Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Μεσολογγίου

Τμήμα Μηχανολογίας και Υδάτινων Πόρων

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΜΟΥΤΣΙΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΤΣΑΛΠΑΤΟΥΡΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑ

Πτυχιακή εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής: Ε.Ε. Τζιρτζιλάκης, Επίκουρος Καθηγητής

Εξεταστές: *Ν. Μπατσούλας, Καθηγητής,*

Γ. Παναγόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής

Μεσολόγγι

Ιούνιος 2012

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολογίας και Υδάτινων Πόρων του ΤΕΙ Μεσολογγίου δεν υποδηλώνει απαραιτήτως και αποδοχή των απόψεων των συγγραφέων εκ μέρους του Τμήματος.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ - ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία χωρίζεται σε 4 κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο μελετώνται προβλήματα βελτιστοποίησης προβλημάτων που μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετώνται προβλήματα που περιγράφονται από συναρτήσεις δύο μεταβλητών και τρίτο κεφάλαιο μελετώνται προβλήματα βελτιστοποίησης που μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας συναρτήσεις δύο μεταβλητές με περιορισμούς ή χωρίς περιορισμούς. Στα τρία πρώτα κεφάλαια η έννοια της βελτιστοποίησης προβλήματος ανάγεται στην εύρεση ακροτάτων (μεγίστων ή ελαχίστων) των αντίστοιχων συναρτήσεων που εκφράζουν το εκάστοτε πρόβλημα. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται προβλήματα τα οποία μοντελοποιούνται χρησιμοποιώντας την αλγεβρική επίλυση η την μέθοδο simplex.

Ευχαριστίες εκφράζουμε στους γονείς μας και σε όσους μας στήριξαν. Επίσης θέλουμε να ευχαριστήσουμε τον επιβλέποντά μας, επίκουρο καθηγητή του τμήματος Μηχανολογίας και Υδάτινων Πόρων του ΤΕΙ Μεσολογγίου Τζιρτζιλάκη Ευστράτιο για την άριστη συνεργασία που μας επέδειξε, την βοήθεια που μας παρείχε, καθώς και τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε για να επιτευγχθεί με επιτυχία η παρούσα εργασία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βελτιστοποίηση συναρτήσεων μιας μεταβλητής και εφαρμογές

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για τη μεθοδολογία βελτιστοποίησης μιας μεταβλητής, δηλαδή την εύρεση ακροτάτων για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες που αφορούν τα είδη συναρτήσεων μιας μεταβλητής, και την παραγώγιση συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε παραδείγματα και εφαρμογές της βελτιστοποίησης σε συγκεκριμένα ρεαλιστικά προβλήματα. [Τζιρτζιλάκης Ε., 2008, Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ. και Ρεκούμης Κ. 2007, Αλιμπινίσης Α., Γρηγοριάδης Σ., Ευσταθόπουλος Ε., Κλαουδάτος Ν., Παπασταυρίδης Σ. και Σβέρκος Α., 2005, Ανδεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπαταυρίδης Σ. και Πολύζος Γ. 2001]

1.1 Στοιχεία Θεωρίας

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μια ισότητα που συνδέει δυο μεταβλητές όπως π.χ. $y = 2x$, καθορίζει μια διαδικασία με την οποία *σε κάθε* τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται μια μόνο τιμή της μεταβλητής y. Αυτή τη διαδικασία την ονομάζουμε ***συνάρτηση.***

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω Α ένα υποσύνολο του R. ***Πραγματική συνάρτηση*** ονομάζουμε, με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (f), με την οποία κάθε στοιχειό x Є Α αντιστοιχίζεται μόνο σε ένα πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f_{(x)}$.

ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Τα βασικότερα είδη συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται σε απλά προβλήματα είναι:

1. Η ***σταθερή*** συνάρτηση: $f(x) = a_0$.
2. Η ***γραμμική*** συνάρτηση: $f(x) = a_1 x + a_0$.
3. Η ***πολυωνυμική*** συνάρτηση:
   $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$
4. Η ***ρητή*** συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ όπου $f(x), g(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις.
5. Οι ***τριγωνομετρικές*** συναρτήσεις:
   π.χ. $f(x) = \cos(ax), f(x) = \sin(bx), f(x) = \tan(cx), f(x) = \cot(cx)$.
6. Οι ***εκθετικές*** συναρτήσεις:
   π.χ. $f(x) = e^{ax}, f(x) = b^x$
7. Οι ***υπερβολικές*** συναρτήσεις:

π.χ. υπερβολικό ημιτόνιο $\sinh(ax) = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$,

υπερβολικό συνημίτονο $\cosh(bx) = \dfrac{e^{bx} - e^{-bx}}{2}$.

8. Οι ***λογαριθμικές*** συναρτήσεις: π.χ. $\ln(ax)$

9. Οι ***άρρητες*** συναρτήσεις: π.χ. $\sqrt{f(x)}$, όπου $f(x)$ μια από τις παραπάνω συναρτήσεις.

ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της ορίζει μια νέα συνάρτηση, την παράγωγό της, την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε σαν αφετηρία για να ελέγξουμε την παραγωγισιμότητά της. Αν και αυτή είναι παραγωγίσιμη, τότε η παράγωγος της ορίζει μια νέα συνάρτηση που ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της αρχικής. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ορίσουμε παραγώγους οποιασδήποτε τάξης. Συμβολίζουμε την παράγωγο δεύτερης τάξης, με δυο τόνους δηλαδή με f''.

Παράδειγμα

Αν $f(x) = x^2 + 2x + 3$

Η πρώτη παράγωγος είναι:

$f'(x) = \left(x^2 + 2x + 3\right)' = 2x + 2$

οπότε η δεύτερη παράγωγος:

$f''(x) = \left(2x + 2\right)' = 2$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. Η παράγωγος γινομένου σταθεράς c επί τη συνάρτηση $f(x)$ ισούται με την σταθερά c επί την παράγωγο της $f(x)$, δηλαδή:

$$\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$$

2. Η παράγωγος του αθροίσματος δυο συναρτήσεων ισούται με το άθροισμα των παραγώγων τους, δηλαδή:

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

3. Η παράγωγος της αφαίρεσης δυο συναρτήσεων ισούται με:

$$\left(f(x)-g(x)\right)'=f'(x)-g'(x)$$

4. Η παράγωγος του γινομένου δυο συναρτήσεων ισούται με:

$$\left(f(x)*g(x)\right)'=f'(x)*g(x)+f(x)*g'(x)$$

5. Η παράγωγος του πηλίκου δυο συναρτήσεων ισούται με:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

6. Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης f(g(x)) ισούται με την παράγωγο της f στην θέση g(x), επί την παράγωγο της g (x), δηλαδή:

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)*g'(x)$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$c'=0$ όπου c σταθερά

$$\left(x^a\right)'=ax^{(a-1)},\quad a\in \mathrm{R}$$

$$\left(\sin x\right)'=\cos x$$

$$\left(cosx\right)'=-\sin x$$

$$\left(\tan x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\cot x\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = -\sinh x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\left(\sqrt[n]{x^k}\right)' = \left(x^{\frac{k}{n}}\right)' = \frac{k}{n} x^{\frac{k}{n}-1}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ο όρος ακρότατα που ανήκει στο Λογισμό των Μεταβολών, χαρακτηρίζει τις τιμές «μέγιστη» και «ελάχιστη» που ενδεχόμενα μπορεί να παίρνει μια πραγματική συνάρτηση μιας ή περισσοτέρων πραγματικών μεταβλητών.

ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f:\Delta \to R$, όπου $\Delta \leq R$. Θα λεμέ ότι, η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $\xi \in \Delta$ τοπικό μέγιστο τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα (α,β) που περιέχει το ξ

και που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού Δ της συνάρτησης f, δηλαδή: $\xi \in (\alpha, \beta) \leq \Delta$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$, $\forall \chi \in (\alpha, \beta)$. Την τιμή $f(\xi)$ την ονομάζουμε ***τοπικό μέγιστο*** της συνάρτησης f.

ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : \Delta \to R$, όπου $\Delta \leq R$. Θα λεμέ ότι, η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $\xi \in \Delta$ τοπικό ελάχιστο τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta) \leq \Delta$ που περιέχει το ξ και τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Την τιμή $f(\xi)$ την ονομάζουμε ***τοπικό ελάχιστο*** της συνάρτησης f.

ΤΟΠΙΚΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟ

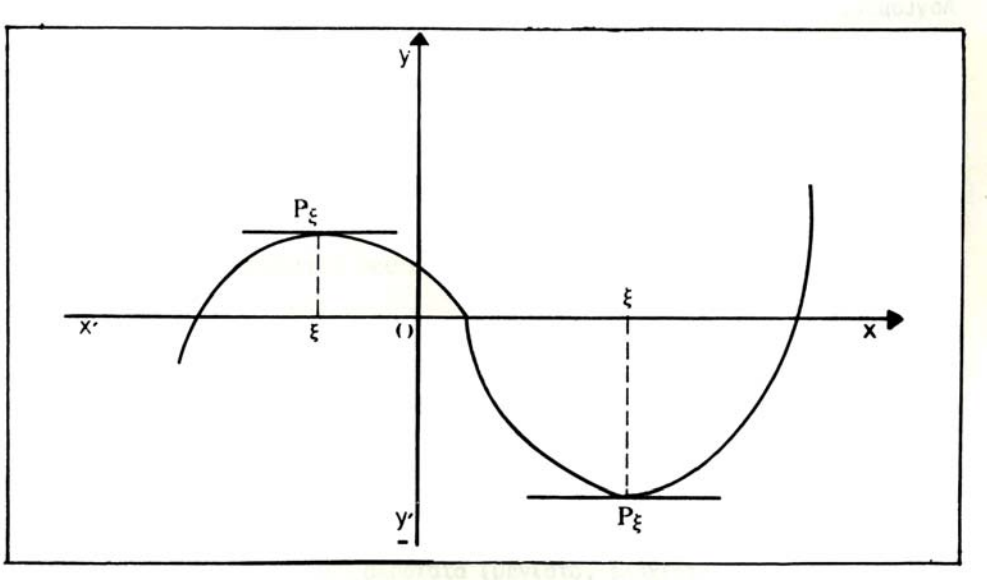
Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : \Delta \to R$, όπου $\Delta \leq R$. Θα λεμέ ότι, η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $\xi \in \Delta$ ***τοπικό ακρότατο*** τότε και μόνο τότε, αν αυτή παρουσιάζει στο σημείο $\xi \in \Delta$ τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

ΟΛΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : \Delta \to R$, όπου $\Delta \leq R$. Θα λεμέ ότι, η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $\xi \in \Delta$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο**, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει: $f(x) \leq f(\xi)$, $\forall x \in \Delta$. Την τιμή την $f(\xi)$ ονομάζουμε ***ολικό μέγιστο*** ή ***μέγιστη τιμή*** της συνάρτησης f.

ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f:\Delta \to R$, όπου $\Delta \leq R$. Θα λεμέ ότι, η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $\xi \in \Delta$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο**, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει: $f(x) \geq f(\xi)$, $\forall x \in \Delta$. Την τιμή $f(\xi)$ την ονομάζουμε ***ολικό ελάχιστο*** ή ***ελάχιστη τιμή*** της συνάρτησης f.



Σχήμα 1.1.1: το σημείο ξ από τα αριστερά του σημείου Ο βλέπουμε ότι δείχνει το τοπικό μέγιστο ή το ολικό μέγιστο, ενώ από τα δεξιά του σημείου Ο δείχνει το τοπικό ελάχιστο ή ολικό ελάχιστο στο διάγραμμα που βλέπουμε.

1.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.2.1:

Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα της κάτωθι συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x-2}$$

Λύση:

Παίρνουμε την παράγωγο της $f(x)$, και εφαρμόζουμε την παράγωγο του πηλίκου.

Ο περιορισμός που έχουμε είναι: $D(f)=R-\{2\}$

Οπότε έχουμε:

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-4x+5\right)'*(x-2)-\left(x^2-4x+5\right)*(x-2)'}{(x-2)^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{(2x-4)*(x-2)-\left(x^2-4x+5\right)}{(x-2)^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-4x-4x+8-x^2+4x-5}{(x-2)^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

Εξετάζουμε τα σημεία για τα οποία $f'(x)=0$ έχουμε:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

Άρα:

$$\Delta=(-4)^2-4*1*3=16-12=4$$

Και ως γνωστό οι λύσεις x1, x2 δίνονται από τον τύπο $\chi_{(1,2)}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Άρα έχουμε:

$$x(1,2)=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2*1}\Rightarrow$$

$$x(1)=\frac{4+2}{2}=3 \text{ ή } x(2)=\frac{4-2}{2}=1$$

Υπάρχουν δύο τρόποι διερεύνησης των πιθανών ακρότατων $x(1)$ και $x(2)$

Α' τρόπος

$f'(x) > 0 \Rightarrow$

$$\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

για $\Delta = \beta^2 - 4*\alpha*\gamma \;\Rightarrow\; \Delta = (-4)^2 - 4*1*3 \;\Rightarrow\; \Delta = 4$ έχουμε:

Για τις αντίστοιχες λύσεις $x_{1,2}$, έχουμε:

$$x(1,2) = \frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2*1} \Rightarrow$$

$$x(1,2) = \frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow$$

$$x(1) = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{ή} \quad \mathrm{x}(2) = \frac{4-2}{2} = 1$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε τα ακρότατα κατασκευάζουμε το παρακάτω πινακάκι:

	+∞ 1	1 3	3 -∞
F'(X)	+	-	+
F(X)	↗	↘	↗

Για $\chi = 1$ παρουσιάζεται μέγιστο, στο οποίο η συνάρτηση έχει τιμή

$$f(1) = \frac{1^2-4*1+5}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

Για $\chi = 3$ παρουσιάζεται ελάχιστο, στο οποίο η συνάρτηση έχει τιμή

$$f(2) = \frac{3^2-4*3+5}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

B' τρόπος

$$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+3\right)' * (x-2)^2 - \left(x^2-4x+3\right) * \left[(x-2)^2\right]'}{(x-2)^4} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)*(x-2)^2 - \left(x^2-4x+3\right)*2(x-2)*(x-2)'}{(x-2)^4} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)*\left(x^2-2*(-2)*x-(2)^2\right)-\left(x^2-4x+3\right)*(2x-4)}{(x-2)^4} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{\left(x^2+4x-4\right)-\left(x^2-4x+3\right)}{(x-2)^4} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{x^2+4x-4-x^2+4x-3}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{8x-7}{(x-2)^4}$$

αφού υπολογίσαμε την δεύτερη παράγωγο, υπολογίζουμε την τιμή της στα παραπάνω σημεία x_0. Οπότε έχουμε:

$$f''(1) = \frac{8*1-7}{(1-2)^4} \Rightarrow$$

$$f''(1) = \frac{1}{(-1)^4} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = 1$$

Αφού $f''(1) > 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x=1

$$f''(3) = \frac{8*3-7}{(3-2)^4} \Rightarrow$$

$$f''(3) = \frac{24-7}{(-1)^4} \Rightarrow$$

$$f''(3) = 17$$

Οπότε και $f''(3) > 0$ συνεπώς το $x = 17$ αποτελεί σημείο τοπικού ελάχιστου.

Μπορούμε να υπολογίσουμε αν θέλουμε και τις τοπικές μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης οι οποίες είναι:

Για ελάχιστο : $f(1) = \dfrac{1^2 - 4*1+5}{1-2} = \dfrac{1-4+5}{-1} = -2$

Για ελάχιστο : $f(3) = \dfrac{3^2 - 4*3+5}{3-2} = \dfrac{9-12+5}{1} = 14-12 = 2$

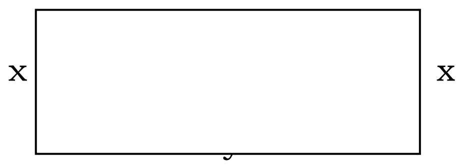
Ειπωμένος τα τοπικά μακρότατα της $f(x)$ θα βρίσκονται στα σημεία $(1,-2)$ και $(3,2)$.

1.3 Εφαρμογές

Εφαρμογή 1.3.1

Ένας κηπουρός θέλει να περιφράξει ένα ορθογώνιο παρτέρι με φυτά κατά μήκος ενός τοίχου του σπιτιού του. Τις άλλες τρεις πλευρές του παρτεριού θα τις περιφράξει χρησιμοποιώντας συρματόσχοινο συνολικού μήκους 32 μέτρων. Τι διαστάσεις μήκους και πλάτους πρέπει να έχει το παρτέρι, έτσι ώστε η επιφάνεια που θα καλύπτουν τα φώτα να είναι μέγιστη;

Λύση :



Σχήμα : 1.3.1

Ο τύπος για το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι : Ε $= y*x$.

Έστω x το μήκος της μίας πλευράς του ορθογωνίου και y η άλλη πλευρά. Το μήκος των τριών πλευρών του ορθογωνίου είναι:

$$2x + y = 32$$

Αν λύσουμε ως προς y και θα έχουμε $y = 32 - 2x$

$E = x * y \Rightarrow$ όπου y αντικαθιστούμε την σχέση που προέκυψε από το μήκος των πλευρών και έχουμε:

$E = x(32 - 2x) \Rightarrow$

$E = 32x - 2x^2$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $E(x) = 32x - 2x^2$

Άρα η παράγωγος του $E(x)$ είναι

$E'(x) = 32 - 4x$

Για $E'(x) = 0$ έχουμε :

$E'(x) = 0 \Rightarrow 32 - 4x = 0 \Rightarrow -4x = -32 \Rightarrow x = 8m$

Εξετάζουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου

Για $E'(x) > 0$ έχουμε :

$E'(x) > 0 \Rightarrow 32 - 4x > 0 \Rightarrow -4x > -32 \Rightarrow x < 8m$

Οπότε έχουμε το αντίστοιχο πινακάκι πρόσημου:

	0 8	8 $+\infty$
$E'_{(x)}$	+	-
$E_{(x)}$	↗	↘

Συνεπώς η συνάρτηση του εμβαδού παρουσιάζει μέγιστο όταν το $x = 8m$ άρα $y = 32 - 2 * 8 = 32 - 16 = 16m$.

Β ΤΡΟΠΟΣ

$E''(x) = (32 - 4x)' \Rightarrow$

$E''(x) = -4$

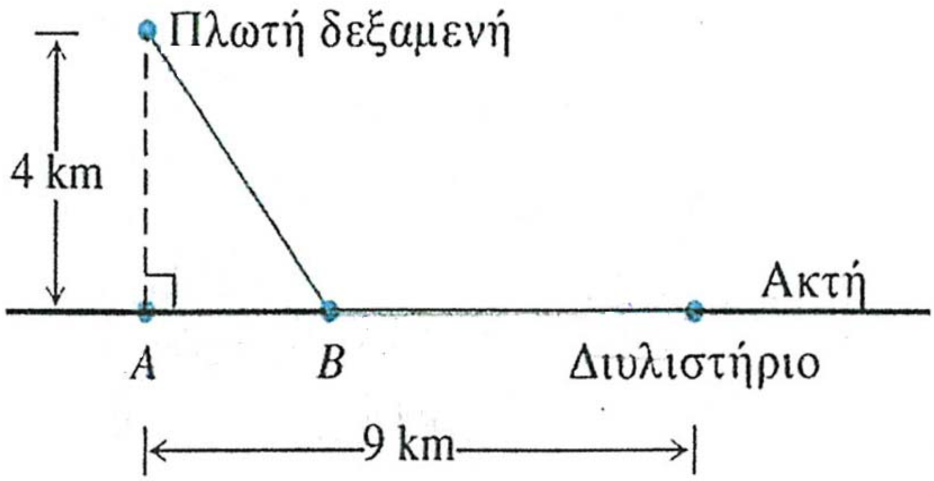
Επομένως μεγιστοποιείται όταν $E''(x) = -4$.

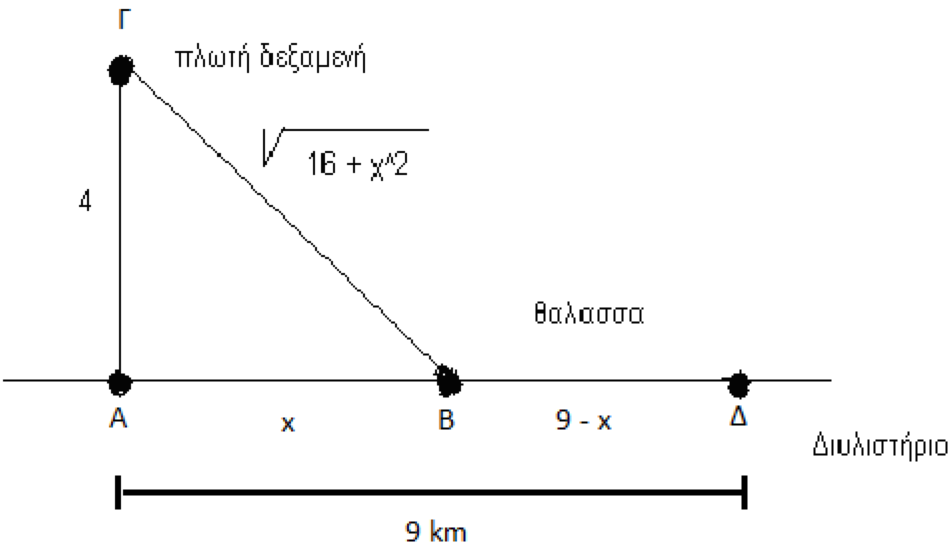
Εφαρμογή 1.3.2

Κατασκευή αγωγού. Ένα δεξαμενόπλοιο εφοδιάζει με πετρέλαιο μια πλωτή δεξαμενή που απέχει 4 km από την ακτή. Το πλησιέστερο διυλιστήριο βρίσκεται 9 km ανατολικά του σημείου της ακτής ακριβώς απέναντι από την δεξαμενή. Είναι απαραίτητο να κατασκευαστεί ένας αγωγός σύνδεσης της δεξαμενής με το διυλιστήριο. Η κατασκευή στοιχίζει 300.000€ ανά km δια θαλάσσης και 200.000€ ανά km δια ξηράς.

A) Εντοπίστε το σημείο B που ελαχιστοποιεί το κατασκευαστικό κόστος.

