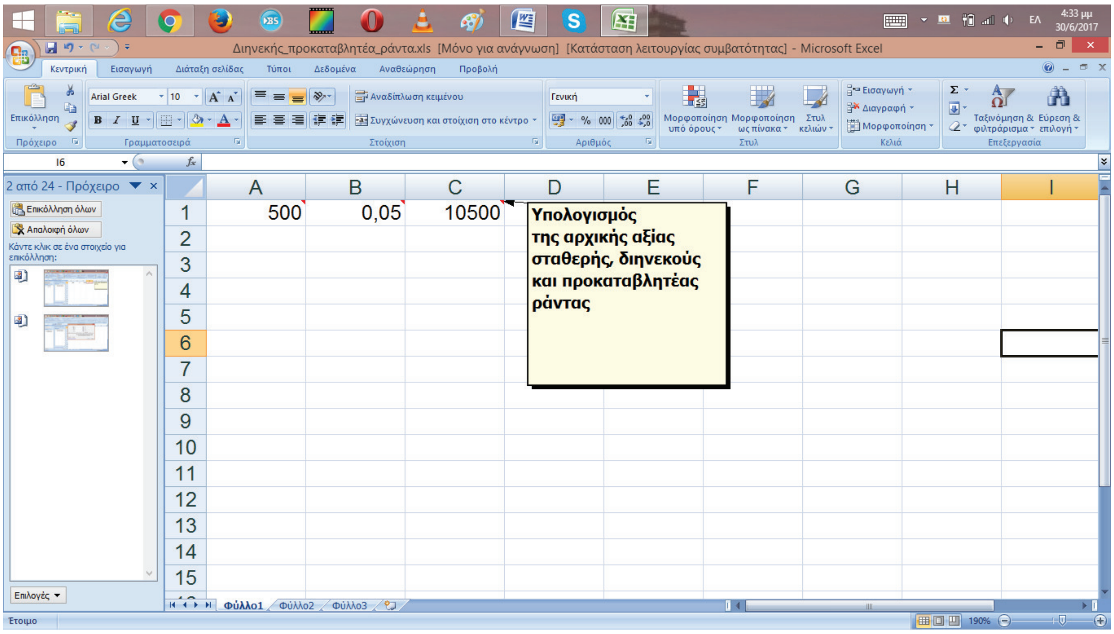
Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί C1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1.000, που είναι η αρχική αξία της σταθερής , διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας, η οποία έχει: σταθερό όρο 500€ και επιτόκιο 5%.

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας έγινε στο κελί C1 με χρήση του τύπου :

$$= \frac{A1}{B1}$$

8.2.8 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας

Στην Εικόνα 8.6 γίνεται ο υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και προκαταβλητέας ράντας.



Εικόνα 8.2.8 Υπολογισμός της αρχικής αξίας σταθερής, διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας

Εισάγουμε στο κελί A1 το σταθερό όρο της ράντας(π.χ. 500) και στο κελί B1 το ετήσιο επιτόκιο (π.χ. 0,05).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί C1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1.500, που είναι η αρχική αξία της σταθερής , διηνεκούς και προκαταβλητέας ράντας, η οποία έχει: σταθερό όρο 500€ και επιτόκιο 5%.

Ο υπολογισμός της αρχικής αξίας στο κελί C1 έγινε με χρήση του τύπου :

$$= \frac{A1}{B1} * (1 + B1)$$

8.3 Υπολογισμός πράξεων δανείων με χρήση του προγράμματος Excel

8.3.1 Υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιο), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου

Στην Εικόνα 8.3.1 γίνεται ο υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιο), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με την μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου.

Υπολογισμός δόσης

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο του δανείου (π.χ. 20.000), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων του δανείου (π.χ. 5) και στο κελί C1 το επιτόκιο του δανείου (π.χ. 0,05).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί D1 θα δούμε το αποτέλεσμα 4.619,5, που είναι η δόση του δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου.

