Τ.Ε.Ι. ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής – Μεσολόγγι

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΜΠΑΓΚΟΥΤΣΑΣ

AM: 15836

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΦΩΤΕΙΝΗ ΓΡΙΒΟΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ

2019

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας θα γίνει μια επισκόπηση της βιβλιογραφίας για τον γραμμικό προγραμματισμό. Θα περιγραφεί η ιστορική εξέλιξη του γραμμικού προγραμματισμού, ο ορισμός, περιγραφή και ανάλυσης της επιχειρησιακής έρευνας και ανάλυση του μαθηματικού μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού και θα εξεταστούν τρία παραδείγματα χρήσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα γίνει εκτενής ανάλυση των χρήσεων του γραμμικού προγραμματισμού και παρουσίαση των σημαντικότερων παραγόντων του. Θα ακολουθήσει ανάλυση πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων της μεθόδου.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται ανάλυση περίπτωσης με πρακτική εφαρμογή. Ακολουθούν τα συμπεράσματα και η βιβλιογραφία.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα σχημάτων και πινάκων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Πριν ορίσουμε το γραμμικό προγραμματισμό και εισέλθουμε στο κύριο μέρος της εργασίας θα ήταν σκόπιμο να αναφέρουμε κάποια ιστορικά στοιχεία για την εξέλιξη του τομέα που θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία. Ο γραμμικός προγραμματισμός πλέον αποτελεί έναν τομέα έρευνας που έχει συνεχώς αυξανόμενη επιρροή στον επιχειρηματικό κόσμο.

Η ιστορία της επιχειρησιακής έρευνας και του γραμμικού προγραμματισμού δεν βρίσκεται μόνο στον χώρο των επιχειρήσεων.

Η λήψη αποφάσεων σαν τομέας ανάπτυξης υπολογιστικών μοντέλων χρησιμοποιήθηκε από το στρατό κατά το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, και συγκεκριμένα από τους βρετανούς. Ήταν ανάγκη να δημιουργηθούν μοντέλα λήψης αποφάσεων σε ζητήματα που δεν μπορούσε ο ανθρώπινος νους να δίνει ταχείες και ορθές απαντήσεις. Αρχικά το πρώτο ζήτημα στο οποίο έπρεπε να υπάρχει αυτόματος προγραμματισμός ήταν η διαχείριση των πόρων των βρετανικών στρατευμάτων. Η λήψη αυτής της απόφασης θα μπορούσε να εμπεριέχει πολλούς παράγοντες, όπως ο αριθμός των στρατευμάτων, η σημαντικότητα μιας μάχης και ο συνολικός αριθμός τροφίμων.

Στο στρατιωτικό μέρος η ανάπτυξη μοντέλων λήψης αποφάσεων ήταν επίσης κρίσιμη, καθώς με αυτό τον τρόπο μπορούσε να υπολογιστεί η τοποθέτηση πομπών και ραντάρ, να υπολογιστεί η βέλτιστη περιοχή τοποθέτησης βομβών κτλ. Νωρίτερα ωστόσο υπήρχαν και άλλες προσπάθειες ανάπτυξης του τομέα, όπως του οικονομολόγου Warlaw και από τους Markov και Von Newman.

Η επίλυση αυτών των ζητημάτων ωστόσο ήταν εξαιρετικά πολύπλοκη για τα μέσα της εποχής, και η πραγματικά μεγάλη ανάπτυξη του τομέα του γραμμικού προγραμματισμού και των επιχειρησιακών αποφάσεων ήρθε αρκετά αργότερα.

Ένα από τα πεδία με τα οποία ασχολείται η επιχειρησιακή έρευνα είναι η κατανομή περιορισμένων πόρων σε διάφορες δραστηριότητες κάτω από συνθήκες ρίσκου, βεβαιότητας και αβεβαιότητας.

1.2 ΧΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο γραμμικός προγραμματισμός και η επιχειρησιακή έρευνα αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο εύρεσης μιας σωστής επιλογής. Με βάση αυτή τη χρήση μπορούμε να φανταστούμε ότι υπάρχουν πολλές εφαρμογές στη βιομηχανία, στο εμπόριο, σε διάφορα κοινωνικά ζητήματα και γενικά στο σχεδιασμό δραστηριοτήτων στις οποίες καλείται ο διαχειριστής να λάβει μια απόφαση.

Με την επιχειρησιακή έρευνα στη βιομηχανία για παράδειγμα μπορούμε να συνδυάσουμε διάφορους παράγοντες επιρροής ώστε να βρούμε τη βέλτιστη λύση. Αν για παράδειγμα έχει εμφανιστεί ένα ζήτημα αποδοτικότητας στη βιομηχανία, μπορούν να αναλυθούν ζητήματα όπως η αγορά νέων μηχανημάτων, η αλλαγή προώθησης των προϊόντων, η διαχείριση του εργατικού δυναμικού κτλ. Η επιχειρησιακή έρευνα μπορεί να δώσει απάντηση στο ποια από τις διαθέσιμες επιλογές είναι η πιο συμφέρουσα με βάση το κόστος και την προβλεπόμενη αύξηση αποδοτικότητας, ή ακόμα ποιος συνδυασμός λύσεων είναι ο πιο συμφέρων.

Στις επιχειρήσεις για παράδειγμα με έναν απλό τρόπο θα μπορούσαμε να κατατάξουμε τους σημαντικότερους παράγοντες επιρροής στους παρακάτω:

- Κέρδος
- Ικανοποίηση πελατών (τιμή και ποιότητα)
- Αποδοτικότητα εργαζομένων
- Κόστος (φόροι, κόστος πωληθέντων κτλ)

Η ανάπτυξή της επιχείρησης θα πρέπει να συνδυάζει με βέλτιστο τρόπο όλους αυτούς τους επιμέρους, και συχνά αντικρουόμενους, στόχους. Για την επίλυση αυτών των προβλημάτων έχουν αναπτυχθεί αρκετά εργαλεία για τη δημιουργία μοντέλων (Ignizio & Cavalier, 1994).

1.3 ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Όπως αναφέραμε, όσο πιο πολύπλοκα τείνουν να γίνουν τα προβλήματα τόσο πιο εξειδικευμένα εργαλεία απαιτούνται. Με την ανάπτυξη της τεχνολογίας και τη χρήσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών δόθηκε τεράστια ανάπτυξη και στον τομέα της επιχειρησιακής έρευνας.

Πλέον υπάρχουν στη διάθεση των ερευνητών πολλά διαφορετικά εργαλεία παραγωγής μοντέλων και επίλυσης προβλημάτων. Μερικά από τα σημαντικότερα εργαλεία παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Γραμμικός Προγραμματισμός
Ανάλυση Ευαισθησίας
Μέθοδος Simplex
Χρονικός Προγραμματισμός
Δικτυωτή Ανάλυση
Θεωρία Αποφάσεων
Θεωρία Παιγνίων
Συστήματα Αναμονής
Δυναμικός Προγραμματισμός
Μη-Γραμμικός Προγραμματισμός
Ακέραιος Προγραμματισμός
Μαρκοβιανή Ανάλυση
Αναλυτικά Μοντέλα Προσομοίωσης
Προσομοίωση Monte-Carlo
Πιθανοτικά και Στοχαστικά Μοντέλα
Bayesian Μέθοδος
Μη-Γραμμικά Μοντέλα
Βέλτιστοι Αλγόριθμοι Εκτίμησης
Ευριστικά (Heuristic) Μοντέλα
Προσεγγιστικές Μέθοδοι
Γενετικοί Αλγόριθμοι

Πίνακας 1.1 Εργαλεία επίλυσης προβλημάτων

Ο μαθηματικός προγραμματισμός, χωρίζεται στο γραμμικό, το μη γραμμικό και τον ακέραιο προγραμματισμό. Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι αυτός που εξετάζεται σε αυτή την εργασία και με αυτόν θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο.

Παρόλα αυτά ίσως πρέπει να αναφέρουμε και τους άλλους δυο κλάδους. Καταρχήν και οι τρεις αυτοί τομείς της Επιχειρησιακής Έρευνας αποτελούνται από μια αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης και από μια σειρά περιορισμών που εκφράζουν το περιβάλλον μέσα στο οποίο θα πρέπει να κινηθούμε ώστε να λάβουμε αν όχι την σωστή τότε τη βέλτιστη απόφαση.

Ο ακέραιος λοιπόν προγραμματισμός, εφαρμόζεται όταν οι μεταβλητές του προβλήματος μπορούν να πάρουν μόνο ακέραιες τιμές, ή όταν οι μεταβλητές αυτές αναπαριστούν αποφάσεις λογικής. Δηλαδή 1 (ένα) αν πρέπει να γίνει η επένδυση ή 2 (δυο) αν δεν πρέπει να γίνει η επένδυση.

Ο μη γραμμικός προγραμματισμός, εφαρμόζεται όταν οι μερικές από τις συναρτήσεις ή και η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι γραμμικές. Συνήθως αυτού του είδους τα προβλήματα δεν έχουν συγκεκριμένο τρόπο λύσης(Μπότσαρης, 2002).

1.4 ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ο γραμμικός λοιπόν προγραμματισμός, ασχολείται για την επίλυση θεωρητικών και πρακτικών προβλημάτων βελτιστοποίησης στα όποια η μεν συνάρτηση αντικειμενικού σκοπού είναι πρώτου βαθμού, οι δε περιορισμοί του όμως εκφράζονται με ανισώσεις επίσης πρώτου βαθμού. Ο πρώτος που έλυσε τέτοιου είδους προβλήματα και που φυσικά θεωρείται ο θεμελιωτής του γραμμικού προγραμματισμού είναι ο σοβιετικός μαθηματικός L. V. Kantorovich, μαζί επίσης με τους βραβευμένους με Νόμπελ οικονομίας το 1975 Koopmans και Hitchcock, οι οποίοι θεωρούνται υπεύθυνοι για την ονομασία « γραμμικός προγραμματισμός». Οι μεγαλύτερες όμως ανακαλύψεις για αυτόν το τομέα έγιναν στην αντίπερα όχθη του ατλαντικού από τον εξαιρετικό μαθηματικό στο πανεπιστήμιο του Σικάγο τον George B. Dantzig, ο οποίος ανακάλυψε την μέθοδο simplex το 1947.

Ουσιαστικά μέσω του γραμμικού προγραμματισμού προσπαθούμε να κατανείμουμε πόρους περιορισμένου μεγέθους μεταξύ δραστηριοτήτων με τη βέλτιστη δυνατή απόδοση.

1.5 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Για να εφαρμόσουμε το γραμμικό προγραμματισμό για να επιλύσουμε κάποιο πρόβλημα είναι θεμιτό να αναπτυχθεί κάποιο μαθηματικό μοντέλο. Το μοντέλο μας βοηθάει να επεξεργαστούμε καλύτερα τα αποτελέσματα ιδιαίτερα σε περιπτώσεις μεγάλου αριθμού δεδομένων. Τα μαθηματικά μοντέλα επίσης έχουν σαφώς μεγαλύτερη ακρίβεια από τον ανθρώπινο νου, αλλά υστερούν σε περιπτώσεις που είναι χρήσιμη η εμπειρία ή τα δεδομένα δεν μπορούν να ποσοτικοποιηθούν εύκολα.

$$max/\min(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n[\leq, =, \geq]b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n[\leq, =, \geq]b_2$$
……………………………..
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n[\leq, =, \geq]b_n$$

$$x_1, x_2, \dots . x_n \geq 0$$

Σχήμα 1.1 Βασικές εξισώσεις γραμμικού προγραμματισμού

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Και

$$[c_1, \quad c_2, \quad \dots \quad c_3]$$

Το c είναι διάνυσμα γνωστών όρων ή αλλιώς παραγόντων επιρροής

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ως Α ορίζουμε τον πίνακα συντελεστών.

