ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

# ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

## Ανάλυση της Θεωρίας Παιγνίων και επίλυση των Παιγνίων Μηδενικού Αθροίσματος με τη χρήση του λογισμικού πακέτου Matlab

Εξαρχόπουλος Ξενοφών ΑΜ:1379
Τσατούχας Παναγιώτης ΑΜ:1597

**Επιβλέπων καθηγητής: Ασημακόπουλος Γεώργιος**

Αντίρριο Ιούνιος 2019

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

Αντίρριο, Ημερομηνία

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Ονοματεπώνυμο, Υπογραφή
2. Ονοματεπώνυμο, Υπογραφή
3. Ονοματεπώνυμο, Υπογραφή

# Ευχαριστίες

Το τέλος της παρούσας πτυχιακής εργασίας σηματοδοτεί και το τέλος των προπτυχιακών μας σπουδών. Στο αυτό σημείο αισθανόμαστε την ανάγκη να απευθύνουμε ευχαριστίες στα άτομα που μας βοήθησαν και χωρίς τη βοήθειά τους πιθανόν να μην ήταν δυνατή η εκπόνησή της.

Καταρχάς, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τον καθηγητή μας κ. Ασημακόπουλο για την επίβλεψη της εργασίας, τις πολύτιμες συμβουλές του και την συμπαράστασή του ώστε να ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία.

Κλείνοντας, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε από τα βάθη της καρδιάς μας τις οικογένειές μας που χωρίς την ψυχική και υλική βοήθειά τους και την αμέριστη συμπαράσταση τους όποτε την χρειαζόμασταν, δε θα ήταν δυνατό να ολοκληρώσουμε τις προπτυχιακές μας σπουδές.

## Περιεχόμενα

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Η ‘‘Θεωρία Παιγνίων’’ (Game Theory) ανήκει στους κλάδους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που γνώρισαν την ανάπτυξή τους κυρίως μετά το Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο και που ως αντικείμενό τους έχουν την ανάλυση διαφόρων ‘‘δυνατοτήτων αποφάσεων’’ και την αξιολόγησή τους σύμφωνα με κάποιο κριτήρ ιο. Τέτοιοι κλάδοι, για παράδειγμα, είναι ο Μαθηματικός Προγραμματισμός (γραμμικός, μη γραμμικός, δυναμικός, κ.λπ.), η Στατιστική Θεωρία Αποφάσεων, η Πολυκριτήρια Ανάλυση, κ.ά. Αυτού του είδους τα μαθηματικά γεννήθηκαν από τις ανάγκες που προκάλεσε η εμφάνιση των Επιστημών Οργάνωσης της Παραγωγής και Dιοίκησης την ίδια περίοδο καθώς και από τις ανάγκες ανάπτυξης ποσοτικών μεθόδων ανάλυσης σε πιο παραδοσιακές επιστήμες (π.χ. Οικονομικά, Πολιτικές Επιστήμες). Η ωρίμανση αυτών των περιοχών των εφαρμοσμένων μαθηματικών οδήγησε σε ευρύτατες εφαρμογές στα θεωρητικά και εφαρμοσμένα οικονομικά, στη διοίκηση επιχειρήσεων, στην οργάνωση και διαχείριση δικτύων ανεφοδιασμού, μεταφορών και επικοινωνιών, στις πολιτικές επιστήμες, στη στρατηγική ‘‘τέχνη’’. Εφαρμογές έχουμε και σε πιο τεχνολογικές περιοχές, όπως στην επεξεργασία σήματος και εικόνας, στη χημική βιομηχανία, κ.ά. ή και σε καθαρά θεωρητικές περιοχές, όπως π.χ. στη θεωρητική βιολογία, στη θεωρητική πληροφορική, κ.ά. Συγγενέστερη στη θεωρία παιγνίων, για κάποιον εξοικειωμένο με τα μαθηματικά, εμφανίζεται αρχικά η περιοχή του μαθηματικού προγραμματισμού. Γενικά, το πρόβλημα που εξετάζει ο μαθηματικός προγραμματισμός είναι η μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) κάποιας συνάρτησης (π.χ. το κέρδος ή το κόστος) κάτω από περιορισμούς. Αυτός που μεγιστοποιεί (ή ελαχιστοποιεί) την συνάρτηση λέγεται ‘‘ελεγκτής’’ και οι μεταβλητές, που τις τιμές τους αυτός επιλέγει ώστε να πετύχει το στόχο του, λέγονται ‘‘μεταβλητές ελέγχου’’. Ανάλογα με το είδος της συνάρτησης και το είδος των περιορισμών έχουμε διάφορες εκδοχές μαθηματικού προγραμματισμού. Στη θεωρία παιγνίων το πρόβλημα είναι ανάλογο, όμως τώρα έχουμε τουλάχιστον δύο διαφορετικούς ελεγκτές, οι οποίοι στη θεωρία παιγνίων ονομάζονται ‘‘παίκτες’’. Τώρα, η πληρωμή (ή το κόστος) κάθε παίκτη δίνεται από διαφορετική συνάρτηση (μία για κάθε παίκτη), η οποία όμως εξαρτάται από πολλές μεταβλητές ελέγχου. Ο πρώτος παίκτης ελέγχει την πρώτη μεταβλητή, ο δεύτερος τη δεύτερη, κ.ο.κ. Επομένως, η πληρωμή κάθε παίκτη εξαρτάται όχι μόνο από τις δικές του αποφάσεις, αλλά και από τις αποφάσεις όλων των υπολοίπων. Έτσι, το όφελος ενός παίκτη μπορεί να είναι σε κάποιο βαθμό ή και ολοκληρωτικά σε σύγκρουση με το όφελος κάποιου άλλου παίκτη. Ας σκεφτούμε ένα πολύ απλό παράδειγμα: Δύο ανταγωνίστριες εταιρείες, η *A* και η *B*, παράγουν ένα όμοιο προϊόν, του οποίου η τιμή στην αγορά διαμορφώνεται από τη σχέση προσφοράς - ζήτησης. Ας πούμε ότι μεταβλητή απόφασης για την κάθε εταιρία είναι τα κομμάτια προϊόντος που θα παράξει, ενώ το κέρδος της θα είναι το γινόμενο των κομματιών που πούλησε επί το κέρδος ανά κομμάτι. Αλλά το κέρδος ανά κομμάτι εξαρτάται από την τιμή πώλησης, η οποία εξαρτάται από τα κομμάτια του προϊόντος που διοχετεύθηκαν στην αγορά. Άρα το κέρδος της εταιρίας *A* είναι συνάρτηση και των δύο μεταβλητών απόφασης (κομμάτια που παρήγαγε η *A* αλλά και κομμάτια που παρήγαγε η *B*). Σαν αποτέλεσμα αυτής της αλληλεπίδρασης οδηγούμαστε σε μαθηματικά ‘‘παράδοξα’’. Αποφάσεις που μοιάζουν λογικές μπορεί να οδηγήσουν σε καταστροφή έναν παίκτη. Η ίδια η έννοια της ‘‘λύσης’’ του προβλήματος μπορεί να ποικίλει (κάτι ασυνήθιστο στα μαθηματικά), μπορεί οι διάφορες λύσεις να είναι αντιφατικές μεταξύ τους και ανάλογα με την πραγματικότητα που απεικονίζει το μοντέλο, άλλη ‘‘λύση’’ να γίνεται δεκτή και άλλη να απορρίπτεται. Συχνά οι λύσεις μας δεν είναι ικανοποιητικές από την άποψη της θεωρίας, αφού τους λείπουν ιδιότητες που θα περιμέναμε ‘‘φυσιολογικά’’ να είχαν. Η Θεωρία των Παιγνίων προσπαθεί λοιπόν να αντιμετωπίσει με μαθηματικές μεθόδους **μοντέλα σύγκρουσης και συνεργασίας**. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιεί έννοιες του είδους : πλήρες σχέδιο δράσης (στρατηγική), στρατηγική ισορροπία, επικοινωνία πριν την επιλογή στρατηγικής, απειλή και ανταπόδοση, εμπιστοσύνη και αυτοδέσμευση. Συχνά οι λύσεις που προτείνονται έχουν το μειονέκτημα να απαιτούν από τους παίκτες να είναι με κάποιο τρόπο ‘‘λογικοί’’ και/ή να γνωρίζουν τις εναλλακτικές λύσεις που έχουν στη διάθεσή τους και/ή το πως εκτιμούν οι αντίπαλοι και/ή οι συνεργάτες τους τα κέρδη ή τις ζημιές από το παιχνίδι.

## 1.1 Ιστορική Αναδρομή

Η πρώτη γνωστή αναφορά στη Θεωρία Παιγνίων έγινε το 1838 από τον Γάλλο φιλόσοφο και οικονομολόγο Augustin Cournot ο οποίος ανέλυσε τις ολιγοπωλιακές συμπεριφορές ανταγωνιστικών επιχειρήσεων με παραπλήσιο τρόπο με τις σύγχρονες μεθόδους της Θεωρίας Παιγνίων (Cournot, 1838). Η ουσιαστική ανάπτυξη της

Θεωρίας Παιγνίων ξεκίνησε το 1920 από τον μαθηματικό Emil Borel, αλλά η αληθινή γέννησή τους και η ονομασία τους αποδίδεται στον Ούγγρο φυσικό και μαθηματικό, John von Neumann, ο οποίος το 1928 απέδειξε ότι τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος έχουν πάντα λύση, καθώς και ότι η απώλεια ενός παίκτη είναι ίση με το κέρδος του δευτέρου. Υποστήριξε δε, ότι ο κάθε παίκτης, όντας λογικός και εγωιστής, θα επιλέξει να ακολουθήσει εκείνη τη στρατηγική που έχει το μεγαλύτερο όφελος. Καθοριστικής σημασίας γεγονός στην εξέλιξη της θεωρίας παιγνίων ήταν η δημοσίευση του βιβλίου “Theory of Games & Economic Behavior”, το 1944, από τους John von Neumann και Oskar Morgenstern (von Neuman, 1944). Στις αρχές της δεκαετίας του 1950 ο Αμερικανός μαθηματικός οικονομολόγος John Nash εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας για παιχνίδια μη-μηδενικού αθροίσματος, γνωστή και ως ισορροπία Nash (Nash, 1950). Πρόκειται για μια κατάσταση, από την οποία κανένας παίκτης ενός παιγνίου δεν έχει συμφέρει να απομακρυνθεί, δεδομένων των επιλογών των αντιπάλων.

Τις επόμενες δεκαετίες η Θεωρία Παιγνίων γνώρισε αλματώδη ανάπτυξη και άρχισε να εφαρμόζεται σε πολλούς τομείς, ανάμεσά τους και στις πολιτικές επιστήμες, ενώ πληθώρα ερευνητικών πειραμάτων ξεκίνησαν προσπαθώντας να αναλύσουν και να δώσουν λύση υπό το πρίσμα της Θεωρίας Παιγνίων σε όλο και περισσότερα προβλήματα. Το 1965 ο Reinhard Selten μελέτησε τα δυναμικά παίγνια (παίγνια που εξελίσσονται στον χρόνο) εισάγοντας την έννοια της ισορροπίας στα υποπαίγνια (subgame perfect equilibrium) και της ισορροπίας τρεμάμενου χεριού (trembling hand perfect equilibrium), ενώ το 1975 ο John Harsanyi γενίκευσε τις ιδέες του John Nash και μελέτησε παίγνια μη-πλήρους πληροφόρησης (Osborne, 2004). Για τις εργασίες τους οι τρεις αυτοί επιστήμονες τιμήθηκαν το 1994, με το βραβείο Nobel της Σουηδικής Ακαδημίας Επιστημών. Τη δεκαετία του 1970 η Θεωρία Παιγνίων εφαρμόστηκε και στον κλάδο της βιολογίας, ως αποτέλεσμα της εργασίας του John Maynard Smith που σχετιζόταν με την έννοια της “εξελικτικά σταθερής στρατηγικής” (evolutionary stable strategy) (Smith, 1974).

Στα τέλη του 1990 η θεωρία παιγνίων εφαρμόστηκε σε ακόμα ευρύτερο φάσμα αντικειμένων, όπως για παράδειγμα στον σχεδιασμό δημοπρασιών. Με το θέμα αυτό ασχολήθηκαν διάφοροι επιστήμονες για την κατανομή δικαιωμάτων χρήσης του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος στη βιομηχανία των κινητών τηλεπικοινωνιών. Το 2005 ο Αμερικανός επιστήμονας Thomas Schelling και ο Γερμανός θεωρητικός παιγνίων Robert Aumann κέρδισαν το βραβείο Νόμπελ για τις Οικονομικές επιστήμες “επειδή εμπλούτισαν την αντίληψη μας σχετικά με τις έννοιες του ανταγωνισμού και της συνεργασίας μέσω της παιγνιοθεωρητικής ανάλυσης”. Τους ακολούθησαν το 2007 οι Roger Myerson, Leonid Hurwicz και Eric Maskin για τη θεμελίωση της θεωρίας σχεδιασμού μηχανισμών.

