



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ**  
UNIVERSITY OF PATRAS

**ΣΧΟΛΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ  
ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗΣ  
ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ[ΑΝΑ] ΣΤΗ  
ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ**

**ΖΑΦΕΙΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΦΩΤΗΣ**

**ΠΕΡΔΙΚΑΡΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ**

**ΡΕΙΣΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ**

**ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΒΑΣΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ**

**ΠΑΤΡΑ 2019**

## 1. Πρόλογος

Λαμβάνοντας υπόψιν την σημερινή κατάσταση πληροφόρησης και τα διαθέσιμα μέσα που υπάρχουν για την επίλυση των προβλημάτων, μπορεί κανείς να διαπιστώσει πώς η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου ανάλυσης, ερμηνείας και επίλυσης ενός προβλήματος είναι ύψιστης σημασίας. Λόγο αυτής της σημασίας, η συγκεκριμένη εργασία θα αναλύσει τόσο τις παραπάνω έννοιες, όσο και μια συγκεκριμένη διαδικασία και μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, αυτήν της Αναμενόμενης Νομισματικής Αξίας στη λήψη αποφάσεων.

## 2. Περίληψη

Η σκέψη ενός ατόμου αρχίζει με την συνειδητοποίηση της προβληματικής κατάστασης. Κάθε πρόβλημα συνδέεται με την προβληματική κατάσταση, ωστόσο, δεν αντιμετωπίζει κάθε προβληματική κατάσταση το πρόβλημα, επειδή αυτή η πραγματικότητα εξαρτάται από το άτομο. Η λήψη αποφάσεων είναι η διαδικασία επιλογής μεταξύ εναλλακτικών λύσεων, η εφαρμογή μιας απόφασης και η χρήση των επακόλουθων αποτελεσμάτων για να διαμορφωθούν τυχόν περαιτέρω αποφάσεις που σχετίζονται με την προηγούμενη. Η λήψη αποφάσεων είναι η γνωστική διαδικασία επιλογής μιας πορείας δράσης μεταξύ των πολλαπλών εναλλακτικών επιλογών. Κάθε διαδικασία λήψης αποφάσεων παράγει μια τελική επιλογή. Η αναμενόμενη νομισματική αξία (EMV), που ορίζεται στη θεωρία αποφάσεων ως το αναμενόμενο κέρδος λόγω μιας συγκεκριμένης απόφασης.

## 3. Λέξεις Κλειδιά

Αναμενόμενη νομισματική αξία, AMV, πρόβλημα, λύση, λήψη αποφάσεων, επιχειρήσεις, έρευνα.

## Πίνακας Περιεχομένων

1. Πρόλογος.....	1
2. Περίληψη.....	2
3. Λέξεις Κλειδιά.....	2
4. Εισαγωγή .....	4
5. Κύριο Μέρος Εργασίας.....	6
a. Βιβλιογραφική Επισκόπηση .....	6
i. Η Διαδικασία της Επίλυσης Προβλημάτων.....	6
1. Εισαγωγή.....	6
2. Επιχειρησιακές Έρευνες .....	13
3. Θεωρία και Λογισμός Πιθανοτήτων.....	30
4. Γραμμικός Προγραμματισμός.....	31
5. Θεωρία Παιγνίων .....	33
ii. Η Διαδικασία της Λήψης Αποφάσεων.....	35
1. Η Λήψη Αποφάσεων .....	35
2. Συνηθισμένα Σφάλματα στην Λήψη Αποφάσεων .....	37
3. Πλαίσιο Ανάλυσης Λήψης Αποφάσεων.....	41
iii. Η Μέθοδος της Αναμενόμενης Νομισματικής Αξίας (ANA).....	49
1. Θεωρία .....	49
2. Πρακτική.....	50
b. Μέθοδος και Υλικό .....	52
c. Αποτελέσματα.....	53
Λυμένες ασκήσεις και παραδείγματα στην λήψη πολύπλοκων αποφάσεων.....	69
d. Συμπεράσματα – Συζήτηση .....	106
6. Βιβλιογραφία.....	108

## 4. Εισαγωγή

Η θεωρία αποφάσεων είναι μια θεωρία σχετικά με τις αποφάσεις. Το θέμα δεν είναι πολύ ενοποιημένο. Αντίθετα, υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι να θεωρηθούν οι αποφάσεις, και επομένως και πολλές διαφορετικές ερευνητικές παραδόσεις. Αυτό το κεφάλαιο προσπαθεί να αντικατοπτρίζει κάποια από την ποικιλομορφία του θέματος. Η έμφαση δίνεται στις μαθηματικές πτυχές της θεωρίας αποφάσεων. Η θεωρία της απόφασης επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούμε την ελευθερία μας. Στις καταστάσεις που αντιμετωπίζονται από θεωρητικούς λήψης αποφάσεων, υπάρχουν επιλογές από τις οποίες επιλέγουμε, και επιλέγουμε με μη τυχαίο τρόπο. Οι επιλογές μας, σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι δραστηριότητες που κατευθύνονται από στόχους. Ως εκ τούτου, η θεωρία αποφάσεων αφορά τη συμπεριφορά που κατευθύνεται από το στόχο με την παρουσία επιλογών. Δεν αποφασίζουμε συνεχώς. Στην ιστορία σχεδόν οποιασδήποτε δραστηριότητας, υπάρχουν περιόδους στις οποίες πραγματοποιείται το μεγαλύτερο μέρος της λήψης αποφάσεων και άλλες περιόδους κατά τις οποίες πραγματοποιείται το μεγαλύτερο μέρος της υλοποίησης. Η θεωρία της απόφασης προσπαθεί να ρίξει φως, με διάφορους τρόπους, στην προηγούμενη περίοδο. Οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων χωρίζουν τη διαδικασία λήψης αποφάσεων στα ακόλουθα πέντε βήματα:

Προσδιορισμός του προβλήματος

Λήψη των απαραίτητων πληροφοριών

Παραγωγή πιθανών λύσεων

Αξιολόγηση τέτοιων λύσεων

## Επιλογή στρατηγικής για απόδοση

Το σύνολο των παραπάνω θεμάτων είναι διαδοχικό υπό την έννοια ότι διαιρούν τις διαδικασίες λήψης αποφάσεων σε μέρη που έρχονται πάντα στην ίδια σειρά. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να επικριθεί. Κάποιο εμπειρικό υλικό υποδεικνύει ότι τα "στάδια" εκτελούνται παράλληλα παρά παράλληλα. Ένα πιο ρεαλιστικό πρότυπο θα πρέπει να επιτρέπει στα διάφορα μέρη της διαδικασίας λήψης αποφάσεων να έρχονται σε διαφορετική σειρά με διαφορετικές αποφάσεις.

## 5. Κύριο Μέρος Εργασίας

### a. Βιβλιογραφική Επισκόπηση

#### i. Η Διαδικασία της Επίλυσης Προβλημάτων

##### 1. Εισαγωγή

Η σκέψη ενός ατόμου αρχίζει με την συνειδητοποίηση της προβληματικής κατάστασης. Σε αυτή την περίπτωση, η προβληματική κατάσταση μπορεί να εξελιχθεί σε ένα πρόβλημα που αξίζει μια λύση. Κάθε πρόβλημα συνδέεται με την προβληματική κατάσταση, ωστόσο, δεν αντιμετωπίζει κάθε προβληματική κατάσταση το πρόβλημα, επειδή αυτή η πραγματικότητα εξαρτάται από το άτομο. Ένα άτομο, το οποίο βρίσκεται σε προβληματική κατάσταση και γνωρίζει την ύπαρξή του, δεν χρειάζεται να "δει" το πρόβλημα μέχρι να αναπτυχθεί η ικανότητα επίγνωσης του προβλήματος. Το άτομο, το οποίο γνωρίζει το πρόβλημα, είναι σε θέση να προσδιορίσει τη δυσκολία ή την πηγή της σύγκρουσης που προκαλεί τη προβληματική κατάσταση, είναι σε θέση να αντιμετωπίσει το πρόβλημα. Σε αντίθεση με αυτό, το άτομο που δεν είναι σε θέση να γνωρίζει το πρόβλημα, αν και βιώνει το συναίσθημα που επιτίθεται με περιέργεια, ωστόσο, δεν αντιλαμβάνεται τι προκαλεί τη δυσκολία, ποιο εμπόδιο που προκαλεί τη σύγκρουση πρέπει να απομακρυνθεί και, ως εκ τούτου, δεν είναι σε θέση να το αφαιρέσει. Πολλοί παράγοντες επηρεάζουν την επίγνωση του προβλήματος και αυτοί μπορούν να εμφανιστούν μέσα στην προβληματική κατάσταση, π.χ. ,οι ακατάλληλες προφορικές δηλώσεις που πρέπει να προκαλέσουν την κατάσταση ή την έλλειψη γνώσης. Μπορούν επίσης να εμφανιστούν εκτός της προβληματικής κατάστασης, δηλ. θόρυβο, ακατάλληλο φωτισμό ή όραση. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, μπορούμε

να αναφέρουμε και την αποκαλούμενη αντιληπτότητα του προβλήματος. Το κατώφλι της αντιληπτικότητας είναι διαφορετικό μεταξύ των ατόμων, το οποίο είναι κυρίως εμφανές όταν περισσότεροι άνθρωποι βρίσκονται σε προβληματικές καταστάσεις με τις ίδιες παραμέτρους. Οι εξωτερικές συνθήκες του ατόμου είναι οι ίδιες, οι συνθήκες που συνδέονται άμεσα με το άτομο είναι διαφορετικές. Αν το άτομο αντιληφθεί το πρόβλημα, η προθυμία αντιμετώπισης του προβλήματος είναι πολύ σημαντική. Αυτή είναι μια κατάσταση κατά την οποία το άτομο προσεγγίζει την αξιολόγηση των συνθηκών του προβλήματος και του χαρακτήρα της προβληματικής κατάστασης. Εκτιμά τις ιδιαίτερες συνθήκες και τους αποδίδει ιδιαίτερη σημασία. Μια από τις απόψεις είναι ότι δεν είναι διατεθειμένη να αντιμετωπίσει το πρόβλημα στην παρούσα κατάσταση ή να προχωρήσει στη λύση του. Αυτό είναι πολύ σημαντικό στον εκπαιδευτικό τομέα, επειδή τα προβλήματα που δίδονται στους μαθητές πρέπει να είναι εκείνα που οι μαθητές δέχονται με πρόθυμο τρόπο και αν όχι, οι μαθητές θα πρέπει να παρακινηθούν. Η απροθυμία αντιμετώπισης του προβλήματος θα είναι προφανής κυρίως στις καταστάσεις που επιτρέπουν μια διαφυγή επειδή το αίσθημα δυσκολιών δεν είναι ευχάριστο για κάθε άτομο(Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015).

Εάν το άτομο είναι πρόθυμο να αντιμετωπίσει το πρόβλημα, αυτό δεν σημαίνει ότι θα είναι πρόθυμος να το λύσει. Αν αυτός / αυτή π.χ. δεν έχει τα αρχικά δεδομένα για να βρει τρόπους για να ξεπεράσει τα εμπόδια και δεν υπάρχουν προφανείς δυνατότητες για την απόκτηση των δεδομένων, τότε η κατάσταση δεν γίνεται αποδεκτή από αυτόν, επομένως δεν θα αντικατοπτρίζεται στη σκέψη του / της. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει καμία σχέση με την προσπάθεια επίλυσης του γνώσης. Μπορούν επίσης να εμφανιστούν εκτός της προβληματικής κατάστασης, δηλ. θόρυβο, ακατάλληλο φωτισμό ή όραση. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, μπορούμε



να αναφέρουμε και την αποκαλούμενη αντιληπτότητα του προβλήματος. Το κατώφλι της αντιληπτικότητας είναι διαφορετικό μεταξύ των ατόμων, το οποίο είναι κυρίως εμφανές όταν περισσότεροι άνθρωποι βρίσκονται σε προβληματικές καταστάσεις με τις ίδιες παραμέτρους. Οι εξωτερικές συνθήκες του ατόμου είναι οι ίδιες, οι συνθήκες που συνδέονται άμεσα με το άτομο είναι διαφορετικές. Αν το άτομο αντιληφθεί το πρόβλημα, η προθυμία αντιμετώπισης του προβλήματος είναι πολύ σημαντική. Αυτή είναι μια κατάσταση κατά την οποία το άτομο προσεγγίζει την αξιολόγηση των συνθηκών του προβλήματος και του χαρακτήρα της προβληματικής κατάστασης. Εκτιμά τις ιδιαίτερες συνθήκες και τους αποδίδει ιδιαίτερη σημασία. Μια από τις απόψεις είναι ότι δεν είναι διατεθειμένη να αντιμετωπίσει το πρόβλημα στην παρούσα κατάσταση ή να προχωρήσει στη λύση του. Αυτό είναι πολύ σημαντικό στον εκπαιδευτικό τομέα, επειδή τα προβλήματα που δίδονται στους μαθητές πρέπει να είναι εκείνα που οι μαθητές δέχονται με πρόθυμο τρόπο και αν όχι, οι μαθητές θα πρέπει να παρακινηθούν. Η απροθυμία αντιμετώπισης του προβλήματος θα είναι προφανής κυρίως στις καταστάσεις που επιτρέπουν μια διαφυγή επειδή το αίσθημα δυσκολιών δεν είναι ευχάριστο για κάθε άτομο(Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015).

Εάν το άτομο είναι πρόθυμο να αντιμετωπίσει το πρόβλημα, αυτό δεν σημαίνει ότι θα είναι πρόθυμος να το λύσει. Αν αυτός / αυτή π.χ. δεν έχει τα αρχικά δεδομένα για να βρει τρόπους για να ξεπεράσει τα εμπόδια και δεν υπάρχουν προφανείς δυνατότητες για την απόκτηση των δεδομένων, τότε η κατάσταση δεν γίνεται αποδεκτή από αυτόν, επομένως δεν θα αντικατοπτρίζεται στη σκέψη του / της. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει καμία σχέση με την προσπάθεια επίλυσης του γνώσης. Μπορούν επίσης να εμφανιστούν εκτός της προβληματικής κατάστασης, δηλ. θόρυβο, ακατάλληλο φωτισμό ή όραση. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, μπορούμε

να αναφέρουμε και την αποκαλούμενη αντιληπτότητα του προβλήματος. Το κατώφλι της αντιληπτικότητας είναι διαφορετικό μεταξύ των ατόμων, το οποίο είναι κυρίως εμφανές όταν περισσότεροι άνθρωποι βρίσκονται σε προβληματικές καταστάσεις με τις ίδιες παραμέτρους. Οι εξωτερικές συνθήκες του ατόμου είναι οι ίδιες, οι συνθήκες που συνδέονται άμεσα με το άτομο είναι διαφορετικές. Αν το άτομο αντιληφθεί το πρόβλημα, η προθυμία αντιμετώπισης του προβλήματος είναι πολύ σημαντική. Αυτή είναι μια κατάσταση κατά την οποία το άτομο προσεγγίζει την αξιολόγηση των συνθηκών του προβλήματος και του χαρακτήρα της προβληματικής κατάστασης. Εκτιμά τις ιδιαίτερες συνθήκες και τους αποδίδει ιδιαίτερη σημασία. Μια από τις απόψεις είναι ότι δεν είναι διατεθειμένη να αντιμετωπίσει το πρόβλημα στην παρούσα κατάσταση ή να προχωρήσει στη λύση του. Αυτό είναι πολύ σημαντικό στον εκπαιδευτικό τομέα, επειδή τα προβλήματα που δίδονται στους μαθητές πρέπει να είναι εκείνα που οι μαθητές δέχονται με πρόθυμο τρόπο και αν όχι, οι μαθητές θα πρέπει να παρακινηθούν. Η απροθυμία αντιμετώπισης του προβλήματος θα είναι προφανής κυρίως στις καταστάσεις που επιτρέπουν μια διαφυγή επειδή το αίσθημα δυσκολιών δεν είναι ευχάριστο για κάθε άτομο(Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015).

Εάν το άτομο είναι πρόθυμο να αντιμετωπίσει το πρόβλημα, αυτό δεν σημαίνει ότι θα είναι πρόθυμος να το λύσει. Αν αυτός / αυτή π.χ. δεν έχει τα αρχικά δεδομένα για να βρει τρόπους για να ξεπεράσει τα εμπόδια και δεν υπάρχουν προφανείς δυνατότητες για την απόκτηση των δεδομένων, τότε η κατάσταση δεν γίνεται αποδεκτή από αυτόν, επομένως δεν θα αντικατοπτρίζεται στη σκέψη του / της. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει καμία σχέση με την προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος που θα εμφανιστεί. Η προθυμία για επίλυση του προβλήματος, όπως και η προθυμία αντιμετώπισης του προβλήματος, δεν μπορεί να αναληφθεί

αυτομάτως, γι 'αυτό είναι επιθυμητό να το παρακινήσουμε με τη βοήθεια των κατάλληλων πόρων και τρόπων και να παρακινήσουμε το άτομο. Ο R. E. Mayer δηλώνει ότι η προθυμία επηρεάζεται από παρακινητικούς και συναισθηματικούς παράγοντες όπως το ενδιαφέρον, η αυτοπεποίθηση και η αντίληψη των δικών του ικανοτήτων (1998). Στο κίνητρο του ατόμου μπορεί να εμφανιστούν ενδιαφέροντα, συνήθειες, ιδανικά ή εξωτερικά ερεθίσματα, και άλλα, ανάλογα με τη φύση του προβλήματος. Η προθυμία για επίλυση του προβλήματος επηρεάζει αρνητικά τρεις παράγοντες που δεν μπορούν να παραμεληθούν. Ο M. Nakonecny δηλώνει ότι για την προθυμία του ατόμου να λύσει το πρόβλημα και να το αντιμετωπίσει είναι απαραίτητη η πιθανότητα να επιτύχει το στόχο του. Η αξία του στόχου, που πρέπει να επιτευχθεί με την επίλυση ή οι προσδοκίες του υποκειμένου για πιθανές συνέπειες, παίζουν επίσης σημαντικό ρόλο (Singer, Ellerton & Cai, 2013).

Μόνο δύο τρόποι να ενθουσιαστούν από τα κίνητρα για την επίλυση του προβλήματος έχουν νόημα στον εκπαιδευτικό τομέα. Η πρώτη περίπτωση είναι να δημιουργηθεί μια κατάσταση που να διεγείρει τον μαθητή, να τον ενεργοποιεί και, συνεπώς, να προκαλεί μια κατάσταση στην οποία ο μαθητής βιώνει την ώθηση ή την αναγκαστική εκδήλωση ενδιαφέροντος για το πρόβλημα και τη λύση του. Ο δάσκαλος πρέπει να οδηγήσει τον μαθητή στην εμπειρία της θέλησης να είναι ενεργός. Το ενδιαφέρον για την επίλυση του προβλήματος πρέπει να προκληθεί, γεγονός που καθιστά δυνατή την ικανοποίηση της ανάγκης που προκύπτει από την άγνωστη γνώση, μπορούμε να μιλάμε για τη λεγόμενη γνωστική ανάγκη. Ο M. Nakonecny δηλώνει ότι η κατάσταση χαρακτηρίζεται από μια ιδιαίτερη ένταση και κίνητρο και γι 'αυτό είναι σημαντικό να κατανοηθεί το πρόβλημα και να γίνει αντιληπτό το εμπόδιο που εμποδίζει την επίτευξη του στόχου. Ένα πρόβλημα περιέχει πάντα μια σύγκρουση ή μια δυσκολία, η οποία πρέπει να ξεπεραστεί κατά

τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης. Ωστόσο, το εμπόδιο πρέπει να είναι ευδιάκριτο για το άτομο, έτσι ώστε η σύγκρουση ή μια δυσκολία να είναι επιρρεπή. Η αναφερθείσα κατάσταση μπορεί να χαρακτηριστεί ως έλλειψη ισορροπίας και το άτομο κίνητρο να το ισορροπήσει που οδηγεί στην ικανοποίησή του / της. Η ανάγκη ικανοποιείται από την επίλυση του προβλήματος και την απόκτηση των απαραίτητων γνώσεων. Ο δεύτερος τρόπος είναι η εφαρμογή εξωτερικών ερεθισμάτων που προκαλούν εσωτερικά κίνητρα και που αποτελούν πόρους για την ικανοποίηση των εσωτερικών αναγκών του ατόμου. Αντί της επιθυμίας να λυθεί το πρόβλημα και η ικανοποίηση των αναγκών σε σχέση με τη λύση του, ο ιδιώτης κατευθύνεται προς την αποτελεσματική λύση του προβλήματος. Ο σκοπός παραμένει σε αυτήν την περίπτωση έξω από το ίδιο το πρόβλημα, επειδή το πρόβλημα παίζει μόνο ένα ρόλο εμπιστευτικό. Ο μαθητής λύνει το πρόβλημα για να επιτύχει το στόχο και η επίλυση του προβλήματος γίνεται μόνο ένας πόρος. Αυτό είναι από πλευράς εκπαιδευτικών αποτελεσμάτων όχι τόσο ευεργετικό όσο όταν εμφανίζεται το ενδιαφέρον για το ίδιο το πρόβλημα. Είναι χαρακτηριστικό για το σχολικό περιβάλλον να εφαρμόζει τα ερεθίσματα που δεν είναι φυσικά, π.χ. ο μαθητής δεν συναντά βαθμούς στην κανονική ζωή (Hamel, 2018).

Η επίλυση του προβλήματος μπορεί να είναι, σύμφωνα με τον R.E. Mayer (1990), καθορισμένη ως περίληψη των γνωστικών διαδικασιών που επικεντρώνονται στην αλλαγή της δεδομένης κατάστασης στην τελική κατάσταση όπου η διαδικασία λύσης δεν είναι προφανής. Τα δεδομένα χαρακτηριστικά είναι μεταξύ των εμπειρογνομώνων της επίλυσης προβλημάτων που συνήθως γίνονται δεκτές. Η επίλυση του προβλήματος και η αιτία του καθορίζονται στο έργο του Funke (2010), ο οποίος δήλωσε ότι η αρχική γνώση του προβλήματος είναι οι συνθήκες (η δεδομένη κατάσταση). Οι λειτουργίες είναι αποδεκτές δραστηριότητες που μπορούν

να εκτελεστούν για να επιτευχθεί η απαιτούμενη τελική κατάσταση (αποτέλεσμα) με τη βοήθεια των διαθέσιμων οργάνων. Στο δρόμο προς τον στόχο υπάρχουν εμπόδια που πρέπει να ξεπεραστούν (π.χ. έλλειψη γνώσης ή άμεσα προφανείς στρατηγικές)(Leung & Bolite-Frant, 2015).

Η ψυχολογία της μάθησης Gestalt πιστεύει ότι όλη η μάθηση βασίζεται σε πληροφορίες. Αυτή η ψυχολογία εμφανίστηκε ως απάντηση στην συμπεριφοριστική συμπεριφορά, η οποία ισχυρίστηκε ότι όλη η εκμάθηση ήταν μια απάντηση σε εξωτερικά ερεθίσματα. Οι ψυχολόγοι Gestalt, από την άλλη πλευρά, πίστευαν ότι υπήρχε μια γνωστική διαδικασία που εμπλέκεται και στη μάθηση. Όσον αφορά την επίλυση προβλημάτων, η σχολή Gestalt είναι σταθερή στην πεποίθηση ότι η επίλυση προβλημάτων, όπως η μάθηση, είναι προϊόν γνώσεις και ως εκ τούτου δεν μπορεί να διδαχθεί. Στην πραγματικότητα, η θεωρία είναι ότι όχι μόνο δεν μπορεί να διδαχθεί το πρόβλημα επίλυσης, αλλά και ότι η προσπάθεια προσχώρησης σε οποιοδήποτε είδος ευρετικού θα εμποδίσει την επεξεργασία μιας σωστής λύσης. Έτσι, δεν υπάρχει πρόβλημα Gestalt που να επιλύει ευρετική. Αντ' αυτού, η πρακτική είναι να επικεντρωθεί περισσότερο στο πρόβλημα και στη λύση και όχι στη διαδικασία εξεύρεσης λύσης. Τα προβλήματα επιλύονται μετατρέποντάς τα ξανά και ξανά στο μυαλό μέχρι να παρουσιαστεί μια διορατικότητα, μια βιώσιμη οδός επίθεσης. Ταυτόχρονα, όμως, υπάρχει μεγάλη εξάρτηση από προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες του παρελθόντος. Επομένως, η μέθοδος επίλυσης προβλημάτων Gestalt είναι ταυτόχρονα πολύ διαφορετική και πολύ παρόμοια με τη διαδικασία σχεδιασμού(Singer, Ellerton & Cai, 2013). Η ψυχολογία Gestalt δεν τα κατάφερε καλά κατά τη διάρκεια της εξέλιξης της γνωσιακής ψυχολογίας. Αν και τιμά το έργο του ασυνείδητου μυαλού, το κάνει σε βάρος της πρακτικότητας. Εάν η μάθηση βασίζεται εξ ολοκλήρου σε διορατικότητα τότε δεν έχει νόημα να

συνεχίσουμε να μελετάμε τη μάθηση. «Όταν ξεκινά κανείς, υποθέτοντας ότι τα πιο σημαντικά γνωστικά φαινόμενα είναι απρόσιτα, δεν υπάρχει τίποτα να μιλήσουμε». Εντούτοις, είναι ενδιαφέρον ο ισχυρισμός των ψυχολόγων της Gestalt ότι η εστίαση σε μεθόδους επίλυσης προβλημάτων δημιουργεί λειτουργική σταθερότητα. Masonet αϊ. (1982), καθώς και ο Perkins (2000) ασχολούνται με αυτό στο έργο τους για να ξεκολλήσουν.

## 2. Επιχειρησιακές Έρευνες

Η προέλευση της λέξης ευρετικός χρονολογείται από την εποχή του Αρχιμήδη και λέγεται ότι έχει βγει από μια από τις περίφημες ιστορίες που αναφέρθηκαν για αυτόν τον σπουδαίο μαθηματικό και εφευρέτη. Ο βασιλιάς των Συρακουσών ρώτησε τον Αρχιμήδη να ελέγξει εάν το νέο στεφάνι του ήταν πραγματικά κατασκευασμένο από καθαρό χρυσό. Ο Αρχιμήδης αγωνίστηκε με αυτό το καθήκον και δεν βγήκε μέχρι τη στιγμή που βρισκόταν στο λουτρό. Όταν εισήλθε στη μπανιέρα παρατήρησε ότι είχε εκτοπίσει μια ορισμένη ποσότητα νερού. Όμορφος όπως ήταν, μετέφερε αυτή τη διορατικότητα στο ζήτημα με το στεφάνι και ήξερε ότι είχε λύσει το πρόβλημα. Σύμφωνα με το μύθο, πήδηξε έξω από την μπανιέρα και έτρεξε από το λουτρό γυμνός ουρλιάζοντας, "Eureka, eureka!". Το Eureka και η ευρετική έχουν την ίδια ρίζα στην αρχαία ελληνική γλώσσα και έτσι έχει υποστηριχθεί ότι έτσι δόθηκε το όνομα του ακαδημαϊκού πειθαρχικού πεδίου των «ευρετικών» που ασχολείται με αποτελεσματικές προσεγγίσεις στην επίλυση προβλημάτων (λεγόμενος heuristics). Ο Pólya (1964) περιγράφει αυτόν τον κλάδο ως εξής (Moreno-Armella & Santos-Trigo, 2016): Η θεωρία ασχολείται με την επίλυση καθηκόντων. Οι συγκεκριμένοι στόχοι της περιλαμβάνουν τον γενικό

προσδιορισμό των λόγων επιλογής αυτών των στιγμών σε ένα πρόβλημα, η εξέταση του οποίου θα μπορούσε να μας βοηθήσει να βρούμε μια λύση(Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015).

Αυτή η πειθαρχία έχει αυξηθεί, εν μέρει, από την πιο λεπτομερή εξέταση των προσεγγίσεων σε ορισμένα προβλήματα και τη σύγκρισή τους μεταξύ τους, προκειμένου να αφηρηθούν οι ομοιότητες στην προσέγγιση ή οι αποκαλούμενοι heuristics. Οι Pólya (1949), αλλά επίσης, μεταξύ άλλων, οι Engel (1998), König (1984) και Sewerin (1979) έχουν διατυπώσει τέτοιες εμπειρίες για μαθηματικά προβλήματα. Τα προβληματικά καθήκοντα που εξετάστηκαν από τους αναφερόμενους συγγραφείς εντοπίζονται κυρίως στον τομέα των προγραμμάτων ταλέντων, δηλαδή πηγαίνουν συχνά σε διαγωνισμούς μαθηματικών(Liljedahl & Allan, 2014).

Το 1983, ο Zimmermann παρείχε μια επισκόπηση των ευρετικών προσεγγίσεων και εργαλείων στην αμερικανική λογοτεχνία, η οποία προσέφερε επίσης προτάσεις για μαθήματα μαθηματικών. Στις γερμανόφωνες χώρες, έχει καθιερωθεί μια προσέγγιση που επιστρέφει στο Sewerin (1979) και στο König (1984), το οποίο διαιρεί τις σχετικές με το σχολείο ευρετικές διαδικασίες σε ευρετικά εργαλεία, στρατηγικές και αρχές (Leung & Bolite-Frant, 2015).

Τον 20ο αιώνα, σημειώθηκε πρόοδος στην έρευνα σχετικά με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και ευρήματα σχετικά με τις δυνατότητες προώθησης της επίλυσης προβλημάτων με διάφορες προτεραιότητες. Με βάση το μοντέλο Pólya (1949), σε μια πρώτη φάση έρευνας για την επίλυση προβλημάτων, ιδιαίτερα στη δεκαετία του 1960 και τη δεκαετία του '70, μια σειρά μελετών για τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων δίνει έμφαση στη σημασία των ευρετικών

στρατηγικών (heuristics) επιλύθηκε. Θεωρήθηκε ότι οι διδακτικές και μαθησιακές ευρετικές στρατηγικές, αρχές και εργαλεία θα προσέφεραν στους μαθητές προσανατολισμό σε προβληματικές καταστάσεις και ότι έτσι θα μπορούσαν να βελτιωθούν οι ικανότητες των φοιτητών για επίλυση προβλημάτων. Αυτή η προσέγγιση, η οποία ερευνήθηκε κυρίως στο πλαίσιο προγραμμάτων ταλέντων για την επίλυση προβλημάτων, ήταν μάλλον επιτυχημένη (για παράδειγμα, Sewerin 1979). Στη δεκαετία του 1980, οι αιτήσεις για ευκαιρίες προώθησης στην καθημερινή διδασκαλία δόθηκαν όλο και περισσότερο υπόψη: «η επίλυση προβλημάτων πρέπει να είναι το επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών στη δεκαετία του 1980». Για τη διδασκαλία και την εκμάθηση της επίλυσης προβλημάτων στις τάξεις των κανονικών μαθηματικών, η σημερινή άποψη σύμφωνα με την οποία οι γνωστικές, ευρετικές πτυχές ήταν πρωταρχικές, επεκτάθηκε από συγκεκριμένες πτυχές που αφορούν συγκεκριμένους μαθητές, όπως στάσεις, συναισθήματα και αυτορυθμιζόμενη συμπεριφορά (βλ. Kretschmer 1983; Schoenfeld 1985, 1987, 1992). Ο Kilpatrick (1985) διαιρεί τις προωθητικές προσεγγίσεις που περιγράφονται στη βιβλιογραφία σε πέντε μεθόδους οι οποίες μπορούν επίσης να συνδυαστούν μεταξύ τους (Hamel, 2018).

Όσμωση: προσανατολισμένη στη δράση και έμμεση διάδοση τεχνικών επίλυσης προβλημάτων σε ένα ευεργετικό μαθησιακό περιβάλλον

Απομνημόνευση: δημιουργία ειδικών τεχνικών για συγκεκριμένους τύπους προβλημάτων και των σχετικών ερωτήσεων κατά την επίλυση προβλημάτων

Απομίμηση: απόκτηση ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων μέσω απομίμησης εμπειρογνώμονα



Συνεργασία: συνεργατική μάθηση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων σε μικρές ομάδες

Αντανάκλαση: οι ικανότητες επίλυσης προβλημάτων αποκτώνται με τρόπο προσανατολισμένο στη δράση και με προβληματισμό σχετικά με τις προσεγγίσεις για την επίλυση προβλημάτων.

Ο Kilpatrick (1985) θεωρεί την επιτυχία όταν εξηγούνται οι ευρετικές προσεγγίσεις στους μαθητές, διευκρινίζονται μέσω παραδειγμάτων και εκπαιδεύονται μέσω της παρουσίασης προβλημάτων. Η ανάγκη να γνωρίσουν οι μαθητές τις ευρετικές προσεγγίσεις είναι πλέον ευρέως αποδεκτή στις διδακτικές συζητήσεις. Οι διαφορές στις διαφορετικές προσεγγίσεις για την προώθηση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων μάλλον αφορούν την απόφαση σχετικά με τις στρατηγικές που επιλύουν τα προβλήματα που πρέπει να δοθούν στους μαθητές και με ποιον τρόπο και όχι με το εάν πρέπει να μεταφερθούν ή όχι.

Η θεωρία της δραστηριότητας, ιδιαίτερα στην πρόοδό της από τον Lompscher (1975, 1985), προσφέρει ένα καλά προσαρμοσμένο και διαχειρίσιμο μοντέλο για να περιγράψει τις μαθησιακές δραστηριότητες και τις διαφορές μεταξύ των μαθητών σε σχέση με τις διαδικασίες και τα αποτελέσματα στην επίλυση προβλημάτων. Η ψυχική δραστηριότητα αρχίζει με στόχο και το κίνητρο ενός ατόμου να εκτελεί μια τέτοια δραστηριότητα. Ο Lompscher διαιρεί την πραγματική διανοητική δραστηριότητα σε περιεχόμενο και διαδικασία. Ενώ το περιεχόμενο της μαθηματικής επίλυσης προβλημάτων αποτελείται από ορισμένες έννοιες, συνδέσεις και διαδικασίες, η διαδικασία περιγράφει τις ψυχολογικές διεργασίες που συμβαίνουν κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Αυτή η πορεία δράσης περιγράφεται στο Lompscher από διάφορες ιδιότητες, όπως συστηματικός

προγραμματισμός, ανεξαρτησία, ακρίβεια, δραστηριότητα και ευκινησία. Μαζί με τις διαφορές στα κίνητρα και τη διαθεσιμότητα της εμπειρογνωμοσύνης, φαίνεται ότι οι διαισθητικοί επίλυση προβλημάτων διαθέτουν ιδιαίτερα υψηλή πνευματική ευελιξία, τουλάχιστον όσον αφορά ορισμένες περιοχές περιεχομένου.

Σύμφωνα με τον Lompscher, εκφράζεται η "ευελιξία της σκέψης" από την ικανότητα να αλλάζει λίγο ή πολύ εύκολα από μια πτυχή της προβολής σε μια άλλη ή να ενσωματώνει μια συνθήκη ή συνιστώσα σε διαφορετικές συσχετίσεις, να κατανοεί τη σχετικότητα των περιστάσεων και των δηλώσεων. Επιτρέπει την αναστροφή των σχέσεων, περισσότερο ή λιγότερο εύκολα ή γρήγορα προσαρμόζεται στις νέες συνθήκες της ψυχικής δραστηριότητας ή ταυτόχρονα να σκεφτόμαστε αρκετά αντικείμενα ή πτυχές μιας δεδομένης δραστηριότητας (Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015).

Αυτές οι τυπικές εκδηλώσεις της ψυχικής ευκινησίας μπορούν να επικεντρωθούν στην επίλυση προβλημάτων με μαθηματικά μέσα και μπορούν να συσχετιστούν με τους γνωστούς heuristics από τις αναλύσεις των προσεγγίσεων των Pólya et al. (βλέπε επίσης Bruder 2000):

Μείωση: Οι επιτυχείς λύσεις προβλημάτων θα μειώσουν διαισθητικά ένα πρόβλημα στα βασικά στοιχεία του με έναν λογικό τρόπο. Για να επιτύχουν μια τέτοια αφαίρεση, χρησιμοποιούν συχνά βοηθητικά μέσα απεικόνισης και δομής, όπως ενημερωτικά στοιχεία, πίνακες, γραφήματα λύσεων ή ακόμα και όρους. Αυτά τα ευρετικά εργαλεία είναι επίσης πολύ κατάλληλα για να τεκμηριώσουν εκ των υστέρων την προσέγγιση που υιοθετήθηκε από τους διαισθητικούς επίλυσης προβλημάτων κατά τρόπο κατανοητό για όλους.

Αναστρεψιμότητα: Οι επιτυχείς λύτες προβλημάτων είναι σε θέση να αναστρέψουν τα τρένα της σκέψης ή να τα αναπαράγουν αντίστροφα. Θα το κάνουν αυτό σε κατάλληλες καταστάσεις αυτόματα, για παράδειγμα, όταν ψάχνουν για ένα κλειδί που έχουν αποτύχει. Μια αντίστοιχη γενική ευρετική στρατηγική λειτουργεί αντίστροφα.

Αντιμετώπιση πτυχών: Οι επιτυχείς λύτες προβλημάτων θα απασχολούν πολλές πτυχές ενός δεδομένου προβλήματος ταυτόχρονα ή θα αναγνωρίζουν εύκολα οποιαδήποτε εξάρτηση από τα πράγματα και θα τις διαφοροποιούν με στοχοθετημένο τρόπο. Μερικές φορές, πρόκειται επίσης για την άρση των φραγμών υπέρ μιας ιδέας που φαίνεται να είναι βιώσιμη, δηλαδή, απλώς "να κρέμεται" σε μια συγκεκριμένη τροχιά σκέψης, ακόμη και ενάντια στην αντίσταση. Αντίστοιχες ερυθρίσεις είναι, για παράδειγμα, η αρχή της αμετάβλητης, η αρχή της συμμετρίας, η διάσπαση ή η συμπλήρωση γεωμετρικών αριθμών για τον υπολογισμό των επιφανειών ή ορισμένοι όροι που χρησιμοποιούνται σε διωνυμικούς τύπους(Liljedahl & Allan, 2014).

Αλλαγή πτυχών: Οι επιτυχείς λύτες προβλημάτων ενδέχεται να αλλάξουν τις υποθέσεις τους, τα κριτήρια ή τις πτυχές τους, προκειμένου να βρουν λύση. Διάφορες πτυχές ενός δεδομένου προβλήματος θα θεωρηθούν διαισθητικά ή το πρόβλημα θα εξεταστεί από μια διαφορετική οπτική γωνία, η οποία θα αποτρέψει την «κολλήσει» και θα επιτρέψει νέες ιδέες και προσεγγίσεις. Για παράδειγμα, πολλές στοιχειώδεις γεωμετρικές προτάσεις μπορούν επίσης να αποδειχθούν με έναν κομψό φορέα.Ο Kilpatrick (1985) θεωρεί την επιτυχία όταν εξηγούνται οι ευρετικές προσεγγίσεις στους μαθητές, διευκρινίζονται μέσω παραδειγμάτων και εκπαιδεύονται μέσω της παρουσίασης προβλημάτων. Η ανάγκη να γνωρίσουν οι

μαθητές τις ευρετικές προσεγγίσεις είναι πλέον ευρέως αποδεκτή στις διδακτικές συζητήσεις. Οι διαφορές στις διαφορετικές προσεγγίσεις για την προώθηση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων μάλλον αφορούν την απόφαση σχετικά με τις στρατηγικές ή τα ευρετικά που επιλύουν τα προβλήματα που πρέπει να δοθούν στους μαθητές και με ποιον τρόπο και όχι με το εάν πρέπει να μεταφερθούν ή όχι. Η θεωρία της δραστηριότητας, ιδιαίτερα στην πρόοδό της από τον Lompscher (1975, 1985), προσφέρει ένα καλά προσαρμοσμένο και διαχειρίσιμο μοντέλο για να περιγράψει τις μαθησιακές δραστηριότητες και τις διαφορές μεταξύ των μαθητών σε σχέση με τις διαδικασίες και τα αποτελέσματα στην επίλυση προβλημάτων (cf. Perels et al. Η ψυχική δραστηριότητα αρχίζει με στόχο και το κίνητρο ενός ατόμου να εκτελεί μια τέτοια δραστηριότητα. Ο Lompscher διαιρεί την πραγματική διανοητική δραστηριότητα σε περιεχόμενο και διαδικασία. Ενώ το περιεχόμενο της μαθηματικής επίλυσης προβλημάτων αποτελείται από ορισμένες έννοιες, συνδέσεις και διαδικασίες, η διαδικασία περιγράφει τις ψυχολογικές διεργασίες που συμβαίνουν κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Αυτή η πορεία δράσης περιγράφεται στο Lompscher από διάφορες ιδιότητες, όπως συστηματικός προγραμματισμός, ανεξαρτησία, ακρίβεια, δραστηριότητα και ευκινησία. Μαζί με τις διαφορές στα κίνητρα και τη διαθεσιμότητα της εμπειρογνωμοσύνης, φαίνεται ότι οι διαισθητικοί επίλυση προβλημάτων διαθέτουν ιδιαίτερα υψηλή πνευματική ευελιξία, τουλάχιστον όσον αφορά ορισμένες περιοχές περιεχομένου (Moreno-Armella & Santos-Trigo, 2016).

Σύμφωνα με τον Lompscher, εκφράζεται η "ευελιξία της σκέψης"

... από την ικανότητα να αλλάζει λίγο ή πολύ εύκολα από μια πτυχή της προβολής σε μια άλλη ή να ενσωματώνει μια συνθήκη ή συνιστώσα σε διαφορετικές

συσχετίσεις, να κατανοεί τη σχετικότητα των περιστάσεων και των δηλώσεων. Επιτρέπει την αναστροφή των σχέσεων, περισσότερο ή λιγότερο εύκολα ή γρήγορα προσαρμόζεται στις νέες συνθήκες της ψυχικής δραστηριότητας ή ταυτόχρονα να σκεφτόμαστε αρκετά αντικείμενα ή πτυχές μιας δεδομένης δραστηριότητας (Leung & Bolite-Frant, 2015).

Αυτές οι τυπικές εκδηλώσεις της ψυχικής ευκινησίας μπορούν να επικεντρωθούν στην επίλυση προβλημάτων με μαθηματικά μέσα και μπορούν να συσχετιστούν με τους γνωστούς heuristics από τις αναλύσεις των προσεγγίσεων των Pólya et al. (βλέπε επίσης Bruder 2000):

**Μείωση:** Οι επιτυχείς λύσεις προβλημάτων θα μειώσουν διαισθητικά ένα πρόβλημα στα βασικά στοιχεία του με έναν λογικό τρόπο. Για να επιτύχουν μια τέτοια αφαίρεση, χρησιμοποιούν συχνά βοηθητικά μέσα απεικόνισης και δομής, όπως ενημερωτικά στοιχεία, πίνακες, γραφήματα λύσεων ή ακόμα και όρους. Αυτά τα ευρετικά εργαλεία είναι επίσης πολύ κατάλληλα για να τεκμηριώσουν εκ των υστέρων την προσέγγιση που υιοθετήθηκε από τους διαισθητικούς επίλυσης προβλημάτων κατά τρόπο κατανοητό για όλους (Moreno-Armella & Santos-Trigo, 2016).

**Αναστρεψιμότητα:** Οι επιτυχείς λύτες προβλημάτων είναι σε θέση να αναστρέψουν τα τρένα της σκέψης ή να τα αναπαράγουν αντίστροφα. Θα το κάνουν αυτό σε κατάλληλες καταστάσεις αυτόματα, για παράδειγμα, όταν ψάχνουν για ένα κλειδί που έχουν αποτύχει. Μια αντίστοιχη γενική ευρετική στρατηγική λειτουργεί αντίστροφα.

Αντιμετώπιση πτυχών: Οι επιτυχείς λύτες προβλημάτων θα απασχολούν πολλές πτυχές ενός δεδομένου προβλήματος ταυτόχρονα ή θα αναγνωρίζουν εύκολα οποιαδήποτε εξάρτηση από τα πράγματα και θα τις διαφοροποιούν με στοχοθετημένο τρόπο. Μερικές φορές, πρόκειται επίσης για την άρση των φραγμών υπέρ μιας ιδέας που φαίνεται να είναι βιώσιμη, δηλαδή, απλώς "να κρέμεται" σε μια συγκεκριμένη τροχιά σκέψης, ακόμη και ενάντια στην αντίσταση. Αντίστοιχες ερυθρίσεις είναι, για παράδειγμα, η αρχή της αμετάβλητης, η αρχή της συμμετρίας, η διάσπαση ή η συμπλήρωση γεωμετρικών αριθμών για τον υπολογισμό των επιφανειών ή ορισμένοι όροι που χρησιμοποιούνται σε διωνυμικούς τύπους(Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015).

Αλλαγή πτυχών: Οι επιτυχείς λύτες προβλημάτων ενδέχεται να αλλάξουν τις υποθέσεις τους, τα κριτήρια ή τις πτυχές τους, προκειμένου να βρουν λύση. Διάφορες πτυχές ενός δεδομένου προβλήματος θα θεωρηθούν διαισθητικά ή το πρόβλημα θα εξεταστεί από μια διαφορετική οπτική γωνία, η οποία θα αποτρέψει την «κολλήσει» και θα επιτρέψει νέες ιδέες και προσεγγίσεις. Για παράδειγμα, πολλές στοιχειώδεις γεωμετρικές προτάσεις μπορούν επίσης να αποδειχθούν με έναν κομψό φορέα.Ο Kilpatrick (1985) θεωρεί την επιτυχία όταν εξηγούνται οι ευρετικές προσεγγίσεις στους μαθητές, διευκρινίζονται μέσω παραδειγμάτων και εκπαιδεύονται μέσω της παρουσίασης προβλημάτων. Η ανάγκη να γνωρίσουν οι μαθητές τις ευρετικές προσεγγίσεις είναι πλέον ευρέως αποδεκτή στις διδακτικές συζητήσεις. Οι διαφορές στις διαφορετικές προσεγγίσεις για την προώθηση των ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων μάλλον αφορούν την απόφαση σχετικά με τις στρατηγικές ή τα ευρετικά που επιλύουν τα προβλήματα που πρέπει να δοθούν στους μαθητές και με ποιον τρόπο και όχι με το εάν πρέπει να μεταφερθούν ή όχι.

Μεταφορά: Οι επιτυχείς λύτες προβλημάτων θα είναι πιο εύκολο από τους άλλους να μεταφέρουν μια γνωστή διαδικασία σε ένα άλλο, μερικές φορές ακόμη και πολύ διαφορετικό πλαίσιο. Αναγνωρίζουν ευκολότερα το "πλαίσιο" ή το πρότυπο μιας συγκεκριμένης εργασίας. Εδώ, πρόκειται για δικές του κατασκευές αναλογιών και για συνεχή αναζήτηση από το άγνωστο στο γνωστό.

Οι διαισθητικοί, δηλαδή οι μη εκπαιδευμένοι καλές λύσεις προβλημάτων, συχνά δεν μπορούν να έχουν πρόσβαση σε αυτές τις ιδιότητες ευελιξίας συνειδητά. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο συχνά δεν είναι σε θέση να εξηγήσουν πώς πραγματικά λύνουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα(Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015).

Για να μπορέσουμε να επιλύσουμε επιτυχώς τα προβλήματα, απαιτείται μια κάποια πνευματική ευκινησία. Εάν αυτό είναι λιγότερο έντονο σε μια συγκεκριμένη περιοχή, η μάθηση για την επίλυση των προβλημάτων σημαίνει αποζημίωση με την απόκτηση heuristics. Σε αυτή την περίπτωση, η ανεπαρκής πνευματική ευκινησία είναι εν μέρει "αντισταθμισμένη" με την εφαρμογή των γνώσεων που αποκτώνται μέσω των ερυθρών. Οι μαθηματικές ικανότητες επίλυσης προβλημάτων αποκτώνται με την προώθηση εκδηλώσεων πνευματικής ευελιξίας (μείωση, αντιστρεψιμότητα, αντίληψη πτυχών και αλλαγή πτυχών). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τον σχεδιασμό υπο-δράσεων επίλυσης προβλημάτων σε σχέση με μια (προσωρινά) συνειδητή εφαρμογή κατάλληλων heuristics. Εμπειρική τεκμηρίωση για την επιτυχία της δραστηρικής αρχής των heuristics δόθηκε από τον Collet (2009).

Στο πλαίσιο αυτό, η μάθηση για την επίλυση των προβλημάτων μπορεί να αποδειχθεί ως μια μακρόχρονη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης που βασικά περιλαμβάνει τέσσερις φάσεις (Bruder και Collet 2011):

1. Διαισθητική εξοικείωση με ευρετικές μεθόδους και τεχνικές.
2. Γνωρίζοντας τους ειδικούς ερίμους με τη βοήθεια σημαντικών παραδειγμάτων (σαφής στρατηγική απόκτηση).
3. Σύντομη συνειδητή πρακτική φάση για τη χρήση των νεοαποκτηθέντων heuristics με διαφοροποιημένες δυσκολίες στην εργασία.
4. Διεύρυνση του πλαισίου των εφαρμοζόμενων στρατηγικών.

Κατά την πρώτη φάση, οι μαθητές εξοικειώνονται με ευφυΐα διαισθητικά μέσω στοχοθετημένων παροτρύνσεων και ερωτήσεων (που μας βοήθησαν να λύσουμε αυτό το πρόβλημα;) οι οποίες στην επόμενη φάση τεκμηριώνονται βάσει πρότυπων εργασιών, δίδονται ονόματα και γίνονται έτσι γνωστά της ύπαρξής τους. Η τρίτη φάση εξυπηρετεί το σκοπό μιας ορισμένης εξοικείωσης με τους νέους ερίμους και την εμπειρία της ικανότητας μέσω εξατομικευμένης πρακτικής σε διαφορετικά επίπεδα απαίτησης, συμπεριλαμβανομένης της μορφής της κατ'οίκον εργασίας για μεγαλύτερες περιόδους. Μια τέταρτη και καθυστερημένη τέταρτη φάση στοχεύει στην αύξηση της ευελιξίας μέσω της μεταφοράς σε άλλα περιεχόμενα και πλαίσια και στην ολοένα και πιο διαισθητική χρήση των νεοαποκτηθέντων ευρισμάτων, έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να εμπλουτίσουν σταδιακά τα δικά τους μοντέλα επίλυσης προβλημάτων. Η δεύτερη και η τρίτη φάση βασίζονται σε μια στενή χρονολογική σειρά, ενώ η πρώτη φάση θα πρέπει να χρησιμοποιείται στην τάξη ανά πάσα στιγμή (Leung & Bolite-Frant, 2015).



Όλοι οι ευρίσκοι μπορούν βασικά να περιγραφούν με τρόπο προσανατολισμένο στη δράση μέσω της ερώτησης των σωστών ερωτήσεων. Ο τρόπος υποβολής ερωτήσεων μπορεί έτσι να δημιουργήσει ένα συγκεκριμένο είδος προσωπικής σχέσης. Ακόμη και αν ο καθηγητής παρουσιάζει και προτείνει τη γραμμή των βασικών ερωτήσεων με μια πρωτότυπη διατύπωση κάθε φορά, οι μαθητές θα πρέπει πάντα να έχουν την ευκαιρία να βρουν «τη δική τους» διατύπωση για τον αντίστοιχο ηθοποιό και να το σημειώσουν για τον εαυτό τους. Μια πιθανή βασική ερώτηση για τη χρήση ενός ευρετικού εργαλείου θα ήταν: Πώς να επεξηγήσετε και να διαρθρώσετε το πρόβλημα ή πώς να το παρουσιάσετε με διαφορετικό τρόπο;

Δυστυχώς, για πολλούς φοιτητές, η εφαρμογή ευριστικών προσεγγίσεων στην επίλυση προβλημάτων δεν θα προκύψει αυτόματα αλλά θα απαιτήσει κατάλληλη πρόωρη και μακροπρόθεσμη προαγωγή. Τα αποτελέσματα των τρεχουσών μελετών, όπου οι προσεγγίσεις προώθησης στην επίλυση προβλημάτων σχετίζονται με αυτορρύθμιση και μεταγνωστικές πτυχές, επιδεικνύουν ορισμένες θετικές επιδράσεις ενός τέτοιου συνδυασμού στους μαθητές. Αυτό το πεδίο έρευνας περιλαμβάνει, για παράδειγμα, μελέτες από τους Lester et al. (1989), Verschaffel et al. (1999), οι μελέτες για τη μέθοδο διδασκαλίας IMPROVE από τους Mevarech και Kramarski (1997, 2003) καθώς και η αξιολόγηση μιας διδακτικής ιδέας για την εκμάθηση τρόπων επίλυσης προβλημάτων από τη βαθμιαία συνειδητή απόκτηση heuristics από τους Collet και Bruder (2008)(Churchill, Fox & King, 2016).

Υπάρχει ένταση μεταξύ της προαναφερθείσας ιστορίας του Αρχιμήδη και των ευριστικών που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο τμήμα. Ο Αρχιμήδης, όταν βυθίστηκε στο μπανιέρα και είδε ξαφνικά τη λύση στο πρόβλημά του, δεν βασιζόταν σε όσμωση, απομνημόνευση, απομίμηση, συνεργασία ή ανάκλαση

(Kilpatrick 1985). Δεν βασιζόταν στη μείωση, την αναστρεψιμότητα, την αντίληψη των πτυχών, την αλλαγή της όψης ή τη μεταφορά. Ο Αρχιμήδης ήταν αφοσιωμένος και μόνο στην πραγματικότητα, μέσω της διορατικότητας και του ξαφνικού φωτισμού, κατάφερε να λύσει το πρόβλημά του. Εν ολίγοις, ο Αρχιμήδης αντιμετώπισε ένα πρόβλημα ότι τα προαναφερθέντα ευρετικά και το είδος τους δεν θα τον βοηθούσαν να λύσει (Churchill, Fox & King, 2016).

Σύμφωνα με ορισμένους, ένα τέτοιο σενάριο είναι ο ορισμός ενός προβλήματος. Για παράδειγμα, οι Resnick και Glaser (1976) ορίζουν ένα πρόβλημα ως κάτι που δεν έχετε την εμπειρία να λύσετε. Ομαθηματικοί, σεγενικέςγραμμές, συμφωνούνμεαυτό.

Οποιοδήποτε πρόβλημα στο οποίο μπορεί να λυθεί με σκόπιμη προσπάθεια είναι ένα πρόβλημα ρουτίνας και δεν μπορεί να είναι μια σημαντική ανακάλυψη. Πρέπει να προσπαθήσετε να αποτύχετε με σκόπιμες προσπάθειες και, στη συνέχεια, να βασιστείτε σε μια ξαφνική έμπνευση ή διαίσθηση ή αν προτιμάτε να το καλέσετε τύχη.

Τα προβλήματα, λοιπόν, είναι καθήκοντα που δεν μπορούν να επιλυθούν με άμεση προσπάθεια και θα απαιτήσουν κάποια δημιουργική ιδέα για επίλυση.

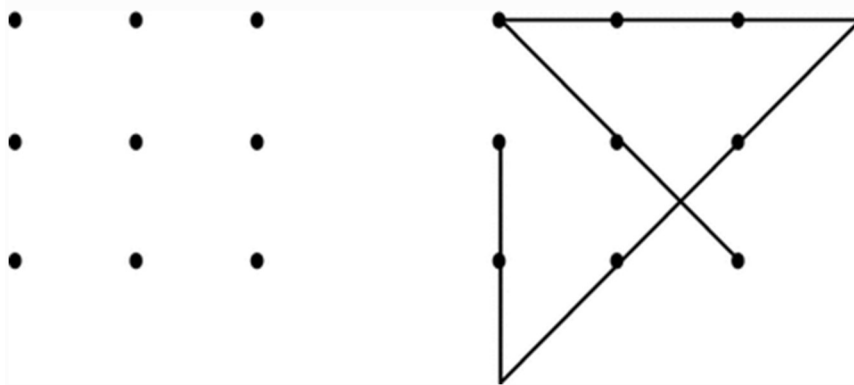
Όπως αναφέρθηκε, πολλοί θεωρούν ένα πρόβλημα που μπορεί να επιλυθεί με σκόπιμα και μηχανικά μέσα για να μην είναι αντάξιος του τίτλου «πρόβλημα». Ως εκ τούτου, ένα ρεπερτόριο εμπειριών του παρελθόντος επαρκεί για την αντιμετώπιση ενός τέτοιου «προβλήματος» θα το απέκλειε από τις τάξεις των «προβλημάτων» και θα το έθεσε σε «ασκήσεις». Για να χαρακτηριστεί ένα

πρόβλημα ως «πρόβλημα», τότε πρέπει να είναι «προβληματικό». Αν και ένα τέτοιο επιχείρημα είναι κυκλικό, είναι επίσης αποτελεσματικό στην έκφραση της οντολογίας των μαθηματικών «προβλημάτων»(Leung & Bolite-Frant, 2015).

Ο Perkins (2000) απαιτεί επίσης προβλήματα να είναι προβληματικά. Το βιβλίο του Archimedes 'Bath: The Art and Logic of Breakthrough Thinking (2000) ασχολείται με καταστάσεις στις οποίες ο διαλυτής έχει κολλήσει και καμία ποσότητα σκόπιμης ή μηχανικής προσκόλλησης στις αρχές της προηγούμενης εμπειρίας και της προηγούμενης γνώσης πρόκειται να τους απομακρύνει. Δηλαδή, ασχολείται με προβλήματα τα οποία, εξ ορισμού, δεν μπορούν να επιλυθούν μέσω μιας διαδικασίας σχεδιασμού [ή μέσω των ευρετικών που προτείνονται από τους Pólya (1949) και Schoenfeld (1985)]. Αντ' αυτού, η επίλυση πρέπει να βασίζεται στην εξω-λογική διαδικασία αυτού που ο Perkins (2000) ονομάζει επαναστατική σκέψη(Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015).

Perkins (2000) αρχίζει με τη διάκριση μεταξύ εύλογων και παράλογων προβλημάτων. Παρόλο που και τα δύο μπορούν να επιλυθούν, μόνο εύλογα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν μέσω της συλλογιστικής. Αδικοιολόγητα προβλήματα απαιτούν μια σημαντική ανακάλυψη για την επίλυσή τους. Το πρόβλημα, ωστόσο, είναι αδρανές. Δεν είναι ούτε λογικό ούτε παράλογο. Η ποιότητα αυτή οδηγείται στο πρόβλημα από τον επίλυση. Δηλαδή, αν ένας φοιτητής δεν μπορεί να λύσει ένα πρόβλημα με άμεση προσπάθεια, τότε αυτό το πρόβλημα θεωρείται παράλογο για τον μαθητή. Ο Perkins (2000) αναγνωρίζει επίσης ότι αυτό που είναι ένα παράλογο πρόβλημα για ένα άτομο είναι ένα απολύτως εύλογο πρόβλημα για ένα άλλο άτομο. η λογικότητα εξαρτάται από το άτομο(Hamel, 2018).

Αυτό δεν σημαίνει ότι, όταν διαπιστωθεί, η λύση δεν μπορεί να θεωρηθεί ως προσιτή μέσω λογικής. Κατά τη διάρκεια της πραγματικής διαδικασίας επίλυσης, ωστόσο, η άμεση και παραπλανητική συλλογιστική δεν λειτουργεί. Ο Perkins (2000) χρησιμοποιεί αρκετά κλασσικά παραδείγματα για να το καταδείξει, το πιο γνωστό είναι το πρόβλημα της σύνδεσης εννέα κουκίδων σε διάταξη  $3 \times 3$  με τέσσερις ευθείες γραμμές χωρίς αφαίρεση μολύβι από χαρτί, η λύση του οποίου παρουσιάζεται στην Εικ.



Εννέα κουκίδες - τέσσερις γραμμές πρόβλημα και λύση

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος, ο Perkins (2000) ισχυρίζεται ότι ο επίλυση πρέπει να αναγνωρίσει ότι ο περιορισμός της διαμονής εντός της πλατείας που δημιουργείται από τη συστοιχία  $3 \times 3$  είναι αυτοσυντηρούμενος περιορισμός. Υποστηρίζει επίσης ότι έως ότου αναγνωριστεί ότι δεν υπάρχει λόγος να επιλυθεί το πρόβλημα. Δηλαδή, σε αυτό το σημείο της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος το πρόβλημα είναι παράλογο. Ωστόσο, μόλις αναγνωριστεί αυτός ο περιορισμός, το πρόβλημα και η λύση είναι απόλυτα λογικοί. Έτσι, η λύση ενός, αρχικά, παράλογου προβλήματος είναι λογική (Churchill, Fox & King, 2016).

Το πρόβλημα που επιλύει το ευρετικό ότι ο Perkins (2000) έχει κατασκευάσει για να αντιμετωπίσει επιλύσιμα αλλά παράλογα προβλήματα περιστρέφεται γύρω από

την ιδέα της επαναστατικής σκέψης και αυτό που ονομάζει επαναστατικά προβλήματα. Ένα επαναστατικό πρόβλημα είναι ένα επιλύσιμο πρόβλημα στο οποίο ο διαλυτής έχει κολλήσει και θα χρειαστεί ένα ΑΗΑ! για να ξεπεραστεί και να λυθεί το πρόβλημα. Ο Perkins (2000) δηλώνει ότι υπάρχουν μόνο τέσσερις τύποι επιλύσιμων παράλογων προβλημάτων, τα οποία έχει ονομάσει άγρια κατάσταση, άπιαστο οροπέδιο, στενό φαράγγι εξερεύνησης και όαση ψευδούς υπόσχεσης. Τα ονόματα των πρώτων τριών από αυτά τα είδη προβλημάτων σχετίζονται με τη χρυσή χρυσή δόξα του Klondike στην Αλάσκα, έναν χρόνο και τόπο όπου ο χρυσός βρέθηκε περισσότερο από τύχη παρά από άμεση και συστηματική αναζήτηση (Leung & Bolite-Frant, 2015).

Η άγρια φύση των δυνατοτήτων είναι ένας όρος που δίνεται σε ένα πρόβλημα που έχει πολλές δελεαστικές κατευθύνσεις, αλλά λίγες πραγματικές λύσεις. Αυτό μοιάζει με έναν ερευνητή που ψάχνει χρυσό στο Klondike. Υπάρχει μια μεγάλη ερημιά στην οποία πρέπει να ψάξετε, αλλά πολύ λίγο χρυσό να βρεθεί. Το ανάγλυφο οροπέδιο δίνεται σε προβλήματα που παρουσιάζουν τον επίλυση με λίγες ενδεχόμενες ενδείξεις για το πώς να το λύσει. Το στενό φαράγγι της εξερεύνησης χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα πρόβλημα που έχει περιοριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχει πλέον λύση. Το πρόβλημα των εννέα τεμαχίων που παρουσιάζεται παραπάνω είναι ένα τέτοιο πρόβλημα. Ο επιβαλλόμενος περιορισμός ότι οι γραμμές πρέπει να βρίσκονται μέσα στην πλατεία που δημιουργείται από τη συστοιχία καθιστά μια λύση αδύνατη. Αυτό είναι πανομοιότυπο με τη μεταφορά ενός ερευνητή που αναζητά χρυσό μέσα σε ένα φαράγγι όπου δεν υπάρχει χρυσός. Ο τελικός τύπος του προβλήματος παίρνει το όνομά του από την έρημο. Μια όαση της ψεύτικης υπόσχεσης είναι ένα πρόβλημα που επιτρέπει στον επίλυση να πάρει γρήγορα μια λύση που είναι κοντά στο επιθυμητό αποτέλεσμα. αυτόν τον τρόπο

δεδειχθέντες τους να παραμείνουν σταθεροί στη στρατηγική που χρησιμοποιούσαν για να αποκτήσουν αυτή σχεδόν την απάντηση. Το πρόβλημα είναι ότι, όπως και το φαράγγι, η λύση δεν υπάρχει στην όαση. η στρατηγική λύσης που παρήγαγε μια σχεδόν απάντηση είναι ανίκανη να παράγει μια ολοκληρωμένη απάντηση. Ομοίως, μια όαση στην έρημο είναι μια ψεύτικη υπόσχεση επειδή πρόκειται μόνο για μια απομάκρυνση από την ερήμωση του επιδόρπια και όχι για έναν τελικό προορισμό (Churchill, Fox & King, 2016).

Πιστεύοντας ότι υπάρχουν μόνο τέσσερις τρόποι για να κολλήσουν, ο Perkins (2000) έχει σχεδιάσει ένα πρόβλημα ευρετικής λύσης που θα "αυξήσει τις πιθανότητες" να ξεκολλήσει. Αυτός ο ευρετικός βασίζεται σε αυτό που αναφέρεται ως «η λογική της νίκης» (σελ. 44) και βασίζεται στην ιδέα της ενδοσκόπησης. Αναγνωρίζοντας πρώτα ότι έχουν κολλήσει και αναγνωρίζοντας ότι ο λόγος που έχουν κολλήσει μπορεί να αποδοθεί μόνο σε έναν από τους τέσσερις λόγους, ο διαλυτής μπορεί να έχει πρόσβαση σε τέσσερις στρατηγικές για να ξεκολλήσει, το καθένα για το είδος του προβλήματος που αντιμετωπίζει. Εάν ο λόγος που έχουν κολλήσει είναι επειδή αντιμετωπίζουν μια ερημιά των δυνατοτήτων τους, πρέπει να ξεκινήσουν την περιαγωγή πολύ μακριά, ευρέως και συστηματικά με την ελπίδα να μειώσουν τον πιθανό χώρο λύσης σε ένα πιο εύχρηστο. Αν βρεθούν σε ένα ανόητο οροπέδιο, πρέπει να αρχίσουν να αναζητούν ενδείξεις, συχνά στη διατύπωση του προβλήματος. Όταν κολληθούν σε ένα στενό φαράγγι των δυνατοτήτων, πρέπει να επανεξετάσουν το πρόβλημα και να δουν αν έχουν επιβάλει περιορισμούς. Τέλος, όταν σε μια όαση ψεύτικης υπόσχεσης πρέπει να επαναπροσδιορίσουν το πρόβλημα με τέτοιο τρόπο ώστε να μένουν μακριά από την όαση (Churchill, Fox & King, 2016).

Φυσικά, υπάρχουν αποχρώσεις και λεπτομέρειες που συνδέονται με κάθε ένα από αυτά τα είδη προβλημάτων και τις στρατηγικές για την αντιμετώπισή τους. Ωστόσο, πουθενά μέσα σε αυτές τις λεπτομέρειες υπάρχει αναφορά στην κύρια δυσκολία που είναι εγγενής στην ενδοσκόπηση. ότι είναι πολύ πιο εύκολο για τον επίλυση να κολλήσει παρά για να αναγνωρίσουν ότι έχουν κολλήσει. Μόλις αναγνωριστούν, ωστόσο, οι λεπτομέρειες του εγκεκριμένου προσώπου του Perkins (2000) προσφέρουν στον διαλυτή ορισμένους τρόπους για να αναγνωρίσουν γιατί έχουν κολλήσει (Hamel, 2018).

### 3. Θεωρία και Λογισμός Πιθανοτήτων

Η θεωρία πιθανοτήτων είναι ένα από υποχρεωτικό θέμα που πρέπει να ληφθούν από τους μαθητές στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών IKIPPGRIPontianak. Στο πρόγραμμα σπουδών της θεωρίας πιθανοτήτων, το θέμα αυτό περιλαμβάνει εξηγήσεις σχετικά με τον κανόνα πολλαπλασιασμού, την μετάθεση, το συνδυασμό, την έννοια της πιθανότητας, τον υπολογισμό πιθανότητας με τον πολλαπλασιασμό, την μεταβολή και τον κανόνα συνδυασμού και τη διανομή τυχαίων μεταβλητών. Πρόβλημα που παρουσιάζεται συχνά από το θέμα είναι πρόβλημα που σχετίζεται με τα καθημερινά προβλήματα, οπότε απαιτεί από τον μαθητή να έχει ικανότητα επίλυσης προβλημάτων. Ο Newman είπε ότι μια δεξιότητα επίλυσης προβλημάτων αποτελείται από μια συγκλίνουσα και αποκλίνουσα σκέψη για τη δημιουργία των λύσεων. Και στη συνέχεια, η Polya (Widjayanti, 2011) είπε ότι υπάρχουν 4 βήματα στην επίλυση προβλημάτων: (1) κατανόηση του προβλήματος, (2) εκπόνηση του σχεδίου, (3) εκτέλεση του σχεδίου, . Στη γνωμοδότηση του Bransford, τα βήματα της επίλυσης προβλημάτων συνίστανται σε: (1) εντοπισμό του προβλήματος, (2)

καθορισμός και αντιπροσώπευση του προβλήματος, (3) διερεύνηση πιθανών στρατηγικών, (4) κοιτάζετε πίσω και αξιολογήστε τις επιπτώσεις των δραστηριοτήτων σας. Η εμπειρία του ερευνητή κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και της μάθησης σχετικά με τη θεωρία πιθανοτήτων δείχνει ότι οι μαθητές έχουν δυσκολία στην επίλυση προβλημάτων, ιδιαίτερα όταν υπολογίζουν την πιθανότητα ενός πειράματος. Εξαιτίας αυτού, ο ερευνητής πιστεύει ότι χρειάζεται μια προσπάθεια να αναπτυχθεί η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων στον υπολογισμό της πιθανότητας. Μία από τις προσπάθειες είναι η διδασκαλία και η μάθηση με τη μάθηση βασισμένη στην επίλυση προβλημάτων. Ο Galloti είπε ότι η τεχνική επίλυσης προβλημάτων που περιγράφεται εδώ καλείται ανάλυση μέσων-άκρων. Περιλαμβάνει τη σύγκριση του στόχου με το σημείο εκκίνησης, τη σκέψη για πιθανούς τρόπους υπέρβασης της διαφοράς. Ο Pardjono αναφέρει ότι η μάθηση που βασίζεται στην επίλυση προβλημάτων μπορεί να αυξήσει τις γνωστικές ικανότητες υψηλού επιπέδου, όπως η ικανότητα ανάλυσης, σύνθεσης και αξιολόγησης. Αναφερόμενος στη μελέτη, ο ερευνητής θέλει να διεξάγει μια μελέτη για να δει το επίπεδο ικανότητας επίλυσης προβλημάτων σε κάθε βήμα της επίλυσης προβλημάτων μετά από τη διδασκαλία που βασίζεται στην επίλυση προβλημάτων και να δει το αποτέλεσμα της μάθησης που βασίζεται στην επίλυση προβλημάτων στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων στον υπολογισμό πιθανότητας θέμα (Churchill, Fox & King, 2016).

#### 4. Γραμμικός Προγραμματισμός

Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (LP) είναι μια ειδική περίπτωση ενός προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού. Από μια αναλυτική προοπτική, ένα μαθηματικό πρόγραμμα προσπαθεί να αναγνωρίσει ένα ακραίο (δηλαδή ελάχιστο ή μέγιστο) σημείο μίας συνάρτησης  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , το οποίο επιπλέον ικανοποιεί



ένα σύνολο περιορισμών, π.χ.  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$ . Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι η εξειδίκευση του μαθηματικού προγραμματισμού στην περίπτωση όπου τόσο η συνάρτηση  $f$ , που καλείται αντικειμενική συνάρτηση, όσο και οι περιορισμοί του προβλήματος  $g$  είναι γραμμικές. Από τη σκοπιά των εφαρμογών, ο μαθηματικός (και συνεπώς ο γραμμικός) προγραμματισμός είναι ένα εργαλείο βελτιστοποίησης που επιτρέπει τον εξορθολογισμό πολλών διαχειριστικών και / ή τεχνολογικών αποφάσεων που απαιτούνται από τις σύγχρονες τεχνο-κοινωνικοοικονομικές εφαρμογές. Ένας σημαντικός παράγοντας για την εφαρμοσιμότητα της μεθοδολογίας μαθηματικού προγραμματισμού σε διάφορα περιβάλλοντα εφαρμογής είναι η υπολογιστική κατανοητότητα των προκύπτοντων αναλυτικών μοντέλων. Υπό την εμφάνιση της σύγχρονης τεχνολογίας υπολογιστών, αυτή η απαίτηση tractability μεταφράζεται στην ύπαρξη αποτελεσματικών και αποδοτικών αλγοριθμικών διαδικασιών ικανών να παρέχουν μια συστηματική και γρήγορη λύση σε αυτά τα μοντέλα. Για προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, ο αλγόριθμος Simplex παρέχει ένα ισχυρό υπολογιστικό εργαλείο, ικανό να παρέχει γρήγορες λύσεις σε εφαρμογές πολύ μεγάλης κλίμακας, που μερικές φορές περιλαμβάνουν εκατοντάδες χιλιάδες μεταβλητών (δηλαδή, παράγοντες λήψης αποφάσεων). Στην πραγματικότητα, ο αλγόριθμος Simplex ήταν ένας από τους πρώτους αλγορίθμους του Μαθηματικού Προγραμματισμού που θα αναπτυχθούν και η μετέπειτα επιτυχής εφαρμογή του σε μια σειρά εφαρμογών συνέβαλε σημαντικά στην αποδοχή του ευρύτερου πεδίου της Operations Research ως επιστημονικής προσέγγισης λήψη αποφάσης (Leung & Bolite-Frant, 2015).

## 5. Θεωρία Παιγνίων

Στα μαθήματα επιχειρησιακής έρευνας και ή λήψης αποφάσεων αναφέρονται οι αποφάσεις κάτω από συνθήκες βεβαιότητας, στις οποίες και εφαρμόζονται κυρίως οι τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας. Επιπρόσθετος,σε αυτά τα μαθήματα μελετήθηκαν οι αποφάσεις κάτω από συνθήκες κινδύνου, στις οποίες γνωρίζουμε τις πιθανότητες εμφάνισης των διαφόρων καταστάσεων της φύσης, και σε συνέχεια ασχοληθήκαμε με βασικές έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων, το θεώρημα του Bayes, τα δένδρα αποφάσεων και την διαδικασία Markov(English & Gainsburg, 2016).

Υπάρχει όμως και μία συγκεκριμένη κατηγορία αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας που αφορούν τα προβλήματα ανταγωνισμού ή συγκρούσεων. Τα αναφερόμενα προβλήματα δημιουργούνται όταν η αποτελεσματικότητα εφαρμογής μιας απόφασης που παίρνει ένα πρόσωπο A (ή μία ομάδα προσώπων A) περιορίζεται εξαιτίας της εφαρμογής μιας απόφασης που παίρνει άλλο πρόσωπο B (ή ομάδα προσώπων B). Το χαρακτηριστικό λοιπόν γνώρισμα αυτών των αποφάσεων είναι ότι ούτε ο A ούτε ο B μπορούν να επιτύχουν τον αντικειμενικό στόχο που επιδιώκουν, εφαρμόζοντας τη μια ή την άλλη στρατηγική (όπως, αντίθετα, συμβαίνει στα προβλήματα π.χ. γραμμικού προγραμματισμού, όπου επιλέγεται η στρατηγική με την οποία πραγματοποιείται ο αντικειμενικός στόχος της μεγιστοποίησης του κέρδους ή ελαχιστοποίησης του κόστους κτλ.). Τα προβλήματα αυτά λέγονται προβλήματα «παιγνίων», και για την αντιμετώπιση τους αναπτύχθηκε η «θεωρία των παιγνίων» (GameTheory)(Schmidt & Cohen, 2013).

Η θεωρία των παιγνίων διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τους μαθηματικούς Gardan, Pascal, Galileo, Waldergrave τον XVII και XVIII αιώνα και χρησιμοποιήθηκε κυρίως για την επίλυση προβλημάτων στρατιωτικής φύσης. Η σημερινή όμως εξέλιξη της θεωρίας των παιγνίων οφείλεται στον John von-Neumann (δημοσίευσε το 1944 το έργο «Theory and Practice of Games and Economic Behavior»), που σε συνεργασία με τον Oskar Morgenstern δημοσίευσε το 1947 το γνωστό έργο «Η θεωρία των παιγνίων και η οικονομική συμπεριφορά», (Theory of Games and Economic Behavior). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η οικονομική ζωή είναι ένα παιχνίδι παικτών, που ο καθένας παίζει για δικό του λογαριασμό (μπορεί και να συνάψει συμμαχία με άλλους), προβλέπει δε να εξασφαλίσει το μεγαλύτερο κέρδος ή την ελάχιστη ζημία έναντι του άλλου (ή άλλων παικτών). Έτσι και η επιχείρηση επιδιώκει, εφαρμόζοντας διάφορες στρατηγικές, ορισμένους αντικειμενικούς στόχους που συγκρούονται με τους στόχους άλλης (ή άλλων επιχειρήσεων). Εκείνο που βασικά προσφέρει η θεωρία των παιγνίων στον οικονομολόγο (ή τον πολιτικό ή τον στρατιωτικό) δεν είναι τόσο ο καθορισμός μιας κάποιας στρατηγικής που θα επιλέξει, διότι το πεδίο εφαρμογής της είναι περιορισμένο, αλλά κυρίως ένα τρόπο σκέψης, γιατί αυτή καθεαυτή η θεωρία των παιγνίων είναι μια αυστηρή λογική, ένα ορθολογισμός, καθώς και ένα καλύτερο σημείο εκκίνησης για την έρευνα και μελέτη των πολύπλοκων και δύσκολων προβλημάτων ανταγωνισμού ή συγκρούσεων (Hamel, 2018).

## ii. Η Διαδικασία της Λήψης Αποφάσεων

### 1. Η Λήψη Αποφάσεων

Οι Mintzberg, Rasinghani & Thearet (1976) καθόρισαν μια διαδικασία λήψης αποφάσεων ως «ένα σύνολο ενεργητικών και δυναμικών παραγόντων που αρχίζει με τον εντοπισμό ενός κινήτρου για δράσεις και τελειώνει με μια συγκεκριμένη δέσμευση για δράση». Ο Lawson & Shen (1998) σημείωσε επίσης ότι η λήψη αποφάσεων είναι η διαδικασία επιλογής μεταξύ εναλλακτικών λύσεων, η εφαρμογή μιας απόφασης και η χρήση των επακόλουθων αποτελεσμάτων για να διαμορφωθούν τυχόν περαιτέρω αποφάσεις που σχετίζονται με την προηγούμενη. Οι Stoner, Yetton, Craig και Johnston (1994) καθόρισαν τη διαδικασία λήψης αποφάσεων ως διαδικασία με την οποία επιλέγεται μια πορεία δράσης ως λύση σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Ο Huber (1980) διακρίνει τη λήψη αποφάσεων από την επιλογή επιλογής και από την επίλυση προβλημάτων. Ο Huber (1980) υποδεικνύει ότι η επιλογή επιλογής αναφέρεται στο στενό σύνολο δραστηριοτήτων που εμπλέκονται στην επιλογή μιας επιλογής από ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών. Οι Bartol, Martib, Tein και Matthews περιέγραψαν τη διαδικασία λήψης αποφάσεων ως «τη διαδικασία μέσω της οποίας οι διαχειριστές εντοπίζουν οργανωτικά προβλήματα και προσπαθούν να τα επιλύσουν». Ο ορισμός που χρησιμοποιείται στην παρούσα μελέτη είναι ότι «η λήψη αποφάσεων προϋποθέτει την επιλογή μεταξύ εναλλακτικών τρόπων δράσης με τη βοήθεια συστηματικού και διαρθρωμένου συνόλου κριτηρίων» (Watson, & Ohtani, 2015).

Lewis et al. (2001) επισημαίνουν ότι η οργανωτική λήψη αποφάσεων αναφέρεται στις διαδικασίες λήψης αποφάσεων που συμβαίνουν σε όλα τα επίπεδα και σε όλες τις μονάδες ενός οργανισμού. Ο Hatch περιέγραψε τη διαδικασία λήψης αποφάσεων ως αποφάσεις που λαμβάνονται για παράδειγμα σε όλες τις οργανώσεις. Η Top Management επικεντρώνεται στη στρατηγική λήψη αποφάσεων, η Middle Management δίνει έμφαση στις αποφάσεις σχετικά με τις εσωτερικές διαρθρωτικές ρυθμίσεις και το συντονισμό μεταξύ των μονάδων και η κατώτερη διοίκηση είναι υπεύθυνες για τις αποφάσεις σχετικά με τις καθημερινές επιχειρησιακές δραστηριότητες εντός των μονάδων που τους ανατίθενται (Schmidt & Cohen, 2013).

Bartol et al. (1997). Lewis et al. (2001) περιέγραψε τη θέση λήψης αποφάσεων ως κεντροποίηση και αποκέντρωση μέσα σε έναν οργανισμό. Η κεντροποίηση αναφέρεται στον βαθμό στον οποίο η εξουσία και η εξουσία διατηρούνται σε κορυφαία οργανωτικά επίπεδα. Από την άλλη πλευρά, η αποκέντρωση αναφέρεται στο βαθμό στον οποίο η εξουσία και η εξουσία μεταβιβάζονται σε χαμηλότερα επίπεδα. Stoner et al. αναφέρεται στον τόπο λήψης αποφάσεων ως κεντροποίηση και αποκέντρωση της λήψης αποφάσεων, αναφερόμενος στον τόπο λήψης αποφάσεων. Σε μια κεντρική οργανωτική δομή, οι αποφάσεις λαμβάνονται σε υψηλό επίπεδο από κορυφαία στελέχη ή ακόμα και από ένα άτομο. Σε μια αποκεντρωμένη δομή, η εξουσία λήψης αποφάσεων είναι διασκορπισμένη σε περισσότερα άτομα στο επίπεδο της Μέσης και της Κάτω Διοίκησης. Robbins et al. (1998) και Mintzberg (1983) περιγράφουν τη θέση λήψης αποφάσεων σε σχέση με τη συγκέντρωση και την αποκέντρωση. Η κεντροποίηση περιγράφει τον βαθμό στον οποίο η λήψη αποφάσεων επικεντρώνεται στα ανώτερα επίπεδα του οργανισμού. Εάν η ανώτατη διοίκηση κάνει τις βασικές αποφάσεις του οργανισμού με ελάχιστες ή καθόλου πληροφορίες από εργαζόμενους χαμηλότερου επιπέδου, τότε ο

οργανισμός συγκεντρώνεται. Αντίθετα, όσο περισσότερο οι εργαζόμενοι χαμηλότερου επιπέδου παρέχουν εισροή ή στην πραγματικότητα δίνεται η διακριτική ευχέρεια λήψης αποφάσεων, τόσο μεγαλύτερη είναι η αποκέντρωση. Ο ορισμός που χρησιμοποιείται στην παρούσα μελέτη είναι ότι ο «τόπος λήψης αποφάσεων αναφέρεται στη συγκέντρωση και την αποκέντρωση της λήψης αποφάσεων. Η συγκέντρωση της διαδικασίας λήψης αποφάσεων είναι ο βαθμός στον οποίο οι ανώτατοι διευθυντές λαμβάνουν αποφάσεις στον οργανισμό. Η αποκέντρωση της λήψης αποφάσεων διασφαλίζει ότι όλοι οι εργαζόμενοι συμμετέχουν στη λήψη αποφάσεων» (Singer, Ellerton & Cai, 2015).

Πολλοί συγγραφείς είχαν καθορίσει τη λήψη αποφάσεων ομάδας ως δύο ή περισσότερα αλληλεπιδρούντα και αλληλεξαρτώμενα άτομα που έρχονται μαζί για να λύσουν το πρόβλημα Bartol et al. (1997). Lee, Newman and Price (1999). Lewis et al. (2001). Robbins et al. (1998). Shapira (1997). Stoner et al. (1994). Η ομάδα λήψης αποφάσεων ορίζεται για τη μελέτη αυτή ως "κοινή χρήση της διαδικασίας λήψης αποφάσεων με σχετικούς υφισταμένους, σε ομαδική συζήτηση" (Churchill, Fox & King, 2016).

## **2. Συνηθισμένα Σφάλματα στην Λήψη Αποφάσεων**

Η προσκόλληση σε ένα ορθολογικό μοντέλο λήψης αποφάσεων είναι ακόμη πιο δύσκολο από ό, τι υποδεικνύει το πρόβλημα της αβεβαιότητας. Ως άνθρωποι, φαίνεται να προγραμματίζουμε με μια σειρά συντομεύσεων λήψης αποφάσεων, γνωστικές προκαταλήψεις, που προκαλούν την απόφασή μας να απομακρυνθεί ουσιαστικά από το ορθολογικό μοντέλο. Οι γνωστικές προκαταλήψεις μπορούν να επηρεάσουν τους εμπειρογνώμονες καθώς και τους αρχάριους λήψης αποφάσεων και πρέπει να κατανοήσουμε τις δυνητικά επιβλαβείς επιπτώσεις τους. Ακολουθούν

σύντομες εξηγήσεις για διάφορες γνωσιακές προκαταλήψεις που έχουν παρατηρηθεί στον επιχειρηματικό κόσμο (Singer, Ellerton & Cai, 2015):

Υπέρβαση εμπιστοσύνης. Η έρευνα και η εμπειρία έδειξαν ότι η πλειοψηφία μας τείνει να είναι υπερβολικά βέβαιη. Για παράδειγμα, αν ζητάτε από μέλη μιας τάξης να εκτιμήσουν εάν είναι πάνω από το μέσο όρο σε κάποια συγκεκριμένη ικανότητα ή γνώση, πάνω από το ήμισυ είναι πιθανό να ισχυριστούν ότι είναι. Ίσως η τάξη να είναι γεμάτη από εξαιρετικά άτομα, αλλά με ένα δίκαιο δείγμα, η λογική υπαγορεύει ότι πάνω από το ήμισυ των μαθητών μπορεί να είναι πάνω από το μέσο όρο. Ο Hubbard (2010) αναφέρεται σε πολυάριθμα παραδείγματα υπέρμετρης εμπιστοσύνης των εμπειρογνομόνων και προσφέρει κατάρτιση βαθμονόμησης για να βοηθήσει τους εμπειρογνώμονες να βελτιώσουν τις εκτιμήσεις τους. Οι Carroll και Mui (2008) υποστηρίζουν ότι η υπερβολική εμπιστοσύνη συνέβαλε σίγουρα στις κακές αποφάσεις που οδήγησαν στις μεγάλες απώλειες που διαπιστώθηκαν στη μελέτη τους (Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015).

Χαλαρωτικό κόστος και κλιμάκωση των αποτελεσμάτων δέσμευσης. Αυτές οι γνωστικές προκαταλήψεις αναφέρονται σε μια απροθυμία να παραιτηθεί από μια πορεία δράσης όταν έχει πραγματοποιηθεί μεγάλη προσπάθεια ή πόροι. Η οικονομική θεωρία λέει ότι όταν τα χρήματα ή ο χρόνος έχουν δαπανηθεί, έχει φύγει και δεν μπορείτε να τα πάρετε πίσω. Η μελλοντική σας επένδυση σε μια συγκεκριμένη πορεία δράσης θα πρέπει να βασίζεται στην πιθανότητα επιτυχίας με βάση τις μελλοντικές επενδύσεις και όχι στην εξέταση των δαπανών που έχουν ήδη δαπανηθεί. Αλλά ο ψυχολογικός πόνος που συνδέεται με την αναγνώριση της απώλειας μας καθιστά δύσκολο να κάνουμε έναν αμερόληπτο υπολογισμό σχετικά με τις μελλοντικές μας πιθανότητες επιτυχίας ή αποτυχίας. Όταν συνεχίζουμε να

ακολουθούμε μια πορεία δράσης όπου υπάρχουν ελάχιστες ή καθόλου πιθανότητες επιτυχίας, αυτό αναφέρεται ως "κλιμάκωση της δέσμευσης". Ο M. Lynn Markus και ο Mark Keil (1994) περιγράφουν μια πραγματική περίπτωση όπου μια εταιρεία συνέχισε να επενδύσουν σε ένα έργο πληροφορικής παρά την άρνηση των χρηστών να χρησιμοποιήσουν την εφαρμογή (Schmidt & Cohen, 2013).

Τα πρόσφατα αποτελέσματα και η διαθεσιμότητα. Αυτές οι δύο προκαταλήψεις αναφέρονται στην τάση μας να στηρίζουμε περισσότερο τις πρόσφατες και άμεσα διαθέσιμες πληροφορίες. Το πρόβλημα είναι ότι οι πιο πρόσφατες και οι περισσότερες διαθέσιμες πληροφορίες δεν είναι απαραίτητως οι καλύτερες πληροφορίες που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για τη λήψη ορισμένων αποφάσεων. Ο Roberto (2005) εξετάζει το πρόβλημα στην ανάλυση του παραδείγματος του Everest. Οι εξειδικευμένοι ορειβάτες που οδήγησαν τις ομάδες είχαν αναπτύξει την εμπειρία τους τα τελευταία δέκα χρόνια πριν από την άνοδό τους. Δυστυχώς, ο καιρός στο Everest κατά τη διάρκεια αυτών των δέκα ετών ήταν ήπιος σε σχέση με τα ιστορικά πρότυπα καιρού του Mount Everest. Δεδομένου ότι οι ηγέτες των ομάδων δεν είχαν βιώσει προσωπικά τις χειρότερες καιρικές συνθήκες που μπορούσε να προσφέρει ο Everest, δεν αξιολογούσαν πλήρως τους κινδύνους που ανέλαβαν. Αν οι ηγέτες βίωναν κακές συνθήκες αναρρίχησης που σχετίζονται με τις καιρικές συνθήκες, ίσως ήταν πιο απρόθυμοι να αγνοήσουν τους δικούς τους κανόνες επιστροφής (Singer, Ellerton & Cai, 2015).

Προκατάληψη επιβεβαίωσης. Η προκατάληψη επιβεβαίωσης αναφέρεται στην τάση μας να συλλέξουμε και να βασιζόμαστε σε πληροφορίες που επιβεβαιώνουν τις προϋπάρχουσες πεποιθήσεις μας και αγνοούν ή εκπέμπουν πληροφορίες που έρχονται σε σύγκρουση με αυτές τις πεποιθήσεις. Οι Carroll and Mui (2008)



περιέγραψαν τη συγχώνευση δύο ασφαλιστικών εταιρειών, Unum και Provident. Η προσδοκία για τη συγκέντρωση ήταν ότι οι συνδυασμένες εταιρείες θα επιτύχουν μεγαλύτερη ισχύ στην αγορά και θα μειώσουν το κόστος. Τα στελέχη της εταιρείας πιστεύουν ότι θα είναι σε θέση να αυξήσουν τις τιμές σε ένα σημαντικό σύνολο ασφαλιστικών προϊόντων κατά δεκατέσσερα τοις εκατό. Αντ' αυτού, ήταν μόνο σε θέση να αυξήσουν τις τιμές κατά επτά τοις εκατό και αυτό επιτεύχθηκε με απώλεια μεριδίου αγοράς. Οι Carroll και Mui υποστηρίζουν ότι τα στελέχη πίστευαν τι ήθελαν να πιστέψουν, προεξοφλώντας τις πιθανές ενέργειες των πελατών και των ανταγωνιστών τους. Πέντε χρόνια μετά τη συγκέντρωση, τα αποθέματα των συνδυασμένων εταιρειών είχαν χάσει τα δύο τρίτα της αγοραίας τους αξίας (Singer, Ellerton & Cai, 2015).

Αγκυροβολητική προκατάληψη. Η προκατειλημμένη αγκύρωση αφορά την τάση μας να επιτρέψουμε μια αρχική εκτίμηση ή ακόμα και κάποιο άσχετο αριθμό για να αγκυροβολήσουμε ή να διαστρεβλώσουμε τις επακόλουθες εκτιμήσεις μας. Νομίζουμε ότι είναι περίεργο το γεγονός ότι απλά γράφοντας έναν αριθμό όπως τα τελευταία τέσσερα ψηφία των αριθμών τηλεφώνου ή κοινωνικής ασφάλισης μπορούμε να επηρεάσουμε τις εκτιμήσεις μας για σχεδόν οποιοδήποτε θέμα (π.χ. το μήκος του ποταμού Νείλου). Αλλά το πείραμα μετά το πείραμα έχει δείξει ότι οι μεγαλύτεροι αριθμοί τηλεφώνου συσχετίζονται με μεγαλύτερες εκτιμήσεις και χαμηλότερους αριθμούς που συσχετίζονται με χαμηλότερες εκτιμήσεις. Η έρευνα έχει αποδείξει ότι οι επαγγελματίες του κλάδου θα ενσωματωθούν στις καλύτερες εκτιμήσεις τους και θα υποτιμήσουν τα διαστήματα εμπιστοσύνης που περιβάλλουν αυτές τις εκτιμήσεις (English & Gainsburg, 2016).

### 3. Πλαίσιο Ανάλυσης Λήψης Αποφάσεων

Είναι κοινό να κάνουμε αβέβαιες αποφάσεις. Τι μπορεί να γίνει για να γίνει καλή (ή τουλάχιστον η καλύτερη δυνατή) απόφαση υπό συνθήκες αβεβαιότητας; Η ανάλυση ανθεκτικότητας του Info-gap αξιολογεί κάθε εφικτή απόφαση με το ερώτημα: πόσο μεγάλη απόκλιση από την εκτίμηση μιας τιμής παραμέτρου, συνάρτησης ή σετ παραμέτρων επιτρέπεται και εξακολουθεί να "εγγυάται" αποδεκτή απόδοση; Σε καθημερινή βάση, η "ευρωστία" μιας απόφασης καθορίζεται από το μέγεθος της απόκλισης από μια εκτίμηση που εξακολουθεί να οδηγεί σε επιδόσεις εντός των απαιτήσεων κατά τη χρήση αυτής της απόφασης. Είναι μερικές φορές δύσκολο να κρίνουμε πόση ευρωστία χρειάζεται ή αρκεί. Ωστόσο, σύμφωνα με τη θεωρία του χάσματος πληροφοριών, η κατάταξη των εφικτών αποφάσεων όσον αφορά τον βαθμό αντοχής τους είναι ανεξάρτητη από τέτοιες κρίσεις. Για το σκοπό αυτό, πρέπει να εξεταστούν τα ακόλουθα ερωτήματα (Ellerton, 2013):

Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων απόφασης που υπόκεινται σε σοβαρή αβεβαιότητα;

Τι δυσκολίες προκύπτουν στη μοντελοποίηση και επίλυση τέτοιων προβλημάτων;

Τι είδους ευρωστία αναζητάτε;

Πώς αντιμετωπίζει η θεωρία των κενών πληροφορίας αυτά τα θέματα;

Με ποιον τρόπο είναι η θεωρία της απόφασης για το χάσμα πληροφοριών παρόμοια ή / και διαφορετική από άλλες θεωρίες για απόφαση υπό αβεβαιότητα; Δύο σημαντικά σημεία πρέπει να αποσαφηνιστούν από την αρχή:

Λαμβάνοντας υπόψη τη σοβαρότητα της αβεβαιότητας που σχεδιάστηκε να αντιμετωπίσει το κενό πληροφόρησης, είναι απαραίτητο να διευκρινιστούν οι δυσκολίες που δημιουργεί η σοβαρή αβεβαιότητα. Δεδομένου ότι το χάσμα πληροφοριών είναι μια μη πιθανοτική μέθοδος που επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την ευρωστία της αβεβαιότητας, είναι επιτακτική η σύγκρισή της με το μοναδικό σημαντικό "μη πιθανοτικό" μοντέλο στην θεωρία της κλασικής απόφασης, ήτοι το παράδειγμα *maximin* του Wald.

Ο κανόνας *maximin* μας λέει να ταξινομήσουμε εναλλακτικές λύσεις με τα χειρότερα δυνατά αποτελέσματά τους: πρέπει να υιοθετήσουμε την εναλλακτική λύση της οποίας το χειρότερο αποτέλεσμα είναι ανώτερο από το χειρότερο αποτέλεσμα των άλλων. Εξάλλου, αυτό το παράδειγμα έχει κυριαρχήσει στη σκηνή στην κλασική θεωρία αποφάσεων για πάνω από εξήντα χρόνια. Επομένως, πρώτα να διευκρινίσουμε τις υποθέσεις που υπονοούνται από τη σοβαρή αβεβαιότητα (Churchill, Fox & King, 2016):

1. Μια παράμετρος  $\lambda$ , της οποίας η πραγματική τιμή υπόκειται σε σοβαρή αβεβαιότητα.
2. Μια περιοχή αβεβαιότητας  $\Delta$ , στην οποία βρίσκεται η πραγματική τιμή  $\lambda$ .
3. Εκτίμηση  $e\lambda$  της πραγματικής τιμής  $\lambda$ .

Δύο παρατηρήσεις πρέπει να γίνουν λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω υπόθεση. Πρώτον, Η περιοχή της αβεβαιότητας είναι σχετικά μεγάλη. Δεύτερον, η εκτίμηση

είναι μια κακή προσέγγιση της πραγματικής τιμής λ. Η θεωρία των αποφάσεων Info-gap είναι ριζικά διαφορετική από όλες τις τρέχουσες θεωρίες της απόφασης κάτω από την αβεβαιότητα. Η διαφορά προέρχεται από τη μοντελοποίηση της αβεβαιότητας ως κενό πληροφόρησης και όχι από την πιθανότητα. Γενικά, το μοντέλο ευρωστίας του χάσματος πληροφοριών είναι μια μαθηματική αναπαράσταση μιας τοπικής ανάλυσης χειρότερης περίπτωσης στη γειτονία μιας δεδομένης εκτίμησης της πραγματικής τιμής της παραμέτρου ενδιαφέροντος. Υπό σοβαρή αβεβαιότητα, η εκτίμηση υποτίθεται ότι είναι μια κακή ένδειξη της πραγματικής αξίας της παραμέτρου και πιθανόν να είναι ουσιαστικά εσφαλμένη. Το θεμελιώδες ερώτημα είναι επομένως: δεδομένης της σοβαρότητας της αβεβαιότητας, της τοπικής φύσης της ανάλυσης και της κακής ποιότητας της εκτίμησης, πόσο σημαντικό και χρήσιμο είναι τα αποτελέσματα που δημιουργούνται από την ανάλυση και πόσο υγιής είναι η μεθοδολογία ως σύνολο; Η ισχυρή βιβλιογραφία βελτιστοποίησης παρέχει μεθόδους και τεχνικές που υιοθετούν μια σφαιρική προσέγγιση στην ανάλυση ανθεκτικότητας. Αυτές οι μέθοδοι απευθύνονται άμεσα στην απόφαση υπό σοβαρή αβεβαιότητα και έχουν χρησιμοποιηθεί για το σκοπό αυτό για περισσότερο από τριάντα χρόνια. Το μοντέλο Maximin του Wald είναι το κύριο όργανο που χρησιμοποιείται από αυτές τις μεθόδους. Η κύρια διαφορά μεταξύ του μοντέλου Maximin που χρησιμοποιείται από το κενό πληροφοριών και των διαφόρων μοντέλων Maximin που χρησιμοποιούνται από ισχυρές μεθόδους βελτιστοποίησης είναι ο τρόπος με τον οποίο ενσωματώνεται η συνολική περιοχή αβεβαιότητας στο μοντέλο ευρωστίας. Το Info-gap λαμβάνει μια τοπική προσέγγιση που επικεντρώνεται στην άμεση γειτονία της εκτίμησης. Σε έντονη αντίθεση, οι ισχυρές μέθοδοι βελτιστοποίησης έχουν ως στόχο να ενσωματώσουν στην ανάλυση ολόκληρη την περιοχή

αβεβαιότητας ή τουλάχιστον μια επαρκή αναπαράσταση αυτών. Στην πραγματικότητα, μερικές από αυτές τις μεθόδους δεν χρησιμοποιούν καν εκτίμηση. Το μοντέλο ευρωστίας του χάσματος πληροφοριών είναι ένα παράδειγμα του γενικού μοντέλου Maximin. Επομένως, είναι χρήσιμο να εξεταστούν οι μορφές μαθηματικού προγραμματισμού (MP) αυτών των γενικών μοντέλων (Ellerton, 2013).

Ένα μεγάλο μέρος της σύγχρονης έρευνας σχετικά με τη λήψη οργανωτικών αποφάσεων αφορά το πώς πρέπει να λαμβάνονται οι αποφάσεις. Τέτοιες έρευνες αποσκοπούν στην ανάπτυξη τεχνικών για τη βελτίωση της νοημοσύνης των ενεργειών από τους υπεύθυνους για τη λήψη αποφάσεων. Stoner et al. (1994) καθόρισε τη διαδικασία λήψης αποφάσεων ως διαδικασία με την οποία επιλέγεται μια πορεία δράσης ως λύση σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Ο Huber (1980) διακρίνει τη λήψη αποφάσεων από την επιλογή των αποφάσεων και την επίλυση προβλημάτων. Ο Huber (1980) υποδεικνύει ότι η επιλογή των επιλογών αναφέρεται στο στενό σύνολο των δραστηριοτήτων που εμπλέκονται στην επιλογή μιας επιλογής από την επιλογή εναλλακτικών επιλογών. Η επιλογή είναι ένα μέρος της διαδικασίας λήψης αποφάσεων. Η επίλυση προβλημάτων αναφέρεται στο ευρύ σύνολο δραστηριοτήτων που εμπλέκονται στην εξεύρεση και εφαρμογή μιας πορείας δράσης για τη διόρθωση μιας μη ικανοποιητικής κατάστασης. Η λήψη αποφάσεων ενσωματώνει και τα δύο αυτά στοιχεία. Η διαδικασία λήψης αποφάσεων βασίζεται στις επιχειρηματικές δραστηριότητες και έχει θεμελιώδη σημασία για την επίλυση προβλημάτων, την ανάπτυξη επιχειρηματικών σχεδίων και την αντιμετώπιση των στόχων. Mintzberg et al. (1976) καθόρισε μια διαδικασία λήψης αποφάσεων ως εξής: "Ένα σύνολο ενεργητικών και δυναμικών παραγόντων που αρχίζει με τον εντοπισμό ενός κινήτρου για δράσεις και τελειώνει με μια

συγκεκριμένη δέσμευση για δράση" (Churchill, Fox & King, 2016) Ο Lawson & Shen (1998) σημείωσε επίσης ότι η λήψη αποφάσεων είναι η διαδικασία επιλογής μεταξύ εναλλακτικών λύσεων, η εφαρμογή μιας απόφασης και η χρήση των επακόλουθων αποτελεσμάτων για να διαμορφωθούν τυχόν περαιτέρω αποφάσεις που σχετίζονται με την προηγούμενη. Η διαδικασία επιλογής μεταξύ εναλλακτικών λύσεων περιλαμβάνει σχεδόν πάντα έναν συνδυασμό αξιολόγησης των δεδομένων σχετικά με τις εναλλακτικές λύσεις, τις αξίες ή την προτίμηση του ατόμου για το τι είναι σημαντικό, τις προσδοκίες ή τις προβλέψεις κάποιου σχετικά με το τι μπορεί να συμβεί σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή και κάποια συναισθηματικά σημάδια για τις εναλλακτικές λύσεις. Αυτή η βιβλιογραφία επιχειρεί να απλοποιήσει τις πολλαπλές διαδικασίες που εμπλέκονται στη λήψη αποφάσεων. Καμία ανάλυση δεν καταφέρνει να συμπεριλάβει όλες τις σχετικές μεταβλητές. Μια καλύτερη μέθοδος που έλαβαν οι ερευνητές για να εξετάσουν τη λήψη αποφάσεων είναι η αποδόμηση της διαδικασίας σε ξεχωριστά στάδια. Επιπλέον, προσδιορίζονται ξεχωριστές διαδικασίες για ξεχωριστές αποφάσεις (English & Gainsburg, 2016).

Τα οργανωτικά μέλη πρέπει να λαμβάνουν καθημερινά διάφορες αποφάσεις που θα επηρεάσουν ένα περιορισμένο ή ευρύ φάσμα ανθρώπων στο εγγύς μέλλον (από μερικά δευτερόλεπτα έως λίγες μέρες) ή το απομακρυσμένο μέλλον (από μερικές εβδομάδες έως πολλούς μήνες έως πολλά χρόνια) . Επιπλέον, μια ομάδα κάνει σχεδόν όλες τις οργανωτικές αποφάσεις, παρά ένα άτομο, έτσι η λήψη αποφάσεων είναι πρωτίστως μια κοινωνική διαδικασία των οποίων τα αποτελέσματα συνήθως διασκορπίζονται από μια σειρά οργανωτικών μελών. Υπάρχουν έξι βήματα της λήψης αποφάσεων της διοίκησης, συμπεριλαμβανομένων των διαδικασιών και των αποτελεσμάτων. Ο Lawson & Shen (1998) επισημαίνει ότι είναι σημαντικό να

εκτιμήσουμε ότι η οργανωτική λήψη αποφάσεων συνήθως δημιουργείται μέσα σε περιβραχιόνια, κακοφώνα ή μεγάλης ταχύτητας περιβάλλοντα όπου η αλλαγή είναι πάντα παρούσα. Υπάρχουν πολλές διακοπές σε κάθε δεδομένη δραστηριότητα λήψης αποφάσεων και οι ευκαιρίες και τα προβλήματα εξακολουθούν να διαχέονται ή να προκύπτουν μέσα από τον οργανισμό(English & Gainsburg, 2016).

Η λήψη αποφάσεων συνήθως ξεκινά με τον εντοπισμό μιας ευκαιρίας (πρώτη λήψη αποφάσεων) ή ενός προβλήματος (αντίδραση στη λήψη αποφάσεων). Ήδη η ιδέα χωρίζεται. Γενικά, όσο πιο στενά είναι η ομάδα λήψης αποφάσεων σε δεδομένα σε πραγματικό χρόνο, τόσο πιο πιθανό είναι να εντοπίζουν ευκαιρίες (όπως νέες αγορές, οργανωτικές διαδικασίες ή τεχνολογία) αντί να εστιάζουν σε προβλήματα που ορίζονται από ιστορικά ή πρόβλεψης συνόλων δεδομένων. Στη συνέχεια, το οργανωτικό μέλος ή η ομάδα λήψης αποφάσεων πρέπει να καθορίσει εάν η εστιακή κατάσταση είναι μια σημαντική ευκαιρία ή πρόβλημα που απαιτεί προσοχή και δράση(Ellerton, 2013).

Οι διαχειριστές πρέπει να διαφοροποιήσουν την προσέγγισή τους στη λήψη αποφάσεων ανάλογα με την ιδιαίτερη κατάσταση. Γενικά, οι αποφάσεις μπορούν να ταξινομηθούν είτε ως προγραμματισμένες είτε ως μη προγραμματισμένες. Οι Lawson & Shen (1998) επισημαίνουν ότι οι προγραμματισμένες αποφάσεις συνήθως περιλαμβάνουν ιδιαίτερα επαναλαμβανόμενα και ρουτίνα προβλήματα στα οποία οι διαδικασίες λήψης αποφάσεων είναι καλά καθιερωμένες, εφαρμόζονται συχνά, ενεργοποιούνται εύκολα και απαιτούν άμεση δράση. Ο Simon (1977) πρότεινε ότι κατά την προγραμματισμένη λήψη αποφάσεων, εστιάζεται στην εφαρμογή της απόφασης με τα πρώτα βήματα που είναι ιδιαίτερα τυποποιημένα

όπως παρουσιάζονται στα εγχειρίδια λειτουργίας και στις τυποποιημένες διαδικασίες λειτουργίας (Churchill, Fox & King, 2016).

Ο Bartol et al. (1998) πρότεινε επίσης ότι οι προγραμματισμένες αποφάσεις λαμβάνονται σε συνηθισμένες, καλά δομημένες καταστάσεις χρησιμοποιώντας προκαθορισμένους κανόνες απόφασης. Η απόφαση μπορεί να βασίζεται σε συνήθεια, στατιστικές τεχνικές ή καθιερωμένες πολιτικές και διαδικασίες που προκύπτουν από προηγούμενη εμπειρία ή τεχνικές γνώσεις σχετικά με το τι λειτουργεί σε μια συγκεκριμένη κατάσταση. Αντίθετα, οι μη προγραμματισμένες αποφάσεις χρησιμοποιούνται όταν οι προκαθορισμένοι κανόνες απόφασης δεν είναι πρακτικοί, όπως σε νέες ή κακώς δομημένες καταστάσεις. Οι σημαντικότερες διοικητικές αποφάσεις δεν είναι προγραμματισμένες και περιλαμβάνουν σημαντική αβεβαιότητα. Οι αποφάσεις που λαμβάνονται κάτω από αβέβαιες συνθήκες εμπεριέχουν κίνδυνο και τη δυνατότητα επιλεγμένης δράσης που οδηγεί σε απώλειες και όχι στα επιδιωκόμενα αποτελέσματα. Οι ειδικοί στη λήψη αποφάσεων χρησιμοποίησαν για να διαφοροποιήσουν την αβεβαιότητα και τον κίνδυνο, αλλά τώρα βλέπουν την αβεβαιότητα ως την αιτία του κινδύνου. Ο Northcrafe & Neale (1990) πρότεινε ότι η αβεβαιότητα προέρχεται από διάφορες πηγές. Για παράδειγμα, στοιχεία στο περιβάλλον που είναι δύσκολο να προβλεφθούν ή να ελεγχθούν μπορεί να επηρεάσουν την επιτυχία μιας απόφασης και οι περιορισμοί κόστους και χρόνου μπορούν να περιορίσουν τη συλλογή πληροφοριών. Bartol et al. (1998) επισημαίνει ότι οι κοινωνικοί και πολιτικοί οργανωτικοί παράγοντες, όπως η κακή επικοινωνία μεταξύ των μονάδων, καθιστούν δύσκολη τη συλλογή σχετικών πληροφοριών. Επιπλέον, οι γρήγορες αλλαγές στην κατάσταση καθιστούν τις πληροφορίες γρήγορα απαρχαιωμένες. Το ποσοστό των μη προγραμματισμένων αποφάσεων που οι διευθυντές αυξάνουν σε κάθε ιεραρχικό επίπεδο. Επειδή οι



αποφάσεις αυτές απαιτούν αποτελεσματικές δεξιότητες λήψης αποφάσεων και δημιουργικότητα, αποτελούν τη μεγαλύτερη πρόκληση για τους διευθυντές. Ο Larrick (1993) επισημαίνει ότι οι προτιμήσεις για κίνδυνο ή βεβαιότητα προκύπτουν όχι μόνο από την αντιληπτή αξία των αποτελεσμάτων και την πιθανότητά τους, αλλά κυρίως από την πεποίθηση ότι τα αποτελέσματα θα ενισχύσουν ή θα εξαλείψουν την αυτοεκτίμηση και την αποτελεσματικότητα ως παράγοντα λήψης αποφάσεων (Ellerton, 2013).

Ο Larrick (1993) επεσήμανε ότι οι άνθρωποι συνήθως ανταποκρίνονται στις συναισθηματικές συνέπειες της λήψης αποφάσεων, η οποία αντανακλάται στα συναισθήματα επιτυχίας ή αποτυχίας τους, στην ενίσχυση ή στην ελάττωση του αυτοσεβασμού και της αυτο-αποτελεσματικότητας, της λύπης ή της απογοήτευσης. Η λήψη αποφάσεων είναι κάτι περισσότερο από μια ψυχρή γνωστική εμπειρία. Περιλαμβάνει επίσης και συναισθηματικά συστατικά. Σύμφωνα με τους Josephs, Larrick, Steele και Nisbett (1992), όταν η ανάδραση σχετικά με μια απόφαση είναι φτωχή, οι άνθρωποι συχνά αισθάνονται τη λύπη που μπορεί να αμαυρώσει την εικόνα τους και να οδηγήσει σε αμφιβολία για τη σοφία της αρχικής απόφασης. Από την άποψη αυτή, οι προτιμήσεις κινδύνου διαμορφώνονται από το κίνητρο για την προστασία της εικόνας του εαυτού. Josephs et al. (1992) ανέφεραν ότι, όταν αντιμετώπιζαν επικίνδυνες αποφάσεις, τα άτομα με χαμηλό αυτοέλεγχο ήταν πιο απογοητευμένα από τον κίνδυνο όταν αναμενόταν να ανατροφοδοτήσουν τις αποφάσεις τους, ενώ άτομα με υψηλή αυτοεκτίμηση δεν έκαναν ποτέ λύσεις που ελαχιστοποιούν τη λύπη τους. Φαίνεται λοιπόν ότι η ικανότητα διατήρησης μιας καλής εικόνας του εαυτού μπροστά στη λύπη είναι ένας σημαντικός καθοριστικός παράγοντας της προτίμησης ενός ατόμου για ανάληψη κινδύνων. Επιπλέον, Browne

(1993); Ο Harrison (1987) πρότεινε ότι η λήψη αποφάσεων συνεπάγεται αντιληπτά και όχι αντικειμενικά μέτρα κινδύνου.

Οι διεπιστημονικές πτυχές της λήψης αποφάσεων απεικονίζονται καλύτερα στο πλαίσιο των προτεινόμενων μοντέλων. Αυτά τα μοντέλα δείχνουν με γραφικά τρόπο πόση έμφαση δέχονται οι εφαρμοστέοι κλάδοι στη λήψη αποφάσεων. Επιπλέον, τα μοντέλα αντιπροσωπεύουν ένα συγκεκριμένο τμήμα του πραγματικού κόσμου σε μια δεδομένη στιγμή και τόπο υπό διαφορετικές συνθήκες. Μπορούν να γίνουν πολλά για να μειωθεί ο σχεδόν άπειρος αριθμός πολύπλοκων μεταβλητών στη λήψη αποφάσεων σε ένα μικρό αριθμό παραγόντων αιτίας, οι οποίοι στη συνέχεια είναι πιο σημαντικοί και κατανοητοί. Στην ιδανική περίπτωση, ένα μοντέλο λήψης αποφάσεων θα πρέπει να περιλαμβάνει έναν βέλτιστο αριθμό μεταβλητών που θα εξηγούν το μοντέλο του πραγματικού φαινομένου. Ένα τέτοιο μοντέλο πρέπει να επιτρέπει στον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων να προβλέψει φαινόμενα πραγματικού κόσμου με πολύτιμη συνοχή και ακρίβεια.

### **iii. Η Μέθοδος της Αναμενόμενης Νομισματικής Αξίας (ANA)**

#### **1. Θεωρία**

Η λήψη αποφάσεων είναι η γνωστική διαδικασία επιλογής μιας πορείας δράσης μεταξύ των πολλαπλών εναλλακτικών επιλογών. Κάθε διαδικασία λήψης αποφάσεων παράγει μια τελική επιλογή. Αυτό που δεν έχει καταγραφεί είναι ότι πρέπει να ληφθούν κάποιες αποφάσεις για τα αποτελέσματα που θα προκύψουν στο μέλλον. Ωστόσο, υπάρχουν μερικά εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για

να βοηθήσουν στην λήψη περίπλοκων αποφάσεων, συγκεκριμένα, αναμενόμενη νομισματική αξία και ανάλυση ανάλυσης δέντρων αποφάσεων (Santos-Trigo, 2014).

## 2. Πρακτική

Σε ένα σύστημα ανισορροπίας ενιαίας τιμής, οι αποκλίσεις από το χρονοδιάγραμμα που έχει συμφωνηθεί την επόμενη μέρα προσφέρονται στην τιμή εξισορρόπησης της αγοράς, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη το σημάδι της ανισορροπίας. Ας εισαγάγουμε την αναμενόμενη νομισματική αξία (EMV), που ορίζεται στη θεωρία αποφάσεων ως το αναμενόμενο κέρδος λόγω μιας συγκεκριμένης απόφασης. Το EMV για τον παραγωγό αιολικής ενέργειας μπορεί να ληφθεί υπολογίζοντας την προσδοκία του Eq. δηλ.

$$E [r_k] = \lambda_k \bar{E} [E_k] + (\lambda_k B - \lambda_k \bar{D}) (E [E_k] - q_k D).$$

Οι τιμές της αγοράς ( $\lambda_k D$  και  $\lambda_k B$ ) θεωρούνται αρχικά γνωστές κατά το χρόνο  $t$ . Στη συνέχεια, αυτή η ισχυρή υπόθεση θα είναι χαλαρή. Όταν προσπαθείτε να μεγιστοποιήσετε την εξίσωση μπορεί να συμβούν τρία πιθανά συμβάντα,

1. Αν  $\lambda_k B > \lambda_k D$ , ο όρος  $(\lambda_k B - \lambda_k D)$  της Εξ. είναι θετική. Ως εκ τούτου, ο παραγωγός αυξάνει το κέρδος του / της με προσδοκία όταν αυτός ή αυτή έχει πλεόνασμα παραγωγής στο στάδιο εξισορρόπησης. Αυτό οδηγεί τον παραγωγό να μην πουλήσει τίποτα στο στάδιο της επόμενης ημέρας και να περιμένει να πουλήσει ολόκληρη την παραγωγή του στην εξισορροπητική ( $q_k D^* = 0$ ). 2. Αν  $\lambda_k B < \lambda_k D$ , ο όρος  $(\lambda_k B - \lambda_k D)$  της Εξ. είναι αρνητική. Σε αυτή την περίπτωση ο παραγωγός προσφέρει όλη του την ικανότητα ( $E^-$ ) στην αγορά της ημέρας μπροστά ( $q_k D^* =$

$E^-$ ). Με αυτόν τον τρόπο μεγιστοποιεί τον όγκο της αρνητικής ανισορροπίας από ό,τι μπορεί να εγκατασταθεί στο στάδιο εξισορρόπησης ( $qk_B = E_k - E^-$ ).

3. Αν  $\lambda k_B = \lambda k_D$ , ο όρος ( $\lambda k_B - \lambda k_D$ ) της Εξ. είναι άκυρη και οποιαδήποτε απόφαση οδηγεί στο ίδιο αναμενόμενο κέρδος.

Και τα τρία γεγονότα οδηγούν σε ασήμαντες λύσεις. Όταν δίνονται τιμές στην αγορά, η βέλτιστη προσφορά αγοράς  $qk_D$  καθορίζεται μόνο από πιθανότητα arbitrage, δεδομένου ότι το  $E[E_k]$  δεν επηρεάζει το βέλτιστο επίπεδό του.

Ας χαλαρώσουμε τώρα την υπόθεση των γνωστών και προκαθορισμένων τιμών. Πράγματι, θεωρούμε τόσο την ημερήσια πρόβλεψη όσο και την εξισορρόπηση των τιμών αγοράς ως τυχαίες μεταβλητές με γνωστή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Το EMV αποκτάται με την εισαγωγή προσδοκίας τιμής στην εξίσωση. δηλ.

$$E[r_k] = E[\lambda k_D] E[E_k] + E[\lambda k_B - \lambda k_D] (E[E_k] - qk_D).$$

Όσον αφορά τις καθοριστικές τιμές, ας διακρίνουμε τρεις πιθανές καταστάσεις:

1. Εάν  $E[\lambda k_B - \lambda k_D] > 0$ , η βέλτιστη προσφορά είναι  $qk_D^* = 0$ ;
2. Εάν  $E[\lambda k_B - \lambda k_D] < 0$ , η βέλτιστη προσφορά είναι  $qk_D^* = E^-$ ; και
3. Εάν  $E[\lambda k_B - \lambda k_D] < 0$ , κάθε προσφορά αποδίδει στο ίδιο EMV.

Ακόμη και όταν οι τιμές της αγοράς θεωρούνται ως τυχαίες μεταβλητές, το βέλτιστο επίπεδο των  $qk_D$  δεν επηρεάζεται από την πρόβλεψη της παραγωγής αιολικής ενέργειας. Πράγματι, το εν λόγω καθεστώς διακανονισμού προτρέπει τον

παραγωγό να προσφέρει, κατά το στάδιο της επόμενης ημέρας, τίποτα ή ολόκληρη την ικανότητα, ανάλογα με την αναμενόμενη αξία των τιμών της αγοράς.

## b. Μέθοδος και Υλικό

Έπειτα από το βιβλιογραφικό κομμάτι ακολουθεί το εμπειρικό κομμάτι σχετικά με την λήψη αποφάσεων σε πολύπλοκα ζητήματα και προβλήματα αποφάσεων, κυρίως με την χρήση του αλγόριθμου επίλυσης δέντρου αποφάσεων, μια τεχνική που χρησιμοποιείται ευρέως στην διοικητική επιστήμη. Στην συνέχεια παραδίδονται βασικά παραδείγματα σχετικά με το πώς τα δέντρα αποφάσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιλυθούν πολύπλοκα προβλήματα αποφάσεων, υπολογίζοντας κατάλληλα την μέγιστη ANA έτσι ώστε να βρεθούν οι βέλτιστες εναλλακτικές λύσεις για κάθε πρόβλημα, σύμφωνα με την μεθοδολογία του αλγόριθμου επίλυσης δέντρων αποφάσεων.

**Βήμα 1:** Εντοπισμός ενός κόμβου στα δεξιά : επιλέξτε ένα κόμβο που δεν προηγείται άλλων κόμβων. Οι κόμβοι αυτοί, συνήθως, βρίσκονται στην άκρη δεξιά του διαγράμματος. Ένας τέτοιος κόμβος απεικονίζει ένα από τα γεγονότα που θα συμβούν τελευταία μέρα στον ορίζοντα προγραμματισμού.

**Βήμα 2.** Προσδιορισμός της ANA που συνδέεται με τον κόμβο, δηλαδή της αναμενόμενης απόδοσης σε αυτό το σημείο του δέντρου αποφάσεων. Οι αποφάσεις αξιολογούνται διαφορετικά από τα αβέβαια γεγονότα.

- Αν ο κόμβος αντιπροσωπεύει απόφαση, επιλέγεται η εναλλακτική λύση με τη μεγαλύτερη ANA.
- Αν ο κόμβος αντιπροσωπεύει αβέβαιο γεγονός, υπολογίζεται κατά μέσο όρο την απόδοση στα διάφορα πιθανά αποτελέσματα, χρησιμοποιώντας τον τύπο της ANA.

**Βήμα 3:** Αντικατάσταση του κόμβου με την ANA του, δηλαδή η αφαίρεση του κόμβου του και τους συνδεδεμένους με αυτόν κλάδους από το δέντρο αποφάσεων και τη τοποθέτησή στη θέση του την ANA που μόλις υπολογίστηκε. Εναλλακτικά, η ANA μπορεί να γραφεί πάνω από τον κόμβο και να παραβλεφθούν όλοι οι κλάδοι στα δεξιά του.

**Βήμα 4:** Επιστροφή στο **βήμα 1** : Το δέντρο αποφάσεων εξακολουθεί και ξεδιπλώνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα βήματα μέχρις ότου το διάγραμμα έχει αναλυθεί πλήρως και έχει προσδιοριστεί μια βέλτιστη εναλλακτική λύση για την αρχική απόφαση.

Ακολουθούν στην συνέχεια κάποια παραδείγματα υλοποίησης του παραπάνω αλγορίθμου. Η ιδέα ενός δέντρου αποφάσεων είναι να διαιρέσαμε το σύνολο δεδομένων σε μικρότερα σύνολα δεδομένων βάσει των περιγραφικών χαρακτηριστικών, μέχρι να φτάσουμε σε ένα αρκετά μικρό σύνολο που περιέχει σημεία δεδομένων που εμπίπτουν σε μία ετικέτα (Njeri, 2017), και για τα πρώτα δύο παραδείγματα υποθέτουμε πως δεν είναι γνωστές οι πιθανότητες μετάβασης, οπότε παρέχεται μόνο η κατασκευή του δέντρου απόφασης χωρίς πιθανότητες.

### c. Αποτελέσματα

**Παράδειγμα 1: Κατασκευή δέντρου απόφασης (Ανακάλυψη ενός πλανήτη)**

Η κατασκευή ενός δέντρου απόφασης εκτελείται με βάση όλα τα πιθανά σενάρια για την έκβαση ενός εγχειρήματος, και για αρχή παρουσιάζεται ένα παράδειγμα που έχει να κάνει με το εγχείρημα ζωής σε ένα άλλο πλανήτη ( Urasana, 2019).

Έστω το σενάριο πως ένας νέος πλανήτης ανακαλύπτεται από κάποιο τηλεσκόπιο και από μια ομάδα αστρονόμων, και μια πληθώρα πολλών διαφορετικών ερωτημάτων μπορούν να προκύψουν για αυτόν τον πλανήτη, το πιο σημαντικό από τα οποία ενδέχεται να είναι το ερώτημα αν υπάρχει ζωή, και αν και εφόσον υπάρχει, μπορεί αυτός ο πλανήτης να αποτελέσει μια νέα Γη; Η απάντηση σε ένα τέτοιο ερώτημα ασφαλώς θα είχε μεγάλη σημασία για τον ανθρώπινο πολιτισμό.

Ωστόσο, υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός παραγόντων μέσω των οποίων θα πρέπει να επεξεργαστούν οι αστρονόμοι προτού καταλήξουν σε μια καθοριστική απόφαση. Οι παράγοντες αυτοί είναι πάρα πολλοί, αλλά για αυτό το παράδειγμα θα θεωρήσουμε τους παρακάτω 4 παράγοντες-ερωτήματα.

(Α) Ποια είναι η θερμοκρασία του πλανήτη και αν είναι κατάλληλη έτσι ώστε να μπορέσουν να κατοικήσουν σε αυτόν άνθρωποι.

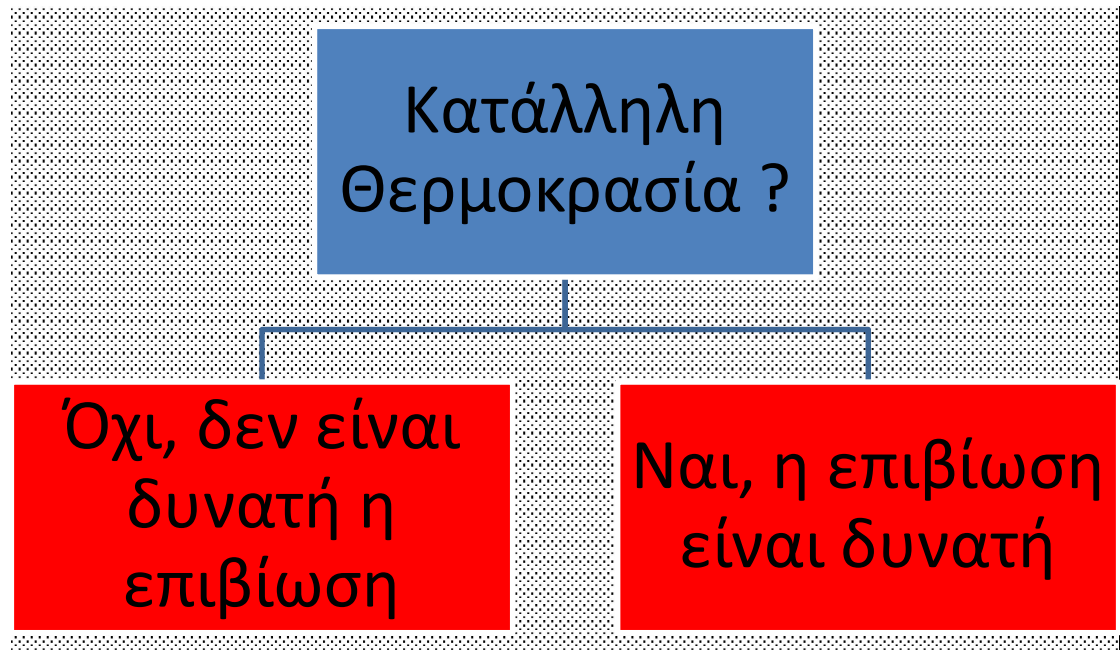
(Β)Υπάρχει ή όχι νερό στον πλανήτη, καθώς το νερό είναι το σημαντικότερο στοιχείο που δημιουργεί την ζωή έτσι όπως έχει διαμορφωθεί στον πλανήτη μας.

(Γ) Υπάρχει ήδη χλωρίδα και πανίδα στον πλανήτη; Αν ναι, πως επιβιώνει σε ένα τέτοιο κλίμα;

(Δ) Αν υπάρχει νερό, και οι κατάλληλες θερμοκρασίες έτσι ώστε να ευδοκιμήσει η ζωή μέσω της χλωρίδας και της πανίδας, τότε ποιο είναι το περιβάλλον του πλανήτη; Υπάρχει συχνά καλός καιρός ή περιβάλλεται συχνά από καταιγίδες, τυφώνες και άλλα ακραία καιρικά φαινόμενα;

Στην συνέχεια δημιουργείται ένα δέντρο απόφασης για να εξεταστεί η πιθανότητα πως έχει ανακαλυφθεί ένας πλανήτης με παρόμοιες συνθήκες σαν την Γη, ενώ για το συγκεκριμένο παράδειγμα δεν θεωρούνται γνωστές οι πιθανότητες να ισχύει κάθε σενάριο. Η αρχή του δέντρου απόφασης (δηλαδή ο «κορμός» του) μπορεί να ξεκινήσει με βάση το πρώτο ερώτημα, το οποίο δεν είναι άλλο από το ποια είναι η μέση θερμοκρασία του πλανήτη και αν αυτή είναι βιώσιμη για να υπάρξει νερό. Οπότε, ο κορμός του δέντρου απόφασης μπορεί να είναι το επόμενο σχήμα, με βάση το οποίο μπορεί να υπάρχει πολύ

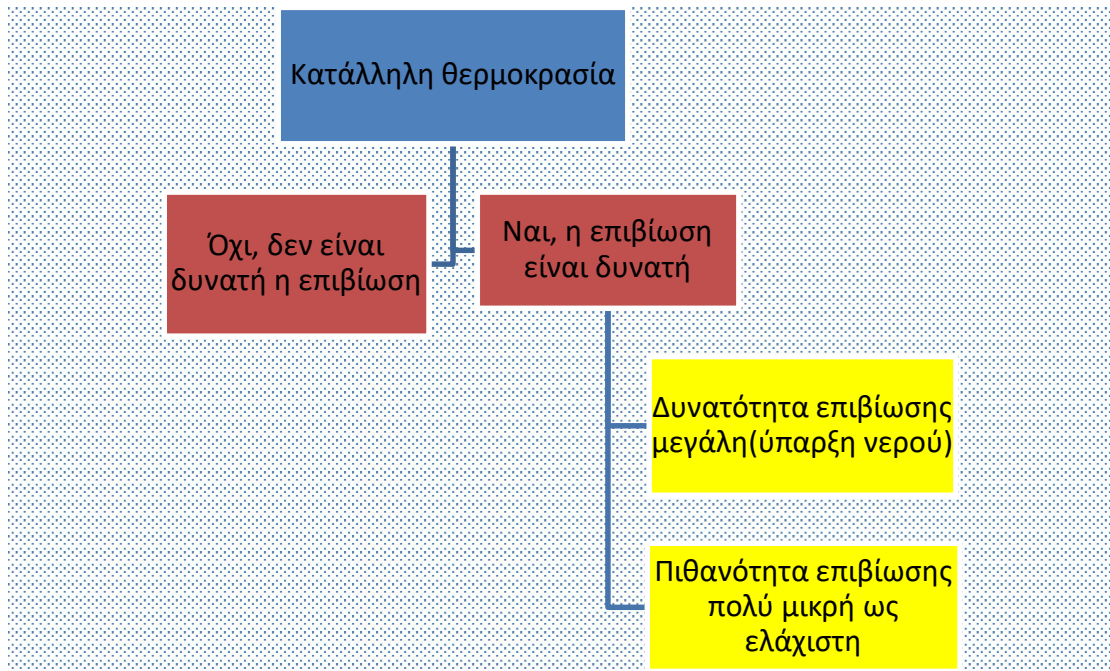
υψηλή ή χαμηλή θερμοκρασία έτσι ώστε να είναι αδύνατο να υπάρξει επιβίωση, ή οι θερμοκρασίες είναι κατάλληλες για την ύπαρξη ζωής.



Εικόνα 1: Κορμός ενός δέντρου απόφασης (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

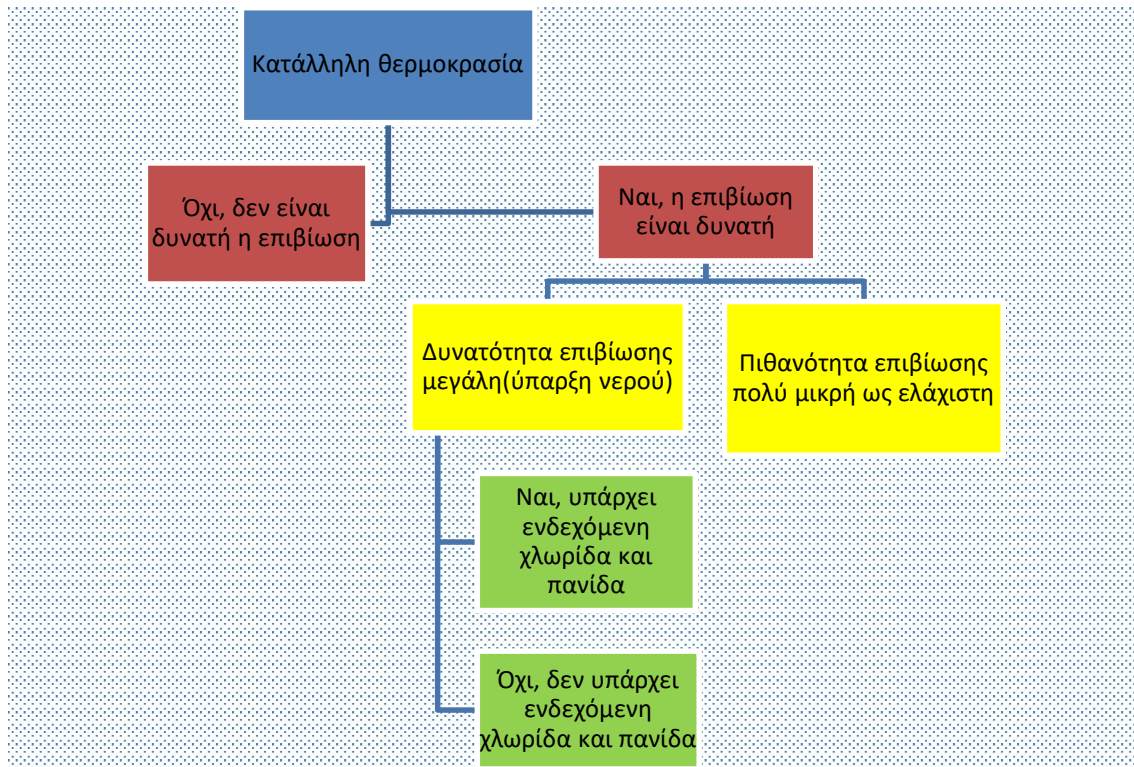
Στην συνέχεια κατασκευάζονται τα πρώτα «κλαδιά» του δέντρου απόφασης, με βάση το ερώτημα αν υπάρχει νερό, και αν υπάρχει, αν η πιθανότητα ύπαρξης ζωής είναι αρκετά μεγάλη (εφόσον φυσικά υπάρχει νερό στον πλανήτη) ή αμελητέα (σχεδόν μηδενική), οπότε η συνέχεια του δέντρου απόφασης μπορεί να είναι το ακόλουθο σχήμα.





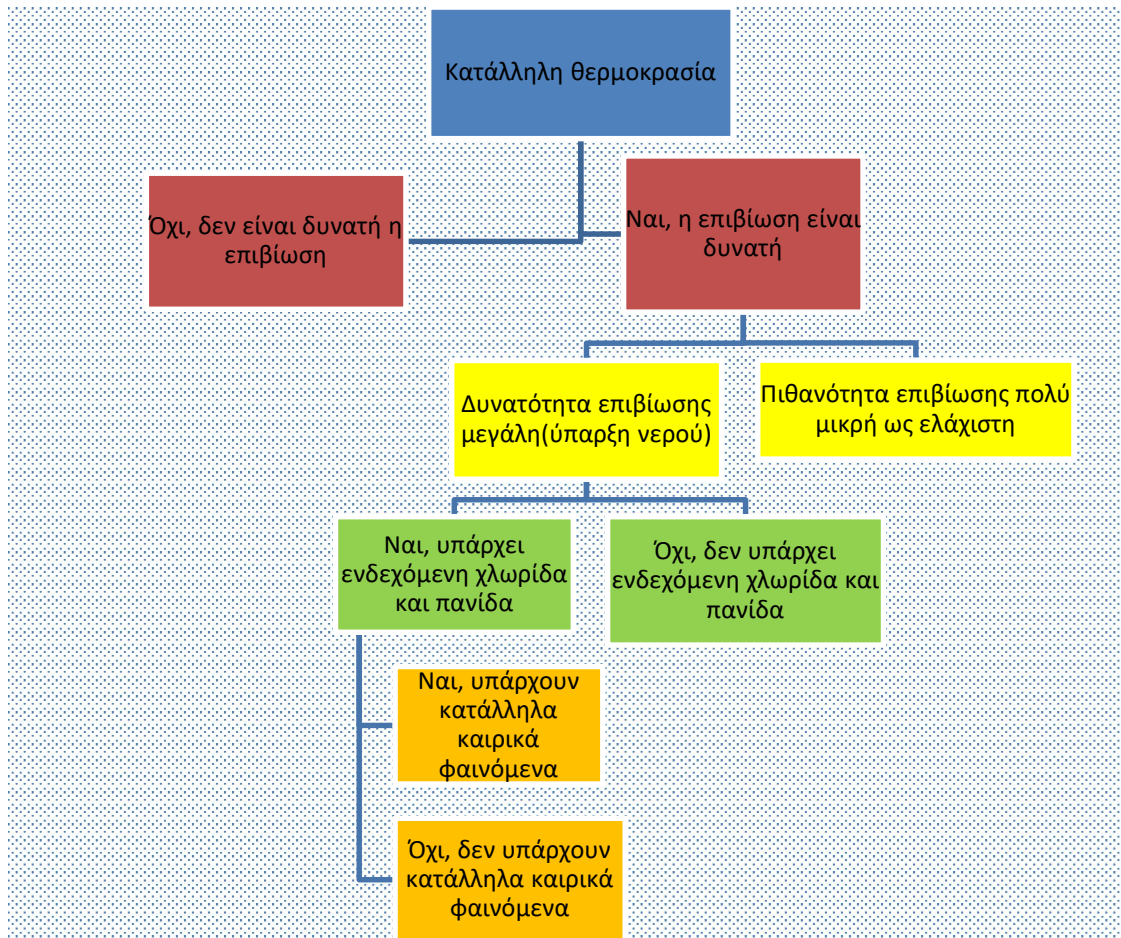
Εικόνα 2: Δημιουργία κλαδιών (κόμβων) του δέντρου απόφασης με βάση το ερώτημα 2 (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Αφού διαπιστώθηκε πως υπάρχει νερό, στην συνέχεια εξετάζεται αν υπάρχει ήδη χλωρίδα και πανίδα στον πλανήτη, οπότε στην συνέχεια προκύπτουν τα επόμενα κλαδιά του δέντρου απόφασης όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