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Όπου το παραπάνω διάνυσμα εκφράζει τους περιορισμούς.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ως x ορίζουμε το διάνυσμα μεταβλητών της απόφασης.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν τρία βασικά βήματα πριν ξεκινήσει η επεξεργασία του προβλήματος με τη χρήση του μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού:

- Προσδιορισμός των μεταβλητών απόφασης
- Διατύπωση της αντικειμενικής συνάρτησης
- Διατύπωση των περιορισμών

Στην πρώτη φάση θα πρέπει να οριστούν οι μεταβλητές της απόφασης που παρουσιάζονται μέσω του διανύσματος x και συμβολίζονται ως x_j (j =1,2,...,n). Στην επόμενη φάση δημιουργείται η συνάρτηση που να συνδέσει τις μεταβλητές με το πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε. Ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση, η μορφή της είναι maximize f(x) ή minimize f(x), δηλαδή συνάρτηση εύρεσης μέγιστου και ελάχιστου και οι τιμές καλούνται και αυτές αντικειμενικές.

Κατόπιν ορίζονται οι περιορισμοί, που εκφράζονται μέσω ανισοτήτων ή ισοτήτων και αντιπροσωπεύονται από το διάνυσμα b. Ο περιορισμός μπορεί να οριστεί λοιπόν ως ανισότητα ή ισότητα του τύπου $f(x)>b$ ή $f(x)<b$ ή $f(x)=b$.

Ένα γραμμικό πρόβλημα στο οποίο ζητείται να βρεθεί το ελάχιστο ονομάζεται πρόβλημα ελαχιστοποίησης (minimization problem), ενώ το πρόβλημα στο όποιο ζητείται το μέγιστο ονομάζεται πρόβλημα μεγιστοποίησης (maximization problem). Από μαθηματική άποψη δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ των δυο προβλημάτων. Λόγω της ταυτότητας $\min\{f(x)\}=-\max\{-f(x)\}$ κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης και αντιστρόφως.

Ένα παράδειγμα μεγιστοποίησης θα ήταν ένα πρόβλημα που πρέπει να βελτιωθεί ο παράγοντας του κέρδους, ενώ αντίστροφα ελαχιστοποίησης θα μπορούσε να είναι ένα πρόβλημα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το κόστος(Vanderbei, 2001).

Τυπική μορφή

$$Minimize \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\; subject\ to \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_1 \quad i = 1, \dots, m \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Κανονική μορφή

$$Minimize \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\; subject\ to \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq b_1 \quad i = 1, \dots, m \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Τυπική μορφή

$$Maximize \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\; subject\ to \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_1 \quad i = 1, \dots, m \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Κανονική μορφή

$$Maximize \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\; subject\ to \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq b_1 \quad i = 1, \dots, m \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Σχήμα 1.2 Μαθηματική έκφραση των συναρτήσεων ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης αντίστοιχα

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Κάθε μοντέλο που δημιουργείται έχει κάποιες βασικές υποθέσεις. Στο μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού υπάρχου τέσσερις τέτοιες βασικές υποθέσεις, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι μια κατάσταση μπορεί να αναπαρασταθεί ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού:

Προσδιοριστικότητα

Κατά αυτή την υπόθεση θεωρούμε ότι οι παράμετροι είναι γνωστές σταθερές ποσότητες, γεγονός που στην πραγματικότητα δεν ισχύει. Δεν μπορεί να υπάρχει πάντα άριστη πληροφόρηση για μια κατάσταση και στις περισσότερες των περιπτώσεων λειτουργούμε με τις πιθανότητες εμφάνισης μιας κατάστασης, που ενέχουν μεγάλη αβεβαιότητα. Ωστόσο, η υπόθεση αυτή μπορεί να αντισταθμιστεί από τη χρήση βαθμών σημαντικότητας ή την χρήση μεγάλων περιθωρίων επαλήθευσης.

Αναλογικότητα

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται, όπως η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να είναι γραμμικές συναρτήσεις. Αυτή η υπόθεση πολλές φορές ισχύει, αλλά σε άλλες περιπτώσεις όχι. Στην οικονομία για παράδειγμα μπορεί η αύξηση παραγωγής ενός προϊόντος να συμβεί ταυτόχρονα με αύξηση ή μείωση της τιμής του.

Προσθετικότητα

Κατά αυτή την υπόθεση η αντικειμενική συνάρτηση παράγεται από τις σαφώς προσδιορισμένες μεταβλητές της, οι οποίες δεν θα πρέπει να μην είναι ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην περίπτωση εξάρτησης δεν ικανοποιείται η προσθετικότητα.

Διαιρετότητα

Κατά αυτή την υπόθεση μπορούν να γίνουν δεκτές και μη ακεραίες τιμές των μεταβλητών (Vanderbei, 2001).

1.8 Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Ο αλγόριθμος simplex λειτουργεί με γραμμικά προγράμματα σε τυποποιημένη μορφή:

Maximize

$C^T \cdot x$

Subject to

$Ax = b, x_i \geq 0$

Με $x = (x_1, \dots, x_n)$

οι μεταβλητές του προβλήματος $c = (c_1, \dots, c_n)$,

είναι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης, το A είναι ένας p × n πίνακας, και $b = (b_1, \dots, b_p)$
όπου $b_j \geq 0$.

Υπάρχει μια απλή διαδικασία για να μετατρέψετε οποιοδήποτε γραμμικό πρόγραμμα σε ένα σε τυποποιημένη μορφή. Από γεωμετρική άποψη, η περιοχή λύσεων που ορίζεται από όλες τις τιμές του x στην συνάρτηση:

$Ax = b, x_i \geq 0$

Έτσι ώστε να είναι ένα (πιθανώς μη φραγμένο) κυρτό πολύτοπο. Γίνεται χαρακτηρισμός των ακραίων σημείων ή κορυφών στο πολύτοπο, δηλαδή ένα στοιχείο $x = (x_1, \ldots, x_n)$ της εφικτής περιοχής είναι ένα ακραίο σημείο αν και μόνο αν το υποσύνολο των διανυσμάτων στήλης που συμπεριλαμβάνεται που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές καταχωρήσεις του x είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ένα τέτοιο σημείο είναι γνωστό ως βασική εφικτή λύση (BFS).

Μπορούμε να δείξουμε ότι για ένα γραμμικό πρόγραμμα σε τυποποιημένη μορφή, αν η αντικειμενική συνάρτηση έχει μια μέγιστη τιμή στην εφικτή περιοχή τότε έχει αυτή την τιμή στο (τουλάχιστον) ένα από τα ακραία σημεία. Αυτό από μόνο του μειώνει το πρόβλημα σε ένα πεπερασμένο υπολογισμών καθώς υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός ακραίων σημείων.

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι αν ένα ακραίο σημείο δεν είναι ένα μέγιστο σημείο της αντικειμενικής συνάρτησης τότε υπάρχει μια περιοχή που περιέχει το σημείο έτσι ώστε η αντικειμενική συνάρτηση να αυξάνεται στα σημεία που απομακρύνονται από το σημείο. Η simplex μέθοδος εφαρμόζει αυτή την ιδέα προχωρώντας κατά μήκος των άκρων του πολύτοπου σε ακραία σημεία με μεγαλύτερες και μικρότερες τιμές αντικειμενικής συνάρτησης. Αυτό συνεχίζεται μέχρι να επιτευχθεί η μέγιστη τιμή ή να βρεθεί μια απεριόριστη άκρη, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση. Ο αλγόριθμος τερματίζεται πάντα επειδή ο αριθμός των κορυφών στο πολύτοπο είναι πεπερασμένος.

Η λύση ενός γραμμικού προγράμματος επιτυγχάνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο βήμα, γνωστό ως Φάση I, βρίσκεται ένα ακραίο σημείο εκκίνησης. Ανάλογα με τη φύση του προγράμματος, αυτό μπορεί να είναι ασήμαντο, αλλά γενικά μπορεί να λυθεί με την εφαρμογή του αλγορίθμου simplex σε μια τροποποιημένη έκδοση του αρχικού προγράμματος. Τα πιθανά αποτελέσματα της φάσης I είναι είτε ότι διαπιστώνεται μια βασική εφικτή λύση είτε ότι η εφικτή περιοχή είναι κενή. Στην τελευταία περίπτωση το γραμμικό πρόγραμμα ονομάζεται ανέφικτο. Στο δεύτερο βήμα, φάση II, ο αλγόριθμος simplex εφαρμόζεται χρησιμοποιώντας τη βασική εφικτή λύση που βρίσκεται στην φάση I ως σημείο εκκίνησης. Τα πιθανά αποτελέσματα από τη Φάση II είναι είτε μια βέλτιστη βασική εφικτή λύση είτε μια άπειρη άκρη στην οποία η αντικειμενική λειτουργία είναι απεριόριστη κάτω (Wikipedia).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι ένα εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει τόσο προβλήματα στην καθημερινή ζωή, όσο και σε πιο επιστημονικά ζητήματα. Ένα πεδίο εφαρμογής του γραμμικού προγραμματισμού είναι η οικονομία. Συνήθως χρησιμοποιείται για να βρεθεί η ορθολογικότερη απόφαση σε περιβάλλον αβεβαιότητας.

Ήδη από την εποχή του δευτέρου παγκοσμίου πολέμου ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιούταν για λήψη αποφάσεων σε καιρό πολέμου. Αργότερα και με την μεγάλη ανάπτυξη στην οικονομία που συνέβη στον δυτικό κόσμο πολλές από τις τεχνικές που είχαν χρησιμοποιηθεί για στρατιωτικούς σκοπούς βρήκαν πεδίο εφαρμογής στην οικονομία. Από τις αρχές της δεκαετίας του ΄60 άρχισαν να εμφανίζονται οι πρώτες εφαρμογές στις επιχειρήσεις στην Βρετανία και στις ΗΠΑ. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση πολλών επιχειρησιακών προβλημάτων όπως:

- Η επιλογή προϊόντων για παραγωγή
- Η άριστη σύνθεση προϊόντων
- Ο προγραμματισμός της παραγωγής
- Ο προγραμματισμός συντήρησης μηχανών
- Ο προγραμματισμός εργατικού δυναμικού
- Προβλήματα μεταφορών
- Συγκοινωνιακά προβλήματα
- Προβλήματα δικτύων
- Ο προγραμματισμός των έργων
- Η επιλογή χαρτοφυλακίου επενδύσεων
- Η αξιολόγηση επενδύσεων
- Ο χρηματοοικονομικός προγραμματισμός
- Ο προγραμματισμός πωλήσεων

- Ο προγραμματισμός διαφημιστικής εκστρατείας
- Η εισαγωγή νέων προϊόντων
- Η κατανομή προσωπικού σε εργασίες
- Η επιλογή όπου εγκαταστάσεις επιχειρήσεις
- Ο προγραμματισμός κυκλοφορίας
- Η επιλογή ενεργειακής πολιτικής
- Προβλήματα βελτίωσης περιβάλλοντος

Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να δώσει λύση σε προβλήματα με πολλούς παρόντες επιρροής, όπως το κόστος ενός προϊόντος, η τιμή του στην αγορά, το διαθέσιμο εργατικό δυναμικό, τα διαθέσιμα μηχανήματα και ο αριθμός των προϊόντων που μπορούν να παραχθούν. Η κάθε μια από τις διαθέσιμες επιλογές της επιχείρησης θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει ορθολογική επεξεργασία των παραγόντων επιρροής, και της πιθανότητας εμφάνισης τους. Σκοπός του γραμμικού προγραμματισμού είναι από όλες τις δυνατές κατανομές των πηγών να υπολογίσουμε εκείνη ή εκείνες οι οποίες μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν μια αριθμητική ποσότητα όπως το κέρδος ή το κόστος. Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα παρουσιαστούν κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού σε επιχειρήσεις(Κούνια & Φακίνου, 1988).