Ο υπολογισμός της δόσης στο κελί D1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= A1 \frac{C1}{(1 + C1)^{B1} - 1} + A1 * C1$$

Υπολογισμός χρεολυσίου

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο του δανείου (π.χ. 20.000), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων του δανείου (π.χ. 5) και στο κελί C1 το επιτόκιο του δανείου (π.χ. 0,05).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί E1 θα δούμε το αποτέλεσμα 1.000, που είναι το χρεολύσιο κάθε δόσης του δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου.

Ο υπολογισμός της δόσης στο κελί D1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= A1 \frac{C1}{(1 + C1)^{B1} - 1}$$

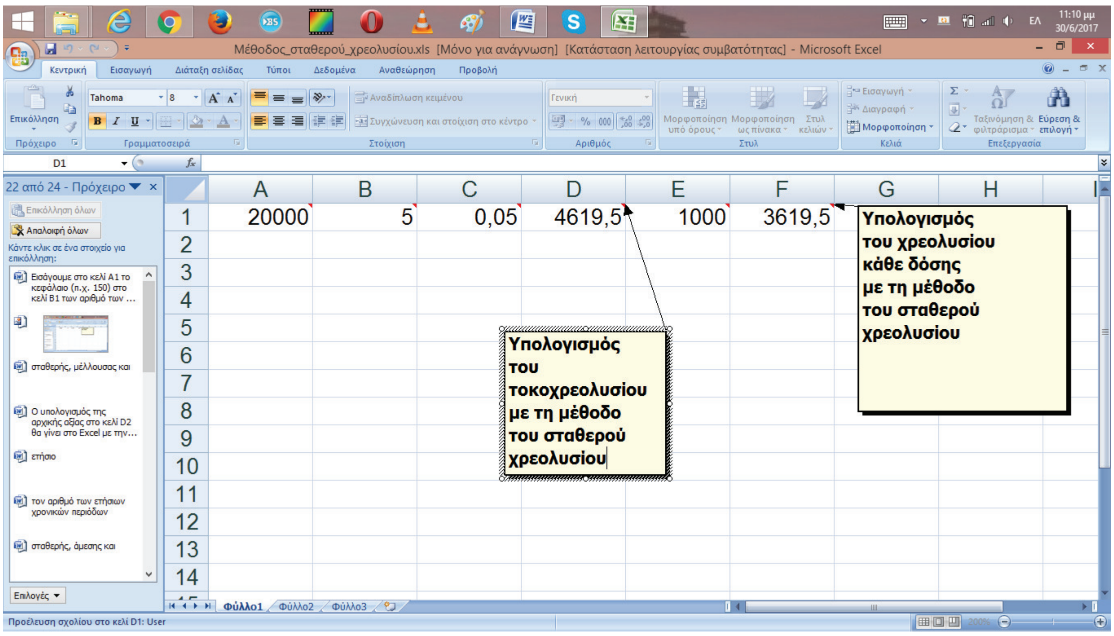
Υπολογισμός τόκου

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο του δανείου (π.χ. 20.000), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων του δανείου (π.χ. 5) και στο κελί C1 το επιτόκιο του δανείου (π.χ. 0,05).

Μετακινώντας το δείκτη του ποντικιού μας στο κελί F1 θα δούμε το αποτέλεσμα 3.6109.5, που είναι ο τόκος του δανείου με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου.

Ο υπολογισμός της δόσης στο κελί F1 έγινε στο Excel με χρήση του τύπου:

$$= A1 * C1$$



Εικόνα 8.3.1 Υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιο), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με την μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου

8.3.2 Υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιο), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με την μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου

Στην Εικόνα 8.3.2 γίνεται ο υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιο), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου.

Υπολογισμός δόσης

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο του δανείου (π.χ. 20.000), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων του δανείου (π.χ. 5) και στο κελί C1 το επιτόκιο του δανείου (π.χ. 0,05).

Εισάγουμε στο κελί D1 τη συνάρτηση

$$= PMT(rate; periods; principal; 0)$$

Στο πεδίο *rate* επιλέγουμε το κελί C1, στο πεδίο $periods$ επιλέγουμε το κελί B1 και στο πεδίο $principal$ επιλέγουμε το κελί A1. Πατώντας Enter έχουμε στο κελί D1 τη δόση του δανείου 4.619,50 με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου.