## 1.2 Πεδία εφαρμογής Θεωρίας Παιγνίων

Κάθε κατάσταση που περιγράφει μία ανταγωνιστική δραστηριότητα στην οποία οι παίκτες ανταγωνίζονται μεταξύ τους σύμφωνα με ένα σύνολο από κανόνες, αποτελεί δυνητικά μία εφαρμογή της Θεωρίας Παιγνίων. Η Θεωρία Παιγνίων εξετάζει τα προβλήματα λήψης αποφάσεων στα οποία δύο οι περισσότεροι λήπτες αποφάσεων έχουν να διαλέξουν ανάμεσα σε εναλλακτικές στρατηγικές προκειμένου να μεγιστοποιήσουν το όφελός τους, έχουν δηλαδή ορθολογική συμπεριφορά (Paravantis, 2016). Επομένως, είναι προφανές ότι η Θεωρία Παιγνίων καλύπτει ένα πολύ ευρύ φάσμα εφαρμογών. Οι κυριότερες αυτές εφαρμογές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρία βασικά πεδία: την καθημερινότητα, τις επιχειρήσεις και την οικονομία, και την πολιτική σκηνή και τις διεθνείς σχέσεις (Dixit, 2008). Καταρχάς, τα Παίγνια αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο ανάλυσης των διαπροσωπικών σχέσεων στην καθημερινότητα. Οι καθημερινές ανθρώπινες αλληλεπιδράσεις μπορούν να αναλυθούν με τη βοήθεια της Θεωρίας Παιγνίων (Stevens, 2008· Miller, 2003), με πρότυπο τέσσερα βασικά Παίγνια (παίγνιο συντονισμού, παίγνιο της κότας, μάχη των φύλων, δίλημμα των φιλακισμένων), μερικά από τα οποία θα παρουσιαστούν και στη συνέχεια. Η οικονομία και οι επιχειρήσεις αποτελούν ένα από τα πρώτα πεδία εφαρμογής της Θεωρίας Παιγνίων (von Neuman, 1944), γεγονός που αποδεικνύεται από τα πέντε βραβεία Νόμπελ στα οικονομικά που έχουν απονεμηθεί. Εκτός από την κλασική ανάλυση των ολιγοπωλιακών αγορών και του ανταγωνισμού στις αγορές, όπου οι εταιρίες παρουσιάζουν ανταγωνιστική συμπεριφορά προκειμένου να αυξήσουν τα μερίδιά τους στην αγορά, επομένως και το κέρδους τους, η Θεωρία Παιγνίων μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση του ανοίγματος νέων αγορών (Brandenburger, 1996), όπου κατά το άνοιγμα της αγοράς είναι στο συμφέρον των εταιριών αντί να ανταγωνιστούν να συνεργαστούν (ο όρος που χρησιμοποιείται σε αυτήν την περίπτωση είναι co-opetition). Οι εφαρμογές στον τομέα των επιχειρήσεων επεκτείνονται και σε ατομικό επίπεδο στελεχών, με εξέταση στρατηγικών επαγγελματικής ανέλιξης των στελεχών (Dixit, 2008) και διαπραγματεύσεων που οδηγούν όλους τους δρώντες σε ικανοποιητικές απολαβές και όχι αναγκαστικά σε ζημία του ενός έναντι του άλλου (Fisher, 1999). Ως ενδεικτικό παράδειγμα Παίγνιου στον τομέα των επιχειρήσεων αναφέρεται η επένδυση σε έρευνα και ανάπτυξη για τις φαρμακευτικές εταιρίες. Κάθε φαρμακευτική εταιρία επενδύει ένα ποσό στην ανάπτυξη νέων φαρμάκων. Η πρώτη εταιρία που αναπτύσσει ένα φάρμακο έχει το δικαίωμα να το εκμεταλλευτεί αποκλειστικά για κάποια χρόνια. Οι εταιρίες πρέπει να αποφασίσουν πού θα διοχετεύσουν τους πόρους τους για έρευνα, πώς θα τιμολογήσουν τα νέα φάρμακα ή πώς θα μειώσουν το ρίσκο κατά την ανάπτυξη ενός φαρμάκου. Οι αποφάσεις αυτές λαμβάνονται βάσει συμπερασμάτων για τις αντίστοιχες αποφάσεις των ανταγωνιστικών εταιριών, επομένως υπάρχει το στοιχείο του ανταγωνισμού, της ατομικότητας και της αλληλεπίδρασης. Η πολιτική και η διεθνής διπλωματία είναι ένα ακόμα πεδίο στο οποίο πιο πρόσφατα βρήκε εφαρμογή η Θεωρία Παιγνίων (Schelling, 1980), αλλά παρουσιάζει έντονη άνθηση, ιδιαίτερα στο πεδίο ανάλυσης των διεθνών σχέσεων. Τα Παίγνια που αναλύουν τις διεθνείς σχέσεις αποτελούν είτε συνεργατικά παίγνια, στα οποία είναι προς όφελος όλων των παικτών αλλά και του συνόλου να συνεργαστούν, είτε παίγνια, στα οποία υπάρχει ένα κοινωνικό δίλημμα, η κατάληξη του οποίου δεν είναι αναγκαστικά αυτή που έχει το καλύτερο αποτέλεσμα τόσο για τους παίκτες όσο και για το σύνολο (McCain, 2004). Ως παράδειγμα εφαρμογής της Θεωρίας Παιγνίων στη διεθνή πολιτική αναφέρεται η ανάλυση της πυραυλικής κρίσης στην Κούβα τον Οκτώβρη του 1962, κατά την οποία οι κυβερνήσεις των ΗΠΑ και ΕΣΣΔ έφεραν τον πλανήτη στο χείλος της πυρηνικής καταστροφής (Paravantis, 2016). Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τέλος τα παίγνια που αφορούν διαπραγματεύσεις αλλά και πολιτικές, τα οποία θα αναλυθούν εκτενέστερα στη συνέχεια.

## 1.3 Βασικές έννοιες Θεωρίας Παιγνίων

Ο ορισμός του Παίγνιου, ή του Παιχνιδιού, όπως χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη, είναι “οποιαδήποτε ενέργεια που δεν έχει πρακτικό σκοπό, αλλά προσφέρει ευχαρίστηση, γιατί είναι διασκεδαστική”, ή “οποιαδήποτε δραστηριότητα που πραγματοποιείται σύμφωνα με ορισμένους κανόνες, με σκοπό τη διασκέδαση ή την απόκτηση χρημάτων” (Μπαμπινιώτης, 2002). Με βάση τον ορισμό της καθομιλουμένης θα μπορούσε να δημιουργηθεί εναλλακτικά ο ορισμός ότι, Παίγνιο (Game) αποτελεί κάθε κατάσταση κατά την οποία δύο ή περισσότεροι ορθολογικοί παίκτες με αντικρουόμενους στόχους επιλέγουν τρόπους ενέργειας που δημιουργούν συνθήκες ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης. Η χρήση του όρου “Παίγνιο” στη Θεωρία Παιγνίων κατά τη δημιουργία της, πρόκειται περισσότερο για ένα “ιστορικό ατύχημα” (Shubik, 1983) καθώς ο όρος Παίγνιο ή παιχνίδι συνδέεται, όπως φαίνεται και από τους ορισμούς του λεξικού, περισσότερο με τη διασκέδαση και την απομάκρυνση από τα καθημερινά προβλήματα της ζωής. Η καθημερινή χρήση του όρου δεν πρέπει παρόλα αυτά να μειώνει καθόλου τον σοβαρό ρόλο της Θεωρίας Παιγνίων ως εργαλείο για τη μαθηματική ανάλυση και μοντελοποίηση της ανθρώπινης αλληλεπίδρασης, υπό το πρίσμα των στρατηγικών επιλογών μεμονωμένων ανθρώπων ή ομάδων.

Βασικότερα στοιχεία ενός παιγνίου αποτελούν οι παίκτες, οι κανόνες που διέπουν το παίγνιο, οι πληροφορίες που υπάρχουν κατά τη διάρκεια διεξαγωγής του παιγνίου και η αξιολόγηση των διαφόρων αποτελεσμάτων.

**Παίκτης**

Ως Παίκτης στη Θεωρία Παιγνίων ορίζεται κάθε αυτόνομη μονάδα λήψης αποφάσεων, η οποία, παρόλα αυτά, δεν ελέγχει όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα του παιγνίου (Aumann, 1985). Παίκτης μπορεί να είναι ένα άτομο, μία επιχείρηση, ακόμα και ένα κράτος. Ένας Παίκτης έχει σαφή αντικειμενικό σκοπό, τον οποίο προσπαθεί να επιτύχει κατά όλη τη διάρκεια του παίγνιου και σαφή όρια δράσης, τα οποία καθορίζονται από τους κανόνες του παιγνίου αλλά και το σύνολο των πόρων και των μέσων που διαθέτει.

**Στρατηγική**

Στρατηγική ενός παίκτη είναι το σύνολο των κανόνων, οι οποίοι ορίζουν ποια από τις δυνατές επιλογές ή ενέργειες που έχει στη διάθεσή του ένας παίκτης πρέπει να ακολουθήσει μέχρι το τέλος του παιχνιδιού, προκειμένου να επιτύχει τον στόχο του, έχοντας πάντοτε υπόψη του όλες τις πληροφορίες που σχετίζονται με τις κινήσεις των άλλων παικτών (Polak, 2007). Η έννοια της στρατηγικής είναι παρόμοια σε όλα τα επίπεδα ανταγωνισμού, είτε πρόκειται για μεμονωμένα άτομα σε απλά καθημερινά παιχνίδια, είτε για επιχειρήσεις σε σύνθετες καταστάσεις οικονομικών αλληλεξαρτήσεων ή ακόμα και για κράτη σε διαπραγματεύσεις με διπλωματικά συμφέροντα. Η στρατηγική που θα ακολουθήσει ένας παίκτης μπορεί να είναι αμιγής ή μικτή. Αμιγής στρατηγική είναι η στρατηγική εκείνη στην οποία κάθε παίκτης επιλέγει μία μόνο από τις δυνατές επιλογές του με πιθανότητα ίση με τη μονάδα, ενώ η μικτή στρατηγική περιλαμβάνει έναν συνδυασμό στρατηγικών, εκ των οποίων κάθε μία επιλέγεται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας. Η μικτή στρατηγική δηλαδή, είναι ουσιαστικά μία κατανομή πιθανοτήτων πάνω στις καθαρές στρατηγικές που διαθέτει ένας παίκτης.

**Ορθολογική Επιλογή**

Σύμφωνα με τη θεωρία της ορθολογικής επιλογής, σε ένα παίγνιο η ενέργεια που επιλέγεται από τον λήπτη αποφάσεων είναι καλύτερη ή τουλάχιστον το ίδιο καλή, σύμφωνα με τις προτιμήσεις του, συγκριτικά με οποιαδήποτε άλλη διαθέσιμη ενέργεια. Η θεωρία της ορθολογικής επιλογής ουσιαστικά υποδεικνύει ότι ο λήπτης αποφάσεων επιλέγει τη βέλτιστη ενέργεια σύμφωνα με τις καθαρές προτιμήσεις του μεταξύ όλων των επιλογών που έχει στη διάθεσή του (Romp, 1997). Το μοντέλο της ορθολογικής επιλογής αναλύεται με δύο επιμέρους συστατικά: το σύνολο *A,* που αποτελείται από όλες τις ενέργειες οι οποίες, υπό κάποιες προϋποθέσεις, είναι διαθέσιμες στον λήπτη αποφάσεων και τον τρόπο καθορισμού των προτιμήσεων του λήπτη αποφάσεων. Σε κάθε δοθείσα κατάσταση, ο λήπτης αποφάσεων έρχεται αντιμέτωπος με ένα υποσύνολο του *A* από το οποίο μπορεί να επιλέξει ένα μόνο στοιχείο, μία μόνο δηλαδή επιλογή. Ο λήπτης αποφάσεων γνωρίζει το υποσύνολο των διαθέσιμων ενεργειών, το οποίο δεν επηρεάζεται από τις προτιμήσεις του ίδιου και το θεωρεί δεδομένο. Όταν ο λήπτης αποφάσεων έρχεται αντιμέτωπος με οποιοδήποτε ζεύγος ενεργειών γνωρίζει ποιο στοιχείο του ζεύγους προτιμά, ή γνωρίζει ότι θεωρεί και τις δύο ενέργειες εξίσου επιθυμητές, οπότε και είναι "αδιάφορος" μεταξύ των δύο ενεργειών. Επιπλέον οι προτιμήσεις αυτές είναι συνεπείς σε επίπεδο λογικής, δηλαδή σε ένα σύνολο ενεργειών *A*, που απαρτίζεται από τις ενέργειες *a, b* και *c*, εάν ο λήπτης προτιμάει την ενέργεια *a* από την ενέργεια *b* και παράλληλα προτιμάει την ενέργεια *b* από την ενέργεια *c*, τότε θα πρέπει να προτιμάει και την ενέργεια *a* από την ενέργεια *c*.

Για το σύνολο =( , , ) εάν ( > ) ( > ), τότε πρέπει ( > ) *(13)*

**Συνάρτηση απολαβής**

Για την αναπαράσταση των προτιμήσεων ενός παίκτη, μεταξύ των διαθέσιμων ενεργειών που έχει να επιλέξει, χρησιμοποιείται μία συνάρτηση απολαβής (payoff function) η οποία συσχετίζει μία αριθμητική τιμή με κάθε ενέργεια, με τρόπο ώστε να προτιμώνται οι ενέργειες με τη μεγαλύτερη αριθμητική τιμή (Leyton-Brown, 2008). Πιο συγκεκριμένα η συνάρτηση απολαβής *u* αναπαριστά τις προτιμήσεις του λήπτη αποφάσεων αν για οποιεσδήποτε ενέργειες *a* και *b* από ένα σύνολο στρατηγικών ισχύει ότι: ( )> ( ), εάν και μόνο αν ο λήπτης αποφάσεων προτιμάει την επιλογή *a* από την *b*. Μία συνάρτηση απολαβής μπορεί να υπολογίζει ένα πραγματικό μέγεθος (για παράδειγμα χρηματική ωφέλεια) ή μπορεί να είναι απλά διατακτική, δηλαδή να προσδιορίζει εάν ο λήπτης αποφάσεων προτιμάει την επιλογή *a, b* ή *c*, χωρίς να υπολογίζει το πόσο πολύ προτιμάει την ενέργεια *a* από την ενέργεια *b* ή πόσο περισσότερο προτιμάει την ενέργεια *a* από την *b* σε σχέση με την ενέργεια *b* από την ενέργεια *c*. Οι προτιμήσεις ενός λήπτη αποφάσεων μπορούν να αναπαρασταθούν με πολλές εναλλακτικές συναρτήσεις απολαβής, ανάλογα με τη φύση του εξεταζόμενου προβλήματος.

**Λύση του Παίγνιου**

Ως λύση (solution) του παίγνιου θεωρείται η βέλτιστη στρατηγική όλων των παικτών. Η λύση του παιγνίου αποτελεί ουσιαστικά μία θεωρία που προσδιορίζει ένα σύνολο εκβάσεων για ένα παιγνιακό μοντέλο. Στα περισσότερα στρατηγικά παίγνια η στρατηγική αλληλεπίδραση είναι επαρκώς σύνθετη, έτσι ώστε ακόμα και ένα σχετικά απλό μοντέλο να μπορεί να επιδέχεται περισσότερες από μία λύσεις, οι οποίες σχετίζονται με τις παραδοχές και τις θεωρήσεις που έχουν ληφθεί κατά την κατάστρωση του παιγνίου.

## 1.4 Κατηγορίες παιγνίων

Τα παίγνια, όπως και το τεράστιο πλήθος καταστάσεων στις οποίες μπορούν να εφαρμοστούν, διαφέρουν, ανάλογα με τους εκάστοτε κανόνες και τα κριτήρια που τα χαρακτηρίζουν. Οι κυριότεροι διαχωρισμοί των παιγνίων ανάλογα με τα ειδικά χαρακτηριστικά τους παρατίθενται ακολούθως (Rasmusen, 2001).

**Αριθμός Παικτών**

Τα παίγνια στα οποία υπάρχουν δύο μόνο παίκτες ονομάζονται "παίγνια δύο παικτών”. Εάν οι παίκτες είναι περισσότεροι από δύο τότε έχουμε "παίγνια $n$ παικτών” όπου $n>2$, $n \in N$. Τα παίγνια δύο παικτών είναι τα συνηθέστερα παίγνια καθώς τα περισσότερα προβλήματα μπορούν να αναχθούν αφαιρετικά σε μία απλή μορφή αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο παικτών. Αν και φαινομενικά απλά, τα παίγνια δύο παικτών παρέχουν τη δυνατότητα της θεμελιώδους ανάλυσης μίας αλληλεπίδρασης, η οποία στη συνέχεια εφόσον το παίγνιο έχει θεμελιωθεί, αναλυθεί και επιλυθεί σωστά, μπορεί να επεκταθεί και να θεμελιωθεί ως παίγνιο πολλών παικτών. Ειδική κατηγορία των παιγνίων είναι και τα παίγνια στα οποία υπάρχει μόνο ένας παίκτης ο οποίος έχει ως αντίπαλό του "τη φύση”, όπως για παράδειγμα ισχύει στην πασιέντζα. Τα παίγνια αυτά στη μορφή του ενός παίκτη ενάντια στη φύση θεωρείται πως ανήκουν στην κατηγορία παιγνίων με δύο παίκτες.

**Δυνατότητα Συνεργασίας**

Σε κάποιες κατηγορίες παιγνίων, οι παίκτες πριν παίξουν το παίγνιο έχουν τη δυνατότητα να συνεργαστούν και να κάνουν συμφωνίες μεταξύ τους για τις στρατηγικές που πρόκειται να ακολουθήσουν κατά τη διεξαγωγή του παίγνιου. Αυτά τα παίγνια ονομάζονται “συνεργατικά παίγνια” (cooperative games) και βρίσκουν εφαρμογή στην ανάλυση των καταστάσεων, όπου οι συνεργατικές λύσεις, με σκοπό τη μεγιστοποίηση του οφέλους όλων των παικτών ως σύνολο και όχι ατομικά, είναι κατανοητές και κοινά επιδιωκόμενες από όλους τους παίκτες. Στον αντίποδα των συνεργατικών παιγνίων, υπάρχουν τα παίγνια στα οποία οι παίκτες ενεργούν αποκλειστικά ατομικά, χωρίς την παραμικρή συνεννόηση και συνεργασία μεταξύ τους, κατά όλη τη διάρκεια διεξαγωγής του παιγνίου. Τα παίγνια αυτού του είδους ονομάζονται "μη συνεργατικά παίγνια" (non-cooperative games). Τα όρια των δύο κατηγοριών πολλές φορές δεν είναι πλήρως διακριτά, καθώς στο ίδιο παίγνιο ενδέχεται να υπάρχουν τόσο στοιχεία συνεργασίας όσο και ανταγωνισμού.