2.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΧΡΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Παράδειγμα πρώτο

Έστω μια υποθετική επιχείρηση που παράγει τρια προϊόντα, που θα ονομάσουμε P_1,P_2 και P_3. Για να παραχθούν τα συγκεκριμένα προϊόντα, που στο παράδειγμα αυθαίρετα θα υποθέσουμε ότι είναι τρόφιμα, χρειάζονται τρεις πρώτες ύλες που θα ονομάσουμε A_1, A_2 και A_3 αντίστοιχα. Η τιμή των πρώτων υλών παρατίθενται στον Πίνακα 2.1:

Πρώτες ύλες	**Τιμή**
A_1	2
A_2	4
A_3	3

Πίνακας 2.1 Τιμή πρώτων υλών

Οι τιμές των προϊόντων στην αγορά παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα:

Προϊόντα	**Τιμή**

P_1	380
P_2	520
P_3	900

Πίνακας 2.2 Τιμές των προϊόντων

Για να παραχθούν τα προϊόντα χρησιμοποιούμε τις πρώτες ύλες σε ποσότητες, που αυθαίρετα θα πούμε ότι είναι κιλά, που παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα:

Πρώτες ύλες→ **Προϊόντα↓**	**A_1**	**A_2**	**A_3**
P_1	30	10	40
P_2	100	0	20
P_3	50	70	60

Πίνακας 2.3 Ποσότητες πρώτων υλών που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή κάθε προϊόντος

Οι διαθέσιμες ποσότητες πρώτων υλών είναι ένα ακόμα ζήτημα που πρέπει να επεξεργαστεί η επιχείρηση, και παρουσιάζεται σε μονάδες (κιλών) στον Πίνακα 2.4, όπως φαίνεται παρακάτω:

Πρώτες ύλες	**Διαθέσιμη ποσότητα (κιλά)**
A_1	400
A_2	600
A_3	1000

Πίνακας 2.4 Διαθέσιμες ποσότητες πρώτων υλών

Συνεπώς και με βάση τα παραπάνω μπορούμε αρχικά να υπολογίσουμε το μοναδιαίο κόστος παραγωγής κάθε προϊόντος. Στην πορεία η επιχείρηση μπορεί να υπολογίσει το ποσοστό κέρδους από κάθε προϊόν, το χρόνο στον οποίο μπορεί να παράγει το κάθε προϊόν με βάση το διαθέσιμο απόθεμα και να λάβει μια απόφαση για τις ποσότητες που θα παράγει από το κάθε προϊόν. Τα παραπάνω συμπεράσματα καλούνται να εξαχθούν με ορθολογικό τρόπο. Η ορθολογικότητα στην συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε ποια είναι η επιλογή με τα βέλτιστα οφέλη, ή η μικρότερη ζημιά. Βέλτιστο όφελος ονομάζουμε την επιλογή με το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος, και το μικρότερο δυνατό κόστος παραγωγής(Παπαρρίζος, 1999).

Πρώτες ύλες→ **Προϊόντα↓**	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**Συνολική τιμή**	**Τιμή πώλησης προς κόστος παραγωγής**
P_1	60	40	120	220	173%
P_2	200	0	60	260	200%
P_3	100	280	180	560	161%

Πίνακας 2.5 Το συνολικό κόστος παραγωγής κάθε προϊόντος με βάση τις τιμές πρώτων υλών που θέσαμε και το ποσοστό κέρδους κάθε προϊόντος

Συνδυαστικά, από το λόγο τιμής πώλησης προς κόστος παραγωγής και από τη διαθεσιμότητα των πρώτων υλών η εταιρία μπορεί να εξάγει συμπέρασμα για το ποιο προϊόν θα παράγει και σε ποιο βαθμό. Στην περίπτωση μας η συμφερότερη λύση είναι η παραγωγή του προϊόντος P1 έναντι του P2, λόγω μικρής διαθεσιμότητας της πρώτης ύλης A1.

Παράδειγμα δεύτερο

Το δεύτερο παράδειγμα αναφέρεται σε μία επιχείρηση που καλείται να βρει την ορθότερη λύση σε ένα πρόβλημα που περιέχει παράγοντες παραγωγής, το χρόνο και τον παράγοντα της αποθήκευσης των προϊόντων. Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας που περιέχει τη ζήτηση και το κόστος για τον παραγωγή του προϊόντος ανά μήνα για έξι συνεχείς μήνες:

Μήνας	**Ζήτηση**	**Κόστος**
1	100	10
2	90	15
3	130	12
4	100	14
5	120	10
6	80	15

Πίνακας 2.6 Το κόστος και η ζήτηση του προϊόντος ανά μήνα

Υπάρχει όμως και το κόστος αποθήκευσης των προϊόντων. Το κόστος θεωρείται ίδιο για κάθε μήνα και ίσο με 2. Θα πρέπει να υπολογίζεται για όλα τα προϊόντα που παρήχθησαν ή υπήρχαν αλλά δεν διατέθηκαν σε κάθε μήνα. Η επιχείρηση θα πρέπει να είναι σε θέση να ικανοποιεί τη ζήτηση, με το μικρότερο όμως δυνατό απόθεμα. Με το σωστό προγραμματισμό της παραγωγής μπορεί να επιτευχθεί η μέγιστη παραγωγικότητα χωρίς έλλειψη στη διάθεση των προϊόντων με σχεδόν μηδενικό απόθεμα.

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα θα πρέπει να ορίσουμε τις μεταβλητές μας. Θέτουμε:

P_i=η παραγωγή κάθε μήνα

D_i=Η ζήτηση κάθε μήνα

S_i=το απόθεμα στο τέλος κάθε μήνα

Και i= 1,2,3,4,5,6 η τιμή που παίρνει κάθε μήνας. Η επιχείρηση καλείται να βρει το μικρότερο δυνατό κόστος παραγωγής αποθεμάτων. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η παρακάτω:

$$D = 10P1 + 15P2 + 12P3 + 14P4 + 10P5 + 15P6 + 2(S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6)$$

Όμως υπάρχουν περιορισμοί στις μεταβλητές που παρουσιάζονται παρακάτω:

$$P1 - S1 = 100$$

$$P2 + S1 - S2 = 90$$

$$P3 + S2 - S3 = 130$$

$$P4 + S3 - S4 = 100$$

$$P5 - S4 - S5 = 120$$

$$P6 + S5 - S6 = 80$$

Για τη ζήτηση υπάρχουν οι παρακάτω περιορισμοί στις μεταβλητές

$$P1 \geq 100$$

$$P2 + S1 \geq 90$$

$$P3 + S2 \geq 130$$

$$P4 + S3 \geq 100$$

$$P5 - S4 \geq 120$$

$$P6 + S5 \geq 80$$

Τέλος, θα πρέπει τα P_i και A_i να είναι πάντα μεγαλύτερα του μηδενός. Με βάση την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς θα πρέπει να υπολογιστεί από την εταιρία ο επιθυμητός βαθμός παραγωγής, όπου να είναι ο μικρότερος δυνατός που καλύπτει τη ζήτηση(Τσάντας & Βασιλείου, 1997) .

Παράδειγμα τρίτο

Η εταιρία μας θέλει να κάνει μια επένδυση σε καλλιέργεια εσπεριδοειδών. Μόνο που σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν κριτήρια διαφορετικού βάρους και τέσσερις δυνατές μη ισότιμες επιλογές. Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι μέσω εύρεσης του ιδιοδιανύσματος, διαδικασία που δεν θα παρουσιάσουμε, αλλά θα θεωρήσουμε αυθαίρετες τιμές για τα βάρη κάθε κριτηρίου. Παρακάτω παρουσιάζονται τα τρία βασικά βήματα.

Εύρεση του στόχου:

Η επιλογή της κατάλληλης καλλιέργειας

Προσδιορισμός των κριτηρίων:

1. Ευαισθησία
2. Αρχικό κόστος (Α.Κ.)
3. Χρόνος εκκίνησης (Χ.Ε.)
4. Αποδοχή

Προσδιορισμός των εναλλακτικών λύσεων:

1. Πορτοκάλια
2. Μανταρίνια
3. Βερίκοκα
4. Ροδάκινα

Η κλίμακα για το πόσο σημαντικό θεωρείται κάθε κριτήριο αναλύεται παρακάτω:

1 = ισοδύναμο

3 = ασθενής προτίμηση

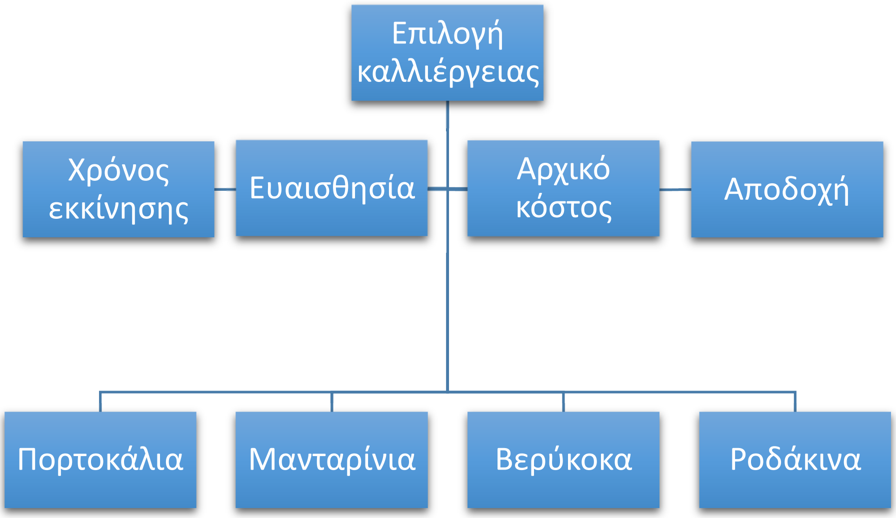
5 = ισχυρή προτίμηση

7 = πολύ ισχυρή προτίμηση

9 = απόλυτη προτίμηση

Αν για παράδειγμα το δεύτερο κριτήριο εμφανίζεται σε πίνακα και είναι τριπλάσιο του πρώτου αυτομάτως θεωρούμε ότι το κριτήριο αυτό θεωρείται ασθενώς σημαντικότερο του πρώτου κριτηρίου. Αν το τρίτο κριτήριο είναι το μισό του πρώτου τότε θεωρούμε ότι υπάρχει πολύ ασθενής υπεροχή του πρώτου.

Στο πρώτο βήμα θα παρουσιάσουμε το δέντρο απόφασης του συγκεκριμένου παραδείγματος και τον πίνακα με τις τυχαίες επιλογές σημαντικότητας των κριτηρίων του παραδείγματος.