Υπολογισμός τόκου

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο του δανείου (π.χ. 20.000), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων του δανείου (π.χ. 5) και στο κελί C1 το επιτόκιο του δανείου (π.χ. 0,05).

Εισάγουμε στο κελί E1 τη συνάρτηση

$$= IPMT(rate; period; periods; principal; 0)$$

Στο πεδίο *rate* επιλέγουμε το κελί C1, στο πεδίο $period$ βάζουμε την τιμή 1 γιατί θέλουμε να υπολογίσουμε τη δόση του 1^{ου} έτους, στο πεδίο $periods$ επιλέγουμε το κελί B1 και στο πεδίο $principal$ επιλέγουμε το κελί A1. Πατώντας Enter έχουμε στο κελί E1 τον τόκου του 1^{ου} έτους του δανείου 10000 με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου.

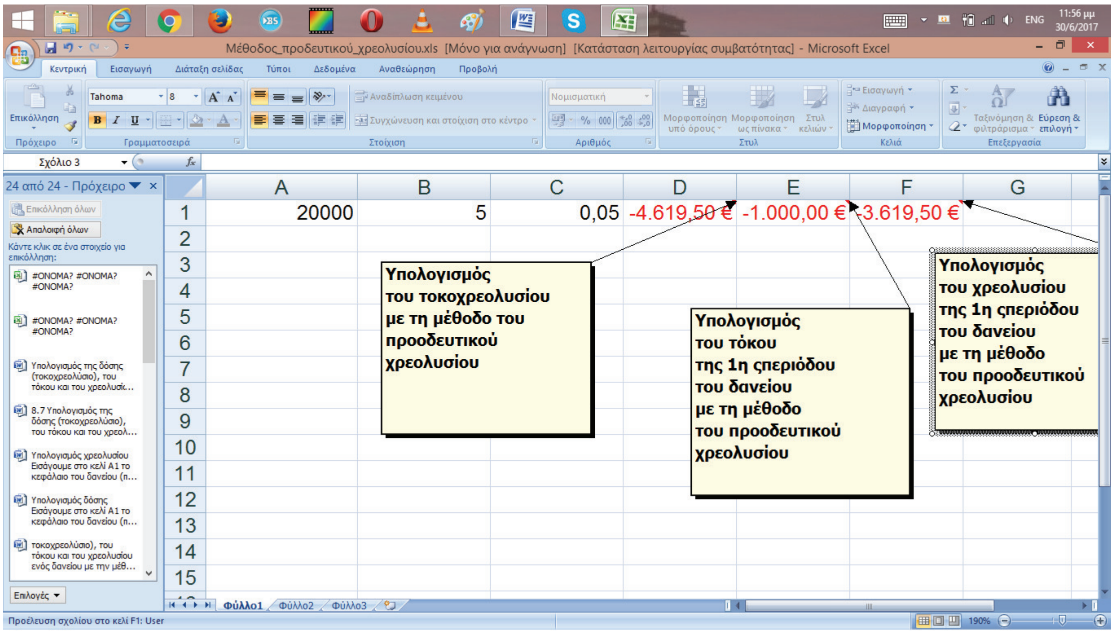
Υπολογισμός χρεολυσίου

Εισάγουμε στο κελί A1 το κεφάλαιο του δανείου (π.χ. 20.000), στο κελί B1 τον αριθμό των ετήσιων χρονικών περιόδων του δανείου (π.χ. 5) και στο κελί C1 το επιτόκιο του δανείου (π.χ. 0,05).

Εισάγουμε στο κελί F1 τη συνάρτηση

$$= PPMT(rate; period; periods; principal; 0)$$

Στο πεδίο *rate* επιλέγουμε το κελί C1, στο πεδίο $period$ βάζουμε την τιμή 1 γιατί θέλουμε να υπολογίσουμε το χρεολύσιο του 1^{ου} έτους, στο πεδίο $periods$ επιλέγουμε το κελί B1 και στο πεδίο $principal$ επιλέγουμε το κελί A1. Πατώντας Enter έχουμε στο κελί F1 το χρεολύσιο του δανείου 3.619,50 με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου.