**Χαρακτηριστικά Απολαβών**

Όταν σε ένα παίγνιο το κέρδος ενός παίκτη είναι ίσο με την απώλεια του αντιπάλου του, το παίγνιο αυτό ονομάζεται "παίγνιο μηδενικού αθροίσματος" (Zero Sum Game). Σε αυτά τα παίγνια το άθροισμα των απολαβών των παικτών είναι ίσο με μηδέν, επομένως η συνεργασία μεταξύ των παικτών είναι πρακτικά ανέφικτη. Αντίθετα, υπάρχουν τα "παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος" (Non-zero Sum Games), στα οποία το άθροισμα των απολαβών των παικτών είναι διάφορο του μηδενός. Στα παίγνια της κατηγορίας αυτής, το κέρδος ενός παίκτη δεν προκαλεί απαραίτητα ζημιά σε κάποιον ανταγωνιστή. Επομένως στη λύση των παίγνιων μη μηδενικού αθροίσματος όλοι οι παίκτες μπορούν να κερδίσουν ή και να χάσουν, ανάλογα με τη φύση και τον τρόπο διεξαγωγής του παίγνιου.

**Σειρά Λήψης Αποφάσεων**

Τα παίγνια διαχωρίζονται σε στρατηγικά (κανονικά) παίγνια και σε δυναμικά (εκτεταμένα) παίγνια. Ως στρατηγικό παίγνιο (αναφέρεται και ως κανονικό παίγνιο ή παίγνιο σε στρατηγική μορφή) χαρακτηρίζεται το μοντέλο παιγνίου όπου κάθε παίκτης επιλέγει το πλάνο δράσης του, δηλαδή τη στρατηγική που θα ακολουθήσει μόνο μια φορά σε όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού, και η επιλογή αυτή είναι για όλους τους παίκτες είτε ταυτόχρονη, είτε πραγματοποιείται σε νεκρό χρόνο πριν την έναρξη διεξαγωγής του παιγνίου. Σημαντικό στοιχείο στα στρατηγικά παίγνια είναι ότι κανένας από τους συμμετέχοντες παίκτες δεν γνωρίζει τη στρατηγική που έχουν επιλέξει οι υπόλοιποι παίκτες. Αντίθετα, ως παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή χαρακτηρίζεται το παίγνιο στο οποίο καθορίζονται οι δυνατές αλληλεπιδράσεις, οι οποίες δημιουργούνται από τις εκάστοτε συμπεριφορές των εμπλεκόμενων παικτών. Στα δυναμικά παίγνια, ο κάθε παίκτης μπορεί να αλλάξει πλάνο δράσης μία ή περισσότερες φορές κατά τη συνολική διάρκεια του παιχνιδιού, ανάλογα με τις αποφάσεις και τις ενέργειες των υπολοίπων παικτών, προκειμένου να αναπροσαρμόσει την τακτική του επιδιώκοντας το βέλτιστο για αυτόν αποτέλεσμα.

**Αριθμός Στρατηγικών**

Τα παίγνια διαχωρίζονται σε "πεπερασμένα" και σε "μη πεπερασμένα". Τα πεπερασμένα παίγνια τελειώνουν μετά από ένα μετρήσιμο συγκεκριμένο αριθμό κινήσεων, σε αντίθεση με τα μη πεπερασμένα παίγνια, τα οποία διαρκούν για απεριόριστο αριθμό κινήσεων και ο νικητής γίνεται γνωστός αφού όλες οι κινήσεις των παικτών τελειώσουν.

**Πληροφόρηση**

Μια ακόμα κατηγοριοποίηση των παιγνίων είναι η διάκριση σε παίγνια τέλειας πληροφόρησης και σε παίγνια ατελούς πληροφόρησης. Σε ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης οι παίκτες, εκτός από τους κανόνες και τους περιορισμούς του παιχνιδιού, γνωρίζουν και τις κινήσεις ή τις ενέργειες των υπολοίπων παικτών. Αντίθετα, σε ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης αυτή η γνώση δεν είναι διαθέσιμη στους εμπλεκόμενους παίκτες, καθώς δεν είναι πλήρως ενημερωμένοι για τις αποφάσεις και τις αντιδράσεις των υπολοίπων παικτών.

## 1.4 Τρόποι αναπαράστασης παιγνίων

Προκειμένου να καταστρωθεί ένα παίγνιο και στη συνέχεια να επιλυθεί, πρώτα πρέπει να αναπαρασταθεί σε πλήρη, ευκρινή και κατανοητή μορφή, διευκολύνοντας έτσι την ανάλυσή του. Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι αναπαράστασης των παιγνίων, η αναπαράσταση με μορφή μήτρας (μορφή πίνακα) και η αναπαράσταση με μορφή δέντρου (Rasmusen, 2001).

### Μορφή μήτρας (κανονική μορφή)

Η μορφή μήτρας, γνωστή και ως κανονική μορφή ή στρατηγική μορφή, είναι η πιο συνηθισμένη μορφή αναπαράστασης ενός παιγνίου. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ως στρατηγική στη Θεωρία Παιγνίων αναφέρονται οι κανόνες, οι οποίοι ορίζουν ποια από τις δυνατές επιλογές που έχει στη διάθεσή του ο κάθε παίκτης πρέπει να ακολουθήσει μέχρι το τέλος του παιχνιδιού. Ζητούμενο της αναπαράστασης, επομένως, είναι οι στρατηγικές του κάθε παίκτη και τα αποτελέσματά τους, δηλαδή οι απολαβές που προκύπτουν από κάθε συνδυασμό στρατηγικών. Στην απλή περίπτωση παιγνίου δύο παικτών, η υλοποίηση αυτή μπορεί να γίνει με τη μορφή πίνακα, όπου σε κάθε γραμμή του υπάρχει η στρατηγική του παίκτη 1 και σε κάθε στήλη του η στρατηγική του παίκτη 2. Στην περίπτωση που υπάρχουν $N$ παίκτες, η αναπαράσταση του παιγνίου γίνεται είτε με πίνακα μεγαλύτερων διαστάσεων είτε με $N$ πίνακες διαστάσεων $2 \cdot 2$. Η κανονικής μορφής αναπαράσταση ενός παιγνίου προσδιορίζει τους παίκτες του παιγνίου, τις στρατηγικές που διαθέτει ο κάθε παίκτης και την απολαβή που λαμβάνει κάθε παίκτης για κάθε συνδυασμό στρατηγικών που μπορούν να επιλέξουν οι παίκτες. Ακολούθως παρατίθεται η αναπαράσταση με μορφή μήτρας ενός παιγνίου μη μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών.

ΠΑΙΚΤΗΣ Β

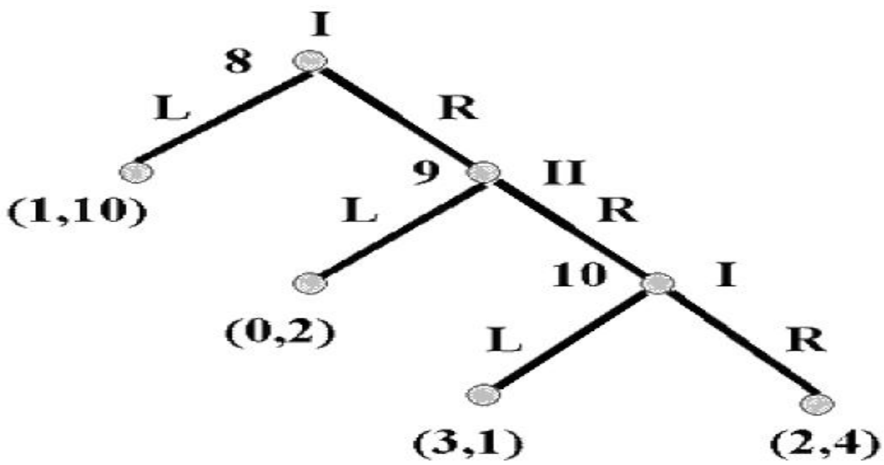
| | Στρατηγικές | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|---|
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | $A_1$ | (2, 2) | (0, 3) |
| | $A_2$ | (3, 0) | (1, 1) |

Εικόνα 1 : Αναπαράσταση Παιγνίου σε μορφή Μήτρας

Οι παίκτες στο παραπάνω παράδειγμα είναι ο Α και ο Β και οι στρατηγικές τους είναι οι Α1 ή Α2 και οι Β1 ή Β2 αντίστοιχα. Κάθε γραμμή του πίνακα παρουσιάζει τη στρατηγική του ενός παίκτη, ενώ κάθε στήλη τη στρατηγική του άλλου παίκτη. Σε κάθε κελί του πίνακα φαίνονται οι απολαβές για κάθε ένα από τους δύο παίκτες, ανάλογα με τη στρατηγική που αντιστοιχεί στη γραμμή και στη στήλη του κελιού. Για να αναπαρασταθεί ένα παίγνιο με κανονική μορφή πρέπει οι παίκτες να αποφασίζουν ταυτόχρονα, χωρίς γνώση της κίνησης του αντιπάλου τους και επίσης, να μην είναι γνωστή η χρονική στιγμή που λαμβάνονται οι αποφάσεις. Η στρατηγική μορφή είναι επομένως μια στατική μορφή αναπαράστασης παιγνίου.

**Μορφή δένδρου (αναλυτική μορφή)**

Η αναλυτική μορφή, γνωστή και ως εκτεταμένη μορφή ή μορφή δένδρου, είναι η μορφή αναπαράστασης ενός παιγνίου στην οποία εμφανίζονται όλες οι λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης των παικτών, δηλαδή όλοι οι παίκτες που συμμετέχουν στο παίγνιο (ένας από τους παίχτες μπορεί να είναι και η τύχη ή η φύση), όλες οι κινήσεις των παικτών (οι επιλογές δηλαδή που διαθέτει κάθε παίκτης κάθε φορά που καλείται να λάβει αποφάσεις), η σειρά με την οποία μπορεί κάθε παίκτης να λάβει αποφάσεις, η πληροφόρηση κάθε παίκτη όταν λαμβάνει μία απόφαση, καθώς και οι απολαβές κάθε «παρτίδας». Ως παρτίδα νοείται το σύνολο το οποίο αποτελείται από τις πιθανές κινήσεις των παικτών σε ακολουθία, από την αρχή του παιγνίου μέχρι το σημείο, στο οποίο τερματίζεται το παιχνίδι και ο κάθε παίκτης παίρνει την αντίστοιχη απολαβή. Ακολούθως παρατίθεται η αναπαράσταση ενός παιγνίου με μορφή δένδρου.




Εικόνα 2 : Παράδειγμα αναπαράστασης παιγνίου με μορφή δένδρου

Τα εκτεταμένα παίγνια αναπαρίστανται ως δέντρα που ξεκινούν από έναν κοινό κόμβο, τον κόμβο αφετηρίας. Οι κλάδοι που ξεκινούν από τους κόμβους συμβολίζουν τις πιθανές διαθέσιμες ενέργειες ενός παίκτη. Οι ενδιάμεσοι κόμβοι αντιπροσωπεύουν τα σημεία που λαμβάνουν αποφάσεις οι παίκτες και ονομάζονται κόμβοι απόφασης. Σε κάθε κόμβο καταλήγει ένας μόνο κλάδος, αλλά ενδέχεται να ξεκινούν από αυτόν περισσότεροι του ενός. Στους τελικούς κόμβους παρουσιάζονται οι απολαβές κάθε στρατηγικής για κάθε παίκτη. Η αναλυτική μορφή είναι χρήσιμη για την αναπαράσταση παιγνίων στα οποία οι παίκτες έχουν πληροφόρηση σχετικά με τις αποφάσεις των αντιπάλων τους. Σε αντίθεση με την κανονική μορφή όπου οι διαθέσιμες επιλογές είναι και οι στρατηγικές των παικτών, στην εκτεταμένη μορφή οι στρατηγικές είναι περισσότερο σύνθετες και συχνά πολύπλοκες.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : ΑΠΛΑ ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

## 2.1 Παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος

Το πιο απλό παίγνιο που απαντάται στη Θεωρία Παιγνίων είναι το παίγνιο μηδενικού αθροίσματος (zero sum game) με δύο παίκτες. Στο παίγνιο αυτό όταν ο ένας παίκτη κερδίζει, ο άλλος παίκτης χάνει, και η ωφέλεια του ενός παίχτη ισούται με τη ζημία του άλλου παίκτη (Stevens, 2008). Σε αυτή την κατηγορία παιγνίων το άθροισμα αποτελεσμάτων είναι ίσο με το μηδέν και κατά την αναπαράστασή τους σε στρατηγική μορφή δεν είναι αναγκαίο να χρησιμοποιούνται δύο αριθμοί, για τον προσδιορισμό των απολαβών των παικτών γιατί ουσιαστικά ό,τι κερδίζει ο ένας παίκτης το χάνει ο άλλος. Ο κάθε παίκτης κατά την επίλυση του παιγνίου μπορεί να ακολουθήσει αμιγή ή μικτή στρατηγική. Τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος αποτελούν υποκατηγορία της γενικής κατηγορίας παιγνίων δύο παικτών σταθερού αθροίσματος, στα οποία το άθροισμα των ανταμοιβών των παικτών είναι μια σταθερά $c$ (θετική ή αρνητική). Όταν η τιμή της σταθεράς c είναι θετικός αριθμός, τότε οι παίκτες μοιράζονται κάποια ανταμοιβή, ενώ όταν είναι αρνητικός αριθμός οι παίκτες μοιράζονται κάποιο κόστος. Τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος είναι η ειδική περίπτωση των παιγνίων σταθερού αθροίσματος όπου ισχύει $c = 0$. Απαραίτητο εργαλείο για την επίλυση παιγνίων μη μηδενικού αθροίσματος αποτελεί ο πίνακας αποτελεσμάτων, στον οποίο αναπαρίστανται οι ακριβείς απολαβές που προκύπτουν από κάθε δυνατό συνδυασμό στρατηγικών των δύο παικτών. Στον επόμενο πίνακα διαστάσεων *m x n*, που ονομάζεται πίνακας πληρωμών του παίκτη Α, βλέπουμε τους δύο παίκτες, τον παίκτη Α (σειρές) και τον παίκτη Β (στήλες), τις *m* στρατηγικές του παίκτη *A* και τις *n* στρατηγικές του παίκτη *B*.

ΠΑΙΚΤΗΣ Β

| | Στρατηγικές | 1 | 2 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ |
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | 2 | $a_{12}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ |
| | … | … | … | … | … |
| | m | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ |

Εικόνα 3 : Δομή πίνακα πληρωμών σε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα πληρωμών του παίκτη Α, αν ο παίκτης Α επιλέξει τη στρατηγική *Ai* και ο παίκτης Β επιλέξει τη στρατηγική *Bj*, τότε ο παίκτης Α κερδίζει aij και ο παίκτης Β χάνει aji. Οι δύο παίκτες είναι ορθολογιστές, επιλέγουν δηλαδή τις στρατηγικές τους με στόχο τη δική τους ευημερία, βάσει των στοιχείων του πίνακα, και δεν αντιδρούν συναισθηματικά. Αντικειμενικός σκοπός του παίκτη Α είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους του, ενώ του παίκτη Β η ελαχιστοποίηση της ζημίας του. Οι παίκτες γνωρίζουν τη δομή του πίνακα πληρωμών και γνωρίζουν ότι οι αντίπαλοί τους γνωρίζουν τη δομή αυτή. Τέλος, οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα στρατηγική, χωρίς να επικοινωνούν, χωρίς συνεργασία και χωρίς να έχουν ενημερωθεί εκ των προτέρων για την επιλογή του αντιπάλου τους. Σε αυτή την περίπτωση παιγνίων γίνεται χρήση της μεθόδου των κριτήριων maxi-min και mini-max προκειμένου να βρεθεί η βέλτιστη στρατηγική που πρέπει να επιλέξει ο κάθε παίκτης, απαλείφοντας διαδοχικά τις υποδεέστερες στρατηγικές (Stevens, 2008), (Leyton-Brown, 2008), όπως θα παρουσιαστεί και ακολούθως.

## 2.2 Επίλυση με Αμιγή Στρατηγική maxi-min και mini-max

Σε ένα παίγνιο δύο παικτών (παίκτης Α, παίκτης Β), αντικειμενικός σκοπός του παίκτη Α είναι η επίτευξη του μέγιστου κέρδους. Για αυτόν τον λόγο ο παίκτης Α θα ακολουθεί πάντα στρατηγική maxi-min, δηλαδή θα επιλέγει το μέγιστο (maximum) των ελαχίστων (minimum) στοιχείων των σειρών από τον πίνακα πληρωμών. Αντίστοιχα, αντικειμενικός σκοπός του παίκτη Β είναι η ελάχιστη ζημία. Έτσι, ο παίκτης Β θα ακολουθεί στρατηγική mini-max, δηλαδή θα επιλέγει πάντα το ελάχιστο (minimum) των μεγίστων (maximum) στοιχείων των στηλών. Εάν σε ένα παίγνιο το στοιχείο του πίνακα πληρωμών της στρατηγικής maxi-mim είναι το ίδιο με το στοιχείο της στρατηγικής mini-max, το στοιχείο αυτό ονομάζεται σημείο ισορροπίας ή σαγματικό στοιχείο (saddle point) και δίνει την τιμή λύσης του παιγνίου, που συμβολίζεται με *V*, δηλαδή:

$= \quad _i \quad _j = \quad _j \quad _i, \quad =1,2,\ldots, \quad , =1,2,\ldots,$

Το σημείο ισορροπίας σε ένα παίγνιο, εφόσον υπάρχει, είναι πάντα το μικρότερο στοιχείο της σειράς και το μεγαλύτερο στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει. Σημείο ισορροπίας υπάρχει όταν κανένας από τους παίκτες δεν επιθυμεί να αλλάξει τη στρατηγική του, ακόμα και όταν γνωρίζει τη στρατηγική του αντιπάλου του. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις παιγνίων δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος όπου το στοιχείο $\max_i \min_j = a_{ij}$ δεν είναι ίδιο με το στοιχείο $\max_j \min_i = a_{ij}$. Τότε δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας, δηλαδή δεν επιτυγχάνεται σταθερή λύση με τη χρήση αμιγών στρατηγικών και θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν μικτές στρατηγικές, οι οποίες θα παρουσιαστούν στη συνέχεια. Μία στρατηγική είναι υποδεέστερη μίας άλλης, η οποία ονομάζεται υπερέχουσα ή κυρίαρχη, όταν η κυρίαρχη στρατηγική είναι τουλάχιστον τόσο “καλή” όσο και η υποδεέστερη, έχει δηλαδή μεγαλύτερη ή ίση τιμή της συνάρτησης απολαβής συγκριτικά με τις εναλλακτικές στρατηγικές.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της στρατηγικής maxi-min στην περίπτωση που υπάρχει σημείο ισορροπίας παρουσιάζεται στο παίγνιο του ακόλουθου πίνακα. Στον πίνακα απολαβών παρουσιάζονται οι απολαβές του παίκτη Α, ενώ οι απολαβές του παίκτη Β έχουν το αντίθετο πρόσημο από τις απολαβές του παίκτη Α.

| | ΠΑΙΚΤΗΣ Β | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Στρατηγικές | Β1 | Β2 | Β3 |
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | Α1 | -10 | 15 | 6 |
| | Α2 | 4 | 4 | 5 |
| | Α3 | -15 | -12 | 4 |

Εικόνα 4 : Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min (1)

Με την εφαρμογή της διαδικασίας διαγραφής των υποδεέστερων στρατηγικών στο παίγνιο με τον παραπάνω πίνακα πληρωμών παρατηρείται ότι ο ορθολογικός παίκτης Α δεν θα εφάρμοζε ποτέ τη στρατηγική Α3, καθώς έχει λιγότερα οφέλη (-15) σε σχέση με τις στρατηγικές Α1 και Α2 (-15 < -10 < -4) για οποιαδήποτε επιλογή του παίκτη Β. Επομένως η στρατηγική Α3 αφαιρείται από τον πίνακα απολαβών και εξετάζεται ο πίνακας 2 x 3 που προκύπτει έπειτα από αυτήν την απαλοιφή (Εικόνα 5). Στη συνέχεια, ο ορθολογικός παίκτης Β γνωρίζοντας ότι ο παίκτης Α δεν θα εφαρμόσει ποτέ τη στρατηγική Α3 και γνωρίζοντας ότι ο Α γνωρίζει ότι το γνωρίζει, δεν εφαρμόζει ποτέ τη δική του στρατηγική Β3 αφού είναι υποδεέστερη των Β1 και Β2 (-5 < -4), οπότε η στρατηγική Β3 αφαιρείται από τον πίνακα πληρωμών και εξετάζεται ο πίνακας 2·2, όπως προκύπτει έπειτα από αυτήν την απαλοιφή (Εικόνα 6).

| | ΠΑΙΚΤΗΣ Β | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Στρατηγικές | Β1 | Β2 | Β3 |
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | Α1 | -10 | 15 | 6 |
| | Α2 | 4 | 4 | 5 |
| | Α3 | -15 | -12 | 4 |

Εικόνα 5: Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min (2)

| | | | ΠΑΙΚΤΗΣ Β | |
|---|---|---|---|---|
| | Στρατηγικές | B1 | B2 | B3 |
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | A1 | -10 | 15 | 6 |
| | A2 | 4 | 4 | 5 |
| | A3 | -15 | -12 | 4 |

Εικόνα 6 : Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min (3)

Ακολούθως, ο παίκτης Α γνωρίζοντας ότι ο Β γνωρίζει όλα τα προηγούμενα, δεν θα εφαρμόσει τη στρατηγική Α1 αφού είναι υποδεέστερη της Α2 (-10 < 4). Οπότε, προκύπτει το σημείο ισορροπίας του εξεταζόμενου παιγνίου, όταν ο παίκτης Α εφαρμόζει τη στρατηγική Α2, η οποία έχει τη μικρότερη ενδεχόμενη ζημία ανεξάρτητα από τις επιλογές του παίχτη Β και ο παίκτης Β τη στρατηγική του Β1, η οποία έχει τη μικρότερη ενδεχομένη ζημία ανεξάρτητα από τις επιλογές του παίκτη Α. Το σημείο αυτό ονομάζεται τιμή του παιγνίου, συμβολίζεται με *V* και είναι το μεγαλύτερο στοιχείο στη στήλη του και το μικρότερο στοιχείο στη γραμμή του, στον πίνακα πληρωμών του παίκτη Α. Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζεται η τελική επίλυση του εξεταζόμενου παίγνιου μηδενικού αθροίσματος με σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min.

| | | | ΠΑΙΚΤΗΣ Β | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Στρατηγικές | B1 | B2 | B3 | Row *min* |
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | A1 | -10 | 15 | 6 | -10 |
| | A2 | 4 | 4 | 5 | **4** |
| | A3 | -15 | -12 | 4 | -15 |
| | Column *max* | **4** | 15 | 9 | *V= 4* |

Εικόνα 7 : Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min (4)

## 2.3 Επίλυση με Μικτή Στρατηγική maxi-min και mini-max

Σε ορισμένα παίγνια δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί σημείο ισορροπίας μέσω της χρήσης αμιγών στρατηγικών. Σε αυτά τα παίγνια μπορεί να βρεθεί σταθερή λύση, δηλαδή σημείο ισορροπίας, αν οι παίκτες ακολουθήσουν μικτές στρατηγικές, δηλαδή αν επιλέξουν τις εναλλακτικές στρατηγικές τους με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας (Leyton-Brown, 2008). Κάθε παίκτης ακολουθεί τις στρατηγικές του με βάση κάποια κατανομή πιθανοτήτων, ώστε να μεγιστοποιεί το ελάχιστο προσδοκώμενο κέρδος του (να ελαχιστοποιεί τη μέγιστη προσδοκώμενη ζημιά του), ανεξάρτητα από τις επιλογές του αντιπάλου του. Η κατανομή πιθανοτήτων με βάση την οποία επιλέγει τις στρατηγικές του, ονομάζεται μικτή ή τυχαία maxi-min (mini-max) στρατηγική.

Οι εναλλακτικοί τρόποι με τους οποίους κάθε παίκτης παίζει το παίγνιο συμβολίζονται με διανύσματα πιθανοτήτων (*x1, x2, … , xm*), (y*1, y2, … , yn*) και είναι οι μικτές στρατηγικές, όπου *xi* είναι η πιθανότητα ο παίκτης Α να εφαρμόσει τη στρατηγική *Ai* και *yj* είναι η πιθανότητα ο παίκτης Β να εφαρμόσει τη στρατηγική *Bj*. Για τις πιθανότητες *xi* και *yj* ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Όταν εφαρμόζονται οι μικτές στρατηγικές, σύμφωνα με το κριτήριο mini-max, για κάθε παίκτη υπάρχει πάντα μία άριστη μικτή στρατηγική, που οδηγεί σε μια σταθερή λύση (σαγματικό σημείο), από το οποίο κανείς δεν θέλει να μετακινηθεί, δηλαδή κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει περεταίρω τη θέση του κατά την απόκλιση από αυτή τη λύση. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε με V(A) το προσδοκώμενο κέρδος του παίκτη Α, V(B) την προσδοκώμενη ζημιά του παίκτη Β και το σημείο ισορροπίας V προσδιορίζεται ως:

( )= ( )=

όπου το σημείο ισορροπίας *V* για τις άριστες μικτές στρατηγικές ονομάζεται αναμενόμενη τιμή του παιγνίου και ισχύει η εξής σχέση:

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της στρατηγικής maximin στην περίπτωση που δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας παρουσιάζεται στο παίγνιο του ακόλουθου πίνακα. Στον πίνακα πληρωμών παρουσιάζονται οι απολαβές του παίκτη Α, ενώ οι απολαβές του παίκτη Β έχουν το αντίθετο πρόσημο από τις απολαβές του παίκτη Α.

ΠΑΙΚΤΗΣ Β

| | Στρατηγικές | Β1 | Β2 | Β3 |
|---|---|---|---|---|
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | Α1 | 3 | -2 | 2 |
| | Α2 | -1 | 0 | 4 |
| | Α3 | -4 | -3 | 1 |

Εικόνα 8 : Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος χωρίς σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min (1)

Με την εφαρμογή της διαδικασίας διαγραφής των υποδεέστερων στρατηγικών όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο παίγνιο, στο παίγνιο με τον παραπάνω πίνακα πληρωμών παρατηρείται ότι ο ορθολογικός παίκτης Α δεν θα εφάρμοζε ποτέ τη στρατηγική Α3, καθώς έχει λιγότερα οφέλη (-4) σε σχέση με τις στρατηγικές Α1 και Α2 (-4 < -2 < -1) για οποιαδήποτε επιλογή στρατηγικής του παίκτη Β. Επομένως η στρατηγική Α3 αφαιρείται από τον πίνακα απολαβών και εξετάζεται ο πίνακας 2x3 που προκύπτει έπειτα από αυτήν την απαλοιφή

ΠΑΙΚΤΗΣ Β

| | Στρατηγικές | Β1 | Β2 | Β3 |
|---|---|---|---|---|
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | Α1 | 3 | -2 | 2 |
| | Α2 | -1 | 0 | 4 |
| | Α3 | -4 | -3 | 1 |

Εικόνα 9: Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος χωρίς σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min (2)

Στη συνέχεια, ο ορθολογικός παίκτης B γνωρίζοντας ότι ο παίκτης A δεν θα εφαρμόσει ποτέ τη στρατηγική A3 και γνωρίζοντας ότι ο A γνωρίζει ότι το γνωρίζει, δεν εφαρμόζει ποτέ τη δική του στρατηγική B3 αφού είναι υποδεέστερη της B1 και B2 (-4 < -3 < 0) για κάθε στρατηγική που μπορεί να επιλέξει ο παίκτης A, οπότε η στρατηγική B3 αφαιρείται από τον πίνακα πληρωμών και εξετάζεται ο πίνακας 2·2, όπως προκύπτει έπειτα από αυτήν την απαλοιφή.

ΠΑΙΚΤΗΣ Β

| | Στρατηγικές | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|---|
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | A1 | 3 | -2 | 2 |
| | A2 | -1 | 0 | 4 |
| | A3 | -4 | -3 | 1 |

Εικόνα 10 : Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος χωρίς σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min (3)

Ακολούθως, ο παίκτης A γνωρίζοντας ότι ο B γνωρίζει όλα τα προηγούμενα, δεν θα εφαρμόσει τη στρατηγική A1 αφού είναι υποδεέστερη της A2 (-2 < -1). Οπότε, προκύπτει το σημείο ισορροπίας του εξεταζόμενου παιγνίου, όταν ο παίκτης A εφαρμόζει τη στρατηγική A2, η οποία έχει τη μικρότερη ενδεχόμενη ζημία (-1) ανεξάρτητα από τις επιλογές του παίχτη B και ο παίκτης B τη στρατηγική του B2 η οποία έχει τη μικρότερη ενδεχομένη ζημία (0) ανεξάρτητα από τις επιλογές του παίκτη A. Το σημείο αυτό αποτελεί την τιμή του παιγνίου.

ΠΑΙΚΤΗΣ Β

| | Στρατηγικές | B1 | B2 | B3 | Row *min* |
|---|---|---|---|---|---|
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | A1 | 3 | -2 | 2 | -2 |
| | A2 | -1 | 0 | 4 | -1 |
| | A3 | -4 | -3 | 1 | -4 |
| | Column *max* | 3 | 0 | 4 | $-1 \neq 0$ |

Εικόνα 11 : Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος χωρίς σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min (4)

Όπως φαίνεται από την ανωτέρω επίλυση, η λύση του συγκεκριμένου παιγνίου δεν είναι ευσταθής καθώς εάν ο παίχτης Β θεωρήσει ότι ο παίχτης Α θα επιλέξει τη στρατηγική Α2 τότε αυτός θα επιλέξει την στρατηγική Β2 για να έχει όφελος 1. Εάν αντίστοιχα, ο παίχτης Α θεωρήσει ότι ο παίχτης Β θα επιλέξει τη στρατηγική Β1 τότε θα προτιμήσει να επιλέξει τη στρατηγική Α1 προκειμένου να έχει όφελος 3, και ο Β θα επιλέξει τη στρατηγική Β2 (2 > -3) και στην πορεία οι δύο παίκτες θα αντιληφθούν τη δυσκολία να πραγματοποιήσουν επιλογή, επομένως πρέπει να αναζητήσουν μία περισσότερο σταθερή στρατηγική. Στο παραπάνω παίγνιο ο Α παίκτης μπορεί να αποφύγει να έχει αναμενόμενη ζημία περισσότερο από 1/3, εάν ακολουθήσει τη στρατηγική Α1 με πιθανότητα 1/6 και τη στρατηγική Α2 με πιθανότητα 5/6. Πράγματι, η προσδοκώμενη ζημία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι 3 × (1/6) – 1 × (5/6) = -1/3, εάν ο Β ακολουθήσει τη στρατηγική Β1 και είναι -2 × (1⁄6) + 0 × (5⁄6) = -1/3 εάν ο Β ακολουθήσει τη στρατηγική Β2. Αντίστοιχα, ο Β έχει προσδοκώμενο όφελος 1/3 ανεξάρτητα με τις επιλογές του παίκτη Α εάν ακολουθήσει τη στρατηγική Β1 με πιθανότητα 1/3 και τη στρατηγική Β2 με πιθανότητα 2/3. Οι μεικτές αυτές στρατηγικές είναι τώρα σταθερές και δεν επιδέχονται περεταίρω βελτίωση και ισχύει $V = V(A) = V(B) = -1/3$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα παίγνιου με μικτή στρατηγική αποτελεί το παίγνιο κορώνα γράμματα στο οποίο η λύση είναι η μικτή στρατηγική 1/2, κατά την οποία ο κάθε παίκτης με 50% πιθανότητα διαλέγει κάθε φορά κορώνα ή γράμματα. Κανείς από τους δύο παίκτες δε μπορεί να θεωρηθεί ότι κάνει μία καλή ή κακή κίνηση όταν το παίγνιο παίζεται μία μόνο φορά. Όταν όμως το παίγνιο επαναληφθεί αρκετές φορές, οι παίκτες μπορούν να χαράξουν κάποια στρατηγική που θα τους εξασφαλίσει συγκριτικό πλεονέκτημα.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΣΕ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Αρχικά θα παρουσιάσουμε μερικά κλασικά παίγνια, υποδεικνύοντας κάποιες πολύ σημαντικές ιδιαιτερότητες, οι οποίες τα χαρακτηρίζουν, δίνοντας σε κάποια απ' αυτά μια μικρή περιγραφή που τα κάνει περισσότερο ρεαλιστικά. Επισημαίνεται ότι η μοντελοποίηση ενός παιγνίου εξισορροπεί το στόχο του ρεαλισμού με την ανάγκη διαχείρισης των μαθηματικών σχέσεων. Ένα απλό μοντέλο είναι ευκολότερο να αναλυθεί μαθηματικά, αλλά ένα πιο σύνθετο ενσωματώνει περισσότερο ρεαλιστικές πτυχές μιας κατάστασης στρατηγικής αλληλεπίδρασης. Οι βασικοί τύποι παιγνίων που παρουσιάζονται εδώ, απομονώνουν κάποια σημαντικά στρατηγικά στοιχεία, και μέσω της διερεύνησης της μεταξύ τους συσχέτισης παράγουν καινούργιες εφαρμόσιμες ιδέες.

## 3.1 Matching Pennies

Δύο ενήλικοι «στρίβουν» ο καθένας από ένα νόμισμα. Εάν και τα δύο νομίσματα όταν προσεδαφιστούν δείχνουν την ίδια όψη (δηλ. και τα δύο «κεφάλι» ή και τα δύο «γράμματα») τότε ο παίκτης Α κερδίζει το νόμισμα του Β, σε αντίθετη περίπτωση ο παίκτης Α δίνει το νόμισμά του στον παίκτη Β. Η γενική μορφή παρουσίασης ενός τέτοιου παιγνίου είναι:

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Κ | Γ |
| Α | Κ | α , -α | -α , α |
| | Γ | -α , α | α , -α |

Όπου,
Κ: «Κεφάλι»
Γ: «Γράμματα»
α: η απολαβή, με α>0

Εικόνα 12 : Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος (1)

Το εν λόγω παίγνιο είναι ένα πλήρως ανταγωνιστικό παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Είναι πλήρως ανταγωνιστικό επειδή ό,τι χάνει ο ένας παίκτης το κερδίζει ο άλλος και

είναι μηδενικού αθροίσματος επειδή το άθροισμα των αποδόσεων των παικτών σε κάθε ενδεχόμενη έκβαση (σε κάθε κελί) είναι **μηδέν** ( +(− )= − =0).
Αν το στρίψιμο του νομίσματος δεν φαίνεται να σχετίζεται με τις «στρατηγικές» επιλογές που αναμένουμε να κάνουν οι παίκτες σ’ ένα παίγνιο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ανωτέρω πίνακας παρουσιάζει απλοποιημένα τις στρατηγικές των προπονητών στον τελικό του κυπέλου μπάσκετ μεταξύ των ομάδων της Αργυρούπολης και του Βύρωνα. Οι εναλλακτικές στρατηγικές για τους προπονητές είναι να παίξουν οι ομάδες τους Κοντά στο καλάθι ή να σουτάρουν Γύρο από την περιφέρεια. Οι αποδόσεις δίνουν τη διαφορά των πόντων που μπορεί να προκύψει για τις δύο ομάδες από κάθε ενδεχόμενη έκβαση.

Μια άλλη μορφή παρουσίασης ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος θα μπορούσε να είναι και η ακόλουθη:

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Λ | Μ |
| A | Λ | α , -α | 0 , 0 |
| | Μ | -γ , γ | β , -β |

Όπου, α,β,γ > 0

Εικόνα 13 : Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος (2)

## 3.2 Παίγνια συνεργασίας (Coordination Games)

Στα γενικά παίγνια συνεργασίας οι παίκτες λαμβάνουν μια θετική απολαβή αν επιλέξουν την ίδια στρατηγική, διαφορετικά δεν λαμβάνουν τίποτα. Γενικά είναι παίγνια συντονισμού των παικτών σε κάποια εκ των εναλλακτικών τους στρατηγικών.

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Λ | Μ |
| Α | Λ | α , α | 0 , 0 |
| | Μ | 0 , 0 | α , α |

Όπου, α > 0

Εικόνα 14 : Παίγνιο Συνεργασίας

Μια παραλλαγή του παιγνίου συνεργασίας είναι τα παίγνια συνεργασίας **Pareto** (Pareto coordination games), όπου έχουν το πρόσθετο χαρακτηριστικό ότι οι δύο παίκτες προτιμούν να συντονίσουν τις αποφάσεις τους σ' ένα συγκεκριμένο στρατηγικό προφίλ σε σχέση με το συντονισμό σε κάποιο άλλο.

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Λ | Μ |
| Α | Λ | β , β | 0 , 0 |
| | Μ | 0 , 0 | α , α |

Όπου, **α > 0** και **β > α**

Εικόνα 15 : Παίγνιο Συνεργασίας Pareto

Έτσι, επιλέγοντας ο καθένας τη στρατηγική Λ η έκβαση του παιγνίου είναι το στρατηγικό προφίλ (Λ,Λ) που οδηγεί στο διάνυσμα απόδοσης (β,β), το όποιο είναι προτιμότερο από το συντονισμό τους στο προφίλ (Μ,Μ) που οδηγεί στο διάνυσμα απόδοσης (α,α).

## 3.3 Το «Δίλημμα των Φυλακισμένων» («Prisoner's Dilemma»)

Το εν λόγω παίγνιο κατ' άλλους επινοήθηκε από τον M. Flood και έλαβε το όνομά του από τον Al Tucker ο οποίος αφηγήθηκε και την εν λόγω ιστορία, ενώ οι περισσότεροι βεβαιώνουν ότι ο Tucker επινόησε το εν λόγω παίγνιο προκειμένου να το αναπτύξει σε ένα σεμινάριο για το Τμήμα Ψυχολογίας του Πανεπιστημίου Stanford την Άνοιξη του 1950. Το παίγνιο έχει χρησιμοποιηθεί για να αναλυθεί το πρόβλημα της εμφάνισης συνεργασίας ανάμεσα σε απολύτως ορθολογικούς, ιδιοτελείς παίκτες. Μια έκδοση αυτής της ιστορίας είναι η εξής:

Οι αστυνομικές αρχές έχουν συλλάβει δύο σεσημασμένους κακοποιούς οι οποίοι θεωρούνται ένοχοι για ένα κακούργημα που διαπράχθηκε στην πόλη τους. Ο εισαγγελέας της πόλης έχει αποδεικτικά στοιχεία ικανά για να τους απαγγελθούν μόνο πλημμεληματικού τύπου κατηγορίες. Αν κανείς από τους υπόπτους δεν ομολογήσει το κακούργημα τότε και οι δύο θα κατηγορηθούν για τις πλημμεληματικές πράξεις για τις οποίες έχουν αποδείξεις οι αστυνομικές αρχές. Ο εισαγγελέας μαζί με το ανακριτή, τοποθετούν τους συλληφθέντες σε ξεχωριστά ανακριτικά δωμάτια, προκειμένου να μην μπορεί ο ένας να γνωρίζει την κατάθεση του άλλου, και ζητούν από τον καθένα να ομολογήσει την ενοχή του για την κακουργηματική πράξη ή τουλάχιστον να καταθέσει εναντίον του άλλου. Στην περίπτωση που και οι δύο ομολογήσουν την ενοχή τους, τότε η ποινή τους θα είναι μειωμένη (έστω, ) σε σχέση με την προβλεπόμενη καθώς συνεργάστηκαν με τις αρχές. Αν ο ένας καταθέσει εναντίον του άλλου, τότε ο άλλος θα φυλακιστεί με την μεγαλύτερη ποινή (έστω, ), ενώ εκείνος που κατέθεσε θα κατηγορηθεί μόνο για το πλημμέλημα και μάλιστα η ποινή του (έστω, ) θα είναι μειωμένη καθώς συνεργάστηκε με τις αρχές. Αν και οι δύο σιωπήσουν (δεν ομολογήσουν και δεν καταθέσουν εναντίον του άλλου) θα τους επιβληθεί η ποινή ( ) που επισύρει η πλημμεληματική κατηγορία.

Το παίγνιο σε γενική στρατηγική μορφή έχει την εξής απεικόνιση:

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Κατάθεση | Σιωπή |
| A | Κατάθεση | $R_A , R_B$ | $S_A , T_B$ |
| | Σιωπή | $T_A , S_B$ | $P_A , P_B$ |

Όπου[22],
$T_i > R_i > P_i > S_i$
με $i = A, B$

Εικόνα 16 : Το Δίλημμα των φυλακισμένων

Τα παίγνια αυτού του τύπου έχουν το χαρακτηριστικό ότι και οι δύο παίκτες έχουν μια κυρίαρχη στρατηγική, δηλ. μια στρατηγική που αποφέρει στον καθένα την καλύτερη απόδοση *ανεξαρτήτως της επιλογής του αντιπάλου*. Η κυρίαρχη στρατηγική είναι η «Κατάθεση», και λόγω της ιδιότητάς της ως κυρίαρχης, ο κάθε παίκτης θα την επιλέξει. Έτσι, όμως, οδηγούν και οι δύο το παίγνιο σε μια υποβέλτιστη έκβαση από εκείνη στην οποία θα κατέληγαν αν υπήρχε τρόπος να συνεργαστούν και να δεσμευτούν αξιόπιστα ότι ο καθένας θα επιλέξει τη στρατηγική της «Σιωπής». Το στρατηγικό προφίλ (Κατάθεση , Κατάθεση) οδηγεί στο διάνυσμα απόδοσης ( , ). Αντίθετα, το στρατηγικό προφίλ (Σιωπή , Σιωπή) οδηγεί στο διάνυσμα απόδοσης ( , ). Επειδή, > και επειδή το διακύβευμα είναι τα έτη φυλάκισης (δηλ. ύψος ποινής) είναι δεδομένο ότι το προφίλ ( , ) αποτελεί την **αμοιβαία** βέλτιστη έκβαση. Σπεύδουμε να αναφέρουμε ότι αυτό το προφίλ, σε παίγνια αυτού του τύπου που παίζονται μόνο μια φορά (δηλ. δεν είναι επαναλαμβανόμενα), δεν υπάρχει τρόπος να επιτευχθεί παρά μόνο παραβιάζοντας την αρχή της ορθολογικότητας των παικτών. Χαρακτηριστικά, οι Dixit A. Και Nalebuff B., αναφέρουν: «*...το πρόβλημα (στο δίλημμα των φυλακισμένων) είναι η αλληλεξάρτηση των αποφάσεων: η καλύτερη κοινή λύση επιτυγχάνεται όταν ο καθένας επιλέγει τη χειρότερη, για τον ίδιο, στρατηγική*».

## 3.4 Το «Παίγνιο Αδιεξόδου»

Το **παίγνιο αδιεξόδου** έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία που σχετίζεται με τις διεθνείς σχέσεις. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο καθηγητής Τσεμπελής Γ. το παίγνιο αυτό προκύπτει από το παίγνιο του «Διλήμματος των Φυλακισμένων» (Δ.Φ.), αν αντιστρέψουμε τη σειρά μεγέθους των αποδόσεων μεταξύ .

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Συνεργασία | Παρασπονδία |
| A | Συνεργασία | $R_A, R_B$ | $S_A, T_B$ |
| | Παρασπονδία | $T_A, S_B$ | $P_A, P_B$ |

Όπου,
$\boldsymbol{T_i > P_i > R_i > S_i}$
με $i = A, B$

Εικόνα 17 : Το «Παίγνιο αδιεξόδου»

Ο κάθε παίκτης, όπως και στο Δ.Φ., έχει κυρίαρχη στρατηγική (τη στρατηγική της «Παρασπονδίας»), αλλά, πλέον, το προφίλ των κυρίαρχων στρατηγικών των δύο παικτών (Παρασπονδία, Παρασπονδία) οδηγεί σε έκβαση που είναι αμοιβαία προτιμότερη από το διάνυσμα που θα κατέληγαν σε περίπτωση που και οι δύο εμπλεκόμενοι συνεργάζονταν. Το στρατηγικό προφίλ (Παρασπονδία, Παρασπονδία) οδηγεί στο διάνυσμα απόδοσης ( , ). Αντίθετα, το στρατηγικό προφίλ (Συνεργασία, Συνεργασία) οδηγεί στο διάνυσμα απόδοσης ( , ). Επειδή, >

και επειδή το διακύβευμα είναι ανταμοιβή (π.χ. νομισματικές απολαβές) είναι δεδομένο ότι το προφίλ ( , ) αποτελεί την αμοιβαία βέλτιστη έκβαση.

## 3.5 Το παίγνιο «Η μάχη των φύλων» (The Battle of Sexes)

Η «μάχη των δύο φύλων» αναπαριστά ένα νιόπαντρο ζευγάρι που πρέπει να αποφασίσει αν το ερχόμενο Σάββατο θα πάνε μαζί στο γήπεδο για να παρακολουθήσουν τον κρίσιμο αγώνα μπάσκετ που δίνει η ομάδα της πόλης τους ή αν θα πάνε μαζί στη συναυλία που διοργανώνεται για μια και μόνο βραδιά στο θέατρο της πόλης τους, στην οποία συμμετέχουν γνωστά ονόματα καλλιτεχνών. Ο άντρας επιθυμεί να πάει στο γήπεδο αλλά θέλει να είναι και η σύζυγός του μαζί. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, τότε προτιμά να την ακολουθήσει στη συναυλία από το να πάει στο γήπεδο χωρίς εκείνη. Αντίστοιχα και η γυναίκα επιθυμεί να πάει στη συναυλία αλλά θέλει να είναι και ο σύζυγός της μαζί. Αν αυτό δεν μπορεί να γίνει, τότε προτιμάει να τον ακολουθήσει στο γήπεδο από το να πάει στη συναυλία χωρίς εκείνον. Επειδή καθ' όλη τη διάρκεια της εβδομάδας δεν μπορούσαν να καταλήξουν σε μια απόφαση, σκέφτηκαν ο καθένας να αγοράσει από ένα μόνο εισιτήριο και το Σάββατο να πάει ο καθένας στο γεγονός που συνδέεται με το εισιτήριο που ο ίδιος έβγαλε.

| | | Γ | |
|---|---|---|---|
| | | Γήπεδο | Συναυλία |
| A | Γήπεδο | $P_A, T_\Gamma$ | 0, 0 |
| | Συναυλία | 0, 0 | $T_A, P_\Gamma$ |

Όπου,
Α: Άνδρας
Γ: Γυναίκα
με $P_i \gg T_i > 0$

Εικόνα 18 : «Η μάχη των φύλων»

Στο εν λόγω παίγνιο, κάθε παίκτης έχει μια ισχυρή προτίμηση προς μια έκβαση, αλλά η προτίμησή του αυτή δεν είναι ικανή να αποτελέσει κυρίαρχη στρατηγική.

Έτσι ο άνδρας έχει ισχυρή προτίμηση στο προφίλ (Γήπεδο , Γήπεδο) με απόδοση $_A$ για τον ίδιο, και ασθενή προτίμηση στο προφίλ (Συναυλία, Συναυλία) με απόδοση $_A$. Κάθε άλλη έκβαση είναι απευκταία. Αντίστοιχα και η γυναίκα έχει ισχυρή προτίμηση στο προφίλ (Συναυλία , Συναυλία) με απόδοση $_\Gamma$ για την ίδια, και ασθενή προτίμηση στο προφίλ (Γήπεδο, Γήπεδο) με απόδοση γ. Κάθε άλλη έκβαση είναι και για την ίδια απευκταία. Το ενδιαφέρον στο εν λόγω παίγνιο είναι ότι αν και οι δύο συμπεριφερθούν αλτρουιστικά (δηλ. αγοράσουν εισιτήριο για το κοσμικό γεγονός για το οποίο ο άλλος έχει ισχυρή προτίμηση) θα καταλήξουν σε μια απευκταία έκβαση. Ομοίως, αν και οι δύο συμπεριφερθούν εγωιστικά (δηλ. αγοράσει ο καθένας εισιτήριο για το κοσμικό γεγονός για το οποίο έχει ο ίδιος ισχυρή προτίμηση), πάλι θα καταλήξουν σε μια απευκταία έκβαση. Αυτή η διάσταση στις προτιμήσεις δημιουργεί πρόβλημα συντονισμού μεταξύ των παικτών.

## 3.6 Το παίγνιο του δειλού («Chicken Game»)

Το παίγνιο του δειλού (chicken game) είναι ένα υπόδειγμα καταστάσεων ισχυρού ανταγωνισμού στο οποίο ο ένας παίκτης επιθυμεί να αποφύγει την υποταγή του στον άλλον. Στην περίπτωση που κανένας δεν υποχωρήσει τότε και οι δύο οδηγούνται στη χειρότερη δυνατή έκβαση.

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Επιβολή | Υποταγή |
| A | Επιβολή | $P, P$ | $R, T$ |
| | Υποταγή | $T, R$ | $S, S$ |

Όπου,
με $R > S > T \gg P$

Εικόνα 19 : Το παίγνιο του δειλού

Κατά την ανάπτυξη του τρόπου επίλυσης αυτού του τύπου παιγνίων, το προφίλ (Υποταγή , Υποταγή), που φαντάζει ως αμοιβαία αποδεκτή και συμβιβαστική λύση, δεν αποτελεί ευσταθή ισορροπία. Ένα επιπλέον ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι αν το ίδιο παίγνιο επαναλαμβάνεται πολλές φορές από τους ίδιους παίκτες, δεν παρατηρούνται στρατηγικές εκδίκησης ή τιμωρίας. Αυτό οφείλεται στο ότι ο κίνδυνος των μεγάλων απωλειών που μπορεί να επιφέρει το προφίλ (Επιβολή , Επιβολή) και στους δύο παίκτες λειτουργεί αποτρεπτικά στην υιοθέτηση στρατηγικών τιμωρίας.

## 3.7 Το παίγνιο της ασφάλειας («Assurance Game»)

Το παίγνιο αυτό χρησιμοποιείται για να περιγράψει καταστάσεις στις οποίες οι παίκτες καλούνται να επιλέξουν μεταξύ ενός βέβαιου προσωπικού οφέλους (προσωπική *ασφάλεια*) και ενός υπέρτερου σε μέγεθος προσωπικού οφέλους που, όμως, η επίτευξή του προϋποθέτει τη συνεργασία και των δύο εμπλεκομένων. Εμπνευστής του παιγνίου είναι ο Jean Jacques Rousseau.

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Ομαδικά | Ατομικά |
| A | Ομαδικά | $R, R$ | $0, S$ |
| | Ατομικά | $S, 0$ | $S, S$ |

Όπου,
με $R \gg S > 0$

Εικόνα 20 : Το παίγνιο της ασφάλειας

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του παιγνίου είναι ότι κάθε παίκτης διαθέτει μια σίγουρη επιλογή, την επιλογή «Ατομικά» που του αποφέρει μια ασφαλή και βέβαιη απόδοση (S). Η απόδοση όμως αυτή υστερεί κατά πολύ εκείνης που θα μπορούσαν να επιτύχουν από κοινού οι εμπλεκόμενοι, αν μπορούσε ο ένας να εμπιστευτεί τον άλλον ότι θα εγκαταλείψει τη βέβαιη στρατηγική του. Το εν λόγω παίγνιο είναι ένα παίγνιο συνεργασίας που επιπλέον παρέχει την πρόκληση της αποστέρησης μιας βέβαιης απολαβής.

## 3.8 Το παίγνιο των χοίρων («The pigs game»)

Τα παίγνια αυτού του τύπου έχουν το χαρακτηριστικό ότι μόνο ο ένας από τους δύο εμπλεκόμενους έχει μια στρατηγική που του αποφέρει καλύτερο αποτέλεσμα ανεξαρτήτως της επιλογής του άλλου παίκτη. Τα παίγνια αυτά έχουν μια απολύτως προβλέψιμη λύση. Η ιστορία που σκαρφίστηκαν οι εμπνευστές του παιγνίου, αφορά σε δύο χοίρους που μοιράζονται ένα χοιροστάσιο. Ο ένας από τους δύο χοίρους είναι παχύς, δυνατός και κυρίαρχος. Ο άλλος είναι ασθενικός και υποτακτικός. Στη μια πλευρά του χοιροστασίου βρίσκεται ένας μεγάλος διακόπτης που όταν πατηθεί απελευθερώνεται μια ποσότητα χοιροτροφής σ' ένα πιάτο το οποίο βρίσκεται στην άλλη πλευρά του χοιροστασίου. Κάθε χοίρος έχει δύο επιλογές: Να *ενεργήσει* (δηλ. να πατήσει τον διακόπτη) ή να μείνει *απαθής* (να μην πατήσει τον διακόπτη). Αν κανένας από τους δύο χοίρους δεν πατήσει τον διακόπτη, τότε και οι δύο θα μείνουν χωρίς τροφή.

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Ενέργεια | Απάθεια |
| A | Ενέργεια | $R, P$ | $P, S$ |
| | Απάθεια | $T, M$ | 0, 0 |

Όπου,
A: «Κυρίαρχος»
B: «Υποτακτικός», και
$T > R > S > P > 0 > M$

Εικόνα 21 : Το παίγνιο των χοίρων

Αν ο ασθενικός χοίρος πατήσει τον διακόπτη ενώ ο ισχυρός παραμείνει απαθής, η ποσότητα χοιροτροφής που θα απελευθερωθεί θα καταναλωθεί εξ' ολοκλήρου από τον ισχυρό χοίρο (Α), ο οποίος πηγαίνει ταχύτερα στο πιάτο. Μάλιστα, αυτή η περίπτωση είναι η χειρότερη για τον ασθενικό χοίρο (Β) ακόμα και από την περίπτωση που έμεναν και οι δύο απαθείς (άρα και οι δύο νηστικοί), καθώς χρειάζεται προσπάθεια και άρα κατανάλωση ενέργειας για το πάτημα του διακόπτη. Αν ο ισχυρός χοίρος πατήσει τον διακόπτη, τότε ο ασθενικός θα προλάβει να καταναλώσει μια ικανοποιητική ποσότητα χοιροτροφής πριν ο ισχυρός προλάβει να προσεγγίσει το πιάτο.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : ΙΣΣΟΡΟΠΙΑ NASH

## 4.1. Η έννοια της Ισορροπίας Nash

Η έννοια των εκλογικευμένων στρατηγικών εμπεριέχει κάποιες υποθέσεις σχετικά με το τι γνωρίζουν οι παίκτες, ο καθένας για τους άλλους, και πως αντιδρούν στις δικές τους πεποιθήσεις αναφορικά με την αναμενόμενη συμπεριφορά των άλλων. Για την εύρεση της στρατηγικής ισορροπίας σ' ένα παίγνιο ακολουθείται ο εξής νοητικός συλλογισμός:

1. Οι ορθολογικοί παίκτες δημιουργούν εκλογικευμένες πεποιθήσεις αναφορικά με τη στρατηγική συμπεριφορά των άλλων ορθολογικών παικτών,
2. Ο καθένας επιλέγει εκείνη τη στρατηγική που αποτελεί τη βέλτιστη απόκριση στις (εικαζόμενες) στρατηγικές επιλογές των άλλων παικτών, και
3. Όλοι οι συμμετέχοντες γνωρίζουν ότι όλα τα γεγονότα αποτελούν κοινή γνώση για όλους.

Ο αναφερόμενος συλλογισμός δεν θέτει ως προϋπόθεση η πεποίθηση, του κάθε παίκτη για τη συμπεριφορά των άλλων, να είναι και σωστή ως προς τη στρατηγική που τελικά οι άλλοι θα επιλέξουν πραγματικά.

Στο παίγνιο «The Battle of Sexes», για παράδειγμα, οι παίκτες μπορεί να λάβουν τη μικρότερη δυνατή απόδοση αν η προσδοκία (πεποίθηση) του ενός δεν είναι ευθυγραμμισμένη (συγχρονισμένη) με τη συμπεριφορά του άλλου. Όταν επικρατούν συνθήκες απόλυτης αβεβαιότητας, που καθιστούν δυσχερή τη δόμηση εξακριβωμένων πεποιθήσεων, αναπτύσσονται μηχανισμοί (θεσμικοί, άτυποι ή βιωματικοί) που αποσκοπούν στην άμβλυνση αυτής της στρατηγικής αβεβαιότητας. Ένας τέτοιος απλός βιωματικός μηχανισμός, όπως έχουμε προαναφέρει, είναι η επικοινωνία. Έτσι, στο παράδειγμά μας, αν οι παίκτες μπορούν να επικοινωνήσουν πριν παίξουν στο παίγνιο, ενδεχομένως να συζητήσουν για το ποιες στρατηγικές θα επιλέξει ο καθένας, και ενδεχομένως συμφωνήσουν και στο πως τελικά θα εξελιχθεί το παίγνιο.Έτσι, η επικοινωνία μεταξύ των παικτών μπορεί να μειώσει τη στρατηγική αβεβαιότητα με το να φέρει τις πεποιθήσεις σε αρμονία με τις πραγματικές συμπεριφορές. Στα συνεργατικά παίγνια (coordination games) κάθε παίκτης μπορεί να επωφεληθεί από μια τέτοια συμφωνία για την εξέλιξη του παιγνίου. Βέβαια, όπως θα αναλυθεί στην πορεία, υπάρχουν καταστάσεις λήψεις στρατηγικών αποφάσεων στις οποίες είτε η επικοινωνία είναι αδύνατη, είτε δεν επιτρέπεται (όπως, π.χ. στο Δίλημμα του Φυλακισμένου) είτε, λόγω της φύσης του παιγνίου, είναι αναποτελεσματική (π.χ. οι παίκτες έχουν κίνητρο να μην τηρηθούν τα συμφωνηθέντα). Τα ιστορικά γεγονότα, επίσης, μπορούν να εναρμονίσουν τις πεποιθήσεις του ενός με τις συμπεριφορές των άλλων. Έτσι, η συμμετοχή των ίδιων παικτών σε παρόμοιες ή ακριβώς ίδιες στρατηγικές καταστάσεις (περίπτωση επαναλαμβανόμενων παιγνίων), ή η χαρακτηριστική έκβαση συγκεκριμένων στρατηγικών καταστάσεων ανεξαρτήτως συμμετεχόντων, χρονικής περιόδου ή ειδικότερων κοινωνικοοικονομικών συνθηκών, μπορούν να αποτελούν ικανές ενδείξεις για τη δόμηση επαληθεύσιμων πεποιθήσεων. Όπως έχει αναφερθεί, οι άτυποι κανόνες, οι κώδικες συμπεριφοράς, το έθιμο, η κουλτούρα τα στερεότυπα κ.λ.π. μπορούν να επιτελέσουν το ρόλο των *παραγόντων* που συμβάλουν στη μείωση της στρατηγικής αβεβαιότητας. Η σύμβαση, το συμβόλαιο, η συμβολαιογραφική πράξη και άλλοι περισσότερο δεσμευτικοί τύποι σύμπτωσης της βούλησης των συμμετεχόντων σε μια στρατηγική κατάσταση, μειώνουν την αβεβαιότητα και συνεπώς φέρνουν εγγύτερα τις πεποιθήσεις με τις πραγματικές συμπεριφορές των δρώντων. Αποτελεσματικότερα μέσα άμβλυνσης της αβεβαιότητας κρίνονται τα θεσμικά μέσα άσκησης δημόσιας εξουσίας. Έτσι, ο θεσμός της Δικαιοσύνης, τα όργανα τήρησης της τάξης, οι ελεγκτικοί μηχανισμοί κ.α. που απειλούν με κυρώσεις σε περίπτωση αθέτησης των συμφωνηθέντων μεταξύ των μερών ή σε περίπτωση παραβατικής συμπεριφοράς ικανής να βλάψει ένα οριοθετημένο ιδιωτικό συμφέρον ή γενικότερα το δημόσιο συμφέρον, αποτελούν θεσμικά μέσα μείωσης της στρατηγικής αβεβαιότητας. Άλλοι άτυποι μηχανισμοί, όπως π.χ. η μαφία, η βεντέτα, ο κανόνας της σιωπής κ.α. επιτελούν σε ένα βαθμό έναν αντίστοιχο ρόλο, αλλά ως παρείσακτοι μηχανισμοί, εκτός των ορίων της νομιμότητας και της ηθικής, καθίστανται πολλές φορές οι ίδιοι πολλαπλασιαστές της αβεβαιότητας. Παρόλα αυτά, δυστυχώς, κάποιες φορές οι συγκεκριμένοι μη-θεσμικοί μηχανισμοί είναι αποτελεσματικοί στην τήρηση των συμφωνηθέντων, λόγω της «άμεσης ενεργοποίησής τους» και λόγω των ακραίων κυρώσεων που κατά «βούληση» επιβάλουν. Σε κάθε περίπτωση η βασική ιδέα είναι ότι μέσω κάποιων τυπικών ή άτυπων, θεσμικών ή μη, σύννομων ή παράνομων κοινωνικών δυνάμεων, η συμπεριφορά των παικτών σε μια στρατηγική κατάσταση λήψης αποφάσεων μπορεί να συντονιστεί (coordination) ή να εναρμονιστεί (congruity). Η εναρμόνιση εδώ αναφέρεται σε μια συνεπή και τακτική (κανονική) συμπεριφορά των συμμετεχόντων σ' ένα παίγνιο το οποίο επαναλαμβάνεται ή παίζεται από τους ίδιους συμμετέχοντες που αλληλεπιδρούν επαναλαμβανόμενα. Η εναρμόνιση μπορεί επίσης να αναφέρεται σε συμπεριφορά σ' ένα άπαξ παίγνιο (όπως αυτά που αναλύσαμε μέχρι τώρα) στο οποίο η επικοινωνία ή η ιστορία, έχουν ευθυγραμμίσει τις πεποιθήσεις του κάθε παίκτη με τις στρατηγικές των άλλων. Η μείωση της στρατηγικής αβεβαιότητας σε μια κατάσταση λήψης στρατηγικών (αλληλεξαρτώμενων) αποφάσεων, διευκολύνει τον προσδιορισμό της αμοιβαία βέλτιστης λύσης για τους συμμετέχοντες σ' αυτή. Η ιδέα της αμοιβαία βέλτιστης απόκρισης, είναι μια από τις πολλές συνεισφορές του John Nash στο πεδίο της θεωρίας παιγνίων. Είναι μια απλή στη διατύπωσή της, εξαιρετικά ευφυής στη σύλληψη της και ταυτόχρονα πολύ ισχυρή στην εφαρμογή της, θεωρία της συμπεριφοράς. Ο Nash χρησιμοποίησε τον όρο Ισορροπία (Equilibrium)59 για αυτού του είδους τη συμπεριφορά. Η μαθηματική αποτύπωση του ορισμού έχει ως εξής:

Ένα στρατηγικό προφίλ ∈ (με , το συνολικό των εφικτών στρατηγικών προφίλ του παιγνίου) είναι ισορροπία Nash, αν και μόνο αν $_{I}$ ∈ $_{i}$( $_{-i}$) για κάθε παίκτη , και $_{i}$( $_{i}$, $_{-i}$) ≥ $_{i}$( $_{i}$′, $_{-i}$) για κάθε $_{i}$′∈ $_{i}$ και για κάθε παίκτη. Λεκτικά, ένα στρατηγικό προφίλ είναι ισορροπία Nash αν και μόνο αν η στρατηγική του κάθε παίκτη που συνθέτει αυτό το προφίλ ανήκει στο σύνολο των στρατηγικών βέλτιστης απόκρισης του κάθε παίκτη και η απόδοση που του προσδίδει, συναρτήσει των στρατηγικών των άλλων παικτών, είναι μεγαλύτερη ή ίση από οποιαδήποτε άλλη διαθέσιμη εναλλακτική του στρατηγική. Αλλιώς, εκείνο το στρατηγικό προφίλ στο οποίο όταν οδηγηθεί το παίγνιο, οι παίκτες δεν έχουν κίνητρο να μετακινηθούν μονομερώς, δηλ. να αλλάξουν τη στρατηγική τους με δεδομένο ότι οι άλλοι παίκτες διατηρούν τις δικές τους. Οι αμοιβαία βέλτιστες αποκρίσεις εξασφαλίζουν ότι κανένας παίκτης δεν έχει συμφέρον να αποκλίνει από τη στρατηγική του, δεδομένου εκείνου που έχει προβλεφθεί ότι θα κάνουν οι άλλοι. Παράδειγμα: Οι παίκτες, έστω , με =1,2… , επικοινωνούν πριν τη διεξαγωγή ενός παιγνίου και συμφωνούν στο στρατηγικό προφίλ που θα υιοθετήσουν. Κάθε παίκτης έχει ατομικό κίνητρο να τηρήσει τη συμφωνία, μόνο αν στο συναποφασιζόμενο στρατηγικό προφίλ περιλαμβάνεται η στρατηγική $_{i}$ που αποτελεί τη βέλτιστη απόκριση [ $_{i}$∈ $_{i}$( $_{-i}$)] του καθενός έναντι των στρατηγικών που συμφωνήθηκε να υιοθετήσουν οι άλλοι παίκτες. Αν η συμφωνία είναι να παίξουν ένα συγκεκριμένο στρατηγικό προφίλ ' στο οποίο δεν περιλαμβάνεται η στρατηγική βέλτιστης απόκρισης [ ′$_{i}$ ή $_{i}$( $_{-i}$)] για κάποιον παίκτη , τότε αυτός ο παίκτης δεν έχει κίνητρο να τηρήσει τη συμφωνία και συνεπώς θα επιλέξει μια στρατηγική διαφορετική από εκείνη που συμφωνήθηκε ( . ή ′$_{i}$). Μια περισσότερο εύληπτη απόδοση της έννοιας της ισορροπίας Nash είναι να φανταστούμε εκείνη την έκβαση στην οποία όταν θα καταλήξει ένα παίγνιο, κανείς εμπλεκόμενος παίκτης δεν έχει συμφέρον να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική του, με δεδομένο ότι όλοι οι άλλοι διατηρούν τις δικές τους.

## 4.2. Εύρεση της Ισορροπίας Nash σε γνωστούς τύπους παιγνίων.

### 4.2.1 Παίγνιο τύπου: Battle of the sexes

Για την εύρεση της ισορροπίας Nash εργαζόμαστε ως ακολούθως:

Αν ο παίκτης Β επιλέξει τη στρατηγική Ζ, τότε **οι αποδόσεις του Α έχουν ως εξής**: αν κι αυτός επιλέξει Ζ, θα έχει απόδοση 2, ενώ αν επιλέξει Χ θα έχει απόδοση 0. Συνεπώς για τον Α η στρατηγική Ζ είναι η βέλτιστη απόκρισή του στη στρατηγική Ζ του παίκτη Β. Αν ο παίκτης Β επιλέξει τη στρατηγική Χ, τότε **οι αποδόσεις του Α έχουν ως εξής**: αν επιλέξει Ζ θα έχει απόδοση 0, ενώ αν επιλέξει κι αυτός Χ θα έχει απόδοση 1. Συνεπώς για τον Α η στρατηγική Χ είναι η βέλτιστη απόκρισή του στη στρατηγική Χ του παίκτη Β.

| | | παίκτης B | |
|---|---|---|---|
| | | Z | X |
| παίκτης A | Z | 2 / 1 | 0 / 0 |
| | X | 0 / 0 | 1 / 2 |

Εικόνα 22 : Παίγνιο τύπου: Battle of the sexes . Σκιασμένες οι βέλτιστες αποκρίσεις του παίκτη Α

Αν ο παίκτης Α επιλέξει τη στρατηγική Ζ, τότε **οι αποδόσεις του Β έχουν ως εξής**: αν κι αυτός επιλέξει Ζ, θα έχει απόδοση 1, ενώ αν επιλέξει Χ θα έχει απόδοση 0. Συνεπώς για τον Β η στρατηγική Ζ είναι η βέλτιστη απόκρισή του στη στρατηγική Ζ του παίκτη Α.

Αν ο παίκτης Α επιλέξει τη στρατηγική Χ, τότε **οι αποδόσεις του Β έχουν ως εξής**: αν επιλέξει Ζ, θα έχει απόδοση 0, ενώ αν επιλέξει κι αυτός Χ θα έχει απόδοση 2. Συνεπώς για τον Β η στρατηγική Χ είναι η βέλτιστη απόκρισή του στη στρατηγική Χ του παίκτη Α.

| | | παίκτης B | |
|---|---|---|---|
| | | Z | X |
| παίκτης A | Z | 2 / 1 | 0 / 0 |
| | X | 0 / 0 | 1 / 2 |

Εικόνα 23 : Παίγνιο τύπου: Battle of the sexes .Σκιασμένες οι βέλτιστες αποκρίσεις του παίκτη Β

Συνεπώς οι βέλτιστες αποκρίσεις των παικτών σε σχέση με τις επιλεγόμενες στρατηγικές των αντιπάλων τους εμφανίζονται στα γραμμοσκιασμένα πεδία (στρατηγικά προφίλ) στον κατωτέρω Πίνακα (στρατηγικής μορφής του παιγνίου):

Η ισορροπία Nash είναι το σύνολο των στρατηγικών προφίλ: {( , ),( , )}

Οι αποδόσεις των παικτών σε καθένα από τα προφίλ αυτά είναι:

A( , )=2, A( , )=1

B( , )=1, B( , )=2

Η ισορροπία Nash υποδηλώνει ότι με δεδομένη τη στρατηγική επιλογή του ενός παίκτη, ο άλλος δεν έχει κίνητρο να αλλάξει τη στρατηγική ισορροπίας. Π.χ. με δεδομένο ότι ο παίκτης Β έχει επιλέξει τη στρατηγική Ζ, ο παίκτης Α δεν έχει κίνητρο να αλλάξει τη στρατηγική του από Ζ σε Χ, καθώς η απόδοσή του θα μειωθεί.

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Z | X |
| A | Z | 2 , 1 | 0 , 0 |
| | X | 0 , 0 | 1 , 2 |

Εικόνα 24 : Προφίλ ισορροπίας Nash για το παίνιο Battle of Sexes

Πρέπει να τονιστεί ότι η ισορροπία Nash (N.E.) είναι ισορροπία **στρατηγικών προφίλ** και όχι ισορροπία αποδόσεων. Έτσι, για το ανωτέρω παίγνιο . .= {( , ),( , )} και όχι {(2,1),(1,2)}. Το χαρακτηριστικό αυτού του τύπου παιγνίων είναι ότι κάποιο από τα προφίλ ισορροπίας είναι προτιμητέο για κάποιον παίκτη και το άλλο είναι προτιμότερο για τον άλλο παίκτη.

### 4.2.2 Ισορροπία Nash σε παίγνια τύπου «Συνεργασίας»

Στα εν λόγω τύπου παίγνια, οι παίκτες έχουν τις ίδιες αποδόσεις σε κάθε στρατηγικό προφίλ ισορροπίας. Το πρόβλημα είναι ο συντονισμός των παικτών στα προφίλ ισορροπίας. . .={( , ),( , )}

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Z | X |
| A | Z | 1 , 1 | 0 , 0 |
| | X | 0 , 0 | 1 , 1 |

Εικόνα 25 : Παίγνιο τύπου: Συνεργασίας (Coordination game)

### 4.2.3 Ισορροπίας Nash σε παίγνια τύπου «Pareto Coordination»

Στα εν λόγω τύπου παίγνια όλοι οι παίκτες προτιμούν περισσότερο κάποιο από τα στρατηγικά προφίλ ισορροπίας. . .={( , ),( , )}

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Z | X |
| A | Z | 2 , 2 | 0 , 0 |
| | X | 0 , 0 | 1 , 1 |

Εικόνα 26 : Παίγνιο τύπου: Pareto Coordination

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Στο πειραματικό μέρος της εργασίας παρουσιάζουμε μια υλοποίηση της προσομοίωσης επίλυσης παιγνίων μηδενικού αθροίσματος (Zero-Sum Games), με τη χρήση του λογισμικού πακέτου Matlab. Ο κώδικας της προσομοίωσης ο οποίος παρατίθεται στο Παράρτημα Α δέχεται ως είσοδο τις στρατηγικές επιλογές των παικτών σε μορφή πίνακα και υπολογίζει την λύση του. Η λύση του παιγνίου μπορεί να είναι κυρίαρχη είτε μεικτή. Σε κάθε περίπτωση εμφανίζεται το κατάλληλο μήνυμα. Παρουσιάζουμε την προσομοίωση για τις δύο περιπτώσεις :

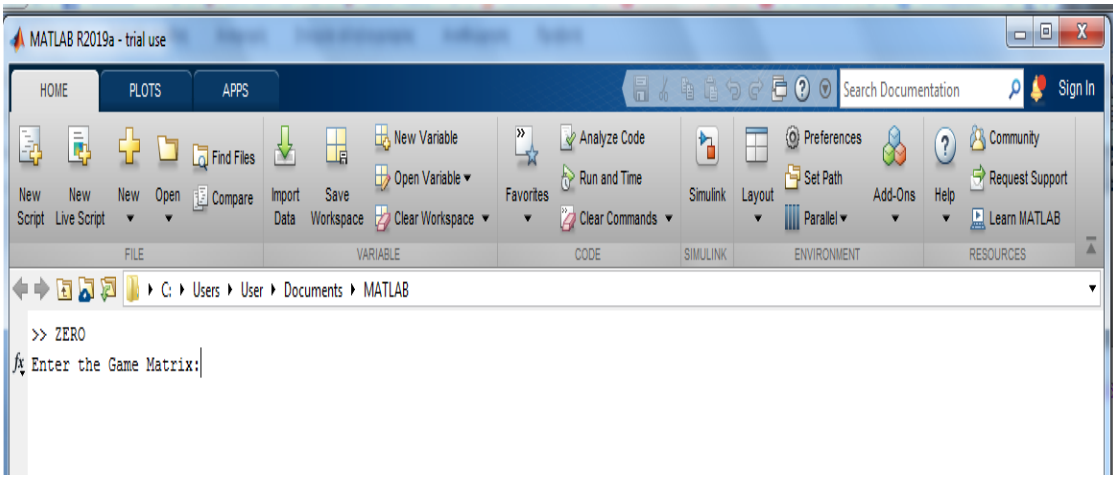
**Α) Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος με σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min**

Παράδειγμα εφαρμογής της στρατηγικής maxi-min στην περίπτωση που υπάρχει σημείο ισορροπίας παρουσιάζεται στο παίγνιο του ακόλουθου πίνακα. Στον πίνακα απολαβών παρουσιάζονται οι απολαβές του παίκτη Α, ενώ οι απολαβές του παίκτη Β έχουν το αντίθετο πρόσημο από τις απολαβές του παίκτη Α.

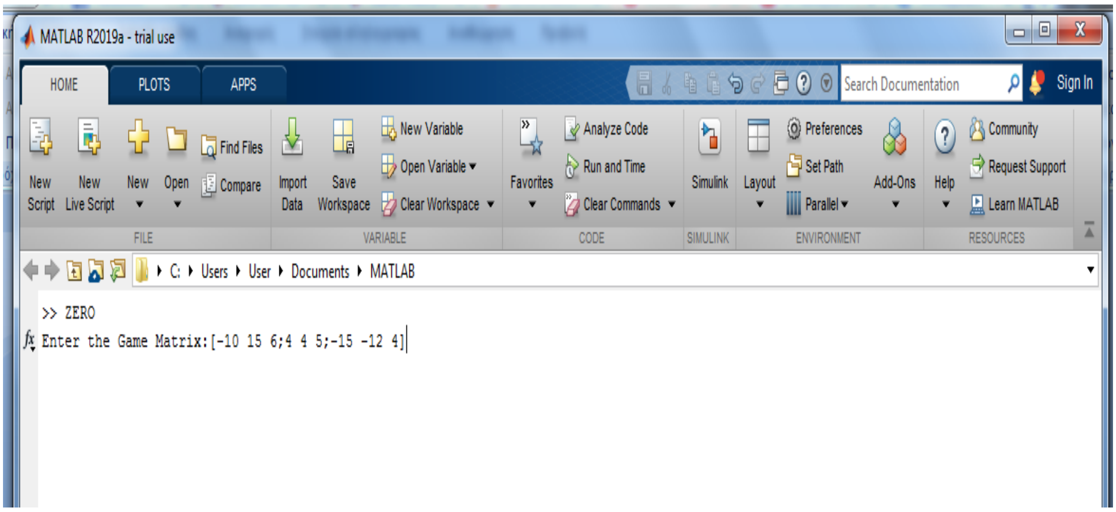
ΠΑΙΚΤΗΣ Β

| | Στρατηγικές | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|---|
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | A1 | -10 | 15 | 6 |
| | A2 | 4 | 4 | 5 |
| | A3 | -15 | -12 | 4 |

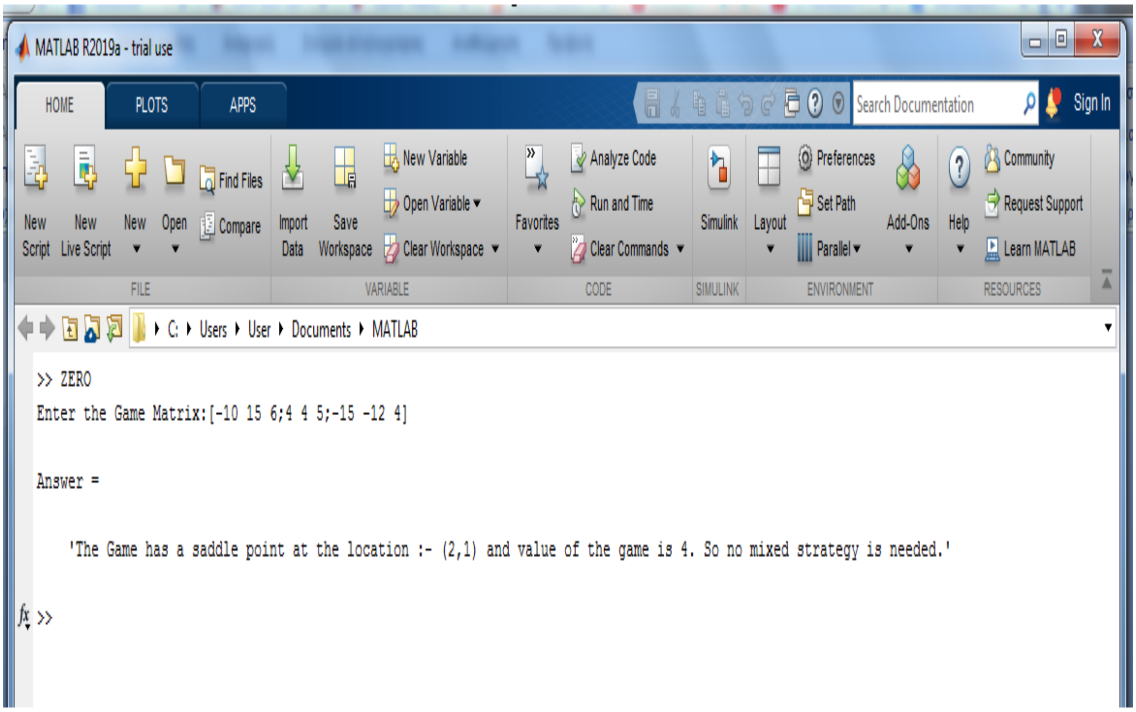
Καλούμε τον κώδικα προσομοίωσης και μας ζητείται ο πίνακας τιμών των στρατηγικών :




Τοποθετούμε τις τιμές σε μορφή πίνακα στο Matlab :




Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι :




Answer =

'The Game has a saddle point at the location :- (2,1) and value of the game is 4. So no mixed strategy is needed.'

Το σημείο ισορροπίας βρίσκεται στη θέση (2,1) ( δεύτερη γραμμή και πρώτη στήλη) που αντιστοιχεί στην τιμή 4. Η βέλτιστη λύση συνεπώς για τους δύο παίκτες προκύπτει όταν ο παίκτης Α επιλέξει την στρατηγική Α2 και ο παίκτης Β επιλέξει την στρατηγική Β1.

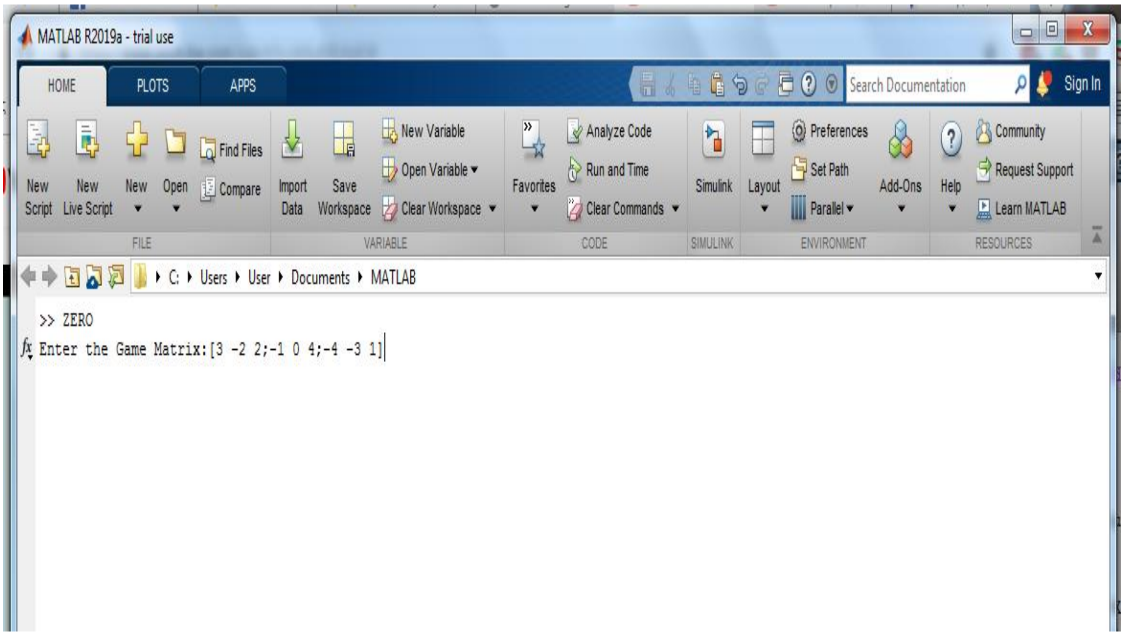
**B) Παράδειγμα επίλυσης παιγνίου μηδενικού αθροίσματος χωρίς σημείο ισορροπίας με τη μέθοδο maxi-min**

Παράδειγμα εφαρμογής της στρατηγικής maximin στην περίπτωση που δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας παρουσιάζεται στο παίγνιο του ακόλουθου πίνακα. Στον πίνακα πληρωμών παρουσιάζονται οι απολαβές του παίκτη Α, ενώ οι απολαβές του παίκτη Β έχουν το αντίθετο πρόσημο από τις απολαβές του παίκτη Α.

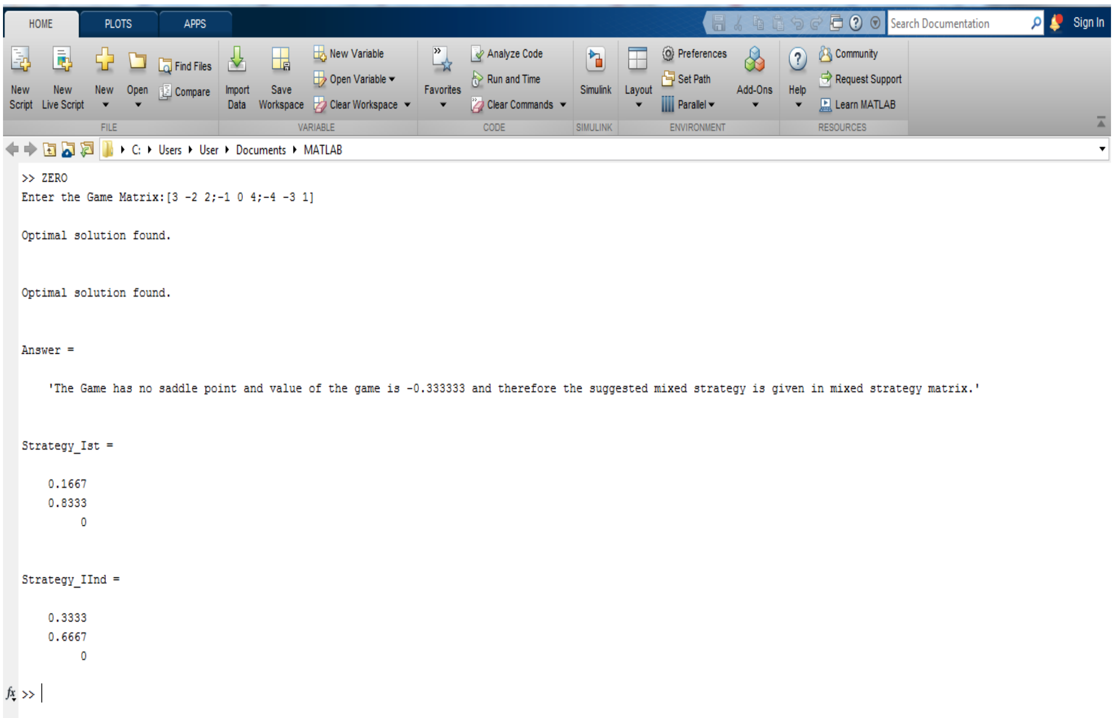
ΠΑΙΚΤΗΣ Β

| | Στρατηγικές | Β1 | Β2 | Β3 |
|---|---|---|---|---|
| ΠΑΙΚΤΗΣ Α | Α1 | 3 | -2 | 2 |
| | Α2 | -1 | 0 | 4 |
| | Α3 | -4 | -3 | 1 |

Καλούμε τον κώδικα προσομοίωσης και μας ζητείται ο πίνακας τιμών των στρατηγικών :




Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι :




Optimal solution found.

Answer =

'The Game has no saddle point and value of the game is -0.333333 and therefore the suggested mixed strategy is given in mixed strategy matrix.'

Strategy_Ist =

0.1667

0.8333

0

Strategy_IInd =

0.3333

0.6667

0

Όπως φαίνεται από την ανωτέρω επίλυση, η λύση του συγκεκριμένου παιγνίου δεν είναι ευσταθής καθώς εάν ο παίχτης Β θεωρήσει ότι ο παίχτης Α θα επιλέξει τη στρατηγική Α2 τότε αυτός θα επιλέξει την στρατηγική Β2 για να έχει όφελος 1. Εάν αντίστοιχα, ο παίχτης Α θεωρήσει ότι ο παίχτης Β θα επιλέξει τη στρατηγική Β1 τότε θα προτιμήσει να επιλέξει τη στρατηγική Α1 προκειμένου να έχει όφελος 3, και ο Β θα επιλέξει τη στρατηγική Β2 (2 > -3) και στην πορεία οι δύο παίκτες θα αντιληφθούν τη δυσκολία να πραγματοποιήσουν επιλογή, επομένως πρέπει να αναζητήσουν μία περισσότερο σταθερή στρατηγική. Στο παραπάνω παίγνιο ο Α παίκτης μπορεί να αποφύγει να έχει αναμενόμενη ζημία περισσότερο από 1/3, εάν ακολουθήσει τη στρατηγική Α1 με πιθανότητα 1/6 και τη στρατηγική Α2 με πιθανότητα 5/6. Πράγματι, η προσδοκώμενη ζημία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι $3 \times (1/6) – 1 \times (5/6) = -1/3$, εάν ο Β ακολουθήσει τη στρατηγική Β1 και είναι $-2 \times (1/6) + 0 \times (5/6) = -1/3$ εάν ο Β ακολουθήσει τη στρατηγική Β2. Αντίστοιχα, ο Β έχει προσδοκώμενο όφελος 1/3 ανεξάρτητα με τις επιλογές του παίκτη Α εάν ακολουθήσει τη στρατηγική Β1 με πιθανότητα 1/3 και τη στρατηγική Β2 με πιθανότητα 2/3. Οι μεικτές αυτές στρατηγικές είναι τώρα σταθερές και δεν επιδέχονται περεταίρω βελτίωση και ισχύει $V = V(A) = V(B) = -1/3$.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

```
A=input('Enter the Game Matrix:');
r=[];s=[];[m,n]=size(A);
if min(max(A))==max(min(A'))
   b=max(A);Strategy_Ist=[];Strategy_IInd=[];ms=[];
   for i=1:n
      for j=1:m
         if isequal(b(i),A(j,i))
            if isequal(A(j,i),min(A(j,:)))
               r(length(r)+1)=j;
               s(length(s)+1)=i;
            end
         end
      end
   end
if (length(r)==1 && length (s)==1)
      Answer=['The Game has a saddle point at the location :- (' int2str(r) ',' int2str(s) ')
and value of the game is ' num2str(A(r,s),6) '. So no mixed strategy is needed.']
   else
      for i=1:length(r)
         ms=[ms '(' int2str(r(i)) ',' int2str(s(i)) '),'];
      end
      Answer=['The Game has saddle points at the locations :-' ms ' and value of the
game is ' num2str(A(r(1),s(1)),6) '. So no mixed strategy is needed.']
   end
   else
   X_a=linprog(-[1;zeros(m,1)],[ones(n,1) -A'],zeros(n,1),[0 ones(1,m)],[1],[-
inf;zeros(m,1)]);v=X_a(1,1);X_a(1,:)=[];
   X_b=linprog([1;zeros(n,1)],[-ones(m,1) A],zeros(m,1),[0 ones(1,n)],[1],[-
inf;zeros(n,1)]);X_b(1,:)=[];
   Answer=['The Game has no saddle point and value of the game is ' num2str(v,6) '
and therefore the suggested mixed strategy is given in mixed strategy matrix.']
   Strategy_Ist=X_a
   Strategy_IInd=X_b
end
```

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


**[1] Dixit A. και Nalebuff B. (1999),** Πώς να σκέπτεστε στρατηγικά, Εκδόσεις Καστανιώτης, Αθήνα

**[2] Buchanan J. και Tullock G. (1999),** Ο Λογισμός της Συναίνεσης -Τα Λογικά Θεμέλια της Συνταγματικής Δημοκρατίας, εκδ. Παπαζήση, Αθήνα

**[3] J. von Neumann and O. Morgenstern (1944),** Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, NJ: Princeton University Press

**[4] Olson Mancur (2003),** Εξουσία και Ευημερία, εκδ. Παπαζήση, Αθήνα

**[5] Watson Joel (2013),** Strategy - An Introduction to Game Theory, Third Edition, WW Norton and Company, New York - London

**[6] Γέμτος Πέτρος (2015),** Θεσμοί ως Κεντρική Μεταβλητή των Κοινωνικών Επιστημών, εκδ. Παπαζήση, Αθήνα

**[7] Κοτταρίδη Κ. - Σιουρούνης Γρ. (2002),** Αφιέρωμα στον John Nash -Θεωρία Παιγνίων, εκδ. Ευρασία, Αθήνα

**[8] Πελαγίδης Θ. – Μητσόπουλος Μιχάλης (2006)** Ανάλυση της Ελληνικής Οικονομίας-Οι προσοδοθηρία και οι Μεταρρυθμίσεις, εκδ. Παπαζήση, Αθήνα

**[9] Πελαγίδης Θ. – Μητσόπουλος Μιχάλης (2010)** Η στιγμή της στροφή για την Ελληνική Οικονομία, εκδ. Παπαζήση, Αθήνα

**[10] Σολδάτος Γεράσιμος (2005),** Θεωρία Παιγνίων για Οικονομολόγους, εκδ. Πανεπιστημίου Μακεδονίας, β' έκδοση, Θεσσαλονίκη

**[11] Τσεμπελής Γιώργος (2004),** Εμφωλευμένα Παίγνια -Η Ορθολογική Επιλογή στη Συγκριτική Πολιτική, εκδ. Παπαζήση, Αθήνα

**[12] Τσεμπελής Γιώργος (2008),** Παίκτες Αρνησικυρίας -πως λειτπυργούν οι πολιτικοί θεσμοί, εκδ. Παπαζήση, Αθήνα

**[13] Φιλίνης Κώστας (2008),** Θεωρία των Παιγνίων και Πολιτική Στρατηγική, εκδ.Θεμέλιο, β' έκδοση, Αθήνα