B) Το κόστος της υποθαλάσσιας κατασκευής αναμένεται να αυξηθεί, ενώ το κόστος της επίγειας κατασκευής αναμένεται να μείνει σταθερό. Για ποιο κόστος της υποθαλάσσιας κατασκευής συμφέρει πλέον περισσότερο να κατασκευαστεί ο αγωγός απευθείας στο σημείο A;





Σχήμα : 1.3.2

Λύση

Α) Ονομάζουμε, το σημείο του διυλιστηρίου σημείο Δ, και το σημείο της πλωτής δεξαμενής Γ. Έστω $ΑΒ = x$ km. Τότε $ΒΔ = 9 - x$ km. Όπως στο σχήμα. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $Α\hat{Β}Γ$ παίρνουμε πυθαγόρειο θεώρημα οπότε έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2 \Rightarrow$$

$$ΒΓ^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$ΒΓ^2 = 16 + x^2 \Rightarrow$$

$$ΒΓ = \sqrt{16 + x^2}$$

Όπου είναι η απόσταση του Β από την πλωτή δεξαμενή και είναι το μήκος του θαλάσσιου αγωγού. Ενώ το μήκος του αγωγού της ξηράς, θα είναι το υπόλοιπο που απομένει από το Β ως το διυλιστήριο δηλαδή 9-x.

Τότε το κόστος του αγωγού ΒΓ είναι: $300.000 * \sqrt{16 + x^2}$ σε €

Το κόστος του αγωγού ΒΔ είναι: $200.000 * (9 - x)$ σε €

Άρα το συνολικό κόστος του αγωγού είναι:

$$c(x) = 300.000 * \sqrt{16 + x^2} + 200.000 * (9 - x)$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση που εκφράζει το συνολικό κόστος είναι συνάρτηση της μεταβλητής x.

Παίρνουμε την πρώτη παράγωγο του συνολικού κόστους και έχουμε:

$$c'(x) = \left(300.000 * \sqrt{16} + x^2\right)' + \left(200.000 * 9 - x\right)' \Rightarrow$$

$$c'(x) = 300.000 * \frac{1}{2 * \sqrt{16 + x^2}} * \left(16 + x^2\right)' + 200.000 * (-1) \Rightarrow$$

$$c'(x) = 300.000 * \frac{1}{2 * \sqrt{16 + x^2}} * (2x) - 200.000 \Rightarrow$$

$$c'(x) = \frac{600.000x}{2 * \sqrt{16 + x^2}} - 200.000 \Rightarrow$$

$$c'(x) = \frac{300.000x}{\sqrt{16 + x^2}} - 200.000 \Rightarrow$$

Βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου. Έχουμε:

$$c'(x) = 0 \Rightarrow \frac{300.000x}{\sqrt{16 + x^2}} - 200.000 = 0 \Rightarrow$$

$$3x = 2\sqrt{16 + x^2} \Rightarrow$$

$$(3x)^2 = \left(2 * \sqrt{16 + x^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$9x^2 = 4 * \left(16 + x^2\right) \Rightarrow$$

$$9x^2 = 64 + 4x^2 \Rightarrow$$

$$5x^2 = 64 \Rightarrow$$

$x^2 = \frac{64}{5} \Rightarrow$ (η αρνητική λύση απορρίπτεται αφού εδώ η συνάρτησή μας εκφράζει κόστος)

$$x = \sqrt{\frac{64}{5}} \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

το οποίο αντιστοιχεί σε ελάχιστο κόστος καθώς,

$$c''(x) = \frac{4.800.000}{\left(16 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{όπου} \quad x = \frac{8}{\sqrt{5}} > 0$$

το κόστος σε εκείνο το σημείο είναι $c\left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right) = 2694427,2$ €.

B) Έστω λ € κοστίζει ο υποθαλάσσιος αγωγός ανά km.

Τότε ο αγωγός ΑΓ κοστίζει 4λ € ενώ ο αγωγός ΑΔ κοστίζει 9 *200.000€

Άρα το συνολικό κόστος του αγωγού στο $x = 0$ θα είναι:

$$c_0(\lambda) \;=\; 4\lambda + 9*200.000 \;=\; 4\lambda + 1.800.000$$

Όταν $c(\lambda) = c_0(\lambda)$ θα συμφέρει η απευθείας σύνδεση στο σημείο $(\chi = 0)$.

Λύνοντας, θα έχουμε :

$$c(\lambda) = c_0(\lambda) \Rightarrow$$

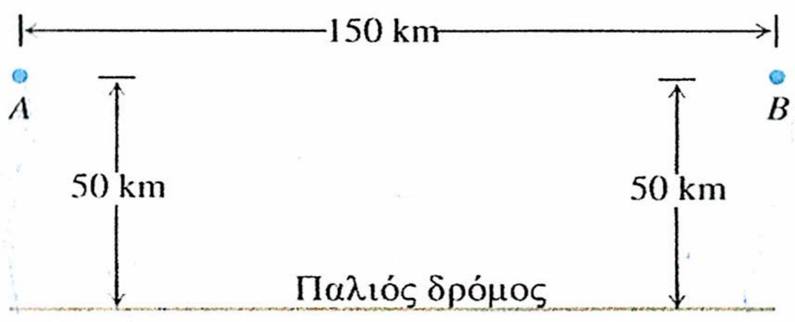
$$\lambda * \sqrt{16 + \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2} + 200.000*\left(9 - \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)\right) = 4\lambda + 1.800.000 \Rightarrow$$

$$\lambda = 523606,8 \text{ €}$$

Εφαρμογή 1.3.3

Εθνική οδός. Τα χωριά Α και Β πρόκειται να συνδεθούν μέσω εθνικής οδού. Σε απόσταση 50 km νότια της ευθείας που συνδέει τα χωριά, υπάρχει ένας επαρχιακός δρόμος ο οποίος μπορεί να αναβαθμιστεί σε εθνική οδό. Το κόστος αναβαθμίσεως του υπάρχοντος δρόμου είναι 300.000€ ανά km, ενώ το κόστος κατασκευής νέας εθνικής οδού είναι 500.000€ ανά km. Βρείτε ποιος βαθμός αναβαθμίσεως και νέας κατασκευής ελαχιστοποιεί το κόστος οδικής σύνδεσης των δυο χωριών.

Χαράξτε επακριβώς στο σχήμα τον σχεδιασμό της εθνικής οδού που προτείνετε.



Λύση

Στη χάραξη του σχήματος ισχύει:

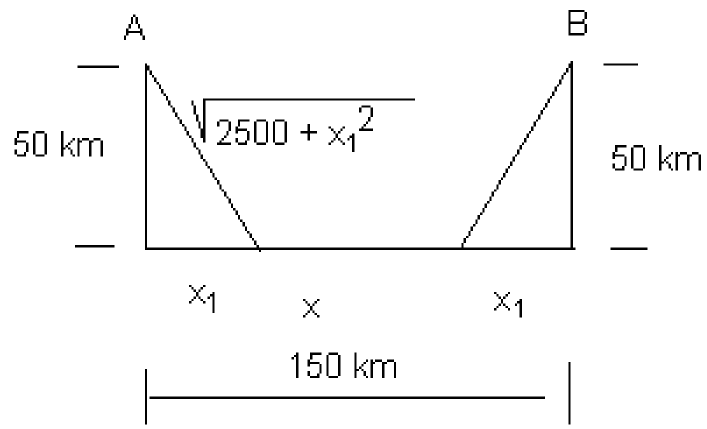
$$x_1 + x + x_1 = 150 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x = 150 - 2x_1} \qquad (1)$$

Ενώ το κόστος θα είναι: $2 * \sqrt{2500 + x_1^2} * 500.000$ όπου είναι το μήκος της νέας οδού και $300.000 * x$ είναι το μήκος της αναβαθμισμένης οδού.

Άρα το κόστος είναι $\kappa = 2 * \sqrt{2500 + x_1^2} * 500.000 + 300.000 * x$

Από τη σχέση (1), το κόστος γράφεται:

$$\kappa(x_1) = 1.000.000 * \sqrt{2.500 + x_1^2} + 300.000 * (150 - 2x_1)$$



Σχήμα :1.3.3.1

Ζητάμε την ελαχιστοποίηση του κόστους, επομένως θα πάρουμε την πρώτη παράγωγο.

$\kappa'(x_1) = 0 \Rightarrow$

$\left(1.000.000 * \sqrt{2.500 + x_1^2}\right)' + \left[300.000 * (150 - 2x_1)\right]' = 0 \Rightarrow$

$\frac{1.000.000 * x_1}{\sqrt{2.500 + x_1^2}} - 600.000 = 0 \Rightarrow$

$10x_1 = \sqrt{2.500 + x_1^2} \Rightarrow 100x_1^2 = 2.500 + x_1^2 \Rightarrow$

$x_1^2 = \frac{2.500}{99} \Rightarrow$ (η αρνητική λύση απορρίπτεται γιατί το x εκφράζει μήκος)

$x_1 = \sqrt{\frac{2.500}{99}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{50}{\sqrt{99}}$

Αυτό το x_1 αντιστοιχεί σε ελάχιστο κόστος καθώς η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\kappa''(x_1) > 0 \Rightarrow$$

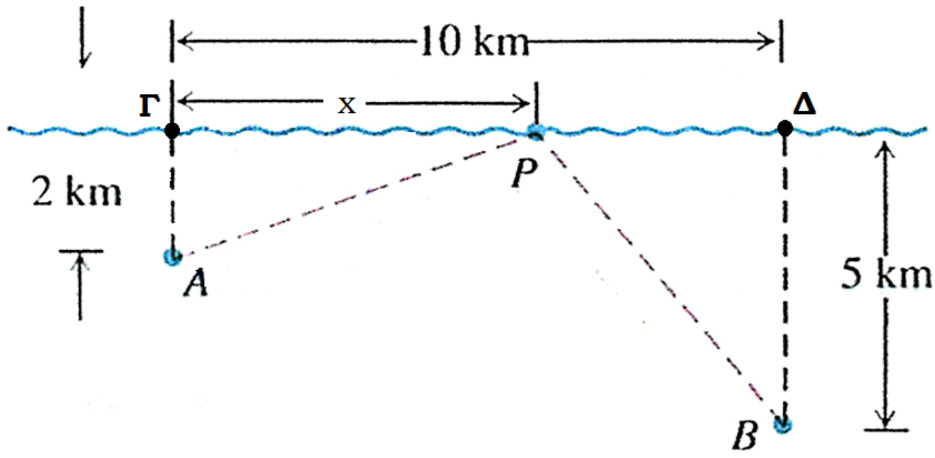
$\frac{2.500.000.000}{\left(2.500 + x_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 0 \Rightarrow$ για $x_1 = \frac{50}{\sqrt{99}}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$x = 150 - 2x_1 \Rightarrow \; x = 150 - \frac{50}{\sqrt{99}} \Rightarrow \; x = 140$

Εφαρμογή 1.3.4

Τοποθεσία σταθμού άντλησης. Δυο πόλεις βρίσκονται στα νότια ενός ποταμού. Για τις ανάγκες ύδρευσης των πόλεων πρόκειται να κατασκευαστεί στον ποταμό ένας σταθμός αντλήσεως ύδατος, απ' όπου θα ξεκινούν δυο αγωγοί που θα φέρνουν το νερό στην κάθε πόλη. Κάθε αγωγός θα κατασκευαστεί επί της ευθείας που συνδέει τον σταθμό με την αντίστοιχη πόλη. Βρείτε την τοποθεσία του σταθμού άντλησης που ελαχιστοποιεί το συνολικό μήκος των αγωγών ύδρευσης.



Λύση

Έστω ότι ο σταθμός άντλησης κατασκευάζεται στην θέση P του ποταμού και έστω x η κάθετη απόσταση από την πόλη A όπως σημειώνεται στο σχήμα.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα για το ΓΡΑ τρίγωνο έχουμε:

$$\mathrm{PA}^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{PA}^2 = x^2 + 4 \Rightarrow$$

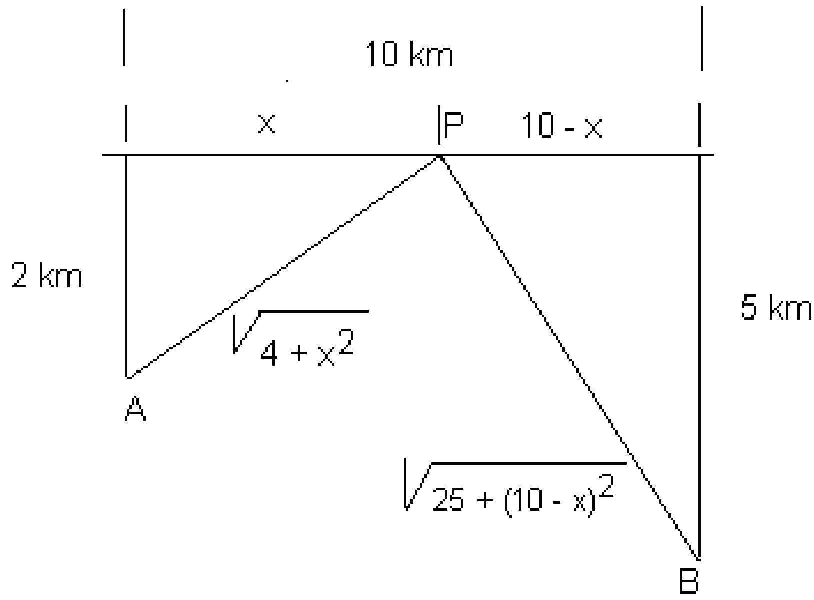
$$\mathrm{PA} = \sqrt{x^2 + 4}$$

Ομοίως για το ΡΒΔ τρίγωνο έχουμε:

$$\mathrm{PB}^2 = 5^2 + (10 - x)^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{PB}^2 = 25 + (10 - x)^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{PB} = \sqrt{25 + (10 - x)^2} \Rightarrow$$



Σχήμα : 1.3.1

Άρα το συνολικό μήκος του αγωγού που θα είναι το μήκος των AP και PB δίνεται από την σχέση:

$$L(x) = \sqrt{4+x^2} + \sqrt{25+\left(10-x\right)^2}$$

Το οποίο είναι μία συνάρτηση μίας μεταβλητής της οποίας θα εξετάσουμε τα ακρότατα.

Έχουμε για την πρώτη παράγωγο:

$$L'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+x^2}} * \left(4+x^2\right)' + \frac{1}{2\sqrt{25+\left(10-x\right)^2}} * \left[25+\left(10-x\right)^2\right]' \Rightarrow$$

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{25+\left(10-x\right)^2}} * \left(10-x\right) * \left(10-x\right)' \Rightarrow$$

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{\left(10-x\right)}{\sqrt{25+\left(10-x\right)^2}}$$

Εξετάζουμε τα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου

Θα πάρουμε την παράγωγο ίση με το μηδέν

$$L'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{(10-x)}{\sqrt{25+(10-x)^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = -\frac{(10-x)}{\sqrt{25+(10-x)^2}} \Rightarrow$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο έχουμε:

$$\frac{x^2}{4+x^2} = -\frac{(10-x)^2}{25+(10-x)^2} \Rightarrow$$

$$25x^2 + x^2 * \left(100 - 20x + x^2\right) = \left(4 + x^2\right) * \left(100 - 20x + x^2\right) \Rightarrow$$

$$25x^2 + 100x^2 - 20x^3 + x^4 = 400 - 80x + 4x^2 + 100x^2 - 20x^3 + x^4 \Rightarrow$$

$$21x^2 + 80x - 400 = 0$$

Η διακρίνουσα του παραπάνω διωνύμου είναι:

$$\Delta = 80^2 - 4 * 21 * (-400) \;\Rightarrow\; \Delta = 6.400 + 33.600 \;\Rightarrow\; \Delta = 40.000$$

Οπότε τελικά έχουμε ότι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-80 \pm 200}{42}$$

Επειδή το x αναπαριστά απόσταση δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Άρα αποδεκτή είναι μόνο η θετική ρίζα:

$$x = \frac{120}{42} \Rightarrow \; x = \frac{20}{7} \Rightarrow \; x = 2{,}85$$

Η θέση αυτή πιθανού ακρότατου αντιστοιχεί σε ελάχιστο της συνάρτησης καθώς:

$$L''(x) = \left.\frac{4}{\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{25}{\left[x(x-20)+125\right]^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=2,85} > 0$$

Ενώ το αντίστοιχο συνολικό μήκος του αγωγού είναι:

$$L(2,85) = \sqrt{4 + (2,85)^2} + \sqrt{25 + (10 - 2,85)^2} \Rightarrow$$

$$L(2,85) = \sqrt{4 + 8,12} + \sqrt{25 + (7,15)^2} \Rightarrow$$

$$L(2,85) = \sqrt{12,12} + \sqrt{25 + 51,12} \Rightarrow$$

$$L(2,85) = 3,48 + \sqrt{76,12} \Rightarrow$$

$$L(2,85) = 3,48 + 8,72 \Rightarrow$$

$$L(2,85) = 12,20 \ km$$

Εφαρμογή 1.3.5

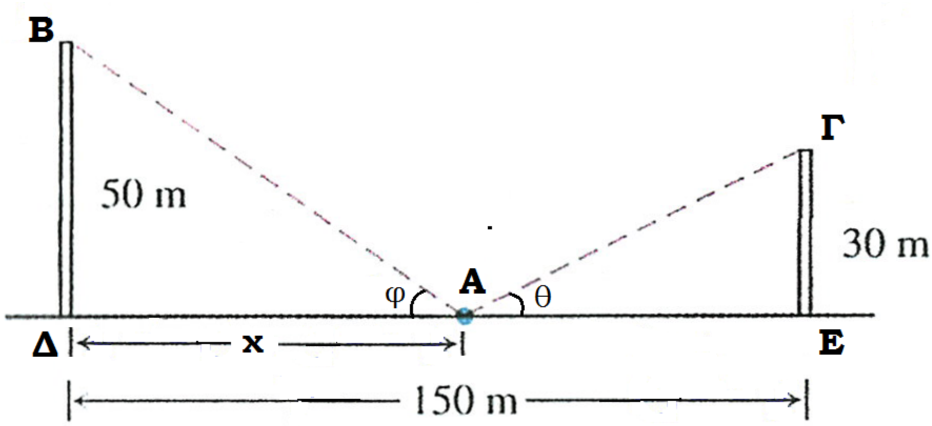
Μήκος καλωδίου. Δυο πύργοι έχουν ύψος 50 m και 30 m αντίστοιχα, και απέχουν μεταξύ τους 150 m. Ένα καλώδιο πρόκειται να συνδέσει το σημείο Α με την κορυφή κάθε πύργου.

Α) Εντοπίστε τη θέση του Α που ελαχιστοποιεί το συνολικό μήκος του καλωδίου.

Β) Δείξτε γενικά ότι, ανεξαρτήτως του ύψους των πύργων, το μήκος του καλωδίου ελαχιστοποιείται αν οι γωνίες με κορυφή το σημείο Α γίνουν ίσες.

Λύση:

Α) Η σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Έστω x η απόσταση ΔΑ όπως απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα. Από το πυθαγόρειο θεώρημα για το τρίγωνο ΑΒΔ:

$$\mathrm{AB}^2 = 50^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{AB}^2 = 2.500 + x^2 \Rightarrow$$

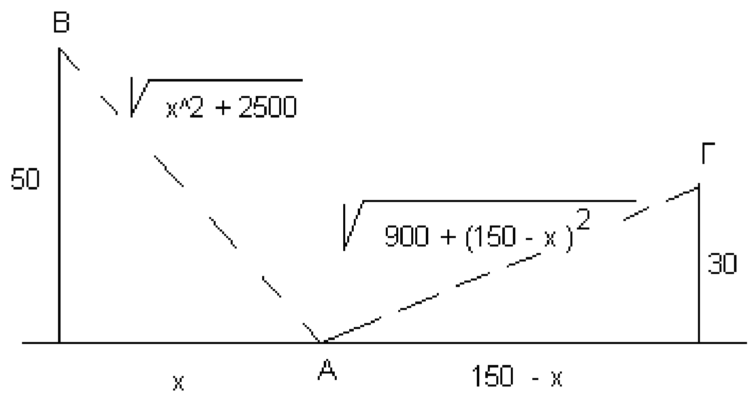
$$\mathrm{AB} = \sqrt{2.500 + x^2}$$

Ομοίως για το τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = 30^2 + (150 - x)^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = 900 + (150 - x)^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{A\Gamma} = \sqrt{900 + (150 - x)^2}$$



Σχήμα: 1.3.2

Οπότε το συνολικό μήκος του καλωδίου είναι:

$$L(x) = \sqrt{2500 + x^2} + \sqrt{900 + (150 - x)^2}$$

Το οποίο και θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί. Θα πάρουμε την πρώτη παράγωγο:

$$L'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$L(x) = \left(\sqrt{2500 + x^2}\right)' + \left(\sqrt{900 + (150 - x)^2}\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$L(x) = \frac{x}{\sqrt{2500 + x^2}} - \frac{(150 - x)}{\sqrt{900 + (150 - x)^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$L(x) = x * \sqrt{900 + (150 - x)^2} = (150 - x) * \sqrt{2500 + x^2} \Rightarrow$$

$$L(x) = x^2 * \left[900 + (150 - x)^2\right] = (150 - x)^2 * \left(2500 + x^2\right) \Rightarrow$$

$$L(x) = 16x^2 - 7500x + 562.500 = 0$$

Η αντίστοιχη διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = (-7500)^2 - 4 * 16 * 562.500 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 20.250.000$$

Οι αντίστοιχες ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-(-7500) \pm \sqrt{20.250.000}}{2 * 16} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{7500 \pm 4500}{32} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{7500 + 4500}{32} = \frac{12000}{32} = 375$$

Η ρίζα αυτή απορρίπτεται γιατί η απόσταση που αναπαριστά ξεπερνάει την απόσταση δυο ακεραίων.

$$x_2 = \frac{7500 - 4500}{32} = \frac{3000}{32} = 93,75$$

Επομένως το $x = 93,75$ αντιστοιχεί σε ελάχιστο της $L(x)$ καθώς:

$$L''(x) = \frac{2500}{\left(2500 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{900}{\left[x*\left(x-300\right)+23.400\right]^{\frac{3}{2}}} > 0$$