Εικόνα 8.3.2 Υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιο), του τόκου και του χρεολυσίου ενός δανείου με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η συμβολή του Excel στην επίλυση βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων Οικονομικών πράξεων είναι αδιαμφισβήτητα εξέχουσα, καθώς με τη χρήση του προγράμματος αυτού μειώνεται κατά πολύ ο χρόνος υπολογισμού των επιθυμητών πράξεων και διευκολύνονται έτσι οι συναλλαγές.

Η δυνατότητα χρήσης τύπων είναι το χαρακτηριστικό εκείνο, που σε μεγάλο βαθμό καθιστά το Excel ένα πανίσχυρο εργαλείο για την επίλυση βραχυπρόθεσμων οικονομικών πράξεων. Στην εφαρμογή των μακροπρόθεσμων οικονομικών πράξεων όμως υπάρχει η δυνατότητα χρήσης έτοιμων τύπων του προγράμματος δηλαδή συναρτήσεων, οι οποίες αυξάνουν περισσότερο την ευχρηστία και την αξία του. Έτσι έχουμε στα χέρια μας ένα σημαντικό βοήθημα στον καθημερινό ή επαγγελματικό υπολογισμό πράξεων όπως πληρωμή ραντών, μηνιαίας δόσης και τόκου δανείων, υπολογισμός τόκου καταθέσεων, υπολογισμός εξόδων συναλλαγματικής κ.α.

Η σπουδαιότητα του Excel αναγνωρίζεται σε ένα εύρος δραστηριοτήτων και για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται στις περισσότερες Οικονομικές Μονάδες ως ένα εργαλείο επίλυσης πολλαπλών πράξεων και δυνατοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

❖ Αποστολόπουλος Θ. (2003). Οικονομικά Μαθηματικά και Στοιχεία Τραπεζικών Εργασιών. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική.
Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο:
www.repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5070/1/02_chapter_5.pdf

(τελευταία πρόσβαση στις 26/08/2017).

❖ Αργυροπούλου Φ. (2013-2014) Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά Περιληπτικές Σημειώσεις Τ.Ε.Ι. Πελοποννήσου Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων και Οργανισμών.

Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο:

http://nestor.teipel.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/7671/%CE%A7%CE%A1%CE%97%CE%9C.%20%CE%9C%CE%91%CE%98.%20%CE%A0%CE%95%CE%A1%CE%99%CE%9B%CE%97%CE%A0%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%95%CE%A3%20%CE%A3%CE%97%CE%9C%CE%95%CE%99%CE%A9%CE%A3%CE%95%CE%99%CE%A3.pdf?sequence=1

(τελευταία πρόσβαση στις 12/08/2017).

❖ Γεωργίου Δ. Κούγιας Γ. Χρηματο-οικονομικά Μαθηματικά, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα, 2004.

❖ Δασίλας Α. (2012-2013) Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά Τ.Ε.Ι. Σερρών Τμήμα Λογιστικής.
Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο:

http://accounting.teicm.gr/userfiles/files/%CE%A7%CE%A1%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%9F%CE%9F%CE%99%CE%9A%CE%9F%CE%9D%CE%9F%CE%9C%CE%99%CE%9A%CE%91%20%CE%9C%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%91.pdf

(τελευταία πρόσβαση στις 12/08/2017).

❖ Καφούσιας Δ. (2013) Χρηματοοικονομική Διοίκηση και Πολιτική.

❖ Πολυχρονιάδης Μπ. (2010) Επιστρέψαμε στην εποχή του γραμματίου Κυριακάτικη Ελευθεροτυπία.
Διαθέσιμο στον διαδικτυακό τόπο:
http://www.enet.gr/?i=news.el.article&id=220985

(τελευταία πρόσβαση στις 21/08/2017).

Χουβαρδάς Β. (1998) Οικονομικά Μαθηματικά, Μακεδονικές Εκδόσεις, (Δεύτερη Έκδοση).