Σχήμα 2.1 Δέντρο απόφασης στο οποίο παρουσιάζονται τα κριτήρια και οι διαθέσιμες επιλογές καλλιέργειας

Όπως μπορούμε να δούμε θεωρούμε τα κριτήρια σημαντικότερα με ασθενείς διαφορές κατά σειρά από το πρώτο στο τελευταίο. Θεωρούμε ότι τα κριτήρια σημαντικότητας έχουν τιμές όπως παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Ευαισθησία	0,104505
Α.Κ.	0,209009
Χ.Ε.	0,268468
Αποδοχή	**0,418018**

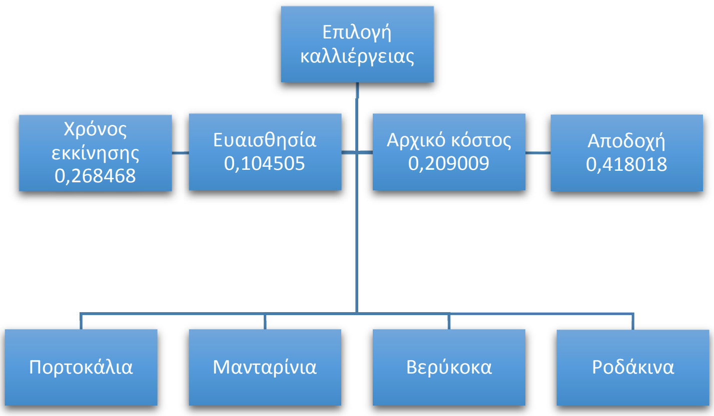
Πίνακας 2.7 Τα βάρη κάθε κριτηρίου

Για να δούμε ποια είναι η επικρατέστερη εναλλακτική λύση κάνουμε πολλαπλασιασμό των παραπάνω δύο πινάκων, ξεκινώντας από τον πίνακα 1Χ4 με πίνακα 4Χ4 που περιέχει συγκριτικά τα βάρη με τη μορφή ιδιοδιανυσμάτων και προκύπτει ότι:

Πορτοκάλια	**0,326016**
Μανταρίνια	0,228713
Βερίκοκα	0,152802
Ροδάκινα	0,29247

Πίνακας 2.8 Οι τελικές τιμές για την επιλογή της καλλιέργειας

Όπου εμφανίζεται ως επικρατέστερη επιλογή η καλλιέργεια πορτοκαλιών. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται ορθολογικό καθώς είναι η επικρατέστερη επιλογή στο κριτήριο με το μεγαλύτερο βάρος, που είναι η αποδοχή από το αγοραστικό κοινό. Σε αυτή τη φάση το δέντρο λήψης απόφασης έχει την παρακάτω μορφή:



Σχήμα 2.2 Δέντρο απόφασης όμοιο του Σχήματος 2.1 με επιπλέον την προσθήκη των βαρών κάθε κριτηρίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΧΡΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

3.1 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι ο κλάδος του μαθηματικού προγραμματισμού ο οποίος έχει σχεδιαστεί για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης, όπου όλοι οι περιορισμοί καθώς και οι στόχοι εκφράζονται ως γραμμικές διαδικασίες. Αναπτύχθηκε από τον George B. Denting το 1947. Η πρώτη εφαρμογή του αφορούσε αποκλειστικά τις δραστηριότητες εντός του δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου. Ωστόσο, σύντομα η σημασία του αναγνωρίστηκε και κατέλαβε εξέχουσα θέση στη βιομηχανία και το εμπόριο.

Ο γραμμικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται για τη λήψη αποφάσεων σε συνθήκες βεβαιότητας, δηλαδή όταν είναι γνωστοί όλοι οι παράγοντες επιρροής σε για ένα πρόβλημα και ποσοτικοποιούνται επίσης οι στόχοι της επιχείρησης και οι περιορισμοί. Από αυτή τη διαδικασία επιλέγεται μία από όλες τις πιθανές εναλλακτικές λύσεις που αποφέρουν τα βέλτιστα αποτελέσματα. Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ως μηχανισμός επαλήθευσης και ελέγχου για την εξακρίβωση της ακρίβειας και της αξιοπιστίας των αποφάσεων που λαμβάνονται αποκλειστικά βάσει της εμπειρίας ενός διαχειριστή, χωρίς τη βοήθεια ενός μαθηματικού μοντέλου.

3.2 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια μέθοδος σχεδιασμού που χρησιμοποιείται για την κατασκευή ενός μοντέλου μιας πραγματικής κατάστασης που έχει τα ακόλουθα στοιχεία:

1. Μεταβλητές που υποδηλώνουν τις διαθέσιμες επιλογές
2. Τις σχετικές μαθηματικές εκφράσεις που αφορούν τις μεταβλητές

Οι παράγοντες επιρροής θα πρέπει να αντικατοπτρίζουν με σαφήνεια τα κριτήρια που πρέπει να χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση των οφελών που απορρέουν από κάθε πορεία δράσης και να εκφράζουν με ακριβή τρόπο τον στόχο του οργανισμού.

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι η ανάλυση των προβλημάτων στα οποία μια γραμμική συνάρτηση ενός αριθμού μεταβλητών πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της βέλτιστης επιλογής (μέγιστη ή ελάχιστη) όταν οι μεταβλητές της υπόκεινται σε ορισμένους περιορισμούς.

Από τους παραπάνω ορισμούς, είναι σαφές ότι:

- Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια τεχνική βελτιστοποίησης, όπου ο βασικός στόχος είναι είτε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη ή να ελαχιστοποιήσει το κόστος.
- Ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των πεπερασμένων περιορισμένων πόρων μεταξύ των διαφόρων ανταγωνιστικών δραστηριοτήτων με τον βέλτιστο τρόπο(Vanderbei, 2001).

3.3 ΧΡΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο γραμμικός προγραμματισμός υπάρχει για να παράγει λύσεις που βασίζονται στην λειτουργία και τα χαρακτηριστικά της πραγματικής κατάστασης. Ως εκ τούτου, το εύρος χρήσεων του γραμμικού προγραμματισμού είναι πολύ μεγάλο, και βρίσκει εφαρμογή σε διάφορους τομείς όπως το μάρκετινγκ, την παραγωγή, τη διαχείριση ανθρώπινων πόρων κ.λπ.

Ο γραμμικός προγραμματισμός έχει μεγάλη επιτυχία στην επίλυση των ακόλουθων τύπων προβλημάτων:

- Προβλήματα σχεδιασμού προϊόντων
- Προβλήματα προγραμματισμού επενδύσεων
- Διαχείριση προβλημάτων σε σύνθετα προβλήματα συνδυασμού υλικών
- Μάρκετινγκ

Ακόμα κι αν ο γραμμικός προγραμματισμός έχει ποικίλες εφαρμογές, όλα τα προβλήματα που μπορεί να επιλύσει έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Στόχος είναι πάντα ο ίδιος (δηλαδή μεγιστοποίηση του κέρδους ή ελαχιστοποίηση του κόστους)
- Παρουσία περιορισμών που προσδιορίζουν το βαθμό στον οποίο μπορεί να επιτευχθεί ο στόχος
- Διαθεσιμότητα εναλλακτικών λύσεων, δηλαδή διαφορετικές πορείες δράσης από τις οποίες μπορεί επιλεγεί μία ή περισσότερες
- Οι στόχοι και οι περιορισμοί μπορούν να εκφράζονται μέσω μιας γραμμικής σχέσης

Ανεξάρτητα από το μέγεθος ή την πολυπλοκότητα, όλα τα προβλήματα του γραμμικού προγραμματισμού έχουν την ίδια μορφή, δηλαδή λειτουργεί κατανέμοντας τους περιορισμένους πόρους μεταξύ των διαφόρων ανταγωνιστικών εναλλακτικών λύσεων. Ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο ορίζουμε το γραμμικό προγραμματισμό, ένα πρόβλημα πρέπει να έχει συγκεκριμένα βασικά χαρακτηριστικά πριν χρησιμοποιηθεί αυτή η τεχνική για να βρει τις βέλτιστες τιμές.

Τα χαρακτηριστικά ή οι βασικές παραδοχές του γραμμικού προγραμματισμού είναι οι εξής:

Οι μεταβλητές απόφασης και η αλληλεξάρτησή τους

Οι μεταβλητές απόφασης ή παράγοντες επιρροής αναφέρονται σε οποιαδήποτε δραστηριότητα που είναι σε ανταγωνισμό με άλλες μεταβλητές για περιορισμένους πόρους. Παραδείγματα τέτοιων μεταβλητών δραστηριότητας είναι: υπηρεσίες, έργα, προϊόντα κ.λπ. Αυτές οι μεταβλητές είναι πιο συχνά αλληλένδετες από ότι ορίζουμε μέσω μιας απλής γραμμικής σχέσης, και συχνά προκύπτει ανάγκη συνδυαστικής λύσης. Είναι απαραίτητο όμως να διασφαλιστεί ότι η σχέση μεταξύ αυτών των μεταβλητών είναι γραμμική.

Αντικειμενικότητα και ποσοτικοποίηση στόχου

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού απαιτεί έναν σαφώς καθορισμένο στόχο. Θα πρέπει να μπορεί να εκφραστεί ως γραμμική λειτουργία των μεταβλητών απόφασης. Η βελτιστοποίηση ενός στόχου είναι μία από τις σημαντικότερες προϋποθέσεις του γραμμικού προγραμματισμού. Παραδείγματα τέτοιων στόχων μπορεί να είναι: ελαχιστοποίηση κόστους, πωλήσεις, κέρδη ή μεγιστοποίηση των εσόδων κ.λπ.

Περιορισμένοι παράγοντες

Αυτός ο περιορισμός αναφέρεται στα διαφορετικά είδη περιορισμών που προκύπτουν από τα στοιχεία του προβλήματος που δεν μπορούν να ξεπεράσουν συγκεκριμένες τιμές, δεν μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια ή αποτελούν απρόβλεπτους παράγοντες. Τέτοια ζητήματα είναι η διαθεσιμότητα μηχανών ή άλλων εξαρτημάτων, ο αριθμός των διαθέσιμων εργατοωρών, η παραγωγική ικανότητα του προσωπικού, η ζήτηση ενός προϊόντος, ή ακόμα και η πορεία της διεθνούς οικονομίας.

Αυτοί οι περιοριστικοί παράγοντες πρέπει να είναι δυνατόν να εκφράζονται ως γραμμικές εξισώσεις.

Παρουσία διαφορετικών εναλλακτικών λύσεων

Σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού ο διαχειριστής θα πρέπει να έχει στη διάθεση του όσο δυνατόν περισσότερες διαθέσιμές εναλλακτικές λύσεις. Δεν είναι όμως εφικτό να βρεθούν ή να υπολογιστούν όλες οι διαθέσιμες λύσεις. Για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα εύρεσης της λιγότερο κοστοβόρας παραγωγής και καλύτερης διάθεσης προϊόντων υπάρχουν λύσεις που είναι εύκολο να υπολογιστούν. Για παράδειγμα η ίδια πρώτη ύλη μπορεί να αγοραστεί από διαφορετικούς προμηθευτές, τα τελικά προϊόντα μπορούν να πωλούνται σε διάφορες αγορές, η παραγωγή μπορεί να γίνει με τη βοήθεια μηχανών ή και όχι. Όλοι αυτοί οι παράγοντες είτε δεν είναι απόλυτα γνωστοί, είτε αποτελούν ξεχωριστά προβλήματα από μόνοι τους.

Μη-Αρνητικοί Παράγοντες

Δεδομένου ότι οι αρνητικές τιμές σε μια φυσική ποσότητα δεν έχουν κανένα νόημα, όλες οι μεταβλητές θα πρέπει να λαμβάνουν μη αρνητικές τιμές. Αν κάποια από τις μεταβλητές είναι απαραιτήτως αρνητική, ο περιορισμός μη αρνητικότητας μπορεί να αρθεί από ορισμένα μαθηματικά εργαλεία χωρίς να η ουσία της μεταβλητής ή οι πληροφορίες που μας δίνονται από την τιμή.

Κριτήριο γραμμικότητας

Η σχέση μεταξύ των διαφόρων μεταβλητών απόφασης πρέπει να είναι ευθέως ανάλογη. Τόσο ο στόχος όσο και οι περιορισμοί, θα πρέπει να εκφράζονται σε γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις. Για παράδειγμα οι τιμές των συντελεστών παραγωγής (όπως τα υλικά, η εργασία, η ικανότητα των φυτών κλπ) θα πρέπει να οδηγούν με ένα αναλογικό τρόπο στο τελικό αποτέλεσμα, που πιθανώς είναι χρηματικές μονάδες. Αυτές οι γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις μπορούν γραφικά να παρουσιαστούν ως ευθείες γραμμές.

Συμπληρωματικότητα

Θεωρείται δεδομένο ότι η συνολική τιμή κάθε μεταβλητής θα είναι ακριβώς ίση με το άθροισμα των μεμονωμένων μεταβλητών. Έτσι, η λειτουργία ή οι δραστηριότητες πρέπει να είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους. Επίσης οι πιθανότητες εμφάνισης μιας συγκεκριμένης κατάστασης θα πρέπει να έχουν άθροισμα 1.

Κριτήριο αποκλεισμού

Όλες οι παράμετροι απόφασης και οι μεταβλητές θεωρούμε ότι λειτουργούν αποκλειστικά σε μια εξεταζόμενη περίπτωση. Δηλαδή, δεν μπορούν να συμβούν στον ίδιο χρόνο δυο ανταγωνιστικά γεγονότα.

Διαιρετότητα

Στις μεταβλητές μπορούν να αποδοθούν κλασματικές τιμές, ακόμα και σε άρρητους. Δηλαδή δεν είναι απαραίτητα πάντα σε ακέραιους αριθμούς. Η συγκεκριμένη κατάσταση μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες στον προγραμματισμό. Συνεπώς, οι συνεχείς τιμές των μεταβλητών απόφασης και των πόρων πρέπει να είναι αποδεκτές για την επίτευξη βέλτιστης λύσης.

Βεβαιότητα

Υποτίθεται ότι οι συνθήκες βεβαιότητας υπάρχουν. Όλες οι σχετικές παράμετροι ή συντελεστές στο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού είναι πλήρως γνωστοί και δεν αλλάζουν κατά τη διάρκεια της περιόδου. Ωστόσο, μια τέτοια υπόθεση μπορεί να μην είναι αληθής ανά πάσα στιγμή.

Παραδοχές

Ο γραμμικός προγραμματισμός υποθέτει την ύπαρξη ενός πεπερασμένου αριθμού δραστηριοτήτων και περιορισμών χωρίς τα οποία δεν είναι δυνατόν να βρεθεί η βέλτιστη λύση(Vanderbei, 1994) .

3.4 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Παρακάτω αναφέρουμε μερικά πλεονεκτήματα της προσέγγισης γραμμικού προγραμματισμού:

Επιστημονική προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι η εφαρμογή της επιστημονικής προσέγγισης για την επίλυση προβλημάτων. Ως εκ τούτου καταλήγει σε μια καλύτερη και αληθή εικόνα των προβλημάτων, η οποία μπορεί στη συνέχεια να αναλυθεί εκτενέστερα από το διαχειριστή που λαμβάνει την απόφαση. Δηλαδή, ανεξάρτητα από τη λύση, η διαδικασία ανάλυσης του προβλήματος παρουσιάζει ενδιαφέρον.

Αξιολόγηση όλων των πιθανών εναλλακτικών λύσεων

Τα περισσότερα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι επιχειρήσεις είναι εξαιρετικά περίπλοκα και είναι δύσκολο να λυθούν με την παραδοσιακή προσέγγιση στη λήψη αποφάσεων. Η τεχνική του γραμμικού προγραμματισμού εξασφαλίζει ότι θα αναλυθούν όλες οι πιθανές λύσεις, πριν βρεθεί η βέλτιστη.

Βοηθάει στην επαναξιολόγηση

Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για αξιολόγηση ενός αρχικού σχεδίου σε συνθήκες μη προβλεπόμενων αλλαγών. Σε περίπτωση που αλλάξουν οι συνθήκες, ενώ το πρόγραμμα εκτελείται μόνο εν μέρει, οι όροι αυτοί μπορούν να προσδιοριστούν με ακρίβεια με τη βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού, έτσι ώστε να προσαρμοστεί και το υπόλοιπο του σχεδίου για καλύτερα αποτελέσματα.

Ποιότητα απόφασης

Ο γραμμικός προγραμματισμός παρέχει πρακτικές για καλύτερη ποιότητα αποφάσεων, που παρουσιάζουν με μεγάλη ακρίβεια τα όρια ενός συστήματος. Δηλαδή, βρίσκονται οι συνθήκες και οι διάφοροι περιορισμοί υπό τους οποίους το σύστημα πρέπει να λειτουργεί για να είναι μια λύση η βέλτιστη.

Ταχύτητα παραγωγής λύσεων σε περιπτώσεις κρίσεων

Σε αυτή την εφαρμογή φαίνεται η σημαντικότητα του γραμμικού προγραμματισμού. Κατά τη διάρκεια περιόδων συμφόρησης, μπορούν να συμβούν πολλά γεγονότα στο τμήμα παραγωγής που να απαιτούν άμεση λύση για αποκατάσταση της παραγωγικότητας. Μερικά από τα μηχανήματα παραμένουν αδρανή για μεγάλο χρονικό διάστημα, ενώ οι άλλες μηχανές δεν είναι σε θέση να παράγουν με μέγιστη απόδοση. Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να δώσει άμεσες λύσεις για την επανεκκίνηση της παραγωγής ή για την εύρεση της άμεσης λύσης για ταχύτερη επαναλειτουργία.

Πολυχρηστικότητα

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια προσαρμοστική και ευέλικτη μαθηματική τεχνική και ως εκ τούτου μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση διάφορων πολυδιάστατων προβλημάτων αρκετά επιτυχώς.

Δημιουργία βάσης πληροφοριών

Με την αξιολόγηση των διαφόρων πιθανών εναλλακτικών λύσεων σε διάφορα είδη προβλημάτων, το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού παρέχει μια σημαντική βάση δεδομένων από την οποία μπορεί να προκύψει παραγωγή γνώσης(Nazareth, 1996).

3.5 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Παρόλο που ο Γραμμικός προγραμματισμός είναι εξαιρετικά επιτυχημένος και έχει ευρείες εφαρμογές στις επιχειρήσεις και το εμπόριο για την επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης, έχει κάποια ελαττώματα και περιορισμούς.

Μερικά από τα σημαντικά ελαττώματα στην εφαρμογή του γραμμικού προγραμματισμού έχουν είναι τα εξής:

Γραμμική σχέση

Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία μόνο σε εκείνες τις περιπτώσεις όπου ένα δεδομένο πρόβλημα μπορεί σαφώς να παρουσιαστεί με τη μορφή της γραμμικής σχέσης μεταξύ των διαφόρων μεταβλητών απόφασης. Ως εκ τούτου, στηρίζεται στη σιωπηρή παραδοχή ότι ο στόχος όπως και όλοι οι περιορισμοί ή οι περιοριστικοί παράγοντες υπόκεινται σε γραμμικές σχέσεις, γεγονός που δεν ισχύει σε πραγματικές καταστάσεις. Στην πράξη τα προβλήματα των επιχειρήσεων, πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις και περιορισμοί δεν μπορούν να εκφραστούν γραμμικά. Τα περισσότερα επιχειρησιακά προβλήματα μπορούν να εκφραστούν αρκετά εύκολα με τη μορφή μιας τετραγωνικής εξίσωσης και όχι με όρους γραμμικής εξίσωσης. Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτυγχάνει να λειτουργήσει και να βρει τη βέλτιστη λύση σε όλες αυτές τις περιπτώσεις.

Π.χ. Ένα πρόβλημα που μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

όπου το $\boldsymbol{a \neq 0}$

Τότε δεν μπορεί να επιλυθεί με τη βοήθεια των τεχνικών του γραμμικού προγραμματισμού.

Αντικειμενικές εξισώσεις

Πριν ένα πρόβλημα αναλυθεί με γραμμικό προγραμματισμό οι τιμές ή οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς και οι εξισώσεις περιορισμού πρέπει να είναι απόλυτα γνωστές. Επιπλέον, ο γραμμικός προγραμματισμός υποθέτει ότι αυτές οι τιμές είναι σταθερές για μια χρονική περίοδο. Με άλλα λόγια, αν οι τιμές υπάρχει πιθανότητα να μεταβληθούν κατά τη διάρκεια της περιόδου της μελέτης, η τεχνική θα χάσει την αποτελεσματικότητά της και μπορεί να αποτύχει να παράσχει τις βέλτιστες λύσεις για το πρόβλημα.

Εντούτοις, στις πρακτικές καταστάσεις της πραγματικής ζωής συχνά δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν με απόλυτη βεβαιότητα οι συντελεστές αντικειμενικής λειτουργίας και οι εξισώσεις περιορισμού. Αυτές οι μεταβλητές στην πραγματικότητα μπορεί να βρίσκονται σε μια καμπύλη κατανομής πιθανοτήτων και ως εκ τούτου στην καλύτερη περίπτωση, μπορεί να προβλεφθεί μόνο μια προσεγγιστική αναπαράστασή τους. Συχνά η αλλαγή των τιμών οφείλεται τόσο σε εξωτερικούς όσο και σε εσωτερικούς παράγοντες κατά την περίοδο της μελέτης. Λόγω αυτού, υπάρχουν περιορισμοί στην εφαρμογή των εργαλείων γραμμικού προγραμματισμού.

Κλασματικές τιμές

Δεν υπάρχει απολύτως καμία βεβαιότητα ότι η λύση σε ένα πρόβλημα μπορεί πάντοτε να καταλήξει ακέραιος αριθμός και αρκετά συχνά, ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να δώσει κλασματικές τιμές ως απαντήσεις, οι οποίες στρογγυλοποιούνται στον επόμενο ακέραιο αριθμό. Ως εκ τούτου, η λύση δεν είναι η βέλτιστη λύση. Για παράδειγμα, για την εξεύρεση λύσης στο πρόβλημα του πόσοι άνθρωποι πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να εκτελέσουν μια εργασία, μια μη ακέραιη τιμή δεν έχει κανένα νόημα.

Βαθμός πολυπλοκότητας

Πολλά πρακτικά προβλήματα στην πραγματική ζωή δεν μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού, ακόμη και με τη βοήθεια ενός υπολογιστή. Αυτό συμβαίνει γιατί μπορεί η περιγραφή του προβλήματος να απαιτεί εξαιρετικά πολύπλοκούς και χρονοβόρους υπολογισμούς. Οι υποθέσεις και οι προσεγγίσεις πρέπει να γίνουν έτσι ώστε το δεδομένο πρόβλημα να μπορεί να αναλυθεί σε αρκετά μικρότερα προβλήματα και στη συνέχεια να λυθεί χωριστά. Ως εκ τούτου, η αξιοπιστία του τελικού αποτελέσματος, σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, μπορεί να είναι αμφίβολη.

Προσδιορισμός του στόχου

Οι μακροπρόθεσμοι στόχοι μιας επιχείρησης δεν περιορίζονται σε ένα μόνο στόχο. Μια επιχείρηση, σε οποιοδήποτε σημείο του χρόνου λειτουργίας της έχει μια πολλαπλότητα στόχων και ιεραρχία στόχων, οι οποίοι πρέπει να επιτευχθούν με μια προτεραιότητα για τη μακροπρόθεσμη ανάπτυξή της. Μερικοί από τους κοινούς στόχους μπορεί να είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους ή η ελαχιστοποίηση του κόστους, η αύξηση του μεριδίου αγοράς, η ποιοτική εξυπηρέτηση κτλ.

Σε περιπτώσεις όπου η διαχείριση έχει αντικρουόμενους πολλαπλούς στόχους, το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού δεν παρέχει τη βέλτιστη λύση. Ο λόγος είναι ότι, σύμφωνα με τις τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού, υπάρχει μόνο ένας στόχος που μπορεί επιτευχθεί στην αντικειμενική συνάρτηση. Ως εκ τούτου, σε τέτοιες περιπτώσεις, η κατάσταση ή το συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει να λυθεί με τη βοήθεια μιας διαφορετικής τεχνικής μαθηματικού προγραμματισμού που ονομάζεται Goal Programming.

Δυσκολία ανανέωσης

Μόλις το πρόβλημα προσδιοριστεί σωστά και εκφραστεί η αντικειμενική συνάρτηση και οι εξισώσεις περιορισμού, τα εργαλεία του γραμμικού προγραμματισμού εφαρμόζονται σε αυτό και παράγουν μια λύση. Μετά είναι πολύ δύσκολο το σύστημα να ενσωματώσει τις αλλαγές που προκύπτουν λόγω οποιαδήποτε αλλαγής στις παραμέτρους απόφασης. Ως εκ τούτου, στερείται της επιθυμητής λειτουργικής ευελιξίας.

3.6 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Σε πολλές οικονομίες, και ιδιαίτερα στις αναπτυσσόμενες, υπάρχουν διάφοροι στόχοι αλλά περιορισμένοι πόροι που μπορούν να διατεθούν. Επομένως, ο υπεύθυνος χάραξης πολιτικής αντιμετωπίζει το πρόβλημα της ανεπαρκούς κατανομής των πόρων για την αντιμετώπιση των διαφόρων ανταγωνιστικών αντικρουόμενων στόχων. Οι παραδοσιακές και οι συμβατικές μέθοδοι δεν μπορούν πλέον να εφαρμοστούν στις μεταβαλλόμενες συνθήκες για την επίλυση αυτού του προβλήματος και, ως εκ τούτου, χάνουν γρήγορα τη σημαντικότητά τους στην σημερινή οικονομία. Ως εκ τούτου, οι πολιτικοί συνεχώς και διαρκώς αναζητούν αντικειμενικές τεχνικές για τη σωστή λήψη αποφάσεων, οι οποίες μπορούν να είναι αποτελεσματικές σε όλα τα επίπεδα οικονομικού σχεδιασμού. Οι μη προγραμματισμένες αποφάσεις συνίστανται στην επέκταση της παραγωγικής ικανότητας, στη θέση ενός εργοστασίου, στη διαφοροποίηση της γραμμής προϊόντων, στην επέκταση, στην ανακαίνιση και τον εκσυγχρονισμό κλπ. Από την άλλη, οι προγραμματισμένες αποφάσεις συνίστανται στον προϋπολογισμό, την αντικατάσταση, την προμήθεια κτλ.

Σε αυτές τις σύγχρονες εποχές, οι οικονομολόγοι σε ολόκληρο τον κόσμο έχουν αναπτύξει πολλές νέες μεθόδους, τεχνικές και εργαλεία. Όλα αυτά τα ευρήματα αποτελούν τη βάση της έρευνας των επιχειρήσεων. Ορισμένες από αυτές τις γνωστές ερευνητικές τεχνικές λειτουργιών έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία στην οικονομία όπως: επιχειρηματικές προβλέψεις, μοντέλα αποθεμάτων, πιθανοτικά μοντέλα, γραμμικός προγραμματισμός, προγραμματισμός στόχων, προγραμματισμός ακεραίων και δυναμικός προγραμματισμός κλπ.

Οι κύριες εφαρμογές των τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού, στο πλαίσιο της οικονομίας είναι οι εξής:

Δημιουργία οικονομικού πλάνου

Η προσέγγιση Γραμμικού προγραμματισμού και οικονομετρικά μοντέλα χρησιμοποιούνται σε διάφορους διαφορετικούς τομείς, όπως: σχεδιασμός παραγωγής τροφίμων και αποθήκευση, μεταφορές ακόμα και σε κλίμακα κράτους, κτλ. Μπορούμε να πούμε ότι ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να αποτελέσει ένα σημαντικό βοηθητικό κυρίως εργαλείο για την κατασκευή οικονομικού πλάνου.

Τομέας μεταφορών

Τα λεοφωρεία και οι σιδηρόδρομοι, είναι ένας τομέας που οι παράγοντες επιρροής του επιτρέπουν την εφαρμογή γραμμικού προγραμματισμού.

Τομέας Γεωργίας

Η προσέγγιση γραμμικού προγραμματισμού χρησιμοποιείται επίσης ευρέως στη γεωργία. Εκτός της παραγωγής και της αποθήκευσης των τροφίμων, έχει δοκιμαστεί σε περιορισμένη κλίμακα για την επιλογή καλλιεργειών. Έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για να εξακριβωθεί το βέλτιστο μείγμα λιπασμάτων.

Αεροπορική Βιομηχανία

Οι αεροπορικές εταιρείες χρησιμοποιούν επίσης το γραμμικό προγραμματισμό για την επιλογή των δρομολογίων και την κατανομή των αερομεταφορών σε διάφορες επιλεγμένες διαδρομές. Ο γραμμικός προγραμματισμός αποδείχθηκε πολύ χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων.

Εμπορικά Ιδρύματα

Τα εμπορικά ιδρύματα, καθώς και οι ατομικές επιχειρήσεις χρησιμοποιούν επίσης τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού για τη μεγιστοποίηση του κέρδους. Τα διυλιστήρια πετρελαίου χρησιμοποιούν αυτή την τεχνική για την πραγματοποίηση αποτελεσματικών και βέλτιστων αποφάσεων ανάμειξης και για τη βελτίωση των τελικών προϊόντων.

Χημικές βιομηχανίες

Διάφορες βιομηχανίες επεξεργασίας όπως η βιομηχανία χρωμάτων λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με την επιλογή του συνδυασμού προϊόντων και αποθήκευσης τους με τη μέθοδο του γραμμικού προγραμματισμού(Jiri, 2006).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

4.1 ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΠΡΟΕΡΓΑΣΙΑ

Όλα τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού έχουν τέσσερα κοινά χαρακτηριστικά:

Τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν ή να ελαχιστοποιήσουν κάποια ποσότητα (συνήθως κέρδος ή κόστος). Αναφερόμαστε σε αυτήν την ιδιότητα ως αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Ο κύριος στόχος μιας τυποποιημένης επιχείρησης είναι να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της μακροπρόθεσμα. Στην περίπτωση ενός συστήματος διανομής φορτηγών ή αεροπορικών εταιρειών, ο στόχος μπορεί να είναι η ελαχιστοποίηση των εξόδων αποστολής.

Η ύπαρξη περιορισμών μειώνει το βαθμό στον οποίο μπορούμε να επιτύχουμε τον στόχο μας. Για παράδειγμα, η απόφαση για το πόσες μονάδες κάθε προϊόντος θα παραχθούν στη γραμμή παραγωγής μιας επιχείρησης περιορίζεται από το διαθέσιμο εργατικό δυναμικό και τα μηχανήματα. Επομένως, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε μια ποσότητα (η αντικειμενική συνάρτηση) που υπόκειται σε περιορισμένους πόρους (τους περιορισμούς).

Πρέπει να υπάρχουν εναλλακτικά σχέδια δράσης για να επιλέξουμε. Για παράδειγμα, εάν μια εταιρεία παράγει τρία διαφορετικά προϊόντα, η διοίκηση μπορεί να χρησιμοποιήσει το γραμμικό προγραμματισμό για να αποφασίσει πως να κατανείμει τους περιορισμένους παραγωγικούς πόρους (εργατικού δυναμικού, μηχανημάτων κλπ.). Αν δεν υπήρχαν εναλλακτικές λύσεις από τις οποίες μπορούμε να επιλέγουμε, δεν θα χρειαζόταν αυτή η διαδικασία.

Ο στόχος και οι περιορισμοί των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού πρέπει να εκφράζονται με γραμμικές εξισώσεις ή ανισότητες.

4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μία από τις πιο συνηθισμένες εφαρμογές γραμμικού προγραμματισμού είναι το πρόβλημα δύο ή περισσότερων εναλλακτικών παραγόντων. Δύο ή περισσότερα προϊόντα παράγονται συνήθως με περιορισμένους πόρους. Η εταιρεία θέλει να καθορίσει πόσες μονάδες κάθε προϊόντος πρέπει να παράγει για να μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος, δεδομένων των περιορισμένων πόρων της. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

4.2.1 Παράδειγμα εταιρίας ηλεκτρονικών ειδών

Η εταιρεία A Electronics παράγει δύο προϊόντα: (1) ένα Walkman, δηλαδή ένα φορητό CD/ DVD player και (2) την τηλεόραση Mini-TV, που είναι μια μικρή φορητή τηλεόραση χειρός. Η διαδικασία παραγωγής για κάθε προϊόν είναι παρόμοια, δεδομένου ότι και τα δύο απαιτούν ορισμένο αριθμό ωρών εργασίας για την κατασκευή τους και ορισμένο αριθμό ωρών εργασίας στο τμήμα συναρμολόγησης. Κάθε Walkman απαιτεί 4 ώρες κατασκευαστικής εργασίας και 2 ώρες στο κατάστημα συναρμολόγησης. Κάθε Mini-TV απαιτεί 3 ώρες σε κατασκευαστική εργασία και 1 ώρα στη συναρμολόγηση. Κατά την τρέχουσα περίοδο παραγωγής είναι διαθέσιμες 240 ώρες κατασκευής και 100 ώρες του τμήματος συναρμολόγησης. Κάθε πώληση Walkman αποφέρει κέρδος 7 ευρώ. Κάθε Mini-TV που παράγεται μπορεί να πωληθεί για 5 ευρώ.

Το πρόβλημα της εταιρίας είναι να καθορίσει τον καλύτερο δυνατό συνδυασμό Walkman και τηλεοράσεων για να φτάσει στο μέγιστο κέρδος. Αυτή η κατάσταση συνδυασμού προϊόντων μπορεί να διατυπωθεί ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

ΩΡΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΜΙΑΣ ΜΟΝΑΔΑΣ			
	WALKMANS (X1)	MINI-TVS (X2)	ΔΙΑΘΕΣΙΜΕΣ ΩΡΕΣ
Ώρες κατασκευής	4	3	240
Ώρες συναρμολόγησης	2	1	100
Κέρδος ανά μονάδα (ευρώ)	7	5	

Πίνακας 4.1 Συνολικά οι παράγοντες του προβλήματος παρουσιασμένοι σε μήτρα αποτελεσμάτων

Αρχίζουμε με την περίληψη των πληροφοριών που απαιτούνται για τη διατύπωση και επίλυση αυτού του προβλήματος (βλ. Πίνακα 4.1). Παρακάτω θα εισαγάγουμε κάποιες απλές σημειώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στην αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς.

Ονομάζουμε:

X1 = αριθμός Walkmans που πρόκειται να παραχθούν

X2 = αριθμός τηλεοράσεων που πρόκειται να παραχθούν

Τώρα μπορούμε να δημιουργήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση μέγιστου κέρδους για την εταιρία ηλεκτρονικών Α ως συνάρτηση των X1 και X2:

Μέγιστο κέρδος (ευρώ)= 7*X1 + 5*X2

Το επόμενο βήμα μας είναι να αναπτύξουμε μαθηματικές σχέσεις για να περιγράψουμε τους δύο περιορισμούς σε αυτό το πρόβλημα. Μια γενική σχέση σε ένα πρόβλημα περιορισμένων πόρων περιγράφει ότι το ποσό ενός πόρου που χρησιμοποιείται πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με (≤) το ποσό του διαθέσιμου πόρου.

Πρώτος περιορισμός:

Ο χρόνος κατασκευής που χρησιμοποιείται < διαθέσιμος χρόνος κατασκευής

4*X1 + 3*X2 <240 (ώρες κατασκευής)

Δεύτερος περιορισμός:

Ο χρόνος συναρμολόγησης που χρησιμοποιείται < διαθέσιμος χρόνος συναρμολόγησης

2*X1 + 1*X2 <100 (ώρες συναρμολόγησης)

Και οι δύο αυτοί περιορισμοί αντιπροσωπεύουν περιορισμούς παραγωγικής ικανότητας και φυσικά, επηρεάζουν το συνολικό κέρδος. Για παράδειγμα, η A Electronics δεν μπορεί να παράγει 70 Walkmans κατά τη διάρκεια της περιόδου παραγωγής, επειδή εάν X1 = 70, και οι δύο περιορισμοί θα παραβιαστούν. Δεν μπορεί επίσης να κάνει X1 = 50 Walkmans και X2 = 10 τηλεοράσεις παρακολούθησης. Αυτός ο περιορισμός αναδεικνύει μια άλλη σημαντική πτυχή του γραμμικού προγραμματισμού. Δηλαδή, ότι υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μεταβλητών. Οι περισσότερες μονάδες ενός προϊόντος που παράγει μια επιχείρηση, πρέπει να είναι τόσες ώστε να μπορούν να παραχθούν και τα άλλα προϊόντα.

4.2.2 Γραφική επίλυση του προβλήματος

Ο ευκολότερος τρόπος για την επίλυση ενός μικρού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού όπως αυτό της εταιρείας A Electronics είναι η προσέγγιση της γραφικής λύσης. Η γραφική επίλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν υπάρχουν δύο μεταβλητές απόφασης (όπως ο αριθμός Walkmans για παραγωγή και ο αριθμός τηλεοράσεων). Όταν υπάρχουν περισσότερες από δύο μεταβλητές, δεν είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε τη λύση σε ένα γράφημα δύο διαστάσεων. Τότε πρέπει να στραφούμε σε πιο σύνθετες προσεγγίσεις.

Γραφική παρουσίαση των περιορισμών

Για να βρούμε τη βέλτιστη λύση σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε μια περιοχή εφικτών λύσεων. Το πρώτο βήμα είναι να σχεδιάσουμε τους περιορισμούς του προβλήματος σε γραφήματα. Όλα τα παρακάτω γραφήματα του κεφαλαίου έγιναν με τη βοήθεια του δωρεάν λογισμικού Graph 4.4.

Η μεταβλητή X1 (Walkmans, στο παράδειγμά μας) συνήθως απεικονίζεται ως ο οριζόντιος άξονας του γραφήματος και η μεταβλητή X2 (Mini-TVs) απεικονίζεται ως ο κάθετος άξονας. Το πλήρες πρόβλημα μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής:

Μέγιστο κέρδος =7*X1 + 5*X2

Περιορισμοί

4*X1 + 3*X2 <240 (περιορισμός κατασκευής)

2*X1 + 1*X2 <100 (περιορισμός συναρμολόγησης)

X1> 0 (ο αριθμός των Walkmans που παράγονται είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το 0)

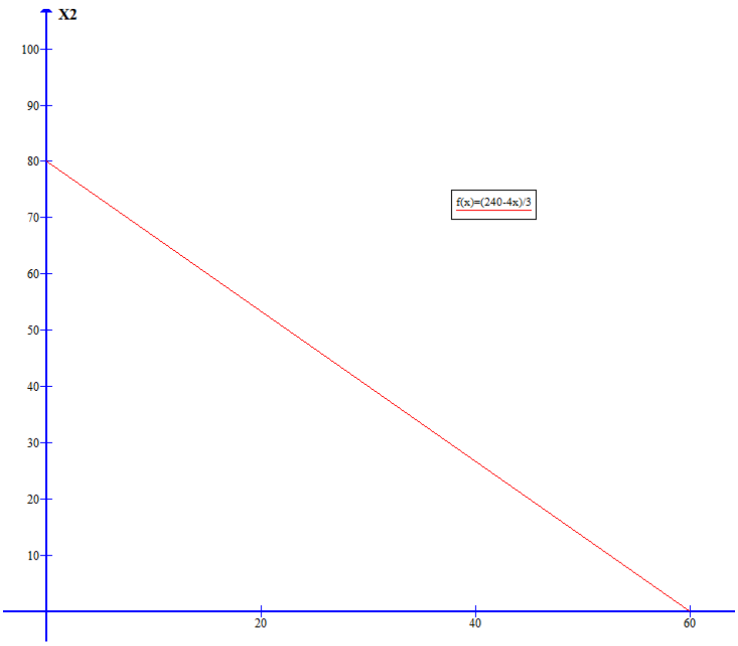
X2> 0 (ο αριθμός των παραγόμενων τηλεοράσεων είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το 0)

Το πρώτο βήμα στη γραφική απεικόνιση των περιορισμών του προβλήματος είναι η μετατροπή των ανισοτήτων περιορισμού σε εξισώσεις.

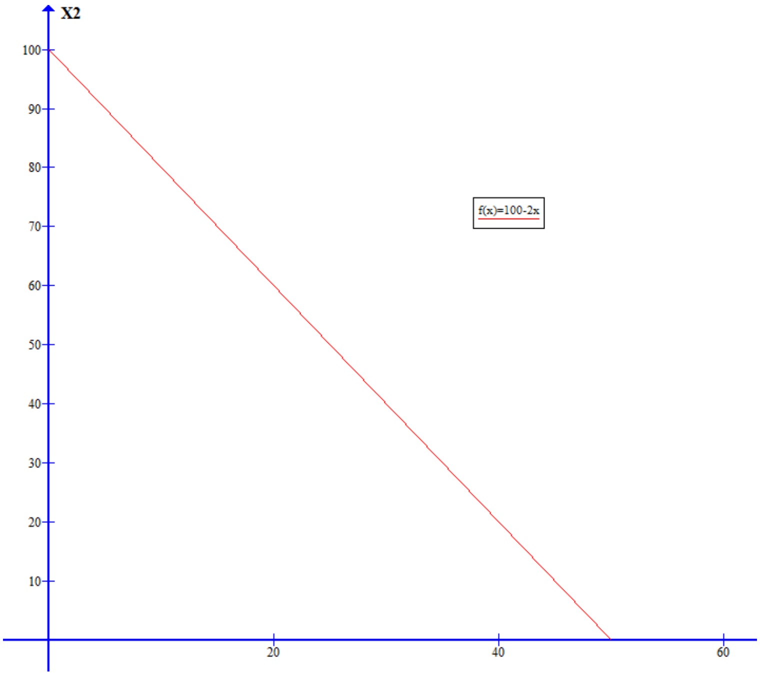
Περιορισμός Α: 4*X1 + 3*X2 = 240

Περιορισμός Β: 2*X1 + 1*X2 = 100

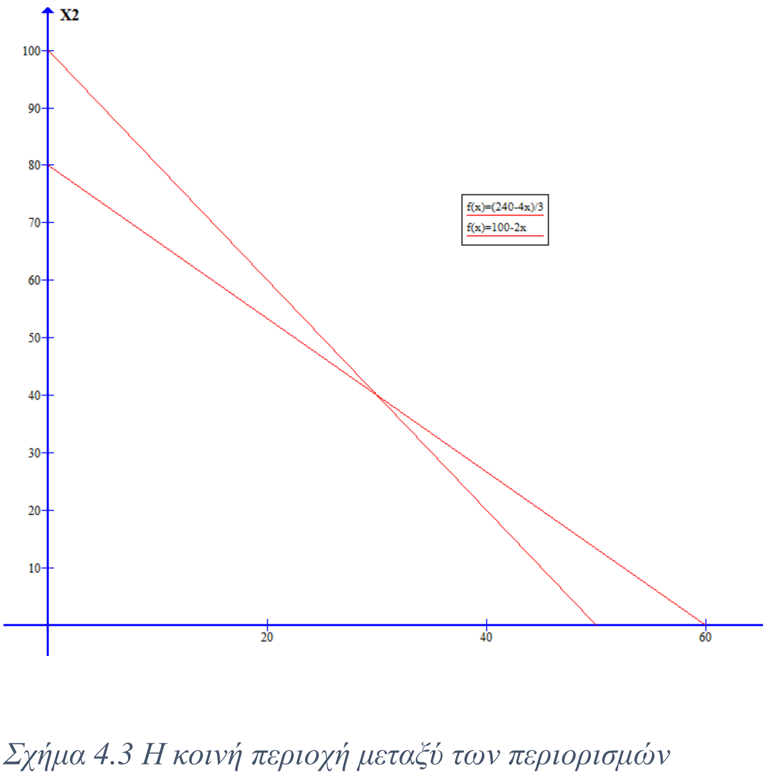
Η εξίσωση για τον περιορισμό Α απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 4.1 και για τον περιορισμό Β στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.1 Περιορισμός Α



Σχήμα 4.2 Περιορισμός Β



Σχήμα 4.3 Η κοινή περιοχή μεταξύ των περιορισμών

Για να σχεδιάσουμε τη γραμμή στο Σχήμα 4.1, το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε τα σημεία στα οποία η γραμμή 4X1 + 3X2 = 240 τέμνει τους άξονες X1 και X2. Όταν X1 = 0 (η θέση όπου η γραμμή αγγίζει τον άξονα X2), αυτό σημαίνει ότι 3*X2 = 240 και ότι X2 = 80. Ομοίως, όταν X2 = 0, βλέπουμε ότι 4*X1 = 240 και ότι X1 = 60. Έτσι, ο περιορισμός Α ορίζεται από τη γραμμή που τρέχει από (X1 = 0, X2 = 80) έως (X1 = 60, X2 = 0). Η περιοχή μεταξύ των αξόνων και της ευθείας αντιπροσωπεύει όλα τα σημεία που ικανοποιούν την αρχική ανισότητα.

Ο περιορισμός Β απεικονίζεται παρομοίως στο Σχήμα 4.2. Όταν X1 = 0, τότε X2 = 100. Όταν το X2 = 0 τότε X1 = 50. Η περιοχή μεταξύ των αξόνων και της ευθείας αντιπροσωπεύει την αρχική ανισότητα.

Το Σχήμα 4.3 δείχνει και τους δύο περιορισμούς. Η περιοχή μεταξύ των αξόνων και εντός και των δύο ευθειών με ακραίο σημείο το σημείο τομής είναι το μέρος που ικανοποιεί και τους δύο περιορισμούς. Η περιοχή αυτή στο Σχήμα 4.3 ονομάζεται περιοχή εφικτών λύσεων ή απλά η εφικτή περιοχή. Η περιοχή αυτή πρέπει να ικανοποιεί όλους τους όρους που καθορίζονται από τους περιορισμούς του προγράμματος και επομένως είναι η περιοχή στην οποία επικαλύπτονται όλοι οι περιορισμοί. Οποιοδήποτε σημείο στην περιοχή θα ήταν μια εφικτή λύση στο πρόβλημα της εταιρίας A Electronics. Οποιοδήποτε σημείο εκτός της συγκεκριμένης περιοχής θα αποτελούσε ανέφικτη λύση. Ως εκ τούτου, θα ήταν εφικτή η κατασκευή 30 Walkmans και 20 τηλεοράσεων (X1 = 30, X2 = 20), άλλά αδύνατη η παραγωγή 70 Walkmans και 40 τηλεοράσεων. Αυτό μπορεί να φανεί σχεδιάζοντας αυτά τα σημεία στο γράφημα του Σχήματος 4.3.

4.2.3 Μέθοδος λύσης Iso-Profit Line

Τώρα που έχει καταγραφεί η εφικτή περιοχή, μπορούμε να προχωρήσουμε στην εξεύρεση της βέλτιστης λύσης στο πρόβλημα. Η βέλτιστη λύση είναι το σημείο που βρίσκεται στην εφικτή περιοχή που παράγει το υψηλότερο κέρδος.

Μόλις δημιουργηθεί η εφικτή περιοχή, μπορούν να ληφθούν διάφορες λύσεις για την επίλυση της βέλτιστης λύσης. Ο πιο γρήγορος τρόπος που μπορεί να εφαρμοστεί ονομάζεται μέθοδος γραμμής ισοζυγίου κέρδους ή iso-profit line.

Ξεκινάμε θεωρώντας τα κέρδη ίσα με κάποιο αυθαίρετο αλλά μικρό ποσό. Για το πρόβλημα αυτο, μπορούμε να επιλέξουμε ένα κέρδος 210 ευρώ. Αυτό είναι ένα επίπεδο κέρδους που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί χωρίς να παραβιαστεί κανένας από τους δύο περιορισμούς. Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως:

$$210 = 7*X1 + 5*X2$$

Αυτή η συνάρτηση είναι μια εξίσωση ευθείας. Την ονομάζουμε γραμμή ισοζυγίου κέρδους. Αντιπροσωπεύει όλους τους συνδυασμούς (των Χ1, Χ2) που θα αποδώσουν συνολικό κέρδος 210. Για να σχεδιάσουμε τη γραμμή κέρδους, προχωρούμε ακριβώς όπως κάναμε για να σχεδιάσουμε μια γραμμή περιορισμού.

Θεωρούμε ότι Χ1=0 και προκύπτει:

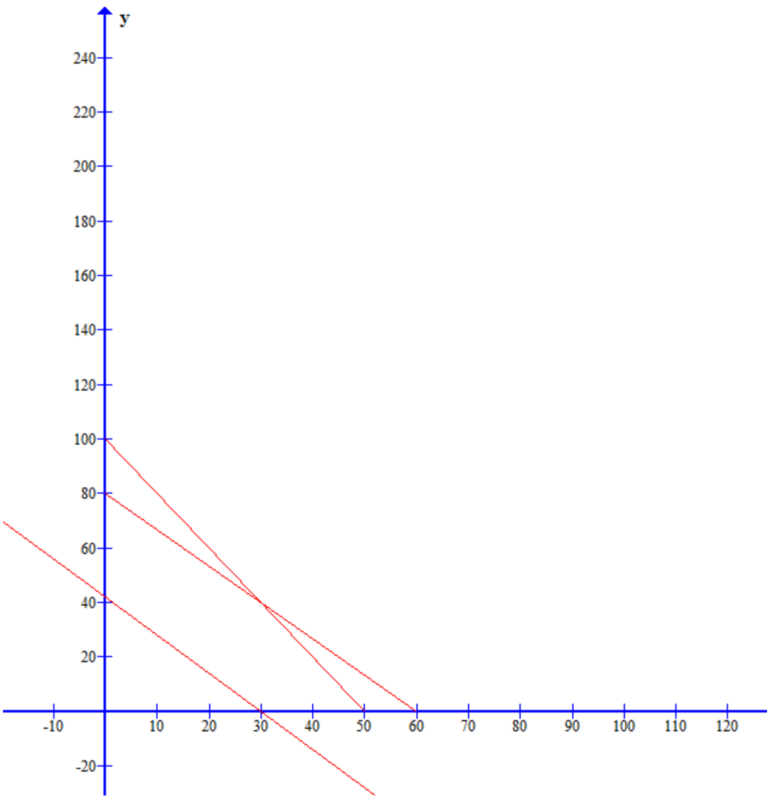
210 = 7 *0 +5*X2

X2 = 42 τηλεοράσεις

Στη συνέχεια θεωρούμε το Χ2 = 0 και λύνουμε ως προς Χ1:

210 =7*X1 + 5*0

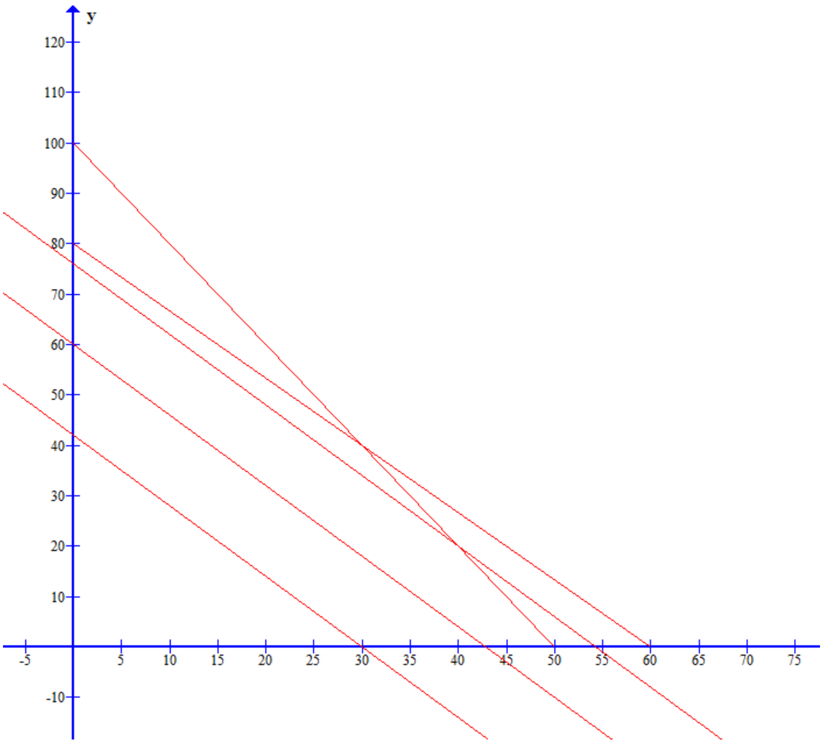
X1 = 30 Walkmans



Σχήμα 4.4 Η γραμμή κέρδους που επιλέξαμε για την αυθαίρετη τιμή 210

Μπορούμε τώρα να συνδέσουμε αυτά τα δύο σημεία με μια ευθεία γραμμή. Αυτή η γραμμή κέρδους απεικονίζεται στο Σχήμα 4.4. Όλα τα σημεία στη γραμμή αντιπροσωπεύουν εφικτές λύσεις που αποφέρουν κέρδη 210 ευρώ.

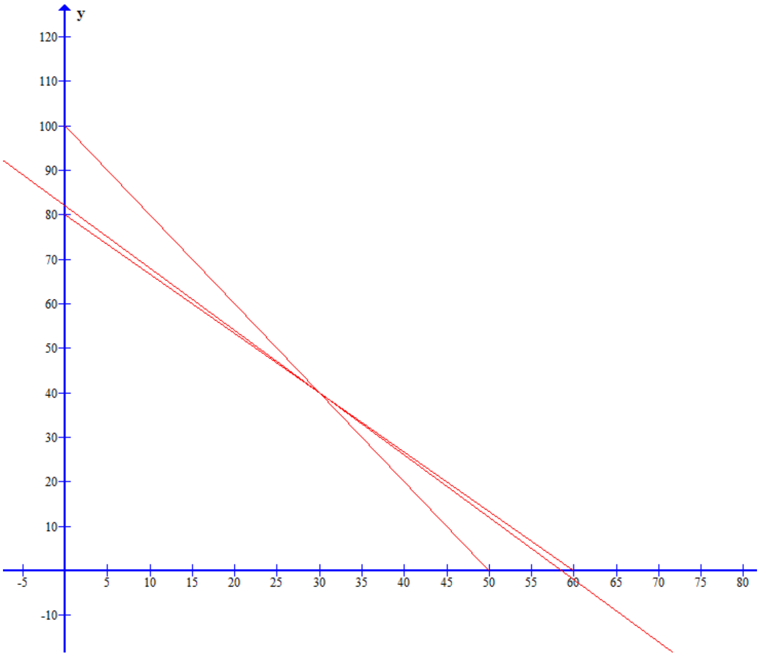
Βλέπουμε, ωστόσο, ότι η γραμμή ισοζυγίου κέρδους για 210 δεν παράγει το υψηλότερο δυνατό κέρδος στην επιχείρηση. Στο Σχήμα 4.5, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε δύο ακόμη γραμμές, με την καθεμιά να δίνει μεγαλύτερο κέρδος.



Σχήμα 4.5 Τυχαίες ευθείες που αντιστοιχούν σε κέρδος καθώς πλησιάζουμε τη μέγιστη τιμή

Όσο μακρύτερα κινούμαστε από την αρχή των αξόνων, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το κέρδος μας. Ένα άλλο σημαντικό σημείο που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι αυτές οι γραμμές ισοζυγίου κέρδους είναι παράλληλες. Τώρα έχουμε δύο ενδείξεις για το πως θα βρούμε τη βέλτιστη λύση στο αρχικό πρόβλημα. Μπορούμε να σχεδιάσουμε μια σειρά παράλληλων γραμμών κέρδους (μετακινώντας προσεκτικά την ευθεία μας σε ένα επίπεδο παράλληλο με την πρώτη γραμμή κέρδους). Η υψηλότερη γραμμή κέρδους που εξακολουθεί να αγγίζει κάποιο σημείο της εφικτής περιοχής θα εντοπίσει τη βέλτιστη λύση.

Η υψηλότερη δυνατή γραμμή ισοζυγίου κέρδους παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.6. Αγγίζει την άκρη της εφικτής περιοχής στο σημείο γωνίας (X1 = 30, X2 = 40) και αποφέρει κέρδος 410.



Σχήμα 4.6 Μέγιστη τιμή κέρδους 410 ευρώ που αντιπροσωπεύεται από την ενδιάμεση ευθεία μεταξύ των ευθειών περιορισμών Α και Β

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια τεχνική που ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής περιορισμένων πόρων σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες καθώς και με αλλά προβλήματα που έχουν παραπλήσια μαθηματική διαμόρφωση. Είναι ένα εργαλείο μεγάλης σημασίας για εμπορικούς και βιομηχανικούς οργανισμούς. Ακόμα επειδή σχεδόν κάθε κοινωνικός οργανισμός αντιμετωπίζει προβλήματα περιορισμένων πόρων υπάρχει μια διαρκώς αυξανόμενη αναγνώριση της πλατιάς εφαρμογής της τεχνικής αυτής σε μια σωρεία προβλημάτων της καθημερινότητας.

Είναι αλήθεια ότι η μέθοδος simplex έχει περάσει πια στο περιθώριο καθώς νέες μέθοδοι και καινούρια λογισμικά προγράμματα εμφανίζονται ωστόσο είναι πάντα μια μέθοδος εύκολη άμεση και πάντα αποτελεσματική για σχετικά εύκολα και με λίγες μεταβλητές προβλήματα.

Ωστόσο, αποτελεί μια βασική μέθοδο ανάλυσης και επίλυσης προβλημάτων, που για οποιαδήποτε επιχείρηση θέλει να δημιουργήσει εξαρχής τις βάσεις για ανάπτυξη ενός συστήματος διαχείρισης και λήψης αποφάσεων θεωρούμε ότι είναι απαραίτητη.

Στο πρακτικό μέρος της εργασίας δεν αντιμετωπίσαμε κανένα πρόβλημα, και στο θεωρητικό υπήρχε άφθονη διαθέσιμη βιβλιογραφία. Ίσως η χρησιμότερη μέθοδος από αυτές που αναλύθηκαν ήταν η γραφική επίλυση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΡΩΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

James P.Ignizio, Tom M. Cavalier (1994), Linear Programming

Χαράλαμπος Ε.Μπότσαρης, (2002),Επιχειρησιακή Έρευνα Τόμος Ι

Robert J. Vanderbei, (2001), Linear Programming: Foundations and Extensions, Part 3

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Παπαρρίζος Κ. (1999), "Γραμμικός Προγραμματισμός, Αλγόριθμοι και Εφαρμογές”. Εκδόσεις ΖΥΓΟΣ, Θεσσαλονίκη

Τσάντας Ν και Βασιλείου Π. , (1997), "Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα. Αλγόριθμοι και Εφαρμογές” . Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη

Πραστάκος Γ., (1994), "Επιχειρησιακή Έρευνα για την Λήψη Επιχειρηματικών Αποφάσεων. Α: Μαθηματικός Προγραμματισμός”. Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα-Πειραιάς

Κούνια Σ. και Φακίνου Δ.,(1988),’’Γραμμικός Προγραμματισμός, Θεωρία και Ασκήσεις ”. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΤΡΙΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Vanderbei, R. (2001). Linear Programming: Foundations and Extensions, Part 3

Vanderbei, R. (1994). Interior-point methods: algorithms and formulations

Nazareth, J. (1996). The implementation of linear programming algorithms based on homotopies

Jiri, M. (2006), Understanding and Using Linear Programming