γι' αυτό το x όπου είναι θετικό για $x = 93,75$

Επομένως το συνολικό μήκος είναι

$$L(93,75) = \sqrt{2500 + 93,75^2} + \sqrt{900 + \left(150 - 93,75\right)^2} \Rightarrow$$

$$L(93,75) = \sqrt{2500 + 8789,06} + \sqrt{900 + \left(56,25\right)^2} \Rightarrow$$

$$L(93,75) = \sqrt{11289,06} + \sqrt{900 + 3164,06} \Rightarrow$$

$$L(93,75) = 106,24 + \sqrt{4064,06} \Rightarrow$$

$$L(93,75) = 106,24 + 63,74 \Rightarrow$$

$$L(93,75) = 170m$$

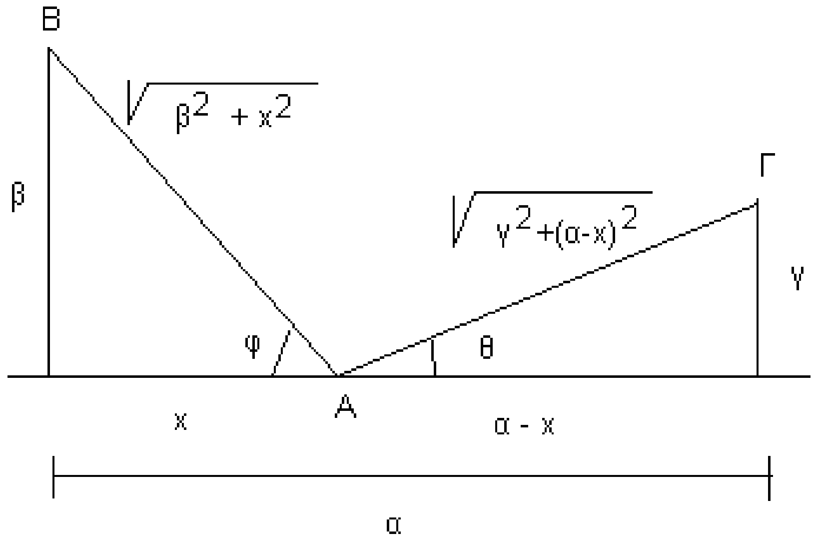
Β) Το μήκος του καλωδίου σε ένα γενικό σχήμα όπως το παρακάτω, είναι:

$$L(x) = \sqrt{\mathrm{B}\Delta^2 + x^2} + \sqrt{\Gamma\mathrm{E}^2 + \left(\Delta\mathrm{E} - x\right)^2}$$

Στο ερώτημα Α) το ελάχιστο βρέθηκε για:

$$L'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{\mathrm{B}\Delta^2 + x^2}} - \frac{\left(\Delta\mathrm{E} - x\right)}{\sqrt{\Gamma\mathrm{E}^2 + \left(\Delta\mathrm{E} - x\right)^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{\mathrm{B}\Delta^2 + x^2}} = \frac{\left(\Delta\mathrm{E} - x\right)}{\sqrt{\Gamma\mathrm{E}^2 + \left(\Delta\mathrm{E} - x\right)^2}} \qquad (1)$$



Σχήμα: 1.3.3

Από το τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{\text{Β}\Delta^2 + x^2}}$,

Επίσης από το τρίγωνο $\cos\theta = \dfrac{\Delta\text{Ε} - x}{\sqrt{\Gamma\text{Ε}^2 + \left(\Delta\text{Ε} - x\right)^2}}$

Από την σχέση (1) προκύπτει ότι

$\cos\varphi = \cos\theta \Rightarrow \varphi = \theta$ ή $\varphi = -\theta$ όπου απορρίπτεται.

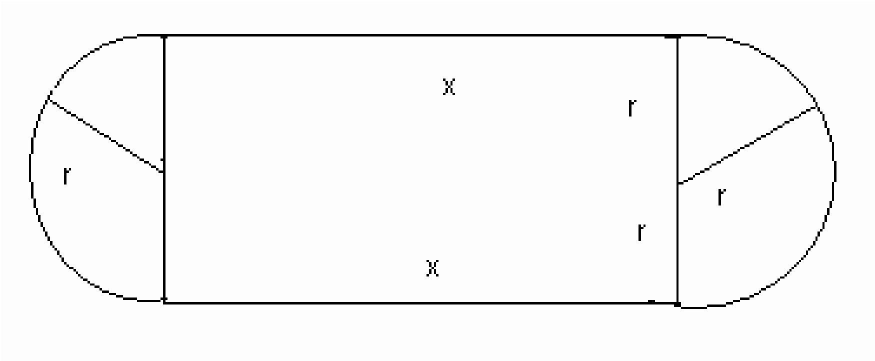
Εφαρμογή 1.3.6

Εμβαδόν γηπέδου. Πρόκειται να κατασκευαστεί ένα γήπεδο σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου με μήκος μεγάλης πλευράς x. Στις δυο μικρότερες πλευρές θα εφάπτονται δυο ημικύκλιες περιοχές ακτίνας r. Το γήπεδο θα περικλείεται από έναν διάδρομο στίβου μήκους 400 m.

Α) Εκφράστε το εμβαδόν του ορθογωνίου τμήματος συναρτήσει μόνο του x ή μόνο του r (όποιο από τα δυο θέλετε).

Β) Για ποιες τιμές των x και r αποκτά μέγιστο εμβαδόν το ορθογώνιο τμήμα του γηπέδου;

Λύση



Σχήμα : 1.3.4

A) $E_{\text{ορθογωνίου}} = x*2r$

Το σύνολο μήκος στίβου είναι: $400m = x + \pi r + x + \pi r = 2x + 2\pi r$

Όπου πr το μήκος του ημικυκλίου.

Επομένως:

$$200 = x + \pi r \Rightarrow$$

$$x = 200 - \pi r \qquad (1)$$

Το εμβαδόν ορθογωνίου με τη σχέση (1) έχουμε:

$$\mathrm{E}_{\text{ορθογωνιου}}\left(r\right) = x*2r \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}_{\text{ορθογωνιου}}\left(r\right) = \left(200 - \pi r^2\right)*2r \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}_{\text{ορθογωνιου}}\left(r\right) = 400r - 2\pi r^2 \Rightarrow$$

B) Θέλουμε να μεγιστοποιηθεί το $\mathrm{E}_{\text{ορθογωνίου}}$ επομένως θα πάρουμε την πρώτη παράγωγο.

$$\mathrm{E}'_{\text{ορθογωνιου}}(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(400r - 2\pi r^2\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$400 - 4\pi r = 0 \Rightarrow$$

$$\pi r = 100 \Rightarrow$$

$$r = \frac{100}{\pi} \quad m.$$

Αυτό αντιστοιχεί σε μέγιστο, καθώς η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\mathrm{E}''_{\text{ορθογωνιου}}(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(400 - 2\pi r\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$-4\pi < 0$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1) με την τιμή του r που υπολογίστηκε, προκύπτει

$x = 100 \ \ m$.

Εφαρμογή 1.3.7

Συγκέντρωση βρόχινου νερού. Μια ορθογώνια δεξαμενή χωρητικότητας 1125 m^3, με τετράγωνη βάση πλευράς x m και βάθος y m, πρόκειται να κατασκευαστεί έτσι ώστε η πάνω (ανοιχτή) πλευρά να είναι ισεπίπεδη με το έδαφος, για να μπορεί να συγκεντρώνει το βρόχινο νερό. Τα έξοδα περιλαμβάνουν όχι μόνο το υλικό κατασκευής αλλά και την εκσκαφή του χώματος, το κόστος της οποίας είναι ανάλογο του γινομένου x y.

Α) Αν το συνολικό κόστος είναι

$$c = 9\left(x^2 + 4xy\right) + 10xy$$

Βρείτε τις τιμές των x και y που το ελαχιστοποιούν.

Β) μάθετε γράφοντας. Δώστε μια πιθανή εξήγηση για τη μορφή της συναρτήσεως κόστους του ερωτήματος Α.

Λύση

Α) Το κόστος κατασκευής είναι: $c = 9\left(x^2 + 4xy\right) + 10xy$ όμως ο δεδομένος όγκος είναι $V = 1125$ m^3 και είναι ίσος με $x^2 * y$ όπου x το εμβαδόν επιφάνειας και y το ύψος.

Επομένως , $y = \frac{V}{x^2}$

Έτσι έχουμε:

$$c = 9\left(x^2 + 4x\frac{V}{x^2}\right) + 10x\frac{V}{x^2} \Rightarrow$$

$$c(x) = 9x^2 + 46\left(\frac{V}{x}\right)$$

Θέλουμε το $c_{(x)}$ να είναι ελάχιστο. Επομένως θα πάρουμε την πρώτη παράγωγο.

$$c'(x) = 0 \Rightarrow$$

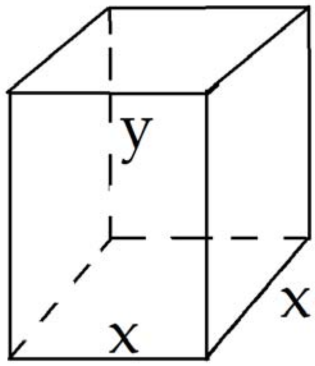
$$\left[9x^2 + 36\left(\frac{V}{x}\right)\right]' = 0 \Rightarrow$$

$$18x - \frac{46V}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$18x^3 = 46V \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{23V}{9}} \equiv x_0$$

Επίσης η δεύτερη παράγωγος είναι:



Σχήμα :1.3.5

$c''(x) = 18 + \frac{46V}{x^3}\Big|_{x_0} = 54 > 0$ επομένως το x_0 είναι σημείου ελάχιστου. Με αντικατάσταση του V , βρίσκουμε $x = 14,2m$, ενώ $y = \frac{V}{x^2} = 5,76\ m.$

Β) Εφόσον το κόστος κατασκευής είναι ανάλογο της επιφάνειας της δεξαμενής και η επιφάνεια της είναι: 4 πλαϊνά τοιχώματα + 1 πάτος = $4xy + x^2$, ο πρώτος όρος του $c(x)$ είναι λογικός. Το κόστος είναι ανάλογο και της εκσκαφής η οποία είναι ανάλογη του γινομένου xy , οπότε εξηγείται και ο δεύτερος όρος του κόστους.

Εφαρμογή 1.3.8

Σχεδίαση δοχείου. Σας ζητείται να σχεδιάσετε κυλινδρικό δοχείο αλουμινίου χωρητικότητας 1000 cm^3 με διαστάσεις που εξασφαλίζουν το μικρότερο κόστος, δεδομένου ότι και τα αποκόμματα αλουμινίου που περισσεύουν και πετιούνται, πληρώνονται. Το πλευρικό τοίχωμα του δοχείου έχει επιφάνεια ορθογωνίου και συνεπώς μπορεί να κοπεί χωρίς απώλειες, όμως οι δυο κυκλικές βάσεις ακτίνας r θα κοπούν από τετράγωνα κομμάτια πλευράς 2r. Η συνολική ποσότητα αλουμινίου που δεσμεύεται για την κατασκευή του δοχείου είναι συνεπώς

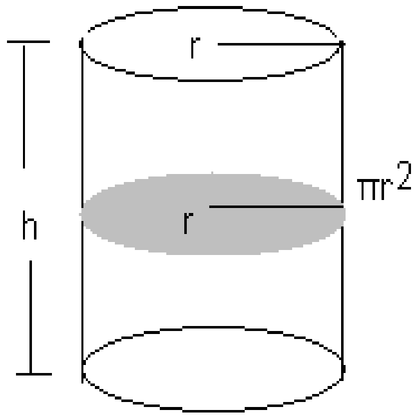
A = 8r² + 2πrh και όχι A = 2πr² + 2πrh. Ποια αναλογία είναι οικονομικότερη τώρα;

Λύση

Έχουμε ότι

$A = 8r^2 + \pi r h$

Ωστόσο ο όγκος του δοχείου είναι $V = \pi r^2 h$ με V δεδομένο και ίσο με 1000cm³. Έτσι έχουμε, $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, οπότε:



Σχήμα : 1.3.6

$A(r) = 8r^2 + \dfrac{2V}{r}$ όπου θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί. Γι' αυτό θα πάρουμε πρώτα την πρώτη παράγωγο.

$$A'(r) = 0 \Rightarrow$$

$$(8r^2 + \frac{2V}{r})' = 0 \Rightarrow$$

$$16r - \frac{2}{r^2}V = 0 \Rightarrow$$

$$16r^3 = 2V \Rightarrow$$

$$r = \frac{\sqrt[3]{V}}{2} \equiv r_0$$

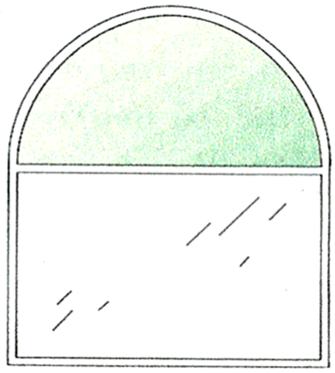
αυτό το r αντιστοιχεί σε ελάχιστο καθώς η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$A''(r) = 16 + \frac{4}{r^3}V\Big|_{r_0} = 48 > 0$$

Γι' αυτή την τιμή του r , έχουμε : $\frac{h}{r} = \frac{\frac{V}{\pi r_0^{\ 2}}}{\frac{\sqrt[3]{V}}{2}} = \frac{8}{\pi}$

Εφαρμογή 1.3.9

Κατασκευή σιλό. Πρόκειται να κατασκευαστεί ένα σιλό (χωρίς τη βάση του) που θα έχει μορφή κυλίνδρου πάνω στον οποίο θα «κάθεται» ένα ημισφαίριο. Το κόστος κατασκευής ανά μονάδα επιφανείας είναι διπλάσιο για το ημισφαίριο απ' ότι για το κυλινδρικό τμήμα. Προσδιορίστε τις βέλτιστες διαστάσεις αν ο όγκος του σιλό είναι δεδομένος και θέλουμε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος κατασκευής. Αγνοείστε το πάχος του υλικού και το κόστος των περισσευμάτων που προκύπτουν κατά την κατασκευή, τα οποία πετιούνται.



Σχήμα : 1.3.7

Λύση

Ο όγκος για το κυλινδρικό μέρος του σιλό είναι $\pi r^2 h$ ενώ για το ημισφαίριο είναι $\frac{2}{3}\pi r^3$.

Άρα ο συνολικός όγκος του σιλό είναι: $V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$.

$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow$ θα λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς h επομένως έχουμε:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r \qquad (1)$$

το κόστος της επιφάνειας κυλίνδρου είναι $2\pi rh$ ενώ το κόστος της επιφάνειας ημισφαιρίου είναι επί 2 επειδή έχουμε διπλό κόστος.

Συνολικό κόστος $\kappa = 2\pi rh + 4\pi r^2$

Έτσι από τη σχέση (1) και τη σχέση με του κόστους προκύπτει:

$$K(r) = 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r\right) + 4\pi r^2 \Rightarrow$$

$$K(r) = \frac{2V}{r} - \frac{4}{3}\pi r^2 + 4\pi r^2$$

θα πάρουμε την παράγωγο του $K(r)$ επομένως θα έχω:

$$K'(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2V}{r} - \frac{4}{3}\pi r^2 + 4\pi r^2\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{2V}{r^2} - \frac{8\pi}{3} r + 8\pi r = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{16\pi r^3}{3} = 2V \Rightarrow \quad r^3 = \frac{3V}{8\pi} \Rightarrow \quad r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

αντικαθιστώντας όπου r στη σχέση (1) θα έχουμε:

$$h = \left(\frac{3V}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Το r αυτό αντιστοιχεί σε ελάχιστο του κόστους $\kappa_{(r)}$ καθώς η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$K''(r) = \frac{16}{3}\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$$

Η ελάχιστη τιμή του κόστους προκύπτει για $r = \left(\frac{3V}{8\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$ και είναι $\frac{48\pi}{3}$ ανά μονάδα επιφανείας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βελτιστοποίηση συναρτήσεων δυο μεταβλητών και εφαρμογές (ελεύθερα ακρότατα).

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στην βελτιστοποίηση συναρτήσεων δύο μεταβλητών όπου η βέλτιστη ή η ελάχιστη λύση επιτυγχάνεται με την εύρεση ακροτάτων για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Επίσης παραθέτουμε βασικές έννοιες, τύπους, παραδείγματα καθώς και εφαρμογές βελτιστοποίησης συναρτήσεων δύο μεταβλητών που μοντελοποιούνται σε ρεαλιστικά προβλήματα. [Τζιριτζιλάκης Ε., 2008, Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ. και Ρεκούμης Κ. 2007, Αλιμπινίσης Α., Γρηγοριάδης Σ., Ευσταθόπουλος Ε., Κλαουδάτος Ν., Παπασταυρίδης Σ. και Σβέρκος Α., 2005, Ανδεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπαταυρίδης Σ. και Πολύζος Γ. 2001]

2.1 Στοιχεία Θεωρίας

Μερική παράγωγος

Έστω U ένα υποσύνολο του R^n. Το U θα λέγεται ανοιχτό αν για κάθε σημείο του P υπάρχει μια ανοικτή μπάλα B με κέντρο P (και η ακτίνα θετική) η οποία βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο U.

Παρατήρηση: Αν το U είναι ανοικτό και P είναι ένα σημείο του, τότε ξεκινώντας από το P μπορούμε να κινηθούμε προς οποιαδήποτε κατεύθυνση (για λίγο) παραμένοντας μέσα στο U. Ειδικότερα, για μικρό h το σημείο (x+h, y) ευρίσκεται μέσα στο U άρα η f ορίζεται σ' αυτό.

Για τα παρακάτω θα θεωρούμε ότι το U είναι ένα ανοικτό σύνολο.

Έστω U υποσύνολο του R^2, f: $U \to R$ και (x, y) σημείο του U. Αν το παρακάτω όριο υπάρχει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x,y)}{h}$$

θα ονομάζεται μερική παράγωγος της f ως προς x στο σημείο (x, y) και θα συμβολίζεται με

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

Ομοίως ορίζεται η μερική παράγωγος της f ως προς y στο σημείο (x, y) η οποία θα συμβολίζεται με

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

Η εύρεση της μερικής παραγώγου ως προς x επιτυγχάνεται θεωρώντας την y μεταβλητή σαν να ήταν σταθερά και την συνάρτηση f (x, y) ως συνάρτηση μόνο του x. Αναλόγως επιτυγχάνεται και ο προσδιορισμός της μερικής παραγώγου ως προς y. Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται συνήθως για τη μερική παράγωγο ως προς x είναι:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ή $\frac{\partial f}{\partial x}$ ή f_x

Ομοίως οι αντίστοιχοι συμβολισμοί για την μερική παράγωγο ως προς y είναι

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \text{ ή } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ ή } f_y$$

Επομένως μετά την μερική παραγώγιση ως προς x ή ως προς y, μιας συνάρτησης $f(x,y)$, οδηγούμαστε σε μια συνάρτηση η οποία είναι και αυτή συνάρτηση του (x,y). Κατά συνέπεια μπορούμε να παραγωγίσουμε ξανά την νέα αυτή συνάρτηση ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή επιθυμούμε. με αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε σε παραγώγους ανώτερης τάξης.

Αν παραγωγίσουμε την $f(x,y)$ δύο φόρες ως προς x έχουμε τη δεύτερη μερική παράγωγο της ως x που συμβολίζεται με τους παρακάτω τρόπους:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \text{ ή } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ ή } f_{xx}$$

Ομοίως η δεύτερη μερική παράγωγος ως προς y της συνάρτησης f (x, y) συμβολίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \text{ ή } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ ή } f_{yy}$$

ΜΙΚΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Η μικτή παράγωγος προκύπτει, αν παραγωγίσουμε ως προς την μια μεταβλητή και μετά ως προς την άλλη. Επομένως η δεύτερη παράγωγος ως προς x και ως προς y προκύπτει αν παραγωγίσουμε μερικώς την f(x,y) ως προς x και μετά ως προς y και συμβολίζεται:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \text{ ή } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ ή } f_{xy}$$

Ομοίως προκύπτει και η δεύτερη παράγωγος ως προς y και ως προς x και συμβολίζεται:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \text{ ή } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ ή } f_{yx}$$

Η σειρά παραγώγισης είναι σημαντική και γενικά η αντιμετάθεση της σειράς παραγώγισης δεν ισχύει. Δηλαδή:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Κριτήριο Schwarz

Το κριτήριο που χρησιμοποιείται συνήθως για να επιτραπεί η αντιμετάθεση της σειράς των παραγωγίσεων είναι το κριτήριο **Schwarz.** Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, η αντιμετάθεση στη σειρά παραγώγισης σε κάποιο σημείο (ή σε ένα υποσύνολο του R^2) επιτρέπεται όταν η μικτή παράγωγος $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ είναι συνεχής. Το κριτήριο αυτό είναι τόσο δημοφιλές που ουσιαστικά χρησιμοποιείται χωρίς να αναφέρεται ότι χρησιμοποιείται. Στις πράξεις που θα γίνονται και σε αυτή την διπλωματική θα υποθέτουμε ότι γενικά ισχύει το κριτήριο του Schwarz και θα θεωρούμε ότι οι αντιμεταθέσεις των παραγωγίσεων είναι επιτρεπτές.

Ελεύθερα ακρότατα

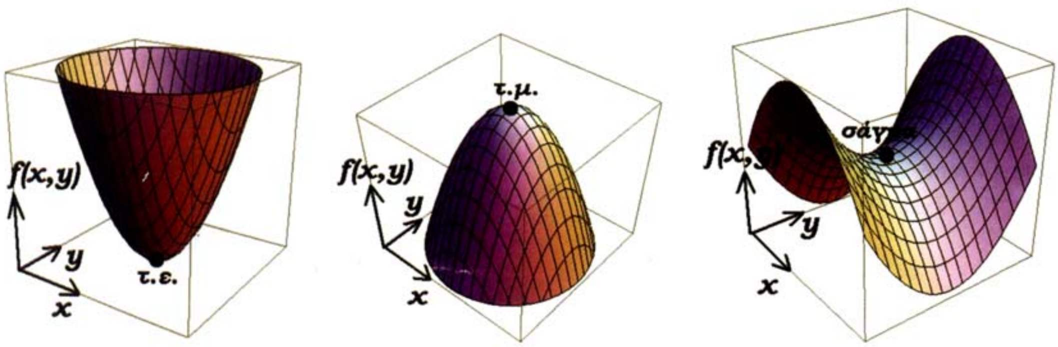
Οι ορισμοί του μέγιστου και του ελάχιστου για συναρτήσεις δυο μεταβλητών είναι ανάλογοι με τους αντίστοιχους ορισμούς ακροτάτων συνάρτησης μιας μεταβλητής. Έχουμε ότι:

1. Τοπικό ελάχιστο στο σημείο (x_0, y_0) εάν $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ για όλα τα σημεία σε μια περιοχή γύρω από το (x_0, y_0).

2. Τοπικό μέγιστο στο σημείο (x_0, y_0) εάν $f(x,y) \le f(x_0, y_0)$ για όλα τα σημεία σε μια περιοχή γύρω από το (x_0, y_0).

Εκτός από το μέγιστο και το ελάχιστο στις συναρτήσεις δυο μεταβλητών εμφανίζεται και το ανάλογο σημείο καμπής (της μιας διάστασης) που είναι το σάγμα. Χαρακτηριστική γραφική παράσταση σαγματικού σημείου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, το σάγμα έχει σχήμα «σέλλας αλόγου» και είναι φανερό ότι κατά μια διεύθυνση (την x στην προκειμένη περίπτωση) το σημείο αυτό είναι το τοπικό μέγιστο ενώ κατά μια άλλη διεύθυνση (την y στην προκειμένη περίπτωση) αποτελεί ελάχιστο.

Για τον προσδιορισμό των ακροτάτων σημαντικό ρόλο παίζουν και εδώ τα σημεία μηδενισμού των πρώτων μερικών παραγώγων. Ειδικότερα έχουμε τον ορισμό:



Σχήμα 2.1.1: χαρακτηριστικές γραφικές παραστάσεις τοπικού ελάχιστου (τ.ε.), τοπικού μεγίστου (τ.μ.) και σαγματικού σημείου.

Ορισμός :

Ένα σημείο (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της $f(x,y)$ αν

$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

Για τον προσδιορισμό του είδους των ακροτάτων όπου κυρίαρχο ρόλο παίζουν τα κρίσιμα σημεία έχουμε το εξής θεώρημα:

Έστω ότι το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της $f(x,y)$ και οι δεύτερες μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχής σε μια περιοχή του (x_0, y_0). Ορίζουμε την ποσότητα:

$$D \equiv D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0) \right]^2$$

Τότε έχουμε τους ακόλουθους χαρακτηρισμούς για το κρίσιμο σημείο:

1. Αν $D > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι τοπικό ελάχιστο της $f(x,y)$.
2. Αν $D > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι τοπικό μέγιστο της $f(x,y)$.
3. Αν $D < 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο της $f(x,y)$.
4. Αν $D = 0$ τότε το (x_0, y_0) μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο ή σαγματικό σημείο. Σε αυτήν την περίπτωση χρειάζονται άλλες τεχνικές για τον προσδιορισμό του σημείου.

Τονίζεται ότι αν $D > 0$ τότε $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ και $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ θα έχουν το ίδιο πρόσημο οπότε στις δυο παραπάνω δυο περιπτώσεις μπορούμε να ελέγχουμε είτε το πρόσημο της $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ είτε το πρόσημο $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$. Επίσης δεν θα ασχοληθούμε με την διερεύνηση των περιπτώσεων $D = 0$.

2.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 2.2.1

Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα των κάτωθι συναρτήσεων

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 3xy - 3y - 5x + 2$$

ΛΥΣΗ

Για τον υπολογισμό της f_x θεωρούμε πως η $f(x,y)$ είναι συνάρτηση μόνο ως προς x και χρειαζόμαστε το y σαν να είναι σταθερή ποσότητα. Έχουμε:

$$f_x = 4x + 3y - 5$$

Ομοίως για την f_y παραγωγίζουμε την $f(x,y)$ ως προς y. Έχουμε:

$$f_y = 2y + 3x - 3$$

Για την εύρεση της f_{xx} παραγωγίζουμε ως προς x την f_x εξακολουθώντας να θεωρούμε το y σταθερό και βρίσκουμε:

$$f_{xx} = 4$$

Ομοίως βρίσκουμε την f_{yy}:

$$f_{yy} = 2$$

Για την εύρεση της f_{xy} παραγωγίζουμε είτε την f_y ως προς x θεωρώντας το y σταθερή ποσότητα, είτε την f_x ως προς y θεωρώντας αυτήν την φορά το x σαν σταθερή ποσότητα και βρίσκουμε:

$$f_{xy} = 3$$

Παίρνουμε το f_x και f_y και τα λύνουμε ως σύστημα. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y - 5 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{array}\right\}^{3}_{-4} \Rightarrow$$

αν τα προσθέσουμε κατά μέλη θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{c} y = 3 \\ 4x + 3 * 3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y=3 \\ \frac{4x}{4}=\frac{-4}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\ 3 \\ x=-1 \end{array}\right\}$$

Για να βρούμε τα ακρότατα στο σημείο $(-1,3)$ παίρνουμε τον τύπο για το κρίσιμο σημείο:

$$\begin{aligned} D=D(x_0,y_0)&=f_{xx}(x_0,y_0)*f_{yy}(x_0,y_0)-\left[f_{xy}(x_0,y_0)\right]^2= \\ &=4*2-|3|^2= \\ &=8-9= \\ &=1 \end{aligned}$$

Άρα $D<0$ οπότε έχουμε σαγματικό σημείο.

Παράδειγμα 2.2.2

Μια ορθογώνια δεξαμενή ανοιχτή στο πάνω μέρος έχει όγκο $4m^3$ βρείτε τις διαστάσεις της βάσης ώστε η επιφάνεια της δεξαμενής να είναι ελάχιστη.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι η βάση της δεξαμενής έχει διαστάσεις x επί y $(\sigma\varepsilon\ \mathrm{m})$. Τότε η επιφάνεια των τοιχωμάτων της δεξαμενής δίνεται από τη σχέση:

$$E=x*y+\frac{8}{y}+\frac{8}{x}$$

Αν η δεξαμενή έχει ύψος h. Τότε ο όγκος της που είναι το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος είναι: $x*y*h=4$ συνεπώς $h=\frac{4}{x*y}$. Οι επιφάνειες των τοιχωμάτων της δεξαμενής είναι:

- $x*y$ της βάσης
- $x*h$ της μιας πλευράς, άρα $2x*h$ για τις δυο απέναντι πλευρές
- $y*h$ της άλλης πλευράς, άρα $2y*h$ για τις άλλες δυο απέναντι πλευρές.

Οπότε συνολικά το εμβαδόν των πλευρών δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E = xy + 2xh + |\,2yh = xy + 2x\frac{4}{xy} + 2y\frac{4}{xy} = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$$

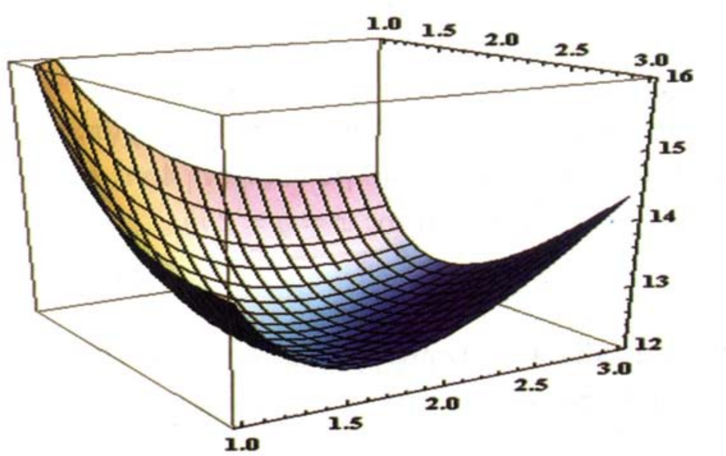
Για το προσδιορισμό των κρίσιμων σημείων λύνουμε το σύστημα:

$$\frac{\partial E\left(x,y\right)}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{y} = \frac{8}{x^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial E\left(x,y\right)}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x} - \frac{8}{y^2} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathrm{x} - \frac{8x^4}{8^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x\left(8 - x^3\right) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x} = 2$$

Επομένως για $x = 2$ προκύπτει από τη σχέση (1) $y = 2$. Επίσης η λύση $(0,0)$ δεν είναι αποδεκτή γιατί η συνάρτηση $E(x,y)$ ορίζεται για $x > 0$ και $y > 0$ (αφού τα x και y παριστάνουν μήκος). Με το παράδειγμα αυτό εξετάζεται προσεκτικά το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.



Σχήμα 2.2.1: Γραφική παράσταση της επιφανείας $E(x,y)$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και τις παραγώγους E_{xx}, E_{xy} και E_{yy} ως εξής:

$$\frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial x^2} = \frac{-8\cdot(-2)x}{x^4} = \frac{16}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial y^2} = \frac{-8\cdot(-2)y}{y^4} = \frac{16}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 E(x,y)}{\partial xy} = 1$$

Επομένως η ποσότητα D είναι:

$$D = E_{xx}E_{yy} - E^2{}_{xy} = \frac{16}{x^3}\frac{16}{y^3} - 1^2 = \frac{2^4\cdot 2^4}{x^3y^3} - 1 = \frac{2^8}{x^3y^3} - 1$$

Τώρα θα εξετάσουμε για το συγκεκριμένο κρίσιμο σημείο $(2,2)$ το πρόσημο του D. Οπότε έχουμε:

$$D(2,2) = \frac{2^8}{2^3 2^3} - 1 = \frac{2^8}{2^6} - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Άρα πρόκειται για σημείο μέγιστο ή ελάχιστο. Εξετάζουμε το πρόσημο της δεύτερης μερικής παραγώγου ως προς x στο σημείο $(2,2)$. Επομένως έχουμε:

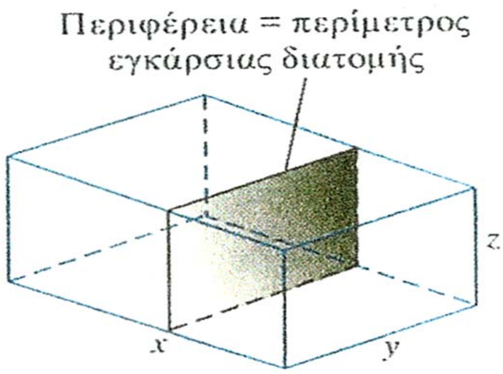
$$E_{xx}(2,2) = \left.\frac{16}{x^3}\right|_{(2,2)} = \frac{2^4}{2^3} = 2 > 0$$

Άρα το σημείο $(2,2)$ αποτελεί σημείο ελάχιστου. Κατά συνέπεια, το ελάχιστο εμβαδόν των τοιχωμάτων για δεξαμενή $4m^3$ επιτυγχάνεται όταν οι πλευρές της βάσης είναι ίσες με μήκος $x = y = 2m$.

2.3 Εφαρμογές

Εφαρμογή 2.3.1

Μια ιδιωτική ταχυδρομική εταιρεία δέχεται μονάχα δέματα συσκευασμένα σε ορθογώνια κουτιά για τα οποία το άθροισμα του μήκους και της περιφέρειας (που ορίζεται ως η περίμετρος μιας εγκάρσιας διατομής)δεν υπερβαίνει τα 108 cm. Βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού μέγιστου αποδεκτού όγκου.



Σχήμα 2.3.1

Λύση

Έστω x, y και z το μήκος, το πλάτος και το ύψους του ορθογωνίου κουτιού, αντίστοιχα. Η περιφέρεια ισούται με $2y+2z$. Επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε τον όγκο $V = xyz$ του κουτιού (όπως φαίνεται στο ανωτέρω σχήμα) ικανοποιώντας ταυτόχρονα τη σχέση $x+2y+2z=108$ (που αντιστοιχεί στο κουτί μέγιστου όγκου που δέχεται η εταιρεία). Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε τον όγκο του κουτιού ως συνάρτηση δυο μεταβλητών.

Χρησιμοποιώντας την σχέση $x = 108 - 2y - 2z$

Έχουμε

$V = xyz \;\; \Rightarrow \;\; V(yz) = (108 - 2y - 2z)yz \;\; \Rightarrow$

$V(y,z) = 108yz - 2y^2z - 2yz^2$

Θέτοντας τις πρώτες μερικές παραγώγους ίσες με το μηδέν,

$Vy(y,z) = 108 - 4yz - 2z^2 = (108 - 2y - 4z)z = 0$

$Vz = 108y - 2y^2 - 4yz = (108 - 2y - 4z)y = 0$

παίρνουμε τα κρίσιμα σημεία $(0,0)$, $(0,54)$, $(54,0)$ και $(18,18)$.

Ο όγκος μηδενίζεται στα σημεία $(0,0)$, $(0,54)$, $(54,0)$ τα οποία συνεπώς δεν μας ενδιαφέρουν.

Στο σημείο $(18,18)$ εφαρμόζουμε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου:

$Vyz = -\ 4z$, Vzz = - 4y, Vyz = 108-4y-4z.

Έτσι

$VyyVzz$ - Vyz^2 = 16yz - $16(27 - y - z)^2$.

Συνεπώς

$Vyy(18,18) = -4(18) < 0$

και

$(VyyVzz - Vyz^2) = 16(18)(18) - 16(-9)^2 > 0$

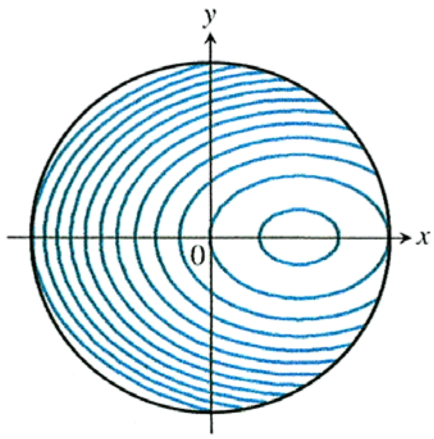
που σημαίνει ότι το σημείο $(18,18)$ αντιστοιχεί στο μέγιστο όγκο. Οι ζητούμενες διαστάσεις του κουτιού είναι λοιπόν

$x = 108 - 2(18) - 2(18) = 36\ cm$, $y = 18$ cm και $z = 18$ cm. Ο μέγιστος όγκος ισούται με $V = (36)(18)(18) = 11.664$ cm^3 δηλαδή $0{,}011664$ m^3.

Εφαρμογή 2.3.2

Η επίπεδη κυκλική πλάκα του παρακάτω σχήματος καλύπτει την περιοχή $x^2+y^2<1$. Τόσο το εσωτερικό της πλάκας όσο και η περιφέρεια της , όπου $x^2+y^2=1$, θερμαίνονται, με αποτέλεσμα η θερμοκρασία στο σημείο (x,y) να είναι $T(x,y)=x^2+2y^2-x$.

Βρείτε τις θερμοκρασίες των θερμότερων και των ψυχρότερων σημείων της πλάκας.



Σχήμα 2.3.2 *:* Οι καμπύλες σταθερής θερμοκρασίας καλούνται ισόθερμες. Το σχήμα δείχνει ισόθερμες της συνάρτησης θερμοκρασίας.

Λύση

Έχουμε ότι $T(x,y)=x^2+2y^2-x$

Για $x^2+y^2\le 1$ χρησιμοποιούμε το 2ο κριτήριο παραγώγου.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial T}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial T}{\partial y}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}2x-1=0\\ 4y=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}x=\dfrac{1}{2}\\ y=0\end{array}\right\}$$

Οπότε κρίσιμο σημείο είναι το $A\left(\dfrac{1}{2},0\right)$

Έχουμε επίσης ότι

$T_{xx}T_{yy} - T^2{}_{xy} = 2 \cdot 4 - 0^2 = 8 > 0$

Ενώ $T_{xx} = 2 > 0$ επομένως το σημείο Α είναι σημείο τοπικού ελάχιστου ενώ η $T(A) = -\frac{1}{4}$

Στο σύνορο $x^2 + y^2 = 1$ έχουμε: $y^2 = 1 - x^2 \quad (1)$ και η $T(x,y)$ γίνεται:

$T(x) = x^2 + 2(1 - x^2) - x = -x^2 - x + 2$

Για τα ακρότατα έχουμε: $T'(x) = 0 \Rightarrow$ -2x -1 = 0 $\Rightarrow$ x = $-\frac{1}{2}$

Και $T''(x) = -2 < 0$ οπότε, τα σημεία $B\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ * είναι σημεία τοπικού μέγιστου της T με τιμή $T(B) = \frac{9}{4}$ και τα δυο.

* Από τη σχέση (1) έχουμε : για $x = -\frac{1}{2}$ το $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βελτιστοποίηση συναρτήσεων δυο μεταβλητών και εφαρμογές (δεσμευμένα ακρότατα – πολλαπλασιαστές Lagrange)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για την βελτιστοποίηση συναρτήσεων δυο μεταβλητών με δεσμευμένα ακρότατα, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange.

[Τζιρτζιλάκης Ε., 2008, Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ. και Ρεκούμης Κ. 2007, Αλιμπινίσης Α., Γρηγοριάδης Σ., Ευσταθόπουλος Ε., Κλαουδάτος Ν., Παπασταυρίδης Σ. και Σβέρκος Α., 2005, Ανδεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπαταυρίδης Σ. και Πολύζος Γ. 2001]

3.1 Στοιχεία Θεωρίας

Ακρότατα υπό περιορισμούς

Σε πολλές εφαρμογές αντιμετωπίζεται το πρόβλημα εύρεσης ακροτάτων με τις μεταβλητές να ικανοποιούν κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες. Αυτά τα προβλήματα χαρακτηρίζονται ως προβλήματα ακροτάτων υπό περιορισμούς. Είναι δυνατόν εκτός από την συνάρτηση $f(x,y)$ που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, να έχουμε επίσης και έναν τουλάχιστον περιορισμό των μεταβλητών x, y της μορφής $g(x,y)=0$.

Η απλούστερη περίπτωση είναι να μπορούμε να επιλύσουμε την $g(x,y)$ ως προς μια μεταβλητή, για παράδειγμα την y οπότε θα έχουμε $y=A(x)$. Με αντικατάσταση τώρα της y στην $f(x,y)$ έχουμε την συνάρτηση $f(x,A(x))$. Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση, το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης ακρότατου της συνάρτησης μιας μεταβλητής $f(x,A(x))$.

Υπάρχουν επίσης περιπτώσεις που η προς μελέτη συνάρτηση που περιγράφει ένα πρόβλημα είναι τριών μεταβλητών έστω $f(x,y,z)$ και ο περιορισμός δίνεται ως μια συνάρτηση που μπορεί να επιλυθεί πάλι ως προς την μια μεταβλητή, για παράδειγμα ως προς z. Τότε θα έχουμε τον περιορισμό την μορφής $z=g(x,y)$. Σε αυτήν την περίπτωση πάλι με αντικατάσταση καταλήγουμε σε ένα πρόβλημα συνάρτησης δυο μεταβλητών $f(x,y,g(x,y))$ την οποία και αντιμετωπίζουμε κατά τα γνωστά.

Για την περίπτωση που έχουμε μια συνάρτηση $f(x,y)$ η οποία υπόκειται στον περιορισμό $g(x,y)=c$ και δεν είναι εύκολη η επίλυση της $g(x,y)$ ως προς μια μεταβλητή, χρησιμοποιείται συνήθως η μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange. Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο εισάγουμε μια μεταβλητή $\lambda \neq 0$, τον πολλαπλασιαστή Lagrange, και θεωρούμε την συνάρτηση

$$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\left(g(x,y) - c\right) \tag{3.1}$$

Στην συνέχεια, επιλύουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0, \qquad (3.2)\\
\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \lambda} &= g(x,y) - c = 0
\end{aligned}$$

με αγνώστους τις x, y, λ. Οι τιμές των x, y μας δίνουν τις πιθανές θέσεις ακροτάτων.

Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν μπορούμε να είμαστε πάντα σίγουροι αν αυτά τα ακρότατα υπάρχουν και ποια από αυτά είναι μέγιστα ή ελάχιστα. Μια μέθοδος που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι να αντικαταστήσουμε την τιμή του λ που έχουμε βρει την $\Phi(x,y)$. Στην συνέχεια μελετάμε την $\Phi(x,y)$ κατά τα γνωστά έχοντας ως δεδομένο ότι τα κρίσιμα σημεία είναι αυτά που βρήκαμε από την επίλυση του παραπάνω συστήματος (3.2).

Συνοψίζοντας, η διαδικασία εύρεσης ακροτάτων της συνάρτησης $f(x,y)$ με τον περιορισμό $g(x,y) = c$ που προτείνεται είναι:

Επιλύουμε το σύστημα (3.2) ως προς x, y, λ και βρίσκουμε κάποια (x_i, y_i) και κάποιο λ_i

Αντικαθιστούμε την τιμή του λ_i στην συνάρτηση (3.1)

Εξετάζουμε κατά τα γνωστά τι είδους σημεία είναι τα (x_i, y_i) για την συνάρτηση που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα και προκύπτει από την (3.1) για $\lambda = \lambda_i$.

3.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.2.1

Μερμήγκι σε μεταλλική πλάκα. Η θερμοκρασία στο σημείο (x , y)μιας μεταλλικής πλάκας είναι $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Ένα μερμήγκι πάνω στην πλάκα κινείται σε κύκλο ακτίνας 5 και κέντρου στην αρχή των αξόνων. Πόση είναι η μέγιστη και πόση η ελάχιστη θερμοκρασία που θα συναντήσει κατά την διαδρομή του το μυρμήγκι;

Λύση

$T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$

Έχουμε τον περιορισμό $g(x,y) = x^2 + y^2 = 25$

$\mathrm{f}_x = 8x - 4y + 2\lambda x$

$\mathrm{f}_{xx} = 8 + 2\lambda$

$\mathrm{f}_y = -4x + 2y + 2\lambda y$

$\mathrm{f}_{yy} = 2 + 2\lambda$

$\mathrm{f}_{xy} = -4$

Από τον τύπο του Lagrange έχουμε:

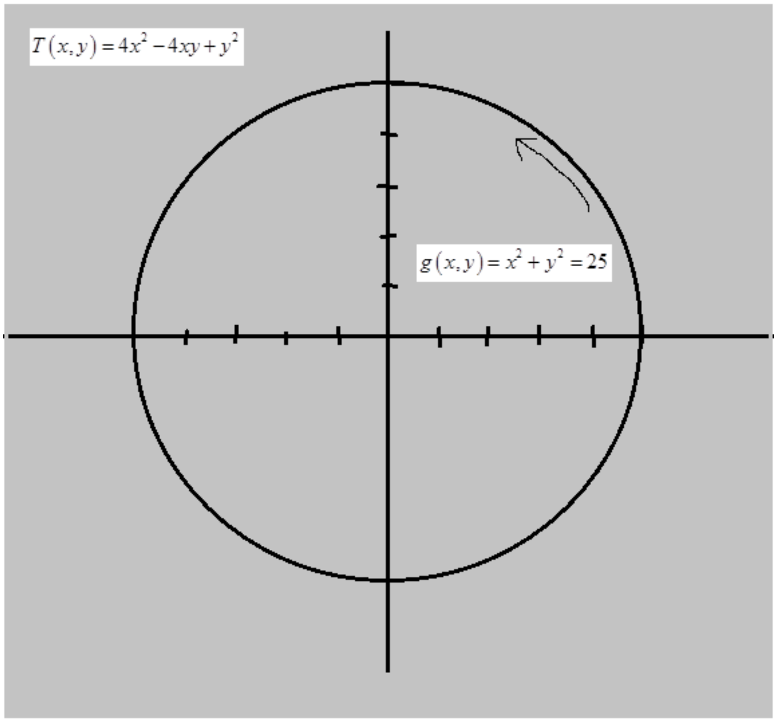
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial T(x,y)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial T(x,y)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8x - 4y = 2\lambda x \\ 2y - 4x = 2\lambda y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = \frac{8-2\lambda}{4}x$$

(1)

Και αντικαθιστώντας στην άλλη εξίσωση έχουμε:

$x\lambda(\lambda-5)=0$

οπότε και τις περιπτώσεις $x=0$ ή $\lambda=0$ ή $\lambda=5$



ΣΧΗΜΑ 3.2.1

Για $x=0$, έχουμε y=0 από την (1), που δεν ικανοποιεί την $g(x,y)$ άρα, απορρίπτεται.

Για $\lambda=0$, έχουμε $y=2x$ από την (1) και αντικαθιστώντας στην $g(x,y)$ παίρνουμε $x^2+4x^2=25 \Rightarrow$

$$x=\pm\sqrt{5} \text{ και έτσι } y=\pm2\sqrt{5}$$

άρα, $A\left(\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)$, $B\left(-\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right)$

Για $\lambda = 5$ έχουμε $y = -\dfrac{x}{2}$ από την (1) και αντικαθιστώντας στην $g(x,y)$

έχουμε $\dfrac{x^2 + x^2}{4} = 25 \Rightarrow$

$$5x^2 = 100 \Rightarrow$$

$$x = \pm 2\sqrt{5} \ , \quad \text{έτσι} \quad y = \pm\sqrt{5}$$

άρα $\Gamma\left(2\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$, $\Delta\left(-2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$.

$$D = f_{xx} f_{yy} - f^2{}_{xy} \Rightarrow$$
$$D = 8 + 2\lambda * 2 + 2\lambda - 16$$

Για λ=0 έχουμε:

$D(x,y) = 0$ Τοπικό μέγιστο

Για λ=5 έχουμε:

$f_{xx} > 0$ Τοπικό ελάχιστο

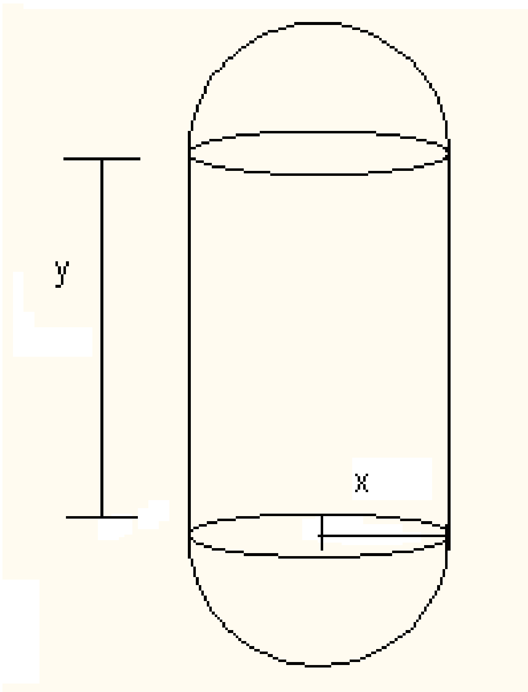
3.3 Εφαρμογές

Εφαρμογή 3.3.1

Φθηνότερη δεξαμενή. Είστε μηχανικός και η εταιρεία στην οποία εργάζεστε σας έχει συνθέσει να σχεδιάσετε μία δεξαμενή υγραερίου η οποία να έχει κυλινδρικό σχήμα, ημισφαιρικά άκρα και χωρητικότητα 8000 m^3. Ο πελάτης έχει ζητήσει να καταναλωθεί η ελάχιστη ποσότητα υλικού για την κατασκευή της δεξαμενής. Ποια ακτίνα και ποιο ύψος θα προτείνατε για το κυλινδρικό τμήμα της δεξαμενής;

Λύση

Περιορισμός : Ο όγκος V της δεξαμενής να είναι 8000 m^3



Σχήμα 3.3.1

Έχουμε $V = \pi x^2 y + \frac{2}{3}\pi x^3 + \frac{2}{3}\pi x^3 = \pi x^2 y + \frac{4}{3}\pi x^3$

Η επιφάνεια που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, ώστε να είναι ελάχιστη και η ποσότητα υλικού που θα χρησιμοποιηθεί, είναι:

$S = 4\pi x^2 + 2\pi xy$

$\overrightarrow{\nabla S} = \lambda \overrightarrow{\nabla V} \Rightarrow$

$(8\pi x + 2\pi y)i + 2\pi x j = \lambda\left[\left(2\pi xy + 4\pi x^2\right)i + \pi x^2 j\right]$

Από ισότητα διανυσμάτων έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 8\pi x + 2\pi y = \lambda\left(2\pi xy + 4\pi x^2\right) \\ 2\pi x + \lambda\pi x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(\lambda x - 2) = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x = 0 \\ x = \frac{2}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0 \end{aligned}\right\}$$

Για $x=0$ έχουμε $2\pi y=0 \Rightarrow$ $\mathrm{y}=0$

άρα (x,y) = $(0,0)$ που απορρίπτεται

Για $x=\dfrac{2}{\lambda}$ η άλλη εξίσωση δίνει μετά από πράξεις $y=0$

Επομένως (x,y) = $\left(\dfrac{2}{\lambda},0\right)$

Αντικαθιστώντας στον περιορισμό τα (x,y) έχουμε λ = $\left(\dfrac{\pi}{750}\right)^{\frac{1}{3}}$

Οπότε (x,y) = $\left(\dfrac{2}{\left(\dfrac{\pi}{750}\right)^{\frac{1}{3}}},0\right)$

Επομένως το βέλτιστο σχήμα για τη δεξαμενή είναι σφαιρικό με ακτίνα x καθώς το ύψος του κυλινδρικού τμήματος είναι μηδενικό.

Η περίπτωση $\lambda=0$ δίνει $(x,y)=(0,0)$ όπου απορρίπτεται.

Εφαρμογή 3.3.2

Θερμόμετρο σημείο διαστημικού ανιχνευτή. Ένας διαστημικός ανιχνευτής με σχήμα ελλειψοειδούς

$$4x^2+y^2+4z^2=16$$

εισέρχεται στη γήινη ατμόσφαιρα και αρχίζει να θερμαίνεται λόγω τριβών. Μετά από $1\,h$, η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) της επιφάνειας του είναι

$$T(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600$$

Βρείτε το θερμότερο σημείο στην επιφάνεια του ανιχνευτή.

Λύση

Παίρνουμε τον περιορισμό: $g(x,y,z)$: $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$

Η συνάρτηση είναι: $T(x,y,z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$

$\vec{\nabla}T = \lambda \nabla g \Rightarrow$

$$\left(16x\hat{i} + 4z\hat{j} + (4y+16)\hat{\kappa}\right) = \lambda\left(8x\hat{i} + 2y\hat{j} + 8z\hat{\kappa}\right)$$

Από ισότητα διανυσμάτων έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 16x &= 8\lambda x \\ 4z &= 2\lambda y \\ 4y - 16 &= 8\lambda z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &x(8\lambda - 16) = 0, \quad \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ \lambda = 2 \end{matrix} \\ &y = \frac{4}{1-\lambda^2}, \quad (\lambda \neq \pm 1) \\ &z = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}, \quad (\lambda \neq \pm 1) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Για $x = 0$: αντικαθιστώντας τα x, y, z στον περιορισμό $g(x,y,z)$ και εύρεση του λ. Βρίσκουμε ότι $\lambda = 0$. Οπότε, από τις σχέσεις (1) έχουμε $y = 4$ και $z = 0$, άρα $(x,y,z) = (0,4,0)A$ με $T(A) = 600$.

Για $\lambda = 2$ από τις σχέσεις (1) έχουμε: $y = -\frac{4}{3} = z$ και υπολογίζουμε το x αντικαθιστώντας στον περιορισμό.

$$4x^2 + \frac{16}{9} + 4 * \frac{16}{9} = 16 \Rightarrow \quad x^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \quad x = \pm\frac{4}{3}$$

Επομένως, έχουμε άλλα δυο σημεία $B\left(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ με

$T(B) = 642{,}7$

Για $\lambda = \pm 1$ τα συστήματα εξισώσεων γίνονται αδύνατα καθώς εξάγει $-16 = 0$. Επομένως, τα δυο θερμόμετρα σημεία είναι $\left(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

Παράδειγμα 3.3.3

Εντοπισμός ραδιοτηλεσκόπιου. Σας ανατεθεί η τοποθέτηση ενός ραδιοτηλεσκόπιου στην επιφάνεια ενός νεοανακαλυφθέντα πλανήτη. Προκειμένου να ελαχιστοποιήσετε ανεπιθύμητες παρεμβολές, θέλετε να τοποθετήσετε το τηλεσκόπιο στο σημείο όπου το μαγνητικό πεδίο στον πλανήτη είναι ασθενέστερο. Ο πλανήτης είναι σφαιρικός, με ακτίνα 6 μονάδες μήκος. Αν η αρχή του συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο κέντρο του πλανήτη, η ισχύς του μαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση

$M(x, y, z) = 6x - y^2 + xy + 60$. Σε ποιο σημείο πρέπει να τοποθετηθεί το ραδιοτηλεσκόπιο;

Λύση

Το ραδιοτηλεσκόπιο είναι σφαιρικό με ακτίνα 6 μονάδες μήκους.

Ο περιορισμός είναι: $g(x,y,z):\ x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Η συνάρτηση είναι: $M(x,y,z) = 6x - y^2 + xz + 60$.

$$\overrightarrow{\nabla M} = \lambda \overrightarrow{\nabla g} \Rightarrow$$

$$(6+z)\hat{i} - 2y\hat{j} + x\hat{k} = \lambda\left(2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}\right) \Rightarrow$$

Από ισότητα διανυσμάτων έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} 6+z = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x = 2\lambda z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y(\lambda+1) = 0 \\ x = 2\lambda z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ \lambda = 1 \\ x = 2\lambda z \end{array}\right\}$$

από την 1η και την 3η έχουμε:

$$x = \frac{12\lambda}{4\lambda^2 - 1},\ z = \frac{6}{4\lambda^2 - 1} \qquad \text{όπου:} \qquad \lambda \neq \pm\frac{1}{2}$$

Για $y=0$, αντικαθιστώντας στον περιορισμό g, θα έχουμε μια εξίσωση με άγνωστο το λ (αφού τα x,z είναι γραμμένα ως προς αυτό). Θα βρούμε :

$$16\lambda^4-12\lambda^2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2\left(4\lambda^2-3\right)=0$$

επομένως $\lambda=0$ ή $\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Για $\lambda=0$, αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις για τα x,y,z έχουμε:
$x=0,\ \mathrm{y}=0,\mathrm{z}=6$ άρα $A(0,0,6),\ \mathrm{M}(A)=60$.

Για $\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ έχουμε: $x=\pm\ 3\sqrt{3},\ \mathrm{y}=0,\ \mathrm{z}=3$ άρα $B_{(\pm)}\left(\pm3\sqrt{3},0,3\right)$ με
$M\left(B_+\right)=60+27\sqrt{3}$ και $M\left(B_-\right)=60-27\sqrt{3}$

Για $\lambda=-1$, έχουμε $z=2,\ \mathrm{x}=-4$ και με αντικατάσταση στο g θα βρούμε και την τιμή του y όπου θα είναι $y=\pm4$ άρα $\Gamma_{(\pm)}\left(-4,\pm4,2\right)$ με $\mathrm{M}\left(\Gamma_{\pm}\right)=12$.

Για $\lambda=\pm\frac{1}{2}$, οι αρχικές εξισώσεις είναι αδύνατες. Οπότε, τα σημεία με το ελάχιστο μαγνητικό πεδίο όπου θα τοποθετηθεί το ραδιοτηλεσκόπιο είναι: $(-4,4,2)$ και $(-4,-4,2)$ στο σύστημα συντεταγμένων του πλανήτη.

Παράδειγμα 3.3.4

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{x}+\mathrm{y}$ υπό τον περιορισμό $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=1$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε τον περιορισμό $\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{c}$ με $\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2$ και $\mathrm{c}=1$ ορίζουμε την συνάρτηση:

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})+\lambda\left(\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y})-\mathrm{c}\right)=\mathrm{x}+\mathrm{y}+\lambda\left(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2-1\right)$$

Προσδιορίζουμε τα κρίσιμα σημεία από την επίλυση του συστήματος:

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow 1 + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow 1 + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

Από τις εξισώσεις (1), (2), με αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε:

$$2\lambda(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Θέτοντας στην(3) $x = y$ βρίσκουμε:

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Τελικά έχουμε:

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } \lambda = -\frac{1}{2x} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε έχουμε τα κρίσιμα σημεία $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ για $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ για $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Έχουμε επίσης ότι:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x^2} = 2\lambda \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial y^2} = 2\lambda \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6)$$

Τότε $D(x,y)=\Phi_{xx}\Phi_{yy}-\Phi^2{}_{xy}=4\lambda^2>0$ επομένως για $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι $\Phi_{xx}<0$ οπότε και το αντίστοιχο σημείο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ αποτελεί σημείο τοπικού μεγίστου της $f(x,y)$ υπό τον περιορισμό $x^2+y^2=1$.

Αντίστοιχα, για $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι $\Phi_{xx}>0$ οπότε και το αντίστοιχο σημείο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ αποτελεί σημείο τοπικού ελαχίστου της $f(x,y)$ υπό τον περιορισμό $x^2+y^2=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ (ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX) ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στην βελτιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών δηλαδή στην εύρεση μεγίστου η ελαχίστου που επιτυγχάνεται είτε αλγεβρικά είτε με την μέθοδο της simplex. Επίσης προσθέτουμε βασικές έννοιες, τύπους παραδείγματα καθώς και εφαρμογές στην βελτιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών που μοντελοποιούνται σε ρεαλιστικά προβλήματα.

4.1 Στοιχεία θεωρίας

Στα μαθηματικά ο Γ.Π. είναι ένα μαθηματικό μοντέλο στο οποίο επιχειρείται η βελτιστοποίηση (κριτήρια βελτιστοποίησης) αγνώστων πραγματικών μεταβλητών των οποίων το πεδίο τιμών οριοθετείται έμμεσα από γραμμικούς περιορισμούς (ανισοεξισώσεις) συναρτήσεις των μεταβλητών αυτών. Οι άγνωστες μεταβλητές προσδιορίζουν (μοντελοποιούν) το αντικείμενο απόφασης του προβλήματος και ονομάζονται για το σκοπό αυτό μεταβλητές απόφασης (decision variables).

Η θεωρία του Γ.Π. μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 70, εξελίχθηκε ως μεθοδολογία βελτιστοποίησης ενός και μόνου κριτηρίου απόφασης με την ονομασία αντικειμενική συνάρτηση (objective function). Όμως, η πολυπλοκότητα των συστημάτων απόφασης καθώς και οι συνθήκες ανταγωνιστικότητας κάτω από τις οποίες παίρνονται οι αποφάσεις καθιστούν τη προσέγγιση αυτή κάθε άλλο παρά ρεαλιστική. Γι' αυτό και αναπτύχθηκε η θεωρία του Γ.Π. με πολλαπλά κριτήρια απόφασης.

Γραμμικός προγραμματισμός

Αναφέρεται σε μαθηματική τεχνική που χρησιμοποιείται ανάμεσα σε δύο η περισσότερες μεταβλητές για να βρούμε την καλύτερη δυνατή λύση σε προβλήματα με περιορισμένους πόρους.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

- Η επιχείρηση ο οργανισμός η το σύστημα θα πρέπει να πετύχει κάποιο αντικειμενικό σκοπό.
- Πρέπει να υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι λύσης για την επίτευξη του αντικειμενικού σκοπού.

- Οι πόροι θα πρέπει να είναι περιορισμένοι.
- Ο αντικειμενικός σκοπός και οι περιορισμοί να μπορούν να απορροφηθούν σαν γραμμικές εξισώσεις η ανισώσεις.

<u>Αντικειμενική συνάρτηση</u>

Είναι η συνάρτηση που περιγράφει το πρόβλημα που επιθυμούμε να βελτιστοποιήσουμε.

<u>Περιορισμοί</u>

Οι περιορισμοί συνάρτησης εκφράζουν τους περιορισμένους πόρους.

<u>Λύση</u>

Στον μαθηματικό προγραμματισμό με τον όρο λύση εννοούμε κάθε συνδυασμό τιμών των μεταβλητών $\left(x_1 , \mathrm{x}_2,\dots , \mathrm{x}_n\right)$ του μοντέλου, ανεξάρτητα αν ο συνδυασμός αυτός είναι επιθυμητός ή και επιτρεπτός.

Εφικτή -Μη εφικτή λύση

Μια λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς θα λέγεται εφικτή λύση για το πρόβλημα αυτό, ενώ μια λύση που παραβιάζει έστω και έναν περιορισμό θα λέγεται μη εφικτή.

Μη γραμμικό μοντέλο

Αν σε ένα μοντέλο η αντικειμενική συνάρτηση ή κάποιος περιορισμός που είναι μη γραμμικής μορφής και οι μεταβλητές λαμβάνουν μη αρνητικές τιμές λέγεται μη γραμμικό μοντέλο.

Τα βήματα για την κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου ενός προβλήματος βελτιστοποίησης είναι τα ακόλουθα:

1.Καθορίζουμε τις μεταβλητές που εκφράζουν τις άγνωστες, προς εκτίμηση ποσότητες του προβλήματος.

2.Περιγράφουμε το στόχο και τα κριτήρια επιλογής της βέλτιστης λύσης με τον ορισμό της αντικειμενικής συνάρτησης.

3.Περιγράφουμε τους περιορισμούς και τις υποθέσεις του προβλήματος με τον ορισμό μαθηματικών εκφράσεων.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Τα βήματα που ακολουθούμε για την γραφική επίλυση προβλημάτων είναι τα εξής:

Σχεδιάζουμε στο 1^o τεταρτημόριο τις ευθείες όλων των περιορισμών του προβλήματος αγνοώντας τις ανισότητες και θεωρώντας τες σαν ισότητες.

Για κάθε μια ευθεία περιορισμού καθορίζουμε την περιοχή που αναπαριστά λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες.

Σχεδιάζουμε για αυθαίρετες τιμές του $z = \mathrm{f}(x, \mathrm{y})$ τις αντίστοιχες ευθείες όπου $f(x, \mathrm{y})$ η αντικειμενική συνάρτηση.

Παρατηρώντας το εφικτό χωρίο εντοπίζουμε προς ποια κατεύθυνση η αντικειμενική συνάρτηση μειώνεται ή αυξάνεται.

Εντοπίζουμε το ακραίο σημείο το οποίο αποτελεί το τελευταίο σημείο τομής της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης και του εφικτού χωρίου λύσης, καθώς η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης εγκαταλείπει το εφικτό χωρίο λύσης.

Υπολογίζουμε τις συνιστώσες του ακραίου σημείου το οποίο αποτελεί την άριστη λύση του προβλήματος.

Υπολογίζουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης *z* στο σημείο αυτό.

Μέθοδος simplex

Η γενική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι η ακόλουθη:

$$\max i \min ze \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Οι περιορισμοί είναι:

$$a_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \left(\leq, =, \geq\right) b_1$$

$$a_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \left(\leq, =, \geq\right) b_2$$

$$\vdots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n \left(\leq, =, \geq\right) b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Συνοπτικά το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού γράφεται

$$\max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπό τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left(\leq, =, \geq\right) b_i$$

$$x_j \geq 0 \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

Τυπική μορφή

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι σε τυπική μορφή αν είναι το πρόβλημα μεγιστοποίησης. Όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη αρνητικούς τους σταθερούς όρους και όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

Η τυπική μορφή ενός προγράμματος γραμμικού προγραμματισμού είναι η εξής:

$$\max imize \ \mathrm{z} = \mathrm{c}_1 x_1 + \mathrm{c}_2 x_2 + \ldots + \mathrm{c}_n x_n$$

υπό τους περιορισμούς

$$a_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq) \ \mathrm{b}_1$$

$$a_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq) \ \mathrm{b}_2$$

$$\vdots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq) \ \mathrm{b}_m$$

$$x_j \geq 0, \ \mathrm{b}_i \geq 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}, \quad \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$$

αν γράψουμε το παραπάνω πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού η τυπική μορφή είναι

$$\max imize \ \mathrm{z} = \mathrm{c}^T x$$

υπό τους περιορισμούς

$$Ax = \mathrm{b}, \qquad \mathrm{x} \geq 0 \quad \text{και} \quad \mathrm{b} \geq 0$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ a_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathrm{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

και οι σχέσεις $x \geq 0$, $\mathrm{b} \geq 0$ υποδηλώνουν ότι οι συνιστώσες των διανυσμάτων x και b είναι μεγαλύτερες ή ίσες από το μηδέν.

Κάθε πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να τεθεί στην τυπική μορφή με χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών.

<u>Μετατροπή σε τυπική μορφή</u>

Ελαχιστοποίηση

1)Όταν έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης $f\left(x_1,\ \ldots,\mathrm{x}_n\right)=\mathrm{c}_1x_1+\mathrm{c}_2x_2+\ \ldots\ +\mathrm{c}_nx_n$ θέτουμε:

$g\left(x_1,\ \ldots,\mathrm{x}_n\right)=\text{-f}\ \left(x_1,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n\right).$

Με αυτόν τον τρόπο το πρόβλημα $\min\ \mathrm{f}\left(x\right)$ ανάγεται στο $-\max\ \mathrm{g}\left(x\right)$. Συνεπώς είναι:

$\min\ \mathrm{f}\left(x_1,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n\right)=\text{-}\max\ \mathrm{g}\left(x_1,\ \ldots,\ \mathrm{x}_n\right)$

2) Αρνητικοί σταθεροί όροι

Όταν υπάρχουν αρνητικοί σταθεροί όροι, αυτοί μετατρέπονται σε θετικούς πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των αντιστοίχων με -1.

3) *Ανισώσεις στους περιορισμούς .*

Όταν υπάρχουν περιορισμοί με μορφή ανισοτήτων και όχι εξισώσεων , οι ανισότητες ανάγονται σε εξισώσεις με εισαγωγή νέων μη αρνητικών μεταβλητών που λέγονται περιθώριες μεταβλητές.

Για παράδειγμα περιορισμοί της μορφής :

$$a_{i1}x_1\ +\ \alpha_{i2}x_2\ +\ \ldots\ +\ \alpha_{\iota n}x_n\ \leq\ \mathrm{b}_i$$

$$a_{j1}x_1\ +\ \alpha_{j2}x_2\ +\ \ldots\ +\ \alpha_{jn}x_n\ \geq\ \mathrm{b}_j$$

μετατρέποντας σε περιορισμούς της μορφής :

$$a_{i1}x_1\ +\ \alpha_{i2}x_2\ +\ \ldots\ +\ \alpha_{\iota n}x_n\ +\ \mathrm{x}_r=\ \mathrm{b}_i\qquad \mathrm{x}_r\ \geq\ 0$$

$$a_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \ldots + \alpha_{jn}x_n - x_s = b_j \qquad x_s \geq 0$$

4) περιορισμός πρόσημου

Όταν οι μεταβλητές δεν είναι μη αρνητικές διακρίνουμε τις εξής επιμέρους περιπτώσεις:

Αν για μια μεταβλητή x_i ισχύει $x_i \leq 0$, θέτουμε:

$x_i = -x_i'$, όπου $x_i' \geq 0$.

Αν για κάποια μεταβλητή x_j δεν υπόκειται σε περιορισμό πρόσημου (δηλαδή $x_j \in R$)τότε θέτουμε

$$x_j = x_j' - x_j'' \quad \text{όπου} \quad x_j', x_j'' \geq 0.$$

<u>Περιγραφή μεθόδου simplex</u>

<u>Παράδειγμα 4.1.1</u>

$\max z = 6x_1 + 7x_2$

με τους περιορισμούς

$2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

Λύση

Καταρχήν μετατρέπουμε το πρόβλημα σε τυπική μορφή και έχουμε:

$\max z = 6x_1 + 7x_2$

υπό τους περιορισμούς

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$

$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Στο ταμπλό ως πρώτη βάση επιλέγουμε το διάνυσμα (x_3,x_4) το οποίο τοποθετούμε στην πρώτη στήλη.

Στην δεύτερη στήλη (c_B) τοποθετούμε τους συντελεστές των αντίστοιχων στοιχείων όπως εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση.

Στην προκειμένη περίπτωση ο συντελεστής του x_3 και του x_4 είναι μηδέν.

Στην τρίτη στήλη (x_B) τοποθετείται ο πίνακας b της τυπικής μορφής, δηλαδή όλοι οι αριθμοί δεξιά των ισοτήτων. Στις επόμενες στήλες τοποθετούνται όλοι οι συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτές εμφανίζονται στο σύστημα περιορισμών της τυπικής μορφής. Στην κορυφή του πίνακα και πάνω από κάθε μεταβλητή (x_i) τοποθετούμε τους συντελεστές (c_j) με τους οποίους εμφανίζονται οι μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση. Τέλος στην τελευταία στήλη τοποθετείται ο λόγος θ.

Στην συνέχεια εξετάζουμε ποιά από τις υπολογιζόμενες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη. Σε πρώτη φάση καθορίζουμε από τις ως εισερχόμενη μεταβλητή την μεταβλητή x_2. Αφού βρήκαμε ότι η x_2 είναι εισερχόμενη κοιτάμε από τον πίνακα ποιά είναι η μεγαλύτερη τιμή και διαιρούμε την τιμή του $\frac{x_B}{x_2}$ και βρίσκουμε τον λόγω θ για την μεταβλητή του x_3 και του x_4. Έπειτα καθορίζουμε ως εξερχόμενη μεταβλητή από την βάση την μεταβλητή με το μικρότερο θ. σε αυτή την περίπτωση η x_3 έχει το μικρότερο θ που είναι ίσο με 4.Ως εισερχόμενη μεταβλητή εξετάζουμε ποια έχει την μεγαλύτερη υπολογισμένη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση .Σε αυτήν την φάση καθορίζουμε ως εισερχόμενη μεταβλητή την x_2. Ως οδηγό στοιχείο ορίζουμε το στοιχείο (στήλη του της γραμμής που βρίσκεται η εξερχόμενη μεταβλητή x_3 και της στήλης που βρίσκεται η εισερχόμενη μεταβλητή (x_2). Συνεπώς το οδηγό στοιχείο είναι το 3.

Για την κατασκευή του νέου ταμπλό στην πρώτη στήλη της βάσης αντικαθιστούμε την εξερχόμενη μεταβλητή (x_3) με την εισερχόμενη. Στην πρώτη στήλη c_B τοποθετούμε τους αντίστοιχους συντελεστές με τους οποίους εμφανίζονται τα στοιχεία της νέας πλέον βάσης στην αντικειμενική συνάρτηση.

<u>ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 1ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ</u>

			6	7	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	Θ
x_3	0	12	2	3	1	0	4
x_4	0	8	2	1	0	1	8
	Z	0	6	7	0	0	

Στον συγκεκριμένο πίνακα αλλάξαμε μόνο το πρώτο στοιχείο x_2 οπότε στην πρώτη θέση βάζουμε το 7. Έτσι το ταμπλό έχει την εξής μορφή:

<u>ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 2ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ</u>

Προκειμένου να εκτελέσουμε την πρώτη πράξη έχουμε κατά νου ότι το οδηγό στοιχείο πρέπει να γίνει μονάδα. Έτσι λοιπόν βρίσκουμε την μεγαλύτερη τιμή και διαιρούμε όλα τα στοιχεία με το 3 και το ταμπλό παίρνει την ακόλουθη μορφή (πίνακας 1.1)

			6	7	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	6
x_4	0	4	4/3	0	-1/3	1	3
	Z	28	4/3	0	-7/3	0	

Στην συνέχεια εκτελώντας την δεύτερη πράξη το στοιχείο κάτω από το οδηγό στοιχείο πρέπει να γίνει μηδέν. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του προηγούμενου πίνακα με -1 και την προσθέτουμε στην δεύτερη γραμμή του πρώτου ταμπλό SIMPLEX που είχαμε καταλήξει.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις τιμές στα κενά του z. Εφ' όσον υπολογίσαμε τα z προχωρούμε στην δημιουργία νέου ταμπλό και το συμπληρώνουμε Παρατηρούμε τώρα ότι η εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_4 και η εισερχόμενη το x_1. Στην συνέχεια θέλουμε το οδηγό στοιχείο να γίνει 1 οπότε πολλαπλασιάζουμε όλη τη δεύτερη γραμμή με το $\frac{3}{4}$ και έχουμε το ακόλουθο ταμπλό. Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με $-\frac{2}{3}$ την δεύτερη γραμμή του x_1 και τη προσθέτουμε στην πρώτη στήλη.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 3ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			6	7	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	2	0	1	1/2	-1/2	-
x_1	3	3	1	0	-1/4	3/4	-
	Z	32	0	0	-2	-1	

Η βέλτιστη λύση είναι η $z = 32$, και επιτυγχάνεται για $x_1 = 3,\ x_2 = 2$

Παράδειγμα 4.1.2

$\max\ z = 3x_1 + 4x_2$

υπό τους περιορισμούς

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

Λύση

Καταρχήν μετατρέπουμε το αρχικό μας πρόβλημα σε τυπική μορφή

$\max\ z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4$

υπό τους περιορισμούς

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$

$x_1 + x_2 + x_4 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4, \geq 0$

στο ταμπλό ως πρώτη βάση επιλέγουμε το διάνυσμα (x_3, x_4) το οποίο τοποθετούμε στην πρώτη στήλη.

Στην δεύτερη στήλη (c_B) τοποθετούμε τους συντελεστές των αντίστοιχων στοιχείων όπως εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση.

Στην προκειμένη περίπτωση ο συντελεστής του x_3 και του x_4 είναι μηδέν.

Στην τρίτη στήλη (x_B) τοποθετείται ο πίνακας b της τυπικής μορφής, δηλαδή όλοι οι αριθμοί δεξιά των ισοτήτων. Στις επόμενες στήλες τοποθετούνται όλοι οι συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτές εμφανίζονται στο σύστημα περιορισμών της τυπικής μορφής. Στην κορυφή του πίνακα και πάνω από κάθε μεταβλητή xi τοποθετούμε τους συντελεστές (c_j). Με τους οποίους εμφανίζονται οι μεταβλητές στην αντικειμενική συνάρτηση. Τέλος στην τελευταία στήλη τοποθετείται ο λόγος θ.

Στην συνέχεια εξετάζουμε ποιά από τις υπολογιζόμενες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη. Σε πρώτη φάση καθορίζουμε από τις ως εισερχόμενη μεταβλητή την μεταβλητή x_2.

<u>ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 1ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ</u>

			3	4	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	Θ
x_3	0	8	1	2	1	0	4
x_4	0	5	1	1	0	0	5
	Z	0	3	4	0	0	

Αφού βρήκαμε ότι η x_2 είναι εισερχόμενη κοιτάμε από τον πίνακα ποιά είναι η μεγαλύτερη τιμή και διαιρούμε την τιμή του $\frac{x_B}{x_2}$ και βρίσκουμε τον λόγω θ για την μεταβλητή του x_3 και του x_4. Έπειτα καθορίζουμε τον λόγο με την μικρότερη μεταβλητή και λέμε ότι η x_2 είναι εισερχόμενη μεταβλητή και η x_3 είναι εξερχόμενη μεταβλητή .

Για την κατασκευή του νέου ταμπλό στην πρώτη στήλη της βάσης αντικαθιστούμε την εξερχόμενη μεταβλητή (x_3) με την εισερχόμενη x_2. Στην πρώτη στήλη c_B τοποθετούμε τους αντίστοιχους συντελεστές με τους οποίους εμφανίζονται τα στοιχεία της νέας πλέον βάσης στην αντικειμενική συνάρτηση. Στον συγκεκριμένο πίνακα αλλάξαμε μόνο το πρώτο στοιχείο x_2 οπότε στην πρώτη θέση βάζουμε το 4. Έτσι το ταμπλό έχει την εξής μορφή.

Προκειμένου να εκτελέσουμε την πρώτη πράξη έχουμε κατά νου ότι το οδηγό στοιχείο πρέπει να γίνει μονάδα. Έτσι λοιπόν βρίσκουμε την μεγαλύτερη τιμή και διαιρούμε όλα τα στοιχεία με το 2 και το ταμπλό παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Στην συνέχεια εκτελώντας την δεύτερη πράξη το στοιχείο κάτω από το οδηγό στοιχείο πρέπει να γίνει μηδέν. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του προηγούμενου πίνακα με -1 και την προσθέτουμε στην δεύτερη γραμμή του πρώτου ταμπλό SIMPLEX που είχαμε καταλήξει.

<u>ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 2</u>

<u>ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 2ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ</u>

			3	4	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	Θ
x_2	4	4	1/2	1	1/2	0	8

x_4	0	1	1/2	0	-1/2	1	2
	Z	16	1	0	-2	0	

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις τιμές στα κενά του z . Κάνοντας τις πράξεις προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα τα οποία φαίνονται παρακάτω.

Εφ όσον υπολογίσαμε και εκτελέσαμε τις ακόλουθες πράξεις τις τοποθετούμε στο ταμπλό και το συμπληρώνουμε. Παρατηρούμε τώρα ότι η εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_4 και η εισερχόμενη το x_1 . Στην συνέχεια θέλουμε το οδηγό στοιχείο να γίνει 1 και επειδή το οδηγό στοιχείο είναι 1 το αφήνουμε όπως έχει.

<u>ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 3ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ</u>

			3	4	0	0
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	4	3	0	1	1	-1
x_1	3	2	1	0	-1	2
	z	18	0	0	-1	-2

Η βέλτιστη λύση είναι $z = 18$, και επιτυγχάνεται για $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

4.2 Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 4.2.1</u>

Να επιλυθεί γραφικά το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού

max $z = x + 2y$

υπό τις συνθήκες

$-3x + 2y \leq 3$,

$-2x + 3y \leq 5$,

$4x - y \leq 2$,

$x \leq 2$,

Με $x, y \geq 0$

Λύση

<u>Α ΤΡΟΠΟΣ</u>

<u>ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ</u>

Θεωρούμε τον πρώτο περιορισμό $-3x + 2y \leq 3$ και την αντίστοιχη ισότητα $-3x + 2y = 3$. Υπολογίζουμε τα σημεία της ευθείας αυτής για να κατασκευάσουμε την γραφική της παράσταση. Έχουμε

Για $x = 0$

$$-3 * 0 + 2y = 3 \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Οπότε ένα σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Επίσης για $y = 0$ έχουμε αντίστοιχα

$-3x + 2 * 0 = 3 \Rightarrow x = -1$ οπότε ένα άλλο σημείο της ευθείας το οποίο είναι το (-1,0).

Στην συνέχεια θεωρούμε την ανισότητα $-2x + 3y \le 5$ και την αντίστοιχή της ισότητα $-2x + 3y = 5$ για την γραφική παράσταση της οποίας έχουμε:

Για $x = 0$

$-2*0 + 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$ άρα ένα σημείο της γραφικής είναι το $\left(0, \frac{5}{3}\right)$.

Ομοίως για $y = 0$ προκύπτει

$$-2x + 3y = 5 \Rightarrow -2x + 3*0 = 5 \Rightarrow$$
$$-2x = 5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Και ένα άλλο σημείο που προσδιορίζει την γραφική παράσταση είναι το $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$.

Τέλος, θεωρώντας τον τρίτο περιορισμό $4x - y \le 2$ έχουμε για τα αντίστοιχα σημεία που ορίζουν την γραφική παράσταση της ευθείας $4x - y = 2$ τα εξής:

Για $x = 0$

$$4x - y = 2 \Rightarrow$$
$$4*0 - y = 2 \Rightarrow$$
$$y = -2$$

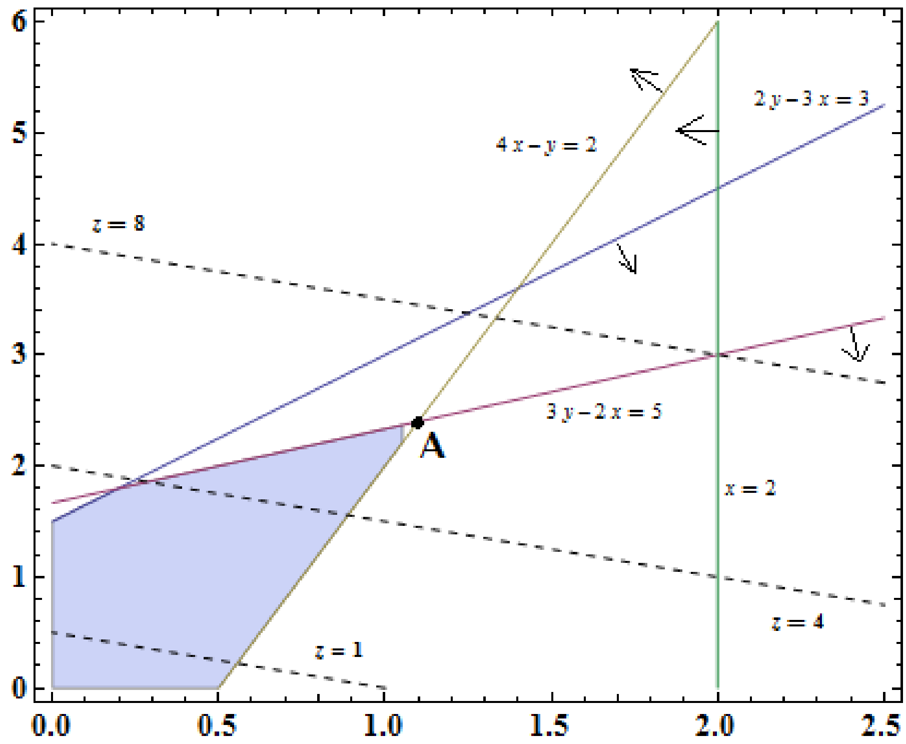
Οπότε ένα σημείο που διέρχεται στη γραφική παράσταση είναι το $(0, -2)$.

Ομοίως αν θεωρήσουμε $x = 1$

$$4x - y = 2 \Rightarrow$$
$$4*1 - y = 2 \Rightarrow$$
$$-y = 2 - 4 \Rightarrow$$
$$y = 2$$

Και το αντίστοιχο σημείο είναι το (1,2)

Οι γραφικές παραστάσεις, των αντίστοιχων με των περιορισμών ευθειών, δίνονται στο παρακάτω σχήμα για το ημιεπίπεδο όπου $x \ge 0$ και $y \ge 0$.



Σχήμα 4.2.1

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$x + 2y = z$ Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τιμή ίση με 1.

Τότε θα έχουμε $x + 2y = 1$

Για την γραφική της παράσταση έχουμε τα εξής σημεία:

$$x = 0 \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow x=1$$

Οπότε δύο σημεία της γραφικής παράστασης είναι τα $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και $(1,0)$

Οι γραφικές παραστάσεις της αντικειμενικής συνάρτησης για z=1, 4 και 8 απεικονίζονται στο παραπάνω σχήμα 4.2.1.

Παρατηρούμε ότι η τελευταία κορυφή του εφικτού χωρίου λύσης, που τέμνεται με την γραφική παράσταση της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς αυτή διέρχεται (αυξανομένων των τιμών του z) από το εφικτό χωρίο λύσης είναι η κορυφή Α (βλέπε σχήμα 4.2.1).

Η κορυφή Α προσδιορίζεται από την λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r} 4x - y = 2 \\ -2x + 3y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rr} 1 & 4x - y = 2 \\ 2 & -4x + 6y = 10 \end{array}\right\}$$ προσθέτουμε κατά μέλη και

έχουμε : $5y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{5}$ πηγαίνουμε στο σύστημα και παίρνουμε την πρώτη εξίσωση και έχουμε:

$$4x - y = 2 \Rightarrow \quad 4x - \frac{12}{5} = 2 \Rightarrow \quad 4x = 2 + \frac{12}{5} \Rightarrow \quad 4x = \frac{10}{5} + \frac{12}{5} \Rightarrow$$

$$4x = \frac{22}{5} \Rightarrow \; x = \frac{\frac{22}{5}}{\frac{4}{1}} \Rightarrow \; x = \frac{22}{20} \Rightarrow \; x = \frac{11}{10}$$

$$x = \frac{11}{10}, \quad y = \frac{12}{5}$$

$$z = \frac{11}{10} + 2\frac{12}{5} = \frac{11+48}{10} = \frac{59}{10}$$

<u>Β ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ</u>

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX</u>

Καταρχήν μετατρέπουμε το πρόβλημα σε τυπική μορφή

$$\max \; z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

υπό τις συνθήκες

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5$$

$$4x_1 - x_2 + x_5 = 2$$

$$x_1 + x_6 = 2$$

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 1ΟΥ ΤΑΜΠΛΟΥ

			1	2	0	0	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ
x_3	0	3	-3	2	1	0	0	3/2	-
x_4	0	5	-2	3	0	1	0	0	5/3
x_5	0	2	4	-1	0	0	1	0	-
x_6	0	2	1	0	0	0	0	1	-
	Z	0	1	2	0	0	0	0	

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 2ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			1	2	0	0	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ
x_2	2	3/2	-3/2	1	1/2	0	0	0	-
x_4	0	1/2	5/2	0	-3/2	1	0	0	1/5
x_5	0	7/2	5/2	0	1/2	0	1	0	7/5
x_6	0	2	1	0	0	0	0	1	2
	Z	3	4	0	-1	0	0	0	

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 3ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			1	2	0	0	0	0
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	2	9/5	0	1	-2/5	3/5	0	0
x_1	1	1/5	1	0	-3/5	2/5	0	0
x_5	0	3	0	0	2	-1	1	0
x_6	0	9/5	0	0	3/5	-2/5	0	1
	Z	19/5	0	0	- 7/5	-8/5	0	0

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 4ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			1	2	0	0	0	0
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	2	12/5	0	1	0	2/5	1/5	0
x_1	1	11/10	1	0	0	1/10	3/10	0
x_3	0	3/2	0	0	1	-1/2	1/2	0
x_6	0	9/10	0	0	0	-1/10	-3/10	1
		59/10	0	0	0	-9/10	-7/10	

Επομένως η βέλτιστη λύση είναι : $z = \frac{59}{10}$, $x = \frac{11}{10}$, $y = \frac{12}{5}$

<u>Παράδειγμα 4.2.2</u>

Να επιλυθεί γραφικά το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού

$\max\ z = 400x + 1000y$

υπό τις συνθήκες

$x+4y \leq 240$, $3x+y \leq 210$, $x+y \leq 90$, $x \leq 55$, $x, y \geq 0$

<u>Λύση</u>

<u>Α ΤΡΟΠΟΣ</u>

<u>ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ</u>

Παίρνουμε τον πρώτο περιορισμό $x+4y \leq 240$ και την αντίστοιχη ισότητα $x+4y=240$ υπολογίζουμε τα σημεία της ευθείας αυτής για να σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση. Οπότε έχουμε:

- Για $x = 0$

$x + 4y = 240 \Rightarrow$
$4y = 240 \Rightarrow$
$y = 60$

Επομένως ένα σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(0,60)$, ομοίως και για το y έχουμε:

- Για $y = 0$

$x + 4y = 240 \Rightarrow$
$x + 4 * 0 = 240 \Rightarrow$
$x = 240$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(240,0)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την ανισότητα $3x+y \leq 210$ και την αντίστοιχη ισότητα $3x+y=210$ για την γραφική παράσταση της οποίας έχουμε:

- Για $x=0$

$$3x + y = 210 \Rightarrow$$
$$3 * 0 + y = 210 \Rightarrow$$
$$y = 210$$

Επομένως το σημείο που διέρχεται από την γραφική παράσταση είναι το $(0,210)$. Ομοίως και:

- Για $y=0$

$$3x + y = 210 \Rightarrow$$
$$3x + 0 = 210 \Rightarrow$$
$$3x = 210 \Rightarrow$$
$$x = \frac{210}{3} \Rightarrow$$
$$x = 70$$

Το άλλο σημείο που προσδιορίζει την γραφική παράσταση είναι $(70,0)$.

Τέλος παίρνοντας τον τρίτο περιορισμό θεωρούμε την ανισότητα $x + y \leq 90$ και την αντίστοιχη ισότητα $x + y = 90$. Οπότε παίρνουμε:

- Για $x=0$

$$x + y = 90 \Rightarrow$$
$$0 + y = 90 \Rightarrow$$
$$y = 90$$

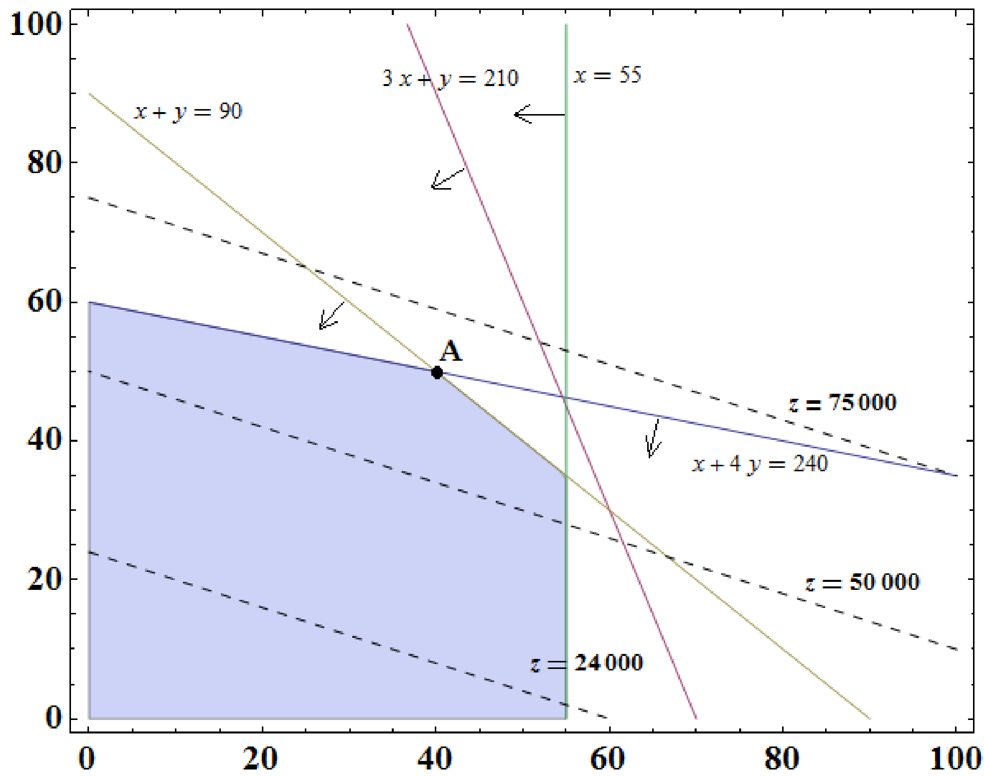
Επομένως το σημείο που διέρχεται από την γραφική παράσταση είναι $(0,90)$. Ομοίως και:

- Για $y=0$

$x + y = 90 \Rightarrow$
$x + 0 = 90 \Rightarrow$
$x = 90$

Οπότε άλλο ένα σημείο που περνά από τη γραφική παράσταση είναι $(90,0)$.

Για κάθε μια ευθεία καθορίζουμε το ημιεπίπεδο που αναπαριστά ο αντίστοιχος περιορισμός. Βάζουμε λοιπόν βελάκια που καταδεικνύουν το ημιεπίπεδο που αναπαριστά ο περιορισμός (βλέπε σχήμα 4.2.2). Οι γραφικές παραστάσεις με τους αντίστοιχους περιορισμούς δίνονται στο παρακάτω σχήμα για το ημιεπίπεδο όπου $x \geq 0$ και $y \geq 0$.



ΣΧΗΜΑ 4.2.2

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τιμή ίση με 60.

Τότε θα έχουμε:

$\max\ z = 400x + 1000y$

$x = 60\ ,\ y = 0$

$400 * 60 + 1000 * 0 = 24000$

άρα $400x + 1000y = 24000$

Για την γραφική παράσταση έχουμε τα εξής σημεία:

- Για $x = 0$

$$400 * 0 + 1000y = 24000 \Rightarrow$$
$$1000y = 24000 \Rightarrow$$
$$y = \frac{24000}{1000} \Rightarrow$$
$$y = 24$$

Ομοίως και :

- Για $y = 0$

$$400x + 1000 * 0 = 24000 \Rightarrow$$
$$400x = 24000 \Rightarrow$$
$$x = \frac{24000}{400} \Rightarrow$$
$$y = 60$$

Οπότε τα δυο σημεία που έχουμε για τη γραφική παράσταση είναι $(0,24)$ και $(0,60)$.

Οι γραφικές παραστάσεις της αντικειμενικής συνάρτησης για $z = 60$ απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα 4.2.2.

Παρατηρούμε ότι η τελευταία κορυφή του εφικτού χωρίου λύσης που τέμνεται με την γραφική παράσταση της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυτή διέρχεται (αυξανόμενων των τιμών z) από το εφικτό χωρίο λύσης είναι η κορυφή A (βλέπε σχήμα 4.2.2).

Η κορυφή Α παρουσιάζει λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{matrix} x_1 + 4x_2 = 240 \\ x_1 + x_2 = 90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \left.\begin{matrix} x_1 + 4x_2 = 240 \\ -x_1 - x_2 = -90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ αν προσθέσουμε κατά

μέλη θα έχουμε: $3x_2 = 150 \Rightarrow x_2 = 50$

Επομένως παίρνω την δεύτερη συνάρτηση για να βρω το σημείο της κορυφή της x_1 άρα έχουμε:

$$x_1 + 50 = 90 \Rightarrow$$
$$x_1 = 90 - 50 \Rightarrow$$
$$x_1 = 40$$

<u>Β ΤΡΟΠΟΣ</u>

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX</u>

Καταρχήν μετατρέπουμε το πρόβλημα μας σε τυπική μορφή

$$\max\ z = 400x_1 + 1000x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

υπό τους περιορισμούς

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 240$$

$$3x_1 + x_2 + x_4 = 210$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 90$$

$$x_1 + x_6 = 55$$

Τοποθετούμε τις τιμές στο ταμπλό της αντικειμενικής συνάρτησης και τους περιορισμούς. Παρατηρούμε ποια από τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη. Στο συγκεκριμένο ταμπλό η μεγαλύτερη μεταβλητή είναι η x_2 οπότε διαιρούμε την στήλη $\frac{x_B}{x_2}$ από τις πράξεις προκύπτει ο λόγος θ με τις αντίστοιχες τιμές. Για να προσδιορίσουμε ποία μεταβλητή είναι εξερχόμενη και ποιά είναι εισερχόμενη σε αυτή την περίπτωση κάνουμε το εξής: παρατηρούμε ποια μεταβλητή έχει το μικρότερο θ. Το μικρότερο θ είναι στην στήλη x_3. Οπότε η εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_3 και η εισερχόμενη η x_2.

<u>ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 1^{ΟΥ} ΤΑΜΠΛΟ</u>

			400	1000	<u>0</u>	0	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ
x_3	0	240	1	4	1	0	0	0	60
x_4	0	210	3	1	0	1	0	0	210
x_5	0	90	1	1	0	0	1	0	90
x_6	0	55	1	0	0	0	0	1	-
	Z	0	400	1000	0	0	0	0	

Το οδηγό στοιχείο είναι το 4 οπότε διαιρούμε την στήλη x_2 πολλαπλασιάζουμε με το -1 και το προσθέτουμε στην στήλη x_4. Πολλαπλασιάζουμε με -1 και το προσθέτουμε στην στήλη x_5. Την στήλη x_6 δεν την πειράζουμε διότι το οδηγό στοιχείο είναι 0. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 2ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			400	1000	0	0	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ
x_2	1000	60	1/4	1	1/4	0	0	0	240
x_4	0	150	11/4	0	-1/4	1	0	0	54.55
x_5	0	30	3/4	0	-1/4	0	1	0	40
x_6	0	55	1	0	0	0	0	1	55
	Z	60000	150	0	-250	0	0	0	

Υπολογίζοντας τα κενά του Z παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή είναι η x_1 οπότε διαιρούμε $\frac{x_B}{x_1}$ και κάνοντας πράξεις προκύπτει ότι η τιμή με το μικρότερο θ το έχει η στήλη x_5 άρα η x_5 είναι εξερχόμενη και η x_1 εισερχόμενη. Αντικαθιστούμε την στήλη x_5 με την x_1 ,διαιρούμε με $\frac{4}{3}$ και πολλαπλασιάζουμε με το οδηγό στοιχείο ανάλογα με το πρόσημο που έχει και προσθέτουμε τις στήλες.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 3ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			400	1000	0	0	0	0
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1000	50	0	1	1/3	0	-1/3	0
x_4	0	40	0	0	2/3	1	-11/3	0
x_1	400	40	1	0	-1/3	0	4/3	0
x_6	0	15	0	0	1/3	0	-4/3	1
	z	66000	0	0	-200	0	-200	0

Επομένως η βέλτιστη λύση είναι $\mathrm{z} = 66000,\ \mathrm{x}_1 = 40,\ \mathrm{x}_2 = 50$

4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 4.3.1

Να επιλυθεί το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού

$$\max\ z = 300x + 200y$$

υπό τις συνθήκες

$$x + 2y \le 6,\ 3x + y \le 8,\ -x + y \le 1,\ x \le 2,\ x, y \ge 0$$

Λύση

Α ΤΡΟΠΟΣ

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Παίρνουμε τον πρώτο περιορισμό $x+2y \le 6$ και την αντίστοιχη ισότητα $x+2y=6$ υπολογίζουμε τα σημεία της ευθείας αυτής για να σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση. Οπότε έχουμε:

- Για $x = 0$

$$x + 2y = 6 \Rightarrow$$
$$2y = 6 \Rightarrow$$
$$y = 3$$

Επομένως ένα σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(0,3)$, ομοίως και για το y έχουμε:

- Για $y = 0$

$$x + 2y = 6 \Rightarrow$$
$$x + 2 * 0 = 6 \Rightarrow$$
$$x = 6$$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(6,0)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την ανισότητα $3x+y \leq 8$ και την αντίστοιχη ισότητα $3x+y=8$ για την γραφική παράσταση της οποίας έχουμε:

- Για $x = 0$

$3x + y = 8 \Rightarrow$
$3 * 0 + y = 8 \Rightarrow$
$y = 8$

Επομένως το σημείο που διέρχεται από την γραφική παράσταση είναι το $(0,8)$. Ομοίως και:

- Για $y = 0$

$3x + y = 8 \Rightarrow$
$3x + 0 = 8 \Rightarrow$
$x = \frac{8}{3}$

Οπότε άλλο ένα σημείο που περνά από τη γραφική παράσταση είναι $\left(\frac{8}{3},0\right)$.

Τέλος παίρνοντας τον τρίτο περιορισμό θεωρούμε την ανισότητα $-x + y \leq 1$ και την αντίστοιχη ισότητα $-x + y = 1$. Οπότε παίρνουμε:

- Για x=0

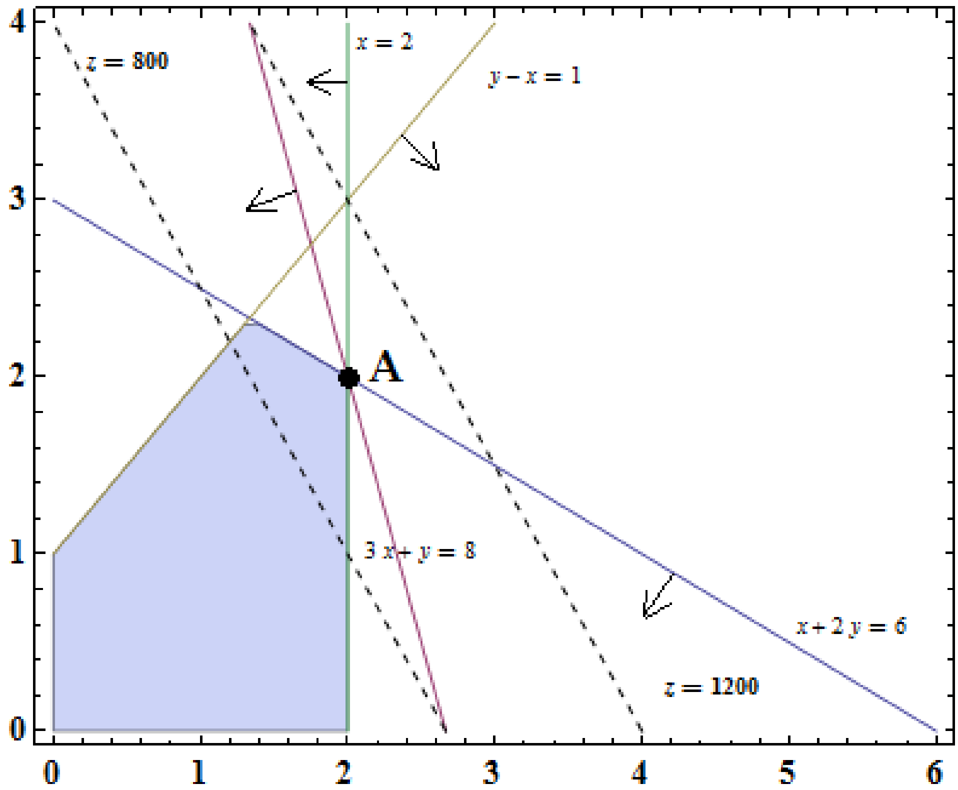
$-x + y = 1 \Rightarrow$
$-0 + y = 1 \Rightarrow$
$y = 1$

Επομένως το σημείο που διέρχεται από την γραφική παράσταση είναι $(0,1)$. Ομοίως και:

- Για y=0

$-x + y = 1 \Rightarrow$
$-x + 0 = 1 \Rightarrow$
$x = -1$

Επομένως το άλλο σημείο της γραφικής παράστασης είναι $(-1,0)$.



Σχήμα 4.3.1

Για κάθε μια ευθεία καθορίζουμε το ημιεπίπεδο που αναπαριστά ο αντίστοιχος περιορισμός. Βάζουμε λοιπόν βελάκια που καταδεικνύουν το ημιεπίπεδο που αναπαριστά ο περιορισμός (βλέπε σχήμα 4.3.1). Οι γραφικές παραστάσεις με τους αντίστοιχους περιορισμούς δίνονται στο παρακάτω σχήμα για το ημιεπίπεδο όπου $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τιμή ίση με 2400.

Τότε θα έχουμε:

$\max\ z = 300x_1 + 200x_2$

Έστω ένα τυχαίο σημείο $(6,\ 3)$.

$300 * 6 + 200 * 3 = 2400$ Άρα

$300x_1 + 200x_2 = 2400$

Για την γραφική παράσταση έχουμε τα εξής σημεία:

- Για $x_1 = 0$

$$300x_1 + 200x_2 = 2400 \Rightarrow$$
$$200x_2 = 2400 \Rightarrow$$
$$x_2 = \frac{2400}{200} \Rightarrow$$
$$x_2 = 12$$

Ομοίως και

- Για $x_2 = 0$

$$300x_1 + 200x_2 = 2400 \Rightarrow$$
$$300x_1 = 2400 \Rightarrow$$
$$x_1 = \frac{2400}{300} \Rightarrow$$
$$x_1 = 8$$

Οπότε τα δυο σημεία που έχουμε για τη γραφική παράσταση είναι $(0,12)$ και $(8,0)$.

Οι γραφικές παραστάσεις της αντικειμενικής συνάρτησης για $z = 2400$ απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα 4.3.1.

Παρατηρούμε ότι η τελευταία κορυφή του εφικτού χωρίου λύσης που τέμνεται με την γραφική παράσταση της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυτή διέρχεται (αυξανόμενων των τιμών z) από το εφικτό χωρίο λύσης είναι η κορυφή Α (βλέπε σχήμα 4.3.1).

Η κορυφή Α παρουσιάζει λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{matrix} x + 2y = 6 \\ 3x + y = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} -x - 2y = -6 \\ 6x + 2y = 16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ προσθέτουμε κατά μέλη οπότε

έχουμε : $5x = 10 \Rightarrow x = 2$

Πηγαίνω στην πρώτη σχέση και αντικαθιστώ όπου $x = 2$

$$2 + 2y = 6 \Rightarrow$$

$$2y = 6 - 2 \Rightarrow$$

Επομένως : $2y = 4 \Rightarrow$

$$y = 2$$

Αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση έχουμε:

$z = 300x + 200y \Rightarrow$ $z = 600+400 \Rightarrow$ $z=1000$. Επομένως η βέλτιστη λύση είναι $z = 1000$ και $(x_1, x_2) = (2,2)$

Β ΤΡΟΠΟΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Καταρχήν μετατρέπουμε το πρόβλημα μας σε τυπική μορφή

$$\max\ z = 300x_1 + 200x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

υπό τους περιορισμούς

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

$3x_1 + x_2 + x_4 = 8$

$-x_1 + x_2 + x_5 = 1$

$x_1 + x_6 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Τοποθετούμε τις τιμές στο ταμπλό της αντικειμενικής συνάρτησης και τους περιορισμούς. Παρατηρούμε ποια από τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη μεταβλητή. Στο συγκεκριμένο ταμπλό η μεγαλύτερη είναι η x_1 οπότε διαιρούμε την στήλη $\frac{x_B}{x_1}$ από τις πράξεις προκύπτει ο λόγος θ με τις αντίστοιχες τιμές. Για να προσδιορίσουμε ποια μεταβλητή είναι εξερχόμενη και ποια εισερχόμενη σε αυτή την περίπτωση κάνουμε το εξής. Παρατηρούμε ποια μεταβλητή έχει το μικρότερο θ.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 1ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			300	200	0	0	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_3	0	6	1	2	1	0	0	0	6
x_4	0	8	3	1	0	1	0	0	8/3
x_5	0	1	-1	1	0	0	1	0	-
x_6	0	2	1	0	0	0	0	1	2
	Z	0	300	200	0	0	0	0	

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 2ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			300	200	0	0	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ
x_3	0	4	0	2	1	0	0	-1	2
x_4	0	2	0	1	0	1	0	-3	2
x_5	0	3	0	1	0	0	1	1	3
x_1	300	2	1	0	0	0	0	1	-
	Z	600	0	200	0	0	0	-300	

Υπολογίζοντας τα κενά του Z παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή είναι η x_2 οπότε διαιρούμε $\frac{x_B}{x_2}$ και κάνοντας πράξεις προκύπτει ότι η τιμή με το μικρότερο θ το έχει η στήλη x_4 και x_3. Επιλεγούμε την x_3 ως εξερχόμενη μεταβλητή. Άρα η x_3 είναι εξερχόμενη και η x_2 εισερχόμενη. Αντικαθιστούμε την στήλη x_3 με x_2, διαιρούμε με 1 πολλαπλασιάζουμε με το οδηγό στοιχείο κάθε μιας στήλης ανάλογα με το πρόσημο που θα έχει και προσθέτουμε τις στήλες.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και προκύπτουν τα ακόλουθα ταμπλό.

<u>ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 3ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ</u>

			300	300	0	0	0	0
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	200	2	0	1	1/2	0	0	-1/2
x_4	0	0	0	0	-1/2	1	0	-5/2
x_5	0	1	0	0	-1/2	0	1	3/2
x_1	300	2	1	0	0	0	0	1
	Z	1000	0	0	-100	0	0	-200

Επομένως η βέλτιστη λύση είναι z=1000 και επιτυγχάνεται στο σημείο $(x_1, x_2) = (200, 300)$.

Εφαρμογή 4.3.2

Μια μικρή εταιρεία ξύλινων παιχνιδιών παράγει αποκλειστικά στρατιωτάκια και τρενάκια. Ένα στρατιωτάκι για να κατασκευαστεί χρειάζεται μία ώρα ξυλουργική εργασία και δύο ώρες βάψιμο, με κόστος 10€ σε πρώτες ύλες και 14€ σε εργατικά. Αντίστοιχα για ένα τρενάκι χρειάζονται μία ώρα ξυλουργικής εργασίας και μία ώρα βάψιμο, ενώ το κόστος ανέρχεται σε 9€ για πρώτες ύλες και 10€ για εργατικά. Μία πρόχειρη οικονομικοτεχνική μελέτη που έγινε στην εταιρεία, έδειξε ότι εβδομαδιαία υπάρχουν 80 ώρες ξυλουργικής εργασίας διαθέσιμες και 100 διαθέσιμες ώρες για βάψιμο, ενώ η αγορά μπορεί να απορροφήσει όσα τρενάκια και αν παρασκευαστούν αλλά μόνο 45 στρατιωτάκια. Αν τα έσοδα από κάθε στρατιωτάκι ανέρχονται στα 27€ και από κάθε τρενάκι στα 21€ να προσδιοριστεί η εβδομαδιαία παράγωγη που μεγιστοποιεί το κέρδος της εταιρείας.

Λύση

Αρχικά θα πρέπει να προσδιορίσουμε την αντικειμενική συνάρτηση η οποία προκύπτει ως εξής:

Έστω x_1 τα στρατιωτάκια που θα κατασκευαστούν και x_2 ο αριθμός για τα τρενάκια. Σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος από την πώληση των x_1 στρατιωτών και x_2 τρένων.

Για ένα στρατιωτάκι απαιτούνται οι παρακάτω πόροι:

κόστος σε πρώτες ύλες 10€ και 14€ σε εργατικά, οπότε το συνολικό κόστος των πόρων που απαιτούνται είναι 14+10=24€. Τα έσοδα από την πώληση ενός στρατιώτη είναι 27€ άρα το κέρδος θα είναι 27-24=3€. Συνεπώς αν πωληθούν και οι x_1 στρατιώτες το κέρδος θα είναι $3x_1$ σε ευρώ.

Αντίστοιχα για ένα τρενάκι έχουμε:

κόστος σε πρώτες ύλες 10€ και 9€ σε εργατικά, οπότε το συνολικό κόστος των πόρων που απαιτούνται είναι 10+9=19€. Τα έσοδα από την πώληση ενός τρένου είναι 21€ άρα το κέρδος θα είναι 21-19=2€. Συνεπώς αν πωληθούν x_2 τρένα το κέρδος θα είναι $2x_2$ σε ευρώ.

Συνεπώς η αντικειμενική συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό κέρδος από την πώληση x_1 στρατιωτών και x_2 τρένων είναι $z = 3x_1 + 2x_2$ και επειδή επιθυμούμαι μεγιστοποίηση του κέρδους έχουμε ως αντικειμενική συνάρτηση την:

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

Από την εκφώνηση σχετικά με την διαθεσιμότητα πόρων έχουμε: «Ένα στρατιωτάκι για να κατασκευαστεί χρειάζεται μία ώρα ξυλουργική εργασία και δύο ώρες βάψιμο … για ένα τρενάκι χρειάζονται μία ώρα ξυλουργικής εργασίας και μία ώρα βάψιμο, εβδομαδιαία υπάρχουν 80 ώρες ξυλουργικής εργασίας διαθέσιμες και 100 διαθέσιμες ώρες για βάψιμο» Συνεπώς οι δύο πόροι ενδιαφέροντος είναι η «ξυλουργική εργασία» και ο άλλος οι «ώρες βαψίματος».

Κατασκευάζουμε το παρακάτω πινακάκι ανά απαιτούμενους πόρους.

	ΑΡΙΘΜΟΣ	ΞΥΛΟΥΡΓΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ (ΩΡΕΣ)	ΒΑΨΙΜΟ (ΩΡΕΣ)
ΣΤΡΑΤΙΩΤΑΚΙΑ	x_1	1	2
ΤΡΕΝΑΚΙΑ	x_2	1	1
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ		$\leq$ 80	$\leq$ 100

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.3.1

Επίσης αναφέρεται ότι «… η αγορά μπορεί να απορροφήσει όσα τρενάκια και αν παρασκευαστούν αλλά μόνο 45 στρατιωτάκια», πράγμα που σημαίνει ότι ο μέγιστος αριθμός στρατιωτών που θα κατασκευαστούν είναι 45 και η αντίστοιχη μαθηματική έκφραση είναι $x_1 \leq 45$

Τελικά οι περιορισμοί είναι οι εξής:

$x_1 + x_2 \leq 80$ (Ώρες ξυλουργικής εργασίας)

$2x_1 + x_2 \leq 100$ (Ώρες βαψίματος)

$x_1 \leq 45$ (Στρατιωτάκια)

$x_1, x_2 \geq 0$

<u>Α ΤΡΟΠΟΣ</u>

<u>ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ</u>

Παίρνουμε τον πρώτο περιορισμό $x_1 + x_2 \leq 80$ και την αντίστοιχη ισότητα $x_1 + x_2 = 80$ υπολογίζουμε τα σημεία της ευθείας αυτής για να σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση. Οπότε έχουμε:

- Για $x_1 = 0$

$x_1 + x_2 = 80 \Rightarrow$
$x_2 = 80$

Επομένως ένα σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(0,80)$, ομοίως και για το x_2 έχουμε:

- Για $x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = 80 \Rightarrow$
$x_1 = 80$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(80,0)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την ανισότητα $2x_1 + x_2 \leq 100$ και την αντίστοιχη ισότητα $2x_1 + x_2 = 100$ για την γραφική παράσταση της οποίας έχουμε:

- Για $x_1 = 0$

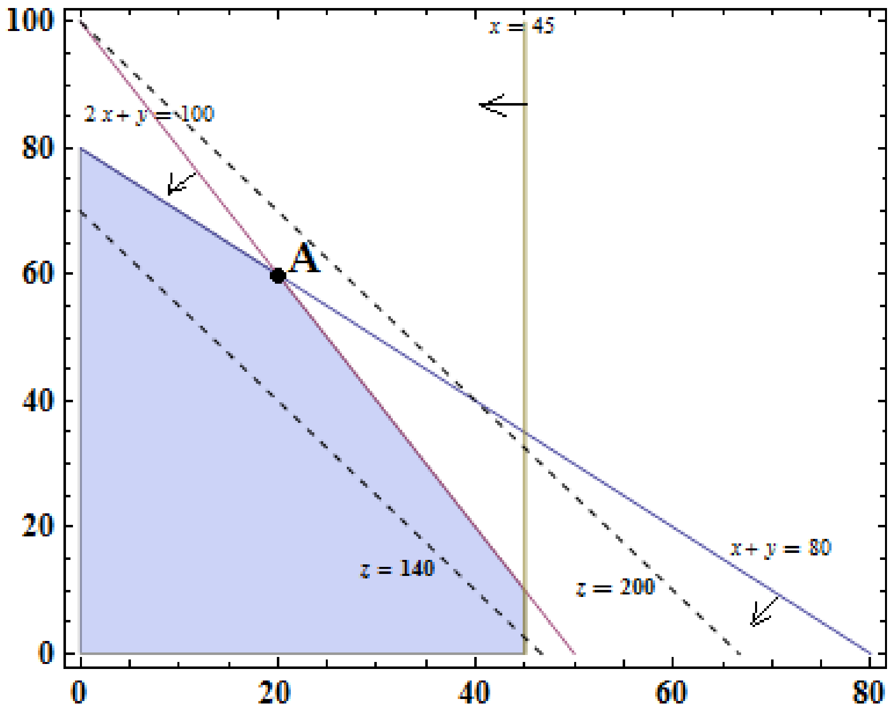
$2x_1 + x_2 = 100 \Rightarrow$
$x_2 = 100$

Επομένως ένα σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(0,100)$, ομοίως και για το x_2 έχουμε:

- Για $x_2 = 0$

$2x_1 + x_2 = 100 \Rightarrow$
$x_1 = 50$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(50,0)$.



ΣΧΗΜΑ 4.3.2

Για κάθε μια ευθεία καθορίζουμε το ημιεπίπεδο που αναπαριστά ο αντίστοιχος περιορισμός. Βάζουμε λοιπόν βελάκια που καταδεικνύουν το ημιεπίπεδο που αναπαριστά ο περιορισμός (βλέπε σχήμα 4.3.2). Οι γραφικές παραστάσεις με τους αντίστοιχους περιορισμούς δίνονται στο παρακάτω σχήμα για το ημιεπίπεδο όπου $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τιμή ίση με 130.

Τότε θα έχουμε:

$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$ Για μια τυχαία τιμή $(30,20)$ η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται $\max\ z = 3 * 30 + 2 * 20 = 130$

Άρα $\max\ z = 3x_1 + 2x_2 = 130$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία κορυφή του εφικτού χωρίου λύσης που τέμνεται με την γραφική παράσταση της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυτή διέρχεται (αυξανόμενων των τιμών z) από το εφικτό χωρίο λύσης είναι η κορυφή Α (βλέπε σχήμα 4.3.2).

Η κορυφή Α παρουσιάζει λύση του συστήματος:

- Για $x_1 = 0$

$3x_1 + 2x_2 = 130 \Rightarrow$
$x_2 = 65$

- Για $x_2 = 0$

$3x_1 + 2x_2 = 130 \Rightarrow$
$x_1 = \frac{130}{3} \Rightarrow$
$x_1 = 43,333$

Οπότε τα δυο σημεία που έχουμε για τη γραφική παράσταση είναι $(0,65)$ και $(43,0)$.

Οι γραφικές παραστάσεις της αντικειμενικής συνάρτησης για $z = 130$ απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα 4.3.2 .

Παρατηρούμε ότι η τελευταία κορυφή του εφικτού χωρίου λύσης που τέμνεται με την γραφική παράσταση της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυτή διέρχεται (αυξανόμενων των τιμών z) από το εφικτό χωρίο λύσης είναι η κορυφή Α (βλέπε σχήμα 4.3.2).

Θα λύσουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 80 \\ 2x_1 + x_2 = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} -x_1 - x_2 = -80 \\ 2x_1 + x_2 = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ θα τα προσθέσω κατά μέλη

οπότε έχουμε :

$x_1 = 20$ παίρνουμε την πρώτη σχέση και όπου $x_1 = 20$. Επομένως θα έχουμε:

Για $x_1 = 20$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 = 80 \Rightarrow \\ & 20 + x_2 = 80 \Rightarrow \\ & x_2 = 80 - 20 \Rightarrow \\ & x_2 = 60 \end{aligned}$$

Οπότε η βέλτιστη λύση είναι:

$$\begin{aligned} & \max\ z = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow z = 3 * 20 + 2 * 60 \Rightarrow \\ & z = 60 + 120 \Rightarrow z = 180 \end{aligned}$$

<u>Β ΤΡΟΠΟΣ</u>

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX</u>

Μετατρέπουμε το πρόβλημα μας σε τυπική μορφή

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

υπό τους περιορισμούς

$x_1 + x_2 + x_3 = 80$

$2x_1 + x_2 + x_4 = 100$

$x_1 + x_5 = 45$

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 1ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			3	2	9	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_3	0	80	1	1	1	0	0	80
x_4	0	100	2	1	0	1	0	50
x_5	0	45	1	0	0	0	1	45
	Z	0	3	2	0	0	0	

άρα η εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_5 και η εισερχόμενη η x_1

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 2ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			3	2	9	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_3	0	35	0	1	1	0	-1	35
x_4	0	10	0	1	0	1	-2	10
x_1	3	45	1	0	0	0	1	-
	z	135	0	2	0	0	-3	

άρα η εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_4 και η εισερχόμενη η x_2

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 3ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			3	2	0	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_3	0	25	0	0	1	-1	1	25
x_2	2	10	0	1	0	1	-2	-
x_1	3	45	1	0	0	0	1	45
	Z	155	0	0	0	-2	1	

άρα η εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_3 και η εισερχόμενη η x_5

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 4ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			3	2	0	0	0
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_5	0	25	0	0	1	-1	1
x_2	2	60	0	1	2	-1	0
x_1	3	20	1	0	-1	1	0
	Z	180	0	0	-1	-1	0

Επομένως η βέλτιστη λύση είναι : $z = 180,\ x_1 = 20,\ x_2 = 60$

<u>Εφαρμογή 4.3.3</u>

Κάποιος επιπλοποιός επιθυμεί να προσδιορίσει τον αριθμό των τραπεζιών και των θρανίων που πρέπει να μέσα σε μία χρονική περίοδο για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Κάθε τραπέζι χρειάζεται 10 ώρες εργασίας, 10 μέτρα ξύλου κι αφήνει κέρδος 40€, ενώ κάθε θρανίο χρειάζεται 5 ώρες εργασίας, 15 μέτρα ξύλου κι αφήνει κέρδος 10€. Για την αναφερόμενη χρονική περίοδο, ο επιπλοποιός υπολογίζει να δουλέψει 1560 ώρες με σκοπό να παράγει το πολύ 200 τραπέζια και θρανία. Αν στην αποθήκη του υπάρχουν 3000 μέτρα ξύλου, ποιός είναι ο αριθμός των τραπεζίων και θρανίων που πρέπει να κατασκευάσει για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του;

ΛΥΣΗ

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$\max \ z = 40x + 10y$$

και οι περιορισμοί

$10x + 5y \leq 1560$ (Ώρες εργασίας)

$10x + 15y \leq 3000$ (Μέτρα ξύλου)

$x + y \leq 200$ (Σύνολο τραπεζιών και θρανίων)

<u>Α ΤΡΟΠΟΣ</u>

<u>ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ</u>

Παίρνουμε τον πρώτο περιορισμό $10x + 5y \leq 1560$ και την αντίστοιχη ισότητα $10x + 5y = 1560$ υπολογίζουμε τα σημεία της ευθείας αυτής για να σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση.

Οπότε έχουμε:

- Για $x = 0$

$10x + 5y = 1560 \Rightarrow$

$y = \frac{1560}{5} \Rightarrow$

$y = 312$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(0,312)$, ομοίως και για το x_2 έχουμε:

- Για $y = 0$

$10x + 5y = 1560 \Rightarrow$

$10x = 1560 \Rightarrow$

$x = 156$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(156,0)$.

Παίρνουμε το δεύτερο περιορισμό $10x + 15y \leq 3000$ και την αντίστοιχη ισότητα $10x + 15y = 3000$ υπολογίζουμε τα σημεία της ευθείας αυτής για να σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση. Οπότε έχουμε:

- Για $x = 0$

$10x + 15y = 3000 \Rightarrow$

$15y = 3000 \Rightarrow$

$y = 200$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(0,200)$, ομοίως και για το x_2 έχουμε:

Για $y = 0$

$10x + 15y = 3000 \Rightarrow$

$10x = 3000 \Rightarrow$

$x = 300$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης είναι το $(300,0)$.

Παίρνουμε τον τρίτο περιορισμό $x + y \leq 200$ και την αντίστοιχη ισότητα $x + y = 200$ υπολογίζουμε τα σημεία της ευθείας αυτής για να σχεδιάσουμε την γραφική της παράσταση. Οπότε έχουμε:

- Για $x = 0$

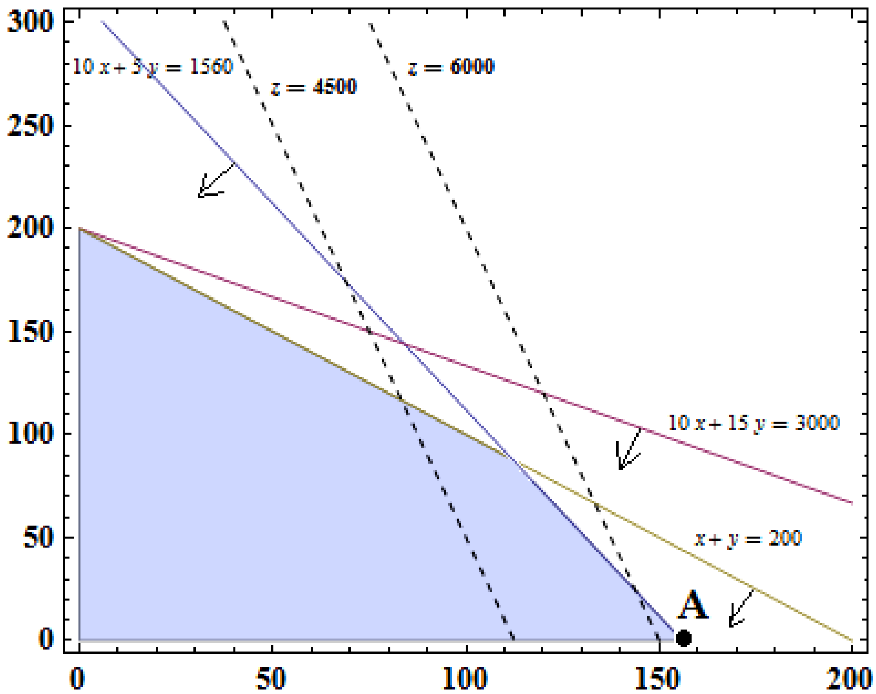
$x + y = 200 \Rightarrow$
$y = 200$

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης είναι $(0,200)$και για x_2 έχουμε:

- Για $y = 0$

$x + y = 200 \Rightarrow$
$x = 200$

Το σημείο της γραφικής παράστασης είναι $(200,0)$.



ΣΧΗΜΑ 4.3.3

Για κάθε μια ευθεία καθορίζουμε το ημιεπίπεδο που αναπαριστά ο αντίστοιχος περιορισμός. Βάζουμε λοιπόν βελάκια που καταδεικνύουν το ημιεπίπεδο που αναπαριστά ο περιορισμός (βλέπε σχήμα 4.3.3). Οι γραφικές παραστάσεις με τους αντίστοιχους περιορισμούς δίνονται στο παρακάτω σχήμα για το ημιεπίπεδο όπου $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει τιμή ίση με 4500.

Τότε θα έχουμε :

$$\max \; z = 40x + 10y$$

Για μια τυχαία τιμή $(30, 20)$ η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται

$$z = 40x + 10y \Rightarrow z = 40 * 30 + 10 * 20 \Rightarrow$$
$$z = 1200 + 200 \Rightarrow z = 1400$$

Άρα $40x + 10y = 1400$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία κορυφή του εφικτού χωρίου λύσης που τέμνεται με την γραφική παράσταση της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυτή διέρχεται (αυξανόμενων των τιμών z) από το εφικτό χωρίο λύσης είναι η κορυφή Α (βλέπε σχήμα 4.3.3).

Η κορυφή Α παρουσιάζει λύση του συστήματος:

- Για $x = 0$

$$40x + 10y = 1400 \Rightarrow$$
$$10y = 1400 \Rightarrow$$
$$y = 140$$

- Για $y = 0$

$$40x + 10y = 1400 \Rightarrow$$
$$40x = 1400 \Rightarrow$$
$$x = 35$$

Οπότε τα δυο σημεία που έχουμε για τη γραφική παράσταση είναι $(0,140)$ και $(35,0)$.

Οι γραφικές παραστάσεις της αντικειμενικής συνάρτησης για $z = 4500$ απεικονίζεται στο παραπάνω σχήμα 4.3.3.

Παρατηρούμε ότι η τελευταία κορυφή του εφικτού χωρίου λύσης που τέμνεται με την γραφική παράσταση της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς αυτή διέρχεται (αυξανόμενων των τιμών z) από το εφικτό χωρίο λύσης είναι η κορυφή Α (βλέπε σχήμα 4.3.3).

Η κορυφή Α προσδιορίζεται από την λύση της ισότητας:

$$10x + 5y = 1560 \;\Rightarrow\; 10x + 5*0 = 1560 \;\Rightarrow\; x = \frac{1560}{10} \;\Rightarrow\; x = 156$$

Επομένως έχουμε x=156 και y=0.

Άρα η βέλτιστη λύση θα είναι :

$$z = 40x + 10y \;\Rightarrow\; z = 40*156 + 10*0 \;\Rightarrow$$
$$z = 5360$$

<u>Β ΤΡΟΠΟΣ</u>

<u>ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX</u>

Καταρχήν μετατρέπουμε το πρόβλημά μας σε τυπική μορφή

$$\max\ z = 40x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

υπό τους περιορισμούς

$$10x_1 + 5x_2 + x_3 = 1560$$

$$10x_1 + 15x_2 + x_4 = 3000$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 200$$

Τοποθετούμε τις τιμές στο ταμπλό της αντικειμενικής συνάρτησης και τους περιορισμούς. Παρατηρούμε ποια από τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη. Στο συγκεκριμένο ταμπλό η μεγαλύτερη είναι η x_1 οπότε διαιρούμε την στήλη $\frac{x_B}{x_1}$ από τις πράξεις προκύπτει ο λόγος θ με τις αντίστοιχες τιμές. Για να προσδιορίσουμε ποία μεταβλητή είναι εξερχόμενη και ποια εισερχόμενη σε αυτή την περίπτωση κάνουμε το εξής .παρατηρούμε ποια μεταβλητή έχει το μικρότερο

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 1ΟΥ ΤΑΜΠΛΟΥ

			40	10	0	0	0	
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Θ
x_3	0	1560	10	5	1	0	0	156
x_4	0	3000	10	15	0	1	0	300
x_5	0	200	1	1	0	0	1	200
	Z	0	40	10	0	0	0	

Άρα η εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_3 και η εισερχόμενη μεταβλητή

είναι η x_1 το οδηγό στοιχείο είναι το 10. θέλουμε το οδηγό στοιχείο να γίνει 1 οπότε πολλαπλασιάζουμε με -10 και κάνοντας πράξεις προκύπτει το ακόλουθο ταμπλό.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ 2ΟΥ ΤΑΜΠΛΟ

			40	10	0	0	0
ΒΑΣΗ	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	40	156	1	1/2	1/10	0	0
x_4	0	1440	0	10	-1	1	0
x_5	0	44	0	1/2	-1/10	0	1
		6240	0	-10	-4	0	0

Το ταμπλό τερματίζει και επομένως η βέλτιστη λύση είναι:

$z = 6240$, x = 156 , y = 0

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Αλιμπινίσης Α., Γρηγοριάδης Σ., Ευσταθόπουλος Ε., Κλαουδάτος Ν., Παπασταυρίδης Σ. και Σβέρκος Α., 2005, Μαθηματικά, Αθήνα, Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων.

[2] Ανδεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπαταυρίδης Σ. και Πολύζος Γ. 2001, Μαθηματικά, Αθήνα, Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων.

[3] Βόσκογλου Μ., 2002, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Πάτρα, Μακεδονικές εκδόσεις.

[4] Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ. και Ρεκούμης Κ. 2007, Μαθηματικά, Αθήνα, Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων.

[5] Τζιρτζιλάκης Ε., 2008, Στοιχεία Βελτιστοποίησης, Ναύπακτος, Αυτοέκδοση.

[6] Μπότσαρης Χαράλαμπος Ε., 1996 Επιχειρησιακή Έρευνα Μέθοδοι και Προβλήματα, Αθήνα, Καθηγητής Επιχειρησιακής Έρευνας Πατρών.

[7] Παπαρίζος Κωνσταντίνος, 1999, Γραμμικός Προγραμματισμός Αλγόριθμοι και Εφαρμογές, Θεσσαλονίκη Εκδόσεις Ζυγός.

[8] Τερζίδης Χαράλαμπος Κ. 2006 Λογισμός Συναρτήσεων Μιας Μεταβλητής Με Στοιχεία Διανυσματικής Και Γραμμικής Άλγεβρας Θεσσαλονίκη Εκδόσεις Χριστοδουλίδη.