

ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ  
ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

## ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗ  
ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΜΑΘΗΣΗ»

ΦΟΙΤΗΤΗΣ

ΜΕΛΑΧΡΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΥΓΙΑΣ



ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ  
ΙΔΡΥΜΑ  
ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Σελίδα 1: Εξώφυλλο πτυχιακής εργασίας

Σελίδα 2: Περίληψη πτυχιακής εργασίας

Σελίδα 3: Εισαγωγή των κεφαλαίων της πτυχιακής εργασίας

Σελίδα 4: Ιστορική αναδρομή των μαθηματικών και ο ορισμός της μοντελοποίησης με μαθηματικά μοντέλα

Σελίδα 5: Στόχοι ενός μαθηματικού μοντέλου

Σελίδα 6: Κατηγορίες μαθηματικών μοντέλων

Σελίδα 7-8: Παραδείγματα μαθηματικής μοντελοποίησης, παράμετροι και μεταβλητές μοντέλων

Σελίδα 9: Οι μέθοδοι και η μελέτη των διαφόρων εκδοχών της μοντελοποίησης

Σελίδα 10-11: Ανάλυση διαφόρων εκδοχών μοντελοποίησης με διάφορα παραδείγματα

Σελίδα 12-13: Παραδείγματα μαθηματικής μοντελοποίησης, παράμετροι και μεταβλητές των μοντέλων

Σελίδα 14: Λογισμικά μοντέλων μοντελοποίησης

Σελίδα 15: Κατηγορίες λογισμικών μοντέλων και η αναλύσή τους

Σελίδα 16-17: Χαρακτηριστικά των εννοιολογικών,νοητικών μοντέλων και οι επιστημονικές τους ιδιότητες και οι σκοποί τους

Σελίδα 18: Οι διδακτικές προεκτάσεις στην μοντελοποίηση

Σελίδα 19:Οι αρχές της μοντελοποίησης στην μάθηση

Σελίδα 20: Είδη συλλογισμών στην μοντελοποίηση

Σελίδα 21-23: Κατηγορίες λογισμικών μοντελοποίησης

Σελίδα 24: Ορισμός του Modelling Space και η αναλύσή του

Σελίδα 25-28: Θεωρητική πλευρά του προβλήματος της μοντελοποίησης και η χρησιμότητα των μοντέλων της μοντελοποίησης στα μαθηματικά

Σελίδα 29: Κατανόηση μαθηματικής μοντελοποίησης

Σελίδα 30-31: Διδακτικές προεκτάσεις της μοντελοποίησης

Σελίδα 32: Πρακτικές εφαρμογές μοντελοποίησης

Σελίδα 33-34: Μοντέλα αναπαράστασης μοντελοποίησης

Σελίδα 35: Μοντέλα προσωμοίωσης στην μοντελοποίηση

Σελίδα 36-41: Παρουσίαση σχετικών παραδειγμάτων μοντελοποίησης

## **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Η παρακάτω πτυχιακή εργασία έχει ως στόχο την κατανόηση της έννοιας της μαθηματικής μοντελοποίησης σε διάφορες εφαρμογές και με ιδιαίτερη έμφαση στη σύγχρονη διδασκαλία και μάθηση. Επίσης έχει σαν στόχο την διερεύνηση των διαφόρων υπολογιστικών μοντέλων που εφαρμόζονται πάνω στο συγκεκριμένο γνωστικό πεδίο σε διάφορες μορφές και συνθήκες διδασκαλίας. Τέλος η παρακάτω εργασία θα προβάλλει την εξέλιξη των σύγχρονων μορφών διδασκαλίας και μάθησης και την αξιολόγηση αυτής με βάση την διεθνή βιβλιογραφία.

## **Abstract**

The following dissertation aims at comprehending the concept of mathematical modelling in various applications with particular emphasis on modern teaching and learning. It also aims at exploring the various computational models applied on the particular field of study in various forms and teaching conditions. Finally, the following work will outline the evolution of modern forms of teaching and learning and its assessment based on the international literature.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται μία ιστορική αναδρομή των μαθηματικών, της μοντελοποίησης και της σχετικής βιβλιογραφίας αυτού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας φαίνεται η μελέτη των διαφόρων εκδοχών της μοντελοποίησης, τα λογισμικά του κάθε μοντέλου της μοντελοποίησης και η αναλύσή τους αλλά και η έννοια του Modelling Space και η ανάλυση αυτού επίσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας περνάμε σε μία πιο θεωρητική παρουσίαση του προβλήματος από όπου μπορούμε να διακρίνουμε την χρησιμότητα των μαθηματικών στην μοντελοποίηση αλλά και σε διάφορες μορφές διδασκαλίας.

Το τέταρτο κεφάλαιο της εργασίας αναφέρεται στις πρακτικές εφαρμογές της μοντελοποίησης στην διδασκαλία και την μάθηση.

Στο πέμπτο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται η παρουσίαση σχετικών παραδειγμάτων μοντελοποίησης πάνω σε διάφορα προβλήματα από την σύγχρονη ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Ιστορική ανασκόπηση των μαθηματικών

Τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται εδώ και πολλές χιλιάδες χρόνια για τη μελέτη, την περιγραφή αλλά και την αξιοποίηση φαινομένων του φυσικού κόσμου που μας περιβάλλει, αλλά ακόμη και δημιουργημάτων της φαντασίας. Η μεγάλη χρησιμότητα των μαθηματικών προκύπτει από τη δυνατότητα, μέσω της χρήσης τους, να κάνουμε προβλέψεις για τα παραπάνω φαινόμενα, με άλλα λόγια να δημιουργούμε μοντέλα που αναπαριστούν τα υπό μελέτη φαινόμενα. Αυτός είναι ο ακριβής στόχος που έχει η μαθηματική μοντελοποίηση.

Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι η ανάπτυξη μαθηματικής περιγραφής ενός φαινομένου, ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας και η μελέτη τους με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων. Τα εργαλεία αυτά μπορεί να είναι ένα σύστημα εξισώσεων, ένα σύνολο αριθμών, ένας αλγόριθμος, μια στοχαστική διαδικασία κλπ. Με άλλα λόγια θα λέγαμε ότι Μαθηματική Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία ανάπτυξης και η μελέτη ενός Μαθηματικού Μοντέλου.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.2 Ο ορισμός της μοντελοποίησης και η σχετική βιβλιογραφία αυτής

Ο ορισμός της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι: είναι η ανάπτυξη μαθηματικής περιγραφής ενός φαινομένου, ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας και η μελέτη τους με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων. Τα εργαλεία αυτά μπορεί να είναι ένα σύστημα εξισώσεων, ένα σύνολο αριθμών, ένας αλγόριθμος, μια στοχαστική διαδικασία κλπ. Με άλλα λόγια θα λέγαμε ότι Μαθηματική Μοντελοποίηση είναι η διαδικασία ανάπτυξης και η μελέτη ενός Μαθηματικού Μοντέλου.

Το μαθηματικό μοντέλο είναι η περιγραφή ενός φαινομένου, ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες και σύμβολα.

Η έννοια του φαινομένου, στον παραπάνω ορισμό, εμπεριέχει συστήματα από τελείως διαφορετικά επιστημονικά πεδία, όπως από τις φυσικές επιστήμες, τις επιστήμες της μηχανικής, τα οικονομικά, τις κοινωνικές επιστήμες αλλά και τις ανθρωπιστικές σπουδές. Ακριβώς λόγω του τεράστιου εύρους των πιθανών εφαρμογών, αντίστοιχα μεγάλος είναι και ο αριθμός των εν δυνάμει διαφορετικών μαθηματικών μοντέλων, όπως και των πιθανών μαθηματικών εργαλείων, τα

οποία χρησιμοποιούνται για τη μελέτη και την επίλυση των μοντέλων.

Ποιο συγκεκριμένα οι στόχοι ενός μαθηματικού συνόλου είναι οι εξής:

- Η μελέτη και κατανόηση της συμπεριφοράς πολύπλοκων συστημάτων με τη χρήση των Μαθηματικών.
- Η χρήση και η ανάπτυξη νέων, μαθηματικών εργαλείων που απαιτούνται για τη επίλυση ενός μοντέλου.
- Η πρόβλεψη / προσομοίωση (prediction/simulation) συμπεριφορών και ιδιοτήτων πολύπλοκων συστημάτων μέσω των μαθηματικών μοντέλων.
- Ο έλεγχος των υποθέσεων ενός μοντέλου και η αντίστοιχη βελτίωσή του.

Το τελευταίο είναι ιδιαίτερα σημαντικός καθώς δεν υπάρχει το «τέλειο μοντέλο»: Όλα τα μοντέλα βασίζονται σε ορισμένες υποθέσεις και ακόμη και το ότι ένα μοντέλο μπορεί να αναπαράγει δεδομένα αποτελέσματα σε συμφωνία με πειραματικές παρατηρήσεις, αυτό δεν σημαίνει ότι οι υποθέσεις/παραδοχές του μοντέλου είναι σωστές.

Γιατί όμως χρειαζόμαστε υποθέσεις/παραδοχές για κάθε μαθηματικό μοντέλο ενός πραγματικού φαινομένου; Πρώτον, επειδή όλα τα πραγματικά συστήματα – φαινόμενα είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα και αποτελούνται ή περιγράφονται από ένα τεράστιο εύρος (ακόμη και άπειρο πολλές φορές) διαφορετικών παραμέτρων. Δεύτερον, κανένα μαθηματικό μοντέλο δεν μπορεί να συμπεριλάβει όλες αυτές τις παραμέτρους, οι οποίες πολλές φορές είναι επιπλέον άγνωστες. Η τρίτη και σημαντικότερη παρατήρηση είναι ότι δεν απαιτείται από το μοντέλο να συμπεριλαμβάνει όλες τις πιθανές παραμέτρους που επηρεάζουν ένα σύστημα αλλά μόνο τις πιο σημαντικές. Όπως αναφέραμε το μοντέλο διατυπώνεται με τη χρήση πολύ διαφορετικών μαθηματικών εργαλείων ενώ μπορεί να περιγράψει και τελείως διαφορετικά συστήματα. Για το λόγο αυτά όλα τα μαθηματικά μοντέλα μπορούν να περιγραφούν σε διαφορετικές κατηγορίες, όπως:

- Ανάλογα με το είδος των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται: Μοντέλα συνεχών διαφορικών εξισώσεων, ή μερικών διαφορικών εξισώσεων. • Ντετερμινιστικά / Στοχαστικά μοντέλα: ανάλογα με ύπαρξη ή μη τυχαιότητας στο μοντέλο. • Διακριτά / Συνεχή μοντέλα ανάλογα με το είδος των μεταβλητών που ορίζονται. • Γραμμικά / Μη γραμμικά μοντέλα, ανάλογα με το αν οι μαθηματικές σχέσεις είναι γραμμικές ή όχι. • Χρόνο-εξαρτώμενα / Χρόνο-ανεξάρτητα



ανάλογα με το αν οι παράμετροι του προβλήματος μεταβάλλονται με το χρόνο. • Μηχανιστικά / Περιγραφικά, ανάλογα με το αν προκύπτουν από βασικούς νόμους ή είναι περισσότερο μια ποιοτική περιγραφή του υπό μελέτη συστήματος κ.λ.π.

Ο ορισμός της μαθηματικής μοντελοποίησης που αναφέραμε παραπάνω είναι αρκετά γενικός και θα μπορούσε να συμπεριλάβει τη χρήση των μαθηματικών για τη μελέτη προβλημάτων, τα οποία σχετίζονται με συγκεκριμένα φαινόμενα, από την αρχαιότητα ακόμη. Ως ένα από τα πρώτα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα μαθηματικής μοντελοποίησης αναφέρουμε τους νόμους του Νεύτωνα, οι οποίοι περιγράφουν τη δυναμική (χρονική εξέλιξη) μηχανικών συστημάτων που αποτελούνται από στερεά σώματα. Πιο σύγχρονα παραδείγματα αφορούν τη μελέτη βιολογικών συστημάτων, πολύπλοκων μοριακών υλικών και οικονομικών παραγώγων. Γενικά παραδείγματα μαθηματικής μοντελοποίησης είναι τα παρακάτω: • Κλασική μηχανική. • Κβαντική μηχανική. • Εξισώσεις που περιγράφουν Κυματικά φαινόμενα. • Μοντέλα που αφορούν βιολογικά συστήματα, ειδικότερα πληθυσμιακά μοντέλα τα οποία περιγράφουν την εξέλιξη των πληθυσμών βιολογικών ειδών. • Μοντέλα χρηματοοικονομίας. • Μοντέλα πολύπλοκων μοριακών υλικών σε διαφορετικές κλίμακες χωρικές και χρονικές. • κλπ. Η παραπάνω λίστα είναι κυριολεκτικά χωρίς τέλος, καθώς στις μέρες μας μαθηματικά μοντέλα χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν όλο και μεγαλύτερου εύρους φαινόμενα.

Ιστορικά, τα πρώτα αναγνωρίσιμα μαθηματικά ήταν οι αριθμοί, οι οποίοι χρονολογούνται από το 30000π.χ. Η ανάπτυξη της ελληνικής φιλοσοφίας και η σχέση της με τα μαθηματικά

άνοιξε τον δρόμο για παιδαγωγική μέθοδο η οποία οδήγησε στα πρώτα στοιχεία της μαθηματικής θεωρίας. Στο πέρασμα των αιώνων, η μοντελοποίηση αναπτύχθηκε εντυπωσιακά. Αρκεί μόνο να αναλογιστεί κανείς τα επιτεύγματα ενός από τους πρώτους εφαρμοσμένους μαθηματικούς ο οποίος πρώτος κατάφερε να υπολογίσει την απόσταση ανάμεσα σε Γη και ήλιο και την περίμετρο της Γης με την χρήση ενός μαθηματικού μοντέλου γύρω στο 250 π.χ.

Στην Ευρώπη ο Fibonacci τον 11<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ επιτέλεσε σπουδαίο έργο για την μαθηματική μοντελοποίηση. Σταδιακά από τότε πέρασε στη σημερινή ανάπτυξη των μαθηματικών, στην οποία η μαθηματική μοντελοποίηση μπορεί να βρει εφαρμογή σε οποιαδήποτε έκφανση της πραγματικής μας ζωής.

Η γνώση για τα μοντέλα πραγματοποιείται σε δύο φάσεις. Η πρώτη φάση αφορά στην κατασκευή του και η δεύτερη στον χειρισμό του μοντέλου. Δεν υπάρχουν ρητοί κανόνες σχετικά με την κατασκευή ενός μοντέλου. Για να μάθει κανείς τη συμπεριφορά και τους κανόνες του θα πρέπει να τεθεί σε λειτουργία και να χειριστεί έτσι όλες του οι ιδιότητες και τα μυστικά.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Παράμετροι και μεταβλητές μοντέλων

Από τα βήματα που παρουσιάζονται παραπάνω, ιδιαίτερα σημαντικό είναι η δημιουργία του μαθηματικού μοντέλου, δηλαδή των κατάλληλων μαθηματικών μορφών – σχέσεων (εξισώσεων, αριθμών, κλπ.), οι οποίες περιγράφουν το πρόβλημα. Για να γίνει αυτό απαιτείται αρχικά να οριστούν οι

μεταβλητές που περιγράφουν το φαινόμενο, δηλαδή οι παράμετροι του μοντέλου. Χαρακτηριστικές παράμετροι σε ένα τυπικό μαθηματικό μοντέλο, μπορεί να είναι: • Οι θέσεις σωματιδίων σε μικροσκοπικό επίπεδο, ή φυσικών σωμάτων σε μακροσκοπικό (μοντέλα Φυσικών επιστημών). • Ο πληθυσμός ενός συγκεκριμένου βιολογικού είδους (σε Βιολογικά μοντέλα). • Οικονομικές μεταβλητές, όπως κόστος παραγωγής ή κέρδος (σε Οικονομικά μοντέλα). • Μεταβλητές που σχετίζονται με ανθρώπινες δραστηριότητες, παράδειγμα ποιότητα της ζωής σε μια μεγαλούπολη (σε μοντέλα Ανθρωπιστικών σπουδών).

### **Μαθηματικά Εργαλεία**

- Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών εξισώσεων.
  - Μέθοδοι επίλυσης συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων, όπως χωρισμός μεταβλητών
- κλπ.
- Μέθοδοι επίλυσης στοχαστικών εξισώσεων.
  - Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης ΣΔΕ, όπως Newton–Raphson, Runge–Kutta κλπ.
  - Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης ΜΔΕ, όπως πεπερασμένες διαφορές, πεπερασμένα στοιχεία, φασματικά στοιχεία, κλπ.
  - Μέθοδοι προσομοίωσης, όπως Μοριακή Δυναμική (Molecular Dynamics) και μέθοδοι Monte Carlo.

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.1: Οι μέθοδοι και η μελέτη των διαφορών εκδοχών της μοντελοποίησης**

**1)Διαστατική Ανάλυση – Κανονικοποίηση:** Οι τεχνικές της διαστατικής ανάλυσης και της κανονικοποίησης παίζουν βασικό ρόλο στη θεμελίωση και τις εφαρμογές των μαθηματικών μοντέλων. Η καλή αντίληψη του σχετικού μεγέθους των διάφορων φυσικών παραμέτρων και η αναγνώριση πιθανών σχέσεων μεταξύ τους μας οδηγούν στην καλύτερη κατανόηση του προβλήματος και μας υποδεικνύουν τρόπους προσέγγισης των λύσεων ή και της ακριβούς επίλυσής του. Δεδομένου ενός εμπειρικού προβλήματος το πρώτο στάδιο επίλυσης είναι η διατύπωση ενός μαθηματικού μοντέλου που το περιγράφει. Αυτό περιλαμβάνει τον ορισμό των μεγεθών που υπεισέρχονται στο πρόβλημα και τη διατύπωση ενός συνόλου εξισώσεων οι οποίες το διέπουν και το περιγράφουν λεπτομερώς. Επίσης οι εξισώσεις του προβλήματος πρέπει να είναι διαστατικά ομογενείς, δηλαδή οι διαστάσεις στα δυο μέλη της κάθε εξίσωσης πρέπει να είναι ίδιες. Η διαστατική ανάλυση μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τις διαστατικές σχέσεις (μήκους, χρόνου, μάζας, κ.τ.λ.) μεταξύ των ποσοτήτων στην εξίσωση και τις συνέπειες της διαστατικής ομογένειας που θα πρέπει να ισχύει. Η κανονικοποίηση μας βοηθάει να εκτιμήσουμε το σχετικό μέγεθος των όρων που εμφανίζονται στις εξισώσεις του μοντέλου (άρα και στη σωστή αναζήτηση ασυμπτωτικών λύσεων).

Οι εξισώσεις έχουν μια εσωτερική συνέπεια που δεν επιτρέπει στις μεταβλητές να σχετίζονται με οποιονδήποτε τρόπο. Οι εξισώσεις πρέπει να είναι διαστατικά ομογενείς. Το βασικό αποτέλεσμα της διαστατικής ανάλυσης είναι το θεώρημα του π. Αυτό μας λέει ότι αν ένας φυσικός νόμος δίνει μια σχέση μεταξύ διάφορων φυσικών μεγεθών τότε υπάρχει ένας

ισοδύναμος νόμος που συσχετίζει ορισμένες αδιάστατες ποσότητες που προκύπτουν από αυτά τα μεγέθη.

2) **Κανονικοποίηση:** Κανονικοποίηση είναι η διαδικασία της επιλογής νέων συνήθως αδιάστατων μεταβλητών και η επαναδιατύπωση του προβλήματος μέσω αυτών των μεταβλητών. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να συγκρίνουμε την τάξη μεγέθους των όρων σε μία εξίσωση για να παραλείψουμε για παράδειγμα μικρούς όρους. Αυτό βοηθάει στην εφαρμογή των μεθόδων διαταραχών. Πιο συγκεκριμένα κάθε μεταβλητή σε ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται από την τάξη μεγέθους της σε σχέση με τον τρόπο μέτρησης της. Για παράδειγμα, αν  $t$  είναι μια μεταβλητή χρόνου, την οποία μετράμε σε δευτερόλεπτα για την περιγραφή ενός φαινομένου, όπως η κίνηση ενός παγετώνα ή η οξείδωση του σιδήρου, το δευτερόλεπτο είναι πολύ μικρή μονάδα μέτρησης ενώ για τη περιγραφή ενός φαινομένου, όπως μια πυρηνική αντίδραση είναι πολύ μεγάλη μονάδα μέτρησης. Γενικά σε κάθε πρόβλημα έχουμε μια εγγενή κλίμακα χρόνου που την ονομάζουμε χαρακτηριστικό χρόνο αναφοράς,  $t_c$ . Η ποσότητα  $t_c$  μπορεί να ορισθεί ως το μικρότερο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να παρατηρηθούν αναγνωρίσιμες μεταβολές στα φυσικά μεγέθη του προβλήματος. Για παράδειγμα για την κίνηση ενός παγετώνα ο χαρακτηριστικός χρόνος αναφοράς είναι κάποια έτη, ενώ για την πυρηνική αντίδραση είναι χρόνος της τάξης των  $10^{-6}$  sec. Επιπλέον σε ένα πρόβλημα μπορεί να έχουμε περισσότερες από μία κλίμακες χρόνου. Για παράδειγμα μια χημική αντίδραση μπορεί να εξελίσσεται αργά αμέσως μετά την έναρξη της διαδικασίας και για κάποιο χρονικό διάστημα και κατόπιν να έχουμε μια απότομη μεταβολή που την χαρακτηρίζει μια χρονική κλίμακα πολύ

μικρότερη σε σχέση με αυτή του αρχικού σταδίου. Αν τώρα γνωρίζουμε τον χαρακτηριστικό χρόνο αναφοράς  $t_c$ , τότε μπορούμε να αλλάξουμε την κλίμακα θέτοντας  $\tau = t/t_c$ , όπου  $\tau$  είναι η αδιάστατη μεταβλητή για το χρόνο και είναι της τάξης του ένα (οι μεταβολές της κυμαίνονται κοντά στη μονάδα). Την ίδια διαδικασία μπορούμε να εφαρμόσουμε και για τις άλλες μεταβλητές του προβλήματος με στόχο να πάρουμε μία εξίσωση με αδιάστατες μεταβλητές. Οι χαρακτηριστικές ποσότητες αναφοράς προσδιορίζονται από συνδυασμούς διάφορων διαστατικών μεγεθών του προβλήματος και πρέπει να είναι περίπου της ίδιας τάξης μεγέθους με την ποσότητα που χαρακτηρίζουν.

3) **Μέθοδοι Διαταραχών:** Πολλές φορές οι εξισώσεις ενός μαθηματικού μοντέλου δεν είναι δυνατόν να λυθούν ακριβώς με αναλυτικές μεθόδους. Σε αυτή την περίπτωση προσπαθούμε να βρούμε μια προσεγγιστική αναλυτική λύση ή και χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους. Οι μέθοδοι διαταραχών βασίζονται στο γεγονός ότι μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση πιθανόν να προκύπτουν στην εξίσωση μικροί όροι τους οποίους μπορούμε να απαλείψουμε. Πιο συγκεκριμένα αναζητούμε μια προσεγγιστική λύση στο πρόβλημα που αποτελείται από κάποιους όρους ενός αναπτύγματος της μορφής Taylor ως προς μια παράμετρο του προβλήματος η οποία είναι μικρή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.2: Μερικές άλλοι μέθοδοι για τις εκδοχές της μοντελοποίησης

### **Μοντελοποίηση της Πολιτικής (Modeling of Public Policy):**

Από τις απαρχές της την δεκαετία του 1950, ο κλάδος της Ανάλυσης Πολιτικής (Policy Analysis) θεωρούσε ότι η Πολιτική

Διαδικασία αποτελείται από μια ακολουθία διακριτών φάσεων. Η ιδέα της μοντελοποίησης της Πολιτικής Διαδικασίας προτάθηκε από τον Lasswell το 1956, ο οποίος θεώρησε ότι αυτή αποτελείται από επτά διακριτές φάσεις. Στην πορεία του χρόνου το μοντέλο αυτό το οποίο ονομάστηκε Κύκλος (Δημόσιας) Πολιτικής (Policy Cycle) καθιερώθηκε ως ο συμβατικός τρόπος περιγραφής της χρονικής αλληλουχίας της Πολιτικής Διαδικασίας: Ορισμός Θεματολογίας (Agenda Setting), Διαμόρφωση πολιτικής (Policy Formulation), Λήψη Απόφασης (Decision Making), Εφαρμογή (Implementation), Αξιολόγηση (Evaluation).

**Διακυβέρνηση και Μοντελοποίηση Πολιτικής:** Ο όρος «ΤΠΕ για την διακυβέρνηση και την Μοντελοποίηση της Πολιτικής» (ICT for Governance and Policy Modelling) προέκυψε ως ένας όρος – ομπρέλα και περιβάλλει μια σειρά τεχνολογιών οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν ώστε να επιτευχθεί ο κοινός στόχος της βελτίωσης της διαδικασίας λήξης αποφάσεων δημόσιας Πολιτικής σε ένα περιβάλλον πολυπλοκότητας. Στοχεύουν στο να καταστήσουν τον κύκλο της δημιουργίας Δημόσιας Πολιτικής αποτελεσματικότερο και ευφυέστερο αλλά και να επιταχύνουν μαθησιακή διαδρομή η οποία είναι ενσωματωμένη στον κύκλο της Πολιτικής. Συνήθως όμως χαρακτηρίζεται ως ένας πολυποίκιλος και όχι πλήρως παγιωμένος τομέας αφού:  Είναι σε μεγάλο βαθμό διεπιστημονικός, περιλαμβάνοντας επιστήμες όπως τα πληροφοριακά συστήματα, οι επιστήμες μηχανικού, τα μαθηματικά, η στατιστική, τα οικονομικά, η κοινωνιολογία, σχεδιασμός διεπαφών χρήστη, πολιτική Επιστήμη. Συνενώνει διαφορετικές πολιτιστικές προσεγγίσεις στην έρευνα και την ανάπτυξη: Στο πεδίο της Μοντελοποίησης Πολιτικής η

καινοτομία, η Πρόγνωση (Forecasting) και η Προσομοίωση οι οποίες είναι περισσότερο «θεωρητικές και ακαδημαϊκές» (Theory – led and academic), τα πεδία της μαζικής συνεργασίας και συμμετοχής και της Οπτικοποίησης, τα οποία βασίζονται στην εμπειρία και την σύμπραξη του χρήστη. 12 Η Μοντελοποίηση Πολιτικής σε αυτό πλαίσιο είναι μια αφαιρετική διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει την Ανάλυση της Πολιτικής θέτοντας την βάση για την εννοιολογική Μοντελοποίηση και την Μαθηματική Μοντελοποίηση η οποία ανοίγει τον δρόμο στην προσομοίωση. Στο τέλος της διαδικασίας υπάρχει η διαδικασία της Οπτικοποίησης του μοντέλου ή της προσομοίωσης αυτού.

**Back-Casting (Αναπροσαρμογή)** Αποτελεί και αυτό (όπως και το Backcasting) μέρος του Επιστημονικού πεδίου Future Studies. Με το Backcasting «καθορίζουμε ένα επιθυμητό μέλλον και εργαζόμενοι προς τα πίσω προσδιορίζουμε τα Προγράμματα και τις Πολιτικές οι οποίες ενώνουν το επιθυμητό αυτό μέλλον, με το παρόν»<sup>32</sup>. Το Backcasting «είναι περισσότερο μια κατά την οποία αρχικώς οραματιζόμαστε τις μελλοντικές επιθυμητές συνθήκες και κατόπιν καθορίζονται τα βήματα για να επιτευχθούν αυτές οι συνθήκες, αντί να κάνουμε βήματα τα οποία είναι απλώς η συνέχιση των σημερινών μεθόδων τις οποίες έχουμε προβάλει στο μέλλον» Το Backcasting είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν: 34 • Το προς μελέτη πρόγραμμα είναι περίπλοκο • Υπάρχει ανάγκη για σημαντική αλλαγή • Οι κυρίαρχες τάσεις είναι μέρος του προβλήματος • Το πρόβλημα είναι σε μεγάλο βαθμό, θέμα εξωτερικών παραγόντων • Το πεδίο είναι αρκετά ευρύ και ο χρονικός ορίζοντας αρκετά μεγάλος ώστε να μένει αρκετός χώρος για εσκεμμένες επιλογές Το Backcasting



χρησιμοποιείται στον αστικό σχεδιασμό και στην διαχείριση του φυσικού πλούτου και της ενέργειας. Άλλωστε απετέλεσε και βασικό στοιχείο του Soft Energy Path, μιας καινούργιας προσέγγισης της ενεργειακής διαχείρισης, μετά την ενεργειακή κρίση του 1973 στις ΗΠΑ. Δυο μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ευρέως στο Backcasting είναι η Rear-view Mirror Analysis (Διαχείριση του Ανθρωπίνου φόβου για το μέλλον) και η Cross-impact Analysis (Ανάλυση των επιπτώσεων παραλλήλων μελλοντικών γεγονότων).

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.3: Λογισμικά μοντέλων** **μοντελοποίησης**

**Ως προς την δομή:** Έχουν αναλογικές και τοπολογικές ομοιότητες (φυσικά μοντέλα δύο ή τριών διαστάσεων ή ομοιώματα) με το προς αναπαράσταση σύστημα. Συνιστούν συμβολικές κατασκευές που δεν σχετίζονται φαινομενολογικά με το προς αναπαράσταση σύστημα (μαθηματικά μοντέλα).

**Ως προς το καθεστώς εγκυρότητας:** νοητικά μοντέλα και εννοιολογικά μοντέλα.

**Νοητικά Μοντέλα:** Όταν αλληλεπιδρούμε με τον κόσμο (τους άλλους ανθρώπους, το περιβάλλον, τα εργαλεία) δημιουργούμε νοητικά μοντέλα τα οποία μας παρέχουν ένα πλαίσιο με προβλεπτική και επεξηγηματική ισχύ για την κατανόηση της αλληλεπίδρασης. Τα νοητικά μοντέλα δημιουργούνται από τους ανθρώπους και απαιτούν ένα σύστημα στόχο ή ένα φαινόμενο συνήθως δεν ταυτίζονται με το εννοιολογικό μοντέλο αυτού του συστήματος.

**Εννοιολογικά Μοντέλα:** Το εννοιολογικό μοντέλο (ανακάλυψη των τεχνικών ή των εκπαιδευτικών) προσφέρει μία κατάλληλη

αναπαράσταση του συστήματος που αναπαριστά υπό την έννοια ότι είναι ορθό,συνεπές και πλήρες.

**Επιστημονικά Μοντέλα:** Η μοντελοποίηση συνιστά βασικό μεθοδολογικό εργαλείο στην επιστημονική έρευνα και σκέψη. Η επιστημονική δραστηριότητα αναπτύσσεται σε μεγάλο βαθμό με τη δημιουργία και τον χειρισμό μοντέλων.Τα εννοιολογικά μοντέλα που κατασκευάζονται απο τους επιστήμονες αποκαλούνται επιστημονικά μοντέλα και αποτελούν όπως προαναφέρθηκε παραπάνω βασικό επιστημονικό εργαλείο στην επιστημονική έρευνα και σκέψη.

**Διδακτικά Μοντέλα:** Τα εννοιολογικά μοντέλα που κατασκευάζονται από τους εκπαιδευτικούς ή τους δημιουργους αναλυτικών προγραμμάτων και σχολικών εγχειριδίων ονομάζονται διδακτικά μοντέλα.Τα διδακτικά μοντέλα προκύπτουν μέσω διαδικασιών διδακτικού μετασχηματισμού των επιστημονικών μοντέλων και θεωριών.

**Χαρακτηριστικά των νοητικών μοντέλων:** Έίναι ατελή και ασταθή με δυσδιάκριτα όρια εφαρμογής.Η επιστημονική εγκυρότητα τους είναι σε μεγάλο βαθμό αμφισβητίσιμη,ο χώρος εφαρμογής τους είναι συνήθως περιορισμένος.Η γνώση των νοητικών μοντέλων των μαθητών είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση των γνωστικών τους δομών.

1)**Δομηστική προσέγγιση:** Ατομικές κατασκευές που προκύπτουν μέσω της αλληλεπίδρασης με τους άλλους και την πραγματικότητα.

2)**Κοινωνικο-πολιτισμική προσέγγιση:** Συλλογικά κατασκευάσματα,προϊόν της εσωτερίκευσης κοινωνικών διεργασιών και αλληλεπιδράσεων.

**Χαρακτηριστικά των εννοιολογικών μοντέλων:** Τα εννοιολογικά μοντέλα είναι κοινωνικές κατασκευές που συνδέονται στενά με την ανάπτυξη της επιστήμης και της επιστημονικής σκέψης. Ως δημιουργίες επιστημονικών θεωριών έχουν παραδειγματική ισχύ (Kuhn) και εξελίσσονται ή διαψεύδονται (Popper) μέσα στην ανθρώπινη ιστορία και τον πολιτισμό

**Ιδιότητες των μοντέλων:** Ένα μοντέλο ως μια αναπαράσταση ενός προβλήματος μιας διαδικασίας, μιας ιδέας ή ενός συστήματος δεν είναι ποτέ ακριβές αντίγραφο αλλά αναπαριστά κάποια ή κάποιες πτυχές της δομής, των ιδιοτήτων ή της συμπεριφοράς αυτού που είναι το μοντέλο. Παίρνει διάφορες μορφές όπως διαγράμματα, μαθηματικούς τύπους, φυσικές κατασκευές ή σύνολο από λογικές καταστάσεις.

**Τα συστατικά και ο σκοπός του μοντέλου:** Ένα μοντέλο αποτελείται από μία συλλογή οντοτήτων που έχουν σαφώς προκαθορισμένες ιδιότητες και μπορούν να συσχετισουν μεταξύ τους με καλώς προσδιορισμένους κανόνες ή σχέσεις. Ο κύριος σκοπός του κάθε μοντέλου στην μοντελοποίηση είναι να προσομοιώσει με ακρίβεια τις αυσιαστικές πτυχές ενός συγκεκριμένου χώρου της πραγματικότητας.

**Λειτουργίες των μοντέλων:** Ένα μοντέλο είναι ένα νέο αντικείμενο συγκεκριμένο ή συμβολικό που δημιουργείται κατά κανόνα για να αναπαραστήσει ένα αντικείμενο που δεν είναι άμεσα προσβάσιμο. Τα μοντέλα έχουν λειτουργίες επεξηγηματικές και αναπαραστασιακές καθώς και λειτουργίες πρόβλεψης. Χρησιμοποιούνται στην αναζήτηση παραμέτρων και καταστάσεων και για την εξήγηση φαινομένων.

**Λειτουργία της μοντελοποίησης:** Η μοντελοποίηση συνιστάται στην οικοδόμηση ερμηνειών που έχουν αυτόνομη λειτουργία με στόχο την πρόβλεψη μιας εξελικτικής διαδικασίας και μεταβολής ενός συστήματος χωρίς να υπάρχει ανάγκη να παρατηρείται άμεσα η πραγματικότητα.

**Επιστημονική δραστηριότητα και μοντελοποίηση:** Η επιστημονική πρακτική εμπερικλείει την οικοδόμηση, την εγκυροποίηση και την εφαρμογή επιστημονικών μοντέλων. Η επιστημονική κατανόηση αναδύεται και τη χρήση μοντέλων δηλαδή από την μοντελοποίηση. Τα μοντέλα στην επιστημονική έρευνα χρησιμεύουν για τη διατύπωση υποθέσεων που πρέπει να ελεγχθούν για την περιγραφή επιστημονικών φαινομένων. Η επιστημονική δραστηριότητα συνιστάται σε μεγάλο βαθμό στη δημιουργία εννοιολογικών χρησιμοποιώντας διαφόρους φορμαλισμούς μοντέλων των φαινομένων και των αντικειμένων τα οποία μελετά. Τα μοντέλα μπορεί να είναι αναλυτικά όπως στην φυσική με τα μαθηματικά μοντέλα ή να παρέχουν μια απλή και πρακτική αναπαράσταση όπως στην βιολογία με τη χρήση εικόνων και μεταφορών από την καθημερινή ζωή.

**Διδακτικές προεκτάσεις της μοντελοποίησης:** Οι διαδικασίες μοντελοποίησης συντελούν ουσιαστικά στην βαθύτερη κατανόηση των προς μελέτη φαινομένων. Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει σημαντικές προσπάθειες πολλά εκπαιδευτικά συστήματα εντάσσουν δραστηριότητες μοντελοποίησης και την ολοκληρωμένη προσέγγιση διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων που αυτές προσφέρουν, στην προβληματική τους. Οι προϋποθέσεις που μπορούμε να αξιοποιήσουμε τα μοντέλα και τη διαδικασία μοντελοποίησης στη διδασκαλία και τη μάθηση είναι ότι οι μαθητές πρέπει να εμπλέκονται σε

δραστηριότητες μοντελοποίησης με πλεονεκτήματα της διεπιστημονικής προσέγγισης και με χρήση μεθόδων και πρακτικών που μοιάζουν με τις αυθεντικές επιστημονικές δραστηριότητες. Η προσέγγιση που βοηθά τους μαθητές να εκφράζονται και να σκέφτονται με όρους μοντέλων και όχι με μαθηματικά σύμβολα ή γλωσσικές εκφράσεις φαίνεται ότι ενισχύουν την κατανόηση τους και όχι στείρα απομνημόνευση. Η διδακτική μέθοδος που βασίζεται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης τη συγκρότηση των νοητικών μοντέλων των μαθητών και τις αναπαραστάσεις που βασίζονται στην πρότερη εμπειρία τους σχετικά με τα προς μελέτη φαινόμενα ή επιστημονικές έννοιες. Οι προτεινόμενες στους μαθητές διδακτικές δραστηριότητες είναι η επίλυση προβλημάτων που να έχουν νόημα για τα παιδιά και να βασίζονται στις καθημερινές τους πολιτισμικές εμπειρίες.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.4: Η μοντελοποίηση στην μάθηση

Πρόσκτηση αυτού καθαυτού μοντέλου είτε πρόκειται για επιστημονικό είτε για διδακτικό μοντέλο και ανάπτυξη όλων των γνωστικών εργαλείων που επιτρέπουν τις πρακτικές της μοντελοποίησης. Η αντίληψη της μάθησης ως εννοιολογική αλλαγή αντικαθιστά αλλαγμένες γνώσεις με γνώσεις πιο συμβατές από την επιστημονική κοινότητα. Οι διαδικασίες της εννοιολογικής αλλαγής με όρους ανασυγκρότησης των νοητικών μοντέλων των μαθητών προς τα εννοιολογικά μοντέλα των επιστημόνων πρέπει να πλαισιώνονται με κατάλληλα εργαλεία όπως πραγματικά αντικείμενα, εκπαιδευτικό λογισμικό και να ενισχύονται με την ανθρώπινη αλληλεπίδραση. Κατάλληλο πλαίσιο δημιουργίας κοινωνικο-γνωστικών συγκρούσεων απαραίτητων στην διαδικασία ανασυγκρότησης νοητικών μοντέλων είναι η

χρήση εργαλείων και η ανάπτυξη σύμμετρων με άλλους μαθητές ή ασσύμετρων με τον εκπαιδευτικό αλληλεπιδράσεων.

**Υπολογιστικά περιβάλλοντα μοντελοποίησης:** Η ανάπτυξη υπολογιστικών περιβαλλόντων μοντελοποίησης ευνοεί τον άμεσο χρόνο και ταυτόχρονο χειρισμό εικονικών και συμβολικών παραστάσεων που αναπαριστούν αντικείμενα, έννοιες, ιδιότητες ή πράξεις πάνω στον πραγματικό κόσμο καθώς και τη δυνατότητα σύνδεσής τους επιτρέποντας την έκφραση της δομής και των αλληλεξαρτήσεων τους. Η μοντελοποίηση αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διδακτικής και μαθησιακής δραστηριότητας. Η ανάπτυξη υπολογιστικών μοντέλων παρέχει την δυνατότητα χειρισμού τους και όχι χειρισμού των ίδιων των αντικειμένων, επιτρέπει την δυνατότητα υπολογισμών, την ανακάλυψη νέων σχέσεων, την οικοδόμηση νέων γνωστικών σχημάτων, την κατάκτηση βεβαιοτήτων αλλά και την ανατροπή κάποιων άλλων. Το λογισμικό μοντελοποίησης εμπερικλείει στις λειτουργίες του τέτοιου τύπου δραστηριότητες. Η ανάπτυξη υπολογιστικών μοντέλων παρέχει τη δυνατότητα χειρισμού τους και όχι χειρισμού των ίδιων των αντικειμένων και ευνοεί μαθησιακές καταστάσεις έκφρασης δραστηριότητες μοντελοποίησης με δημιουργία νέων μοντέλων εννοιολογικών και νοητικών και διερεύνησης δραστηριότητες διερεύνησης έτοιμων μοντέλων μέσω της προσομοιωσής τους.

**Είδη συλλογισμών στην μοντελοποίηση:** Είναι τα ποιοτικά, ημιποσοτικά και ποσοτικά μοντέλα.

**Ποσοτικά μοντέλα:** λειτουργούν πάνω σε μετρήσιμα μεγέθη και σχέσεις που δημιουργούνται ανάμεσα στα μεγέθη εκφράζονται από αλγεβρικούς τύπους.

**Ημιποσοτικά Μοντέλα:** Στηρίζονται πάνω σε μετρήσιμα μεγέθη, δεν εκφράζουν την τιμή αλλά το είδος της επιρροής ενός μέρους του συστήματος σε άλλο μέρος.

**Ποιοτικά Μοντέλα:** Αναπαριστούν τις γνώσεις που δεν είναι δυνατόν να εκφραστούν με μετρήσιμο τρόπο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.5: Κατηγορίες μοντέλων στην εκπαίδευση

Υπάρχουν πολλά λογισμικά μοντέλα μοντελοποίησης όπου πολλά από αυτά χρησιμοποιούνται για εκπαιδευτικούς σκοπούς μερικά από αυτά είναι:

1)Modellus

2)Stella

3)Vensim

4)Ithink

**Λογισμικό Modellus:** Δυναμικό εργαλείο για διαλογική κατασκευή και διερεύνηση μαθηματικών μοντέλων, το οποίο δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να κατασκευάζουν, να προσομοιώνουν και να αναλύουν μοντέλα με διαλογικό τρόπο. Το λογισμικό Modellus είναι ένα ισχυρό εργαλείο, ιδιαίτερα χρήσιμο για τη διδασκαλία των θετικών επιστημών. Κυρίως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υποστήριξη των Μαθηματικών, της Φυσικής, της Χημείας, των Οικονομικών και δευτερευόντως της Βιολογίας. Ανήκει στην κατηγορία του

ανοικτού τύπου περιβάλλοντος - εργαλείο για modeling, πειραματισμό και simulation, απαραίτητο για την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων και την επεξεργασία τους μέσα από γραφικές παραστάσεις, πίνακες και animations. Στον πυρήνα του προγράμματος υπάρχει μια περιοχή εργασίας (παράθυρο) στην οποία ο μαθητής μπορεί να γράψει το μαθηματικό μοντέλο με μορφή εξισώσεων ή ορισμών μεγεθών. Στη συνέχεια, το σύστημα αναλαμβάνει να πραγματοποιήσει την αναπαράσταση της εξέλιξης του φαινομένου που υπακούει στο μαθηματικό μοντέλο. Το Modellus αξιοποιεί πολλές προηγούμενες προσπάθειες που έγιναν στην κατεύθυνση της δημιουργίας ενός λογισμικού κατάλληλου για μοντελοποιήσεις σε ποικίλες γνωστικές περιοχές.

**Λογισμικό Stella:** Πρόκειται για ένα λογισμικό που απευθύνεται σε άτομα με ειδικές ανάγκες και πιο συγκεκριμένα με αυτισμό. Πρόκειται για ένα «εκπαιδευτικό πιλοτικό πρόγραμμα στο οποίο αναπτύχθηκαν πρότυπες υπερμεσικές εφαρμογές που ενσωματώνονται στο περιβάλλον του λογισμικού «LT125DP» και θα χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί της ειδικής αγωγής, με στόχο τη βελτίωση των διαφόρων ικανοτήτων και την κάλυψη των αναγκών των ΑμεΑ (παιδιών και εφήβων) στο φάσμα του αυτισμού». Χαρακτηριστικά αυτών των εφαρμογών είναι ο υψηλός βαθμός διαδραστικότητας, η παραμετροποίησή τους, η διαβάθμισή τους όσον αφορά το βαθμό δυσκολίας και η δυνατότητα εμπλουτισμού τους από τους χρήστες εκπαιδευτικούς. Ένα εκπαιδευτικό πιλοτικό πρόγραμμα, όπου οι εκπαιδευτικοί της ειδικής αγωγής, με τη χρήση λογισμικού αναπτύσσουν εκπαιδευτικές δραστηριότητες και δημιουργούν εξειδικευμένο εκπαιδευτικό υλικό (σε ψηφιακή ή και έντυπη



μορφή), με στόχο τη βελτίωση των διαφόρων ικανοτήτων και την κάλυψη των αναγκών των ΑμεΑ (παιδιών και εφήβων) στο φάσμα του αυτισμού».

**Λογισμικό Ithink:** Το πρόγραμμα αυτό προβλήθηκε αρχικά στο Macintosh το έτος 1984. Το Stella προσφέρει ένα γραφικό περιβάλλον για την κατασκευή των συστημικών μοντέλων. Το Stella χρησιμοποιείται περισσότερο για διδακτικούς σκοπούς ενώ το itthink περισσότερο σε επιχειρήσεις. Λόγω των ισχυρών χαρακτηριστικών του αλλά και την ευκολία στην χρήση, το Stella/ithink είναι ένα από τα πιο διαδεδομένα προγράμματα προσομοίωσης μοντέλων συστημικής δυναμικής. Μερικές από τις δυνατότητες του είναι η σχεδίαση διαγραμμάτων αποθέματος και ροής (stock and flow diagrams) και η δόμηση του μοντέλου πριν την εισαγωγή των εξισώσεων. Παράλληλα, παρέχονται δυνατότητες όπως η διαίρεση του μοντέλου σε υπο-μοντέλα, η εστίαση σε κάθε οντότητα ξεχωριστά και η συμπλήρωση περαιτέρω πληροφοριών σε έτερο χρόνο. Επίσης, παρέχονται εκτενείς και πλήρης οδηγίες χρήσης του προγράμματος. Τέλος, το πρόγραμμα είναι και αυτό κλειστού κώδικα και χρειάζεται άδεια για την λειτουργία και χρήση του.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.6: Modelling Space

**Modelling Space:** Δίνει έμφαση στις διαδικασίες ποιοτικής και ημιποσοτικής μοντελοποίησης. Οι βασικές αρχές σχεδιασμού περιβαλόντων ημιποσοτικής μοντελοποίησης γίνεται με τη μη χρήση τυπικών μαθηματικών, μοντελοποίηση με βάση την ανάλυση των προβλημάτων σε οντότητες, σε ιδιοτητές τους καθώς και σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων. Έκφραση διαμέσου της οπτικοποίησης τόσο των οντοτήτων και των ιδιοτήτων τους

όσο και των σχέσεων που τις διέπουν ή επιδρούν πάνω σε αυτές. Μπορούν να υποστηρίξουν ποικίλες και κατάλληλες όσο αφορά τα σύμβολα και γραφικές παραστάσεις που συνιστούν γνωστικά εργαλεία και μαθησιακά βοηθήματα. Υποστήριξη της ανάπτυξης μεταγνωστικών ικανοτήτων σημαντικών για την οικοδόμηση των γνώσεων, υποστήριξη συνεργατικών δραστηριοτήτων μεταξύ ομάδων φοιτητών αλλά και διδασκόντων τόσο σε επίπεδο τοπικού δικτύου όσο και σε επίπεδο διαδικτύου.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Θεωρητική παρουσίαση του προβλήματος

Παρά τη διαδεδομένη άποψη του ότι τα μαθηματικά διανύουν μια περίοδο τα τελευταία χρόνια βραδείας εξέλιξης, η πραγματικότητα φαίνεται να μας διαψεύδει. Τα μαθηματικά βρίσκονται σε ένα πλαίσιο αμφίδρομης σχέσης με την τεχνολογία καθώς και με τις άλλες επιστήμες. Αυτό συμβαίνει γιατί παράγουν την κατανόηση και τη μελέτη πολλών επιστημονικών τομέων και τα ίδια εμπλουτίζονται διαρκώς με νέα προβλήματα που ανακύπτουν. Η μοντελοποίηση στα μαθηματικά αφορά στη μελέτη δυναμικών συστημάτων. Στην ουσία ένα σύστημα είναι ένας μετασχηματιστής, ο οποίος κάτω από τη επιρροή εξωτερικών ερεθισμάτων (εισόδους) είναι σε θέση να παράγει αποκρίσεις (εξόδους).

Χαρακτηριστικό του συστήματος είναι ότι διαθέτει μια τρέχουσα εσωτερική κατάσταση και ενδεχομένως να διαθέτει και μνήμη. Στενή σύνδεση παρατηρούμε ανάμεσα στην έννοια του συστήματος και την ανάδραση (feedback). Μέσα από αυτή τη σχέση δημιουργείται ένα νέο σύστημα που δέχεται για είσοδο την έξοδο του αρχικού συστήματος η οποία

μετασχηματίζεται σε πληροφορία που μπορεί να γίνει αποδεκτή από το αρχικό σύστημα, για να επιτύχουμε την επιθυμητή απόκριση.

Μαθηματική μοντελοποίηση είναι η διαδικασία κατασκευής μαθηματικών μοντέλων των οποίων η συμπεριφορά ή οι ιδιότητες μπορούν και αντιστοιχούν σε κάποιο συγκεκριμένο σύστημα του πραγματικού κόσμου. Τα δύο πιο βασικά κίνητρα για τη μαθηματική μοντελοποίηση είναι η δυνατότητα κατανόησης και η δυνατότητα πρόβλεψης (ή προσομοίωσης). Η διαδικασία μοντελοποίησης μπορεί να περιγραφεί από τα εξής βήματα: παρατήρηση φαινομένου, διατύπωση μιας υπόθεσης, ανάπτυξη μεθοδολογίας ελέγχου της υπόθεσης, συλλογή δεδομένων, έλεγχος υπόθεσης ως προς τα δεδομένα, αποδοχή ή απόρριψη της υπόθεσης. Θα πρέπει να επιδιώκουμε μια ισορροπία ανάμεσα στις τρεις, ίσως αλληλοαναιρούμενες απαιτήσεις για ένα καλό μοντέλο: ακρίβεια, προσαρμοστικότητα, κόστος.

Φυσικά, η μοντελοποίηση χρησιμοποιείται και στον επιχειρησιακό κλάδο. Ένα επιχειρηματικό μοντέλο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ένας οργανισμός δημιουργεί και προσφέρει αξία. Η αξία χρησιμοποιείται με την ευρύτερη έννοια και δεν αποτελεί μόνο οικονομικό μέγεθος αλλά κοινωνική ή και άλλη αξία. Τα επιχειρηματικά μοντέλα αναφέρονται ως το προσχέδιο (το blueprint) του τρόπου με τον οποίο μια επιχείρηση «επιχειρεί», δηλαδή περιγράφει την ολότητα του πως η επιχείρηση επιλέγει τους πελάτες της, προσδιορίζει και διαφοροποιεί τα προϊόντα και τις υπηρεσίες της, προσδιορίζει τα αντικείμενα με τα οποία ασχολείται η ίδια και εκείνα που δίνει σε εξωτερικούς συνεργάτες, πώς διαμορφώνει τους πόρους που έχει στη διάθεσή της καθώς και

πώς βγαίνει προς τα έξω στο περιβάλλον της για να γίνει χρήσιμη για τους πελάτες της και να επωφεληθεί από τα κέρδη της. Ένα επιχειρηματικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ανεπίσημα (π.χ. για ανάπτυξη της δημιουργικότητας) αλλά και επίσημα για την αναπαράσταση των κεντρικών λειτουργιών μιας επιχείρησης όπως είναι ο σκοπός, το τι προσφέρει η επιχείρηση, τις στρατηγικές της, τις οργανωτικές δομές της, τις εμπορικές πρακτικές της καθώς και τις ευρύτερες λειτουργικές πολιτικές και διαδικασίες που χρησιμοποιεί. Η ουσία ενός επιχειρηματικού μοντέλου είναι ότι προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο μια επιχείρηση προσφέρει αξία στους πελάτες της, εμπλέκει τους πελάτες με τέτοιο τρόπο ώστε να πληρώσουν για την αξία που λαμβάνουν και μετατρέπει αυτές τις πληρωμές σε κέρδος – με αυτό τον τρόπο αποτυπώνει τις υποθέσεις των μάνατζερ σχετικά με το τι θέλουν οι πελάτες, πως το θέλουν και το πως μπορεί μια επιχείρηση να οργανωθεί καλύτερα για να καλύψει αυτές τις ανάγκες και ταυτόχρονα να πληρωθεί για αυτό ώστε να φτάσει στο κέρδος. Οι κύριες χρήσεις των επιχειρηματικών μοντέλων είναι για την περιγραφή και την κατηγοριοποίηση των επιχειρήσεων (ειδικά στην καλλιέργεια της επιχειρηματικότητας) αλλά χρησιμοποιούνται από τους μάνατζερ εσωτερικά σε μια επιχείρηση για την εξερεύνηση των μελλοντικών ευκαιριών για ανάπτυξη.

Ξεκινώντας από την τέχνη, και περνώντας από την ιστορία και προχωρώντας στις βιολογικές και φυσικές επιστήμες του περιβάλλοντος, συναντάμε μια σειρά από μοντέλα ή πρότυπα που αναπαριστούν φαινόμενα, διαδικασίες ή συστήματα. Τα μοντέλα αυτά χαρακτηρίζονται ολοένα από μεγαλύτερη δυνατότητα για εμπειρική επαλήθευση ή διάψευση, χωρίς

αυτό να σημαίνει απαραίτητα και βελτίωση. Μιλώντας για ένα μοντέλο, μπορούμε να πούμε πως είναι μια κατασκευή που αναπαριστά, αναλύει ή προσομοιώνει ένα φαινόμενο, μια διαδικασία, ένα σύστημα ή μια συμπεριφορά.

Η ποσότητα των μαθηματικών στις επιστήμες έχει αυξηθεί σημαντικά τα τελευταία χρόνια. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της εξέλιξης και της ανάπτυξης των επιστημών. Ξεκίνησαν συλλέγοντας και παρατηρώντας πεταλούδες κι εξελίχθηκαν σε κλωνοποίηση προβάτων. Σε αυτή τη μεγάλη εξέλιξη μας χρειάζεται μια γλώσσα κατανόησης των φαινομένων και των ρυθμών και αυτή η γλώσσα δεν μπορεί παρά να είναι τα μαθηματικά.

Τα μαθηματικά, λοιπόν, λειτουργούν χτίζοντας μοντέλα. Μπορούμε να παίξουμε με τα συμβολικά μοντέλα και να τα προσαρμόσουμε μέχρι να φθάσουν σε σημείο να συμπεριφέρονται με τρόπο που να μοιάζει στα πράγματα που μελετάμε. Όταν συμβεί αυτό κατανοούμε τα πράγματα για τα οποία ενδιαφερόμαστε από το να στεκόμαστε στη φυσική τους παρουσία. Τα μαθηματικά μοντέλα δεν αντικαθιστούν λέξεις ή εικόνες αλλά τις κάνουν πιο ακριβείς. Το εύρος των μοντέλων είναι πολύ μεγάλο και εισβάλλει στο χώρο των επιστημών για τη ζωή μας. Ουσιαστικά τα μοντέλα μας κάνουν κατανοητά τα συστήματα είτε μιλάμε για μηχανική, χημεία, οικονομία, ιατρική ή οικολογία (Alder, 2001). Η σημαντικότητα της χρήσης των μοντέλων στις επιστήμες είναι μεγάλη. Περιπτώσεις τέτοιου ενδιαφέροντος είναι το μοντέλο του ατόμου Bohr, το μοντέλο του MIT για το νουκλεόνιο, το μοντέλο πολυμερισμού Gaussian αλυσίδας και άλλα πολλά μοντέλα αποτελούν το κέντρο του ενδιαφέροντος (Frigg, Romant & Hartmann, Stephan, 2012).

Η έννοια της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι ότι μπορούμε να εξομοιώνουμε καταστάσεις της πραγματικής ζωής με μαθηματικές εξισώσεις για να προβλέψουμε τη μελλοντική τους συμπεριφορά. Η μαθηματική μοντελοποίηση χρησιμοποιεί εργαλεία όπως θεωρίες αποφάσεων, θεωρίες ουρών αναμονής, γραμμικό προγραμματισμό και απαιτεί μεγάλες ποσότητες από πληροφορίες συμπιεσμένων αριθμητικών δεδομένων.

Η επιστημονική κατανόηση για τη μαθηματική μοντελοποίηση προστάζει πως ένα μοντέλο συμπεριλαμβάνει μια υπόθεση σχετικά με το σύστημα μελέτης και μας δίνει την ευκαιρία να συγκρίνουμε την υπόθεση αυτή με τα δεδομένα μας. Ένα μοντέλο είναι συχνά χρήσιμο όταν το ίδιο αποτυγχάνει να ταιριάξει με τα δεδομένα, επειδή μας δείχνει πως κάποιες ιδέες μας για τα δεδομένα είναι λάθος. Τόσο τα μαθηματικά μοντέλα όσο και οι εξομοιώσεις των υπολογιστών μας σχετικά με τα μοντέλα είναι χρήσιμα πειραματικά μοντέλα για την οικοδόμηση και τον έλεγχο θεωριών, αξιολόγηση ποιοτικών υποθέσεων, απάντηση συγκεκριμένων ερωτήσεων, απόφαση της ευαισθησίας στην αλλαγή των τιμών των παραμέτρων και την εκτίμηση των σημαντικών παραμέτρων από τα δεδομένα μας.

Μοντέλα στα μαθηματικά εκτός από τη γεωμετρία συναντάμε και στην άλγεβρα και αυτό γιατί υπάρχουν προβλήματα της καθημερινής μας ζωής τα οποία μπορούμε να μοντελοποιήσουμε με εξισώσεις που είναι εργαλείο της άλγεβρας. Ανάλογα με τη μορφή των εξισώσεων αυτών απαντώνται και διαφορετικά είδη μοντέλων, όπως τα γραμμικά, τα τετραγωνικά, τα πολυωνυμικά και τα ρητά, τα

γεωμετρικά με τα εκθετικά, τα λογαριθμικά, τα σύνθετα, τα χαοτικά κλπ.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.1 Διδακτικές προεκτάσεις μοντελοποίησης

Ο Levins έχοντας στο μυαλό του τα μοντέλα ως μια αφηρημένη έννοια της πραγματικότητας, καταδεικνύει πως η μοντελοποίηση είναι μια συναλλαγή ανάμεσα στη γενίκευση, το ρεαλισμό και την ακρίβεια (Levins, 1966). Η χρησιμότητα κάθε συγκεκριμένου μοντέλου εξαρτάται από τους στόχους που έχει θέσει ο δημιουργός του. Για να περιγράψουμε γενικές οικολογικές αρχές, είναι συνήθως απαραίτητο να θυσιάσουμε τον ρεαλισμό και την ακρίβεια, ενώ για να περιγράψουμε έναν συγκεκριμένο πληθυσμό, είναι συνήθως απαραίτητο να θυσιάσουμε τη γενίκευση.

Η μοντελοποίηση ως δεξιότητα, όπως όλες οι δεξιότητες του ανθρώπινου εγκεφάλου, εξαρτάται από το ρυθμό με τον οποίο δουλεύεται. Πρόκειται για μια απαραίτητη δεξιότητα σκέψης η οποία υποστηρίζει τη διαδικασία της μάθησης. Η σύνθετη αυτή δεξιότητα επίσης στηρίζεται στην κατανόηση αρκετών δεξιοτήτων, οι οποίες είναι πολύ βασικές. Τέτοιες είναι η παρατήρηση, η ταξινόμηση, η μέτρηση, η επικοινωνία και η υποβολή ερωτημάτων.

Στην παιδική σκέψη η μοντελοποίηση αφορά στην κατασκευή φυσικών μοντέλων, περιγραφή της σχέσης καθενός από αυτά με το αντίστοιχο φυσικό φαινόμενο καθώς επίσης και από τη σύγκριση δύο ή περισσότερων μοντέλων του ίδιου συστήματος. Το παιδί για να κατακτήσει αυτή τη δεξιότητα θα πρέπει να αντιλαμβάνεται έννοιες όπως «μικρότερο»,

«μεγαλύτερο» κι επομένως τις εμφανείς διαφορές μεταξύ των αντικειμένων. Πέρα από τις διαφοροποιήσεις θα πρέπει να αντιλαμβάνεται και τα όμοια χαρακτηριστικά των αντικειμένων και να τα συνδυάζει.

Για να συμβεί όμως η κατάκτηση της δεξιότητας της μοντελοποίησης, το παιδί θα πρέπει να ενθαρρύνεται να αναγνωρίζει και να περιγράφει τα αντικείμενα του φυσικού κόσμου. Η διαδικασία αυτή θα πρέπει να επαναλαμβάνεται ώσπου η παιδική σκέψη να καταλήγει στην εύκολη αναγνώριση διαφορών, ομοιοτήτων και περιορισμών.

Από τη στιγμή που θα αποκτήσουμε γνώση σχετικά με το μοντέλο, αυτή θα πρέπει να μεταφραστεί ως γνώση για το σύστημα στόχου. Εδώ οι παραστατικές συναρτήσεις των μοντέλων μπορούν να μας φανούν πολύ χρήσιμες. Τα μοντέλα μπορούν να μας καθοδηγήσουν καλά σχετικά με τη φύση της πραγματικότητας αν υποθέσουμε ότι πλευρές του μοντέλου έχουν ανταπόκριση στην πραγματικότητα. Η γνώση όμως που συνδέεται με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις (π.χ. ανάλυση, εξιδανίκευση) μπορεί να είναι διαφορετικού είδους μάθησης.

Στα μαθηματικά όταν προσπαθούμε να ορίσουμε ένα οποιοδήποτε αντικείμενο δεν μας είναι πάντα εύκολο να το προσεγγίσουμε ή να το καταλάβουμε ακριβώς. Αντίθετα, αυτό δεν συμβαίνει με άλλες θετικές επιστήμες όπως η φυσική και η χημεία στις οποίες μπορεί να γίνει φυσική αναφορά σε ό,τι μελετάμε. Για παράδειγμα όταν μιλάμε για το φαινόμενο της ταχύτητας μπορούμε να ανακαλέσουμε ένα παρόμοιο γεγονός από τον πραγματικό μας κόσμο, ενώ όταν μιλάμε για μια μαθηματική συνάρτηση αυτό δεν μπορεί να συμβεί. Για το λόγο αυτό μπορούμε να καταλάβουμε πως στα μαθηματικά



είναι απαραίτητες οι αναπαραστάσεις και τα συστήματα έκφρασης πέρα από τη φυσική γλώσσα ή τις εικόνες. Στα μαθηματικά, λοιπόν, έχουμε κατασκευάσει συστήματα γραφής μαθηματικών, συμβολικές επισημειώσεις για αντικείμενα, γραφήματα, αλγεβρικές γραφές, γεωμετρικά σχήματα, δίκτυα, αναπαραστάσεις σε προοπτική κλπ. Αυτή η ποικιλία των συστημάτων αναπαράστασης μας δίνει τη δυνατότητα επιλογής του πιο λειτουργικού συστήματος με βάση την κάθε περίπτωση.

Από έρευνες φαίνεται πως μέσα από αυτές τις σημειωτικές αναπαραστάσεις, ο μαθητής μπορεί να κατανοήσει καλύτερα το φαινόμενο που μελετάται και να το επεξεργαστεί ευκολότερα φτάνοντας γρηγορότερα στη λύση του. Δεν υπάρχει μόνο επιτυχία αλλά και ολική αλλαγή της ποιότητας της παραγωγής.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Πρακτικές εφαρμογές μοντελοποίησης

Μαθηματικό μοντέλο είναι η περιγραφή ενός συστήματος ή μιας διαδικασίας χρησιμοποιώντας μαθηματικές έννοιες και σύμβολα. Η διαδικασία ανάπτυξης ενός μαθηματικού μοντέλου ονομάζεται μαθηματική μοντελοποίηση. Τα μαθηματικά μοντέλα χρησιμοποιούνται σε πολλές επιστήμες όπως φυσική, βιολογία, την μετεωρολογία, την επιστήμη των υπολογιστών αλλά έχουν και μεγάλο πλήθος στην κοινωνιολογία και τις πολιτικές επιστήμες.

Για να είναι δυνατή η περιγραφή ή η ανάλυση του συστήματος θα πρέπει πρώτα το σύστημα να εκφραστεί με κάποια μορφή αναπαράστασης. Η αναπαράσταση ενός συστήματος

για το σκοπό της μελέτης ονομάζεται μοντέλο. Τα μοντέλα ανάλογα με τον τρόπο μελέτης του συστήματος κατηγοριοποιούνται σε φυσικά, μαθηματικά, αναλυτικά, αριθμητικά και σε προσομοίωσης. Τα μαθηματικά μοντέλα χρησιμοποιούν μαθηματικές έννοιες για να περιγράψουν τις φυσικές ιδιότητες και λειτουργίες του συστήματος και αναπαρίστανται μέσω λογικών ή ποσοτικών σχέσεων οι οποίες τροποποιούνται και αλλάζουν για να βγουν συμπεράσματα σχετικά με τη συμπεριφορά του συστήματος υπό διαφορετικές συνθήκες. Τα αναλυτικά μοντέλα περιγράφονται από ένα πλήρες σύνολο εξισώσεων και χρησιμοποιούνται όταν το σύστημα μπορεί να μελετηθεί με αυστηρές μαθηματικές σχέσεις. Τα αριθμητικά μοντέλα χρησιμοποιούνται σε πολύπλοκα συστήματα όταν δεν είναι δυνατή η εύρεση μαθηματικών σχέσεων που να τα περιγράφουν και συνήθως χρησιμοποιούν εμπειρικά δεδομένα που εισάγονται στο μοντέλο και καθορίζουν τις εξόδους του. Τέλος, τα μοντέλα προσομοίωσης είναι ένας τρόπος δημιουργίας αριθμητικών, μαθηματικών μοντέλων με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και έχουν καταστεί πρόσφορο εργαλείο μοντελοποίησης και μελέτης πολύπλοκων και σύνθετων συστημάτων.

Τα μοντέλα προσομοίωσης παλαιότερα μπορούσαν να αναπτυχθούν και να μελετηθούν με «πράξεις στο χέρι», όμως η πολυπλοκότητα των υπό μελέτη συστημάτων καθώς και η εξέλιξη των Η/Υ έχουν οδηγήσει στην σχεδόν αποκλειστική χρήση Η/Υ για τη μοντελοποίηση και την εκτέλεση μελετών προσομοίωσης. Ουσιαστικά, ένα μοντέλο προσομοίωσης είναι κάποιας μορφής πρόγραμμα Η/Υ που προσομοιώνει το υπό μελέτη σύστημα. Σε κάθε περίπτωση, τα μοντέλα προσομοίωσης απεικονίζουν πραγματικά συστήματα με

αφαιρετικό ή απλοποιητικό τρόπο για να μειώσουν το κόστος της ανάλυσης (σε χρήματα και χρόνο) αλλά και για να επικεντρώσουν την προσοχή της μελέτης σε κρίσιμα μεγέθη του συστήματος.

Η διαδικασία της μοντελοποίησης για την προσομοίωση περιλαμβάνει τέσσερα βασικά στάδια. Αρχικά, καθορίζεται το εύρος του συστήματος (όρια) και στη συνέχεια δημιουργείται ένα περιγραφικό ή εννοιολογικό μοντέλο. Ακόμη, αναλύονται οι αλληλεπιδράσεις και οι συσχετίσεις των οντοτήτων του συστήματος. Η έκφραση των συσχετίσεων μπορεί να γίνει μέσω μαθηματικών σχέσεων, περιορισμών και επιδιώξεων (βελτιστοποίηση), ή με στοχαστικά δεδομένα από πιθανοτικές κατανομές. Έτσι, δημιουργείται το τυπικό μοντέλο προσομοίωσης. Στο επόμενο στάδιο προσδιορίζεται ο αλγόριθμος της προσομοίωσης που θα μπορέσει να περιγράψει τη συμπεριφορά του συστήματος και ενσωματώνεται σε κάποιο πρόγραμμα Η/Υ. Το τέταρτο στάδιο της μοντελοποίησης αφορά στην περιγραφή του στοχαστικού (κατά πάσα πιθανότητα) μοντέλου μέσω κατάλληλων στατιστικών μεγεθών. Η σωστή και μαθηματικά ορθή δημιουργία του στατιστικού μοντέλου καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τόσο την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων όσο και την αξία της προσομοίωσης συνολικά. Τέλος, για κάθε μοντέλο εφαρμόζεται μία διαδικασία επαλήθευσης και επικύρωσης που εξασφαλίζει αφενός ότι το υπολογιστικό μοντέλο αποτελεί ορθή αναπαράσταση του τυπικού μοντέλου που δημιουργήθηκε και αφετέρου ότι το μοντέλο στο σύνολό του απεικονίζει την πραγματική συμπεριφορά του συστήματος που μελετάται.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.1: Κατηγορίες μοντέλων προσωμοίωσης

1. **Στατικά:** Τα στατικά μοντέλα προσομοίωσης χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση συστημάτων η κατάσταση των οποίων είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο.
2. **Δυναμικά:** Τα δυναμικά μοντέλα προσομοίωσης περιγράφουν συστήματα που μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου.
3. **Προσδιορισμένα:** Τα μοντέλα προσομοίωσης που δεν εμπεριέχουν τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται προσδιορισμένα. Αυτά τα μοντέλα έχουν ένα γνωστό σύνολο δεδομένων ως είσοδο και σαν αποτέλεσμα παράγουν ένα μοναδικό σύνολο εξόδων.
4. **Στοχαστικά:** Μερικά συστήματα εμπεριέχουν τουλάχιστον μία τυχαία μεταβλητή και γι' αυτό μοντελοποιούνται με στοχαστικά μοντέλα προσομοίωσης. Τα στοχαστικά μοντέλα προσομοίωσης παράγουν εξόδους που είναι τυχαίες και γι' αυτό τα αποτελέσματα που προκύπτουν πρέπει να αντιμετωπιστούν ως προσεγγίσεις του υπό μελέτη συστήματος και όχι σαν μία ακριβής αναπαράσταση της συμπεριφοράς του.
5. **Συνεχή:** Τα συνεχή μοντέλα προσομοίωσης ορίζονται όπως και τα συνεχή συστήματα. Αναφέρονται σε μοντέλα που η κατάστασή τους μεταβάλλεται με το χρόνο.

Συνήθως αυτά τα μοντέλα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν τους ρυθμούς μεταβολής των μεταβλητών του μοντέλου.

6. **Διακριτά:** Όπως και τα διακριτά συστήματα έτσι και τα διακριτά μοντέλα προσομοίωσης περιγράφουν ένα σύστημα που εξελίσσεται με το χρόνο και η κατάσταση του αλλάζει σε συγκεκριμένα συμβάντα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Παρουσίαση σχετικών παραδειγμάτων μοντελοποίησης

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Μία σπουδάστρια θέλει να στείλει, από το μέρος που σπουδάζει, 12 τουλάχιστον κάρτες σε φίλους και συγγενείς. Οι ασπρόμαυρες κάρτες κοστίζουν 1 € και οι έγχρωμες 2 € η μία, αλλά η σπουδάστρια δεν διαθέτει πάνω από 16 €. Πόσες κάρτες από κάθε είδος μπορεί να αγοράσει;

### ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ:

#### 1. Μεταβλητές

Οι μεταβλητές θα είναι οι ζητούμενες ποσότητες:

α) ο αριθμός των ασπρόμαυρων καρτών που θα αγοραστούν,  $X$ .

β) ο αριθμός των έγχρωμων που θα αγοραστούν,  $Y$ .

#### 2. Παράμετροι

Οι παράμετροι του προβλήματος είναι οι:

- α) 1 € η τιμή κάθε κάρτας Χ (ασπρόμαυρης),
- β) 2 € η τιμή κάθε κάρτας Υ (έγχρωμης),
- γ) 16 € τα χρήματα που διαθέτει η σπουδάστρια, και,
- δ) το να αγοραστούν 12 κάρτες τουλάχιστον.ο αριθμός των έγχρωμων καρτών που θα αγοραστούν,Υ.

### 3. Περιορισμοί

α) 'Τουλάχιστον 12 κάρτες' σημαίνει ότι το σύνολο ασπρόμαυρων (Χ) και έγχρωμων (Υ) καρτών θα είναι 12 ή μεγαλύτερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται:  $X + Y \geq 12$ .

β) 'Όχι πάνω από 16 €' σημαίνει ότι το συνολικό κόστος ασπρόμαυρων ( $X \cdot 1$  €) και έγχρωμων ( $Y \cdot 2$  €) καρτών θα είναι 16 € ή μικρότερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται:  $X + 2 \cdot Y \leq 16$ .

γ) Οι ποσότητες των καρτών είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή είναι:  $X \geq 0$ , και,  $Y \geq 0$ .

### 4. Αντικειμενικός στόχος (ΑΣ)

Στο πρόβλημα δεν έχει δοθεί κάποιος αντικειμενικός στόχος ώστε να βρεθεί η βέλτιστη λύση που θα τον ικανοποιεί. Το πρόβλημα ζητά τους εφικτούς συνδυασμούς καρτών που μπορούν να αγοραστούν. Έχοντας βέβαια το σύνολο των δυνατών λύσεων, μπορούμε μετά να διαλέξουμε εκείνη που μας εξυπηρετεί καλύτερα (π.χ. να είναι όσο πιο πολλές οι έγχρωμες κάρτες, ή, να είναι όσο πιο πολλές συνολικά οι κάρτες, κλπ.).

**ΜΟΝΤΕΛΟ:**

Υπό τους περιορισμούς (ΥΤΠ):

$$X + Y \geq 12$$

$$X + 2 \cdot Y \leq 16$$

$$X \geq 0, \text{ και } Y \geq 0.$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

Ένας μηχανικός πρόκειται να φέρει από το εξωτερικό τόνους και τρυπάνια. Οι συσκευές έρχονται λυμένες και ο μηχανικός θα τις συναρμολογήσει και θα τις μεταπωλήσει. Συνολικά μπορεί να αποθηκεύσει μέχρι 50 συσκευές. Κάθε τόνος κοστίζει 40 € και κάθε τρυπάνι 20 €. Ο μηχανικός μπορεί να διαθέσει μέχρι 1400 € για την αγορά τους. Υπολογίζει να κερδίσει 60 € από κάθε τόννο και 40 € από κάθε τρυπάνι. Με αυτές τις συνθήκες πόσους τόνους και τρυπάνια πρέπει να αγοράσει για να κερδίσει περισσότερα;

## ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ:

### 1. Μεταβλητές

Οι μεταβλητές θα είναι πάλι οι ζητούμενες ποσότητες:

- α) ο αριθμός των τόννων που θα αγοραστούν, έστω  $X$ .
- β) ο αριθμός των τρυπανιών που θα αγοραστούν, έστω  $Y$ .

### 2. Παράμετροι

Οι παράμετροι του προβλήματος είναι οι:

- α) 40 € η τιμή και 60 € το κέρδος κάθε συσκευής  $X$  (τόννος),
- β) 20 € η τιμή και 40 € το κέρδος κάθε συσκευής  $Y$  (τρυπάνι),
- γ) 1400 € τα χρήματα που διαθέτει ο μηχανικός, και,
- δ) ότι η αποθήκη χωρά 50 συσκευές.

### 3. Περιορισμοί

- α) 'μέχρι 50 συσκευές' σημαίνει ότι το σύνολο τόννων ( $X$ )

και τρυπανιών (Y) θα είναι 50 ή μικρότερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται:  $X + Y \leq 50$ .

β) 'Όχι πάνω από 1400 €' σημαίνει ότι το συνολικό κόστος τόνων ( $X \cdot 40$  €) και τρυπανιών ( $Y \cdot 20$  €) θα είναι 1400 € ή μικρότερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται:  $40 \cdot X + 20 \cdot Y \leq 1400$ , ή,  $2 \cdot X + Y \leq 70$ .

γ) Οι ποσότητες των συσκευών είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή είναι:  $X \geq 0$ , και,  $Y \geq 0$ .

#### 4. Αντικειμενικός στόχος

'Για να κερδίσει περισσότερα' σημαίνει ότι το συνολικό κέρδος από τη πώληση των τόνων ( $X \cdot 60$  €) και των τρυπανιών ( $Y \cdot 40$  €) θα πρέπει να γίνει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Σε μαθηματική διατύπωση γράφεται σαν:  $\max (60 \cdot X + 40 \cdot Y)$ . Η βέλτιστη λύση θα είναι η εφικτή λύση θα που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση.

**ΜΟΝΤΕΛΟ:**

Υπό τους περιορισμούς (ΥΤΠ):

$$X + Y \leq 50$$

$$2 \cdot X + Y \leq 70$$

$$X \geq 0, \text{ και, } Y \geq 0.$$

ΑΣ:

Να Μεγιστοποιηθεί το Συνολικό Κέρδος:  $60 \cdot X + 40 \cdot Y$

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

Ένας αγρότης μπορεί να χρησιμοποιήσει δυο τύπους λιπασμάτων A και B. Σε κάθε σακί ο τύπος A περιέχει 10 μονάδες Φωσφόρου, 3 Καλίου και 6 Αζώτου, ενώ, σε κάθε σακί τύπου B περιέχονται 12 μονάδες Φωσφόρου, 5 Καλίου και 7 Αζώτου. Στην έκταση που καλλιεργεί χρειάζεται: το πολύ 1200 μον. Φωσφόρου και τουλάχιστον 315 μον. Καλίου και 504 Αζώτου. Αν ο τύπος A κοστίζει 16 € το σακί και ο B 20 € το σακί,



πόσα σακιά από το κάθε είδος πρέπει να προμηθευτεί για να έχει το ελάχιστο κόστος;

ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ:

1. Μεταβλητές :

- α) αριθμός σακιών τύπου A:  $X$ ,
- β) αριθμός σακιών τύπου B:  $Y$ .

2. Παράμετροι :

- α) ο τύπος A κοστίζει 16 € και περιέχει: 10 Φω, 3 Κα, 6 Αζ,
- β) ο τύπος B κοστίζει 20 € και περιέχει: 12 Φω, 5 Κα, 7 Αζ,

3. Περιορισμοί :

Η έκταση χρειάζεται:

- α) το πολύ 1200 Φω,
- β) τουλάχιστον 315 Κα, και,
- γ) τουλάχιστον 504 Αζ.
- δ) εννοείται επίσης ότι:  $X, Y \geq 0$ .

4. Αντικειμενικός στόχος :

Το συνολικό κόστος από την αγορά των σακιών A ( $X \cdot 16$  €) και B ( $Y \cdot 20$  €) θα πρέπει να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερο (min).

5. Πίνακας :

Όταν έχουμε πολλούς περιορισμούς ή/και μεταβλητές, μας διευκολύνει να συγκεντρώσουμε σε ένα πίνακα όλα τα στοιχεία. Από τον πίνακα αυτόν προκύπτουν άμεσα οι ανισότητες του μοντέλου:

	Τύπος A	Τύπος B	Περιορισμοί
<b>Μεταβλητές (σακ)</b>	$X$	$Y$	

Φω (μον/σακ)	10	12	max 1200 (μον)
Κα (μον/σακ)	3	5	min 315 (μον)
Αζ (μον/σακ)	6	7	min 504 (μον)
<b>Κόστος (€/σακ)</b>	16	20	Ελάχιστο (min)

*Μοντέλο:*

ΥΤΠ:  $X \geq 0$  &  $Y \geq 0$

$$10X + 12Y \leq 1200$$

$$3X + 5Y \geq 315$$

$$6X + 7Y \geq 504$$

ΑΣ:  $\min ( 16X + 20Y )$ .

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) Σταύρος Κομνηνέας Ευάγγελος Χαρμανδάρης  
«Μαθηματική Μοντελοποίηση» Συντελεστές έκδοσης  
ελληνικά ακαδημαϊκά συγγράματα και βοηθήματα. Έτος  
2015.
- 2) Achenson D.J “Elementary Fluid Dynamics (Applied  
Mathematics & Computer Science) Oxford University  
press 1990
- 3) Βασίλης Κόμης Ερευνητική Ομάδα « ΤΠΕ στην  
εκπαίδευση» Τμήμα επιστημών της εκπαίδευσης και της  
αγωγής στην προσχολική ηλικία. Πανεπιστήμιο Πατρών  
2005
- 4) Π.Γ Υψηλάντης «Επιχειρησιακή Έρευνα» εκδόσεις Έλλην-  
ΐων,2007
- 5) Averill M. Law Mc Graw -Hill “Simulation Modelling and  
Analysis” Law A.M 2007.
- 6) James E Anderson Public Policymaking: An introduction  
Houghton Mifflin College 1994.
- 7) Κωνσταντίνου Δήμητρα «Στοιχειώδης μαθηματική  
μοντελοποίηση με διδακτικές προεκτάσεις» Εθνικό και  
Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών 2013
- 8) H. Stark, J. Woods, “Probability, Random Processes, and  
Estimation Theory for Engineers, (Prentice Hall, 2nd  
edition, 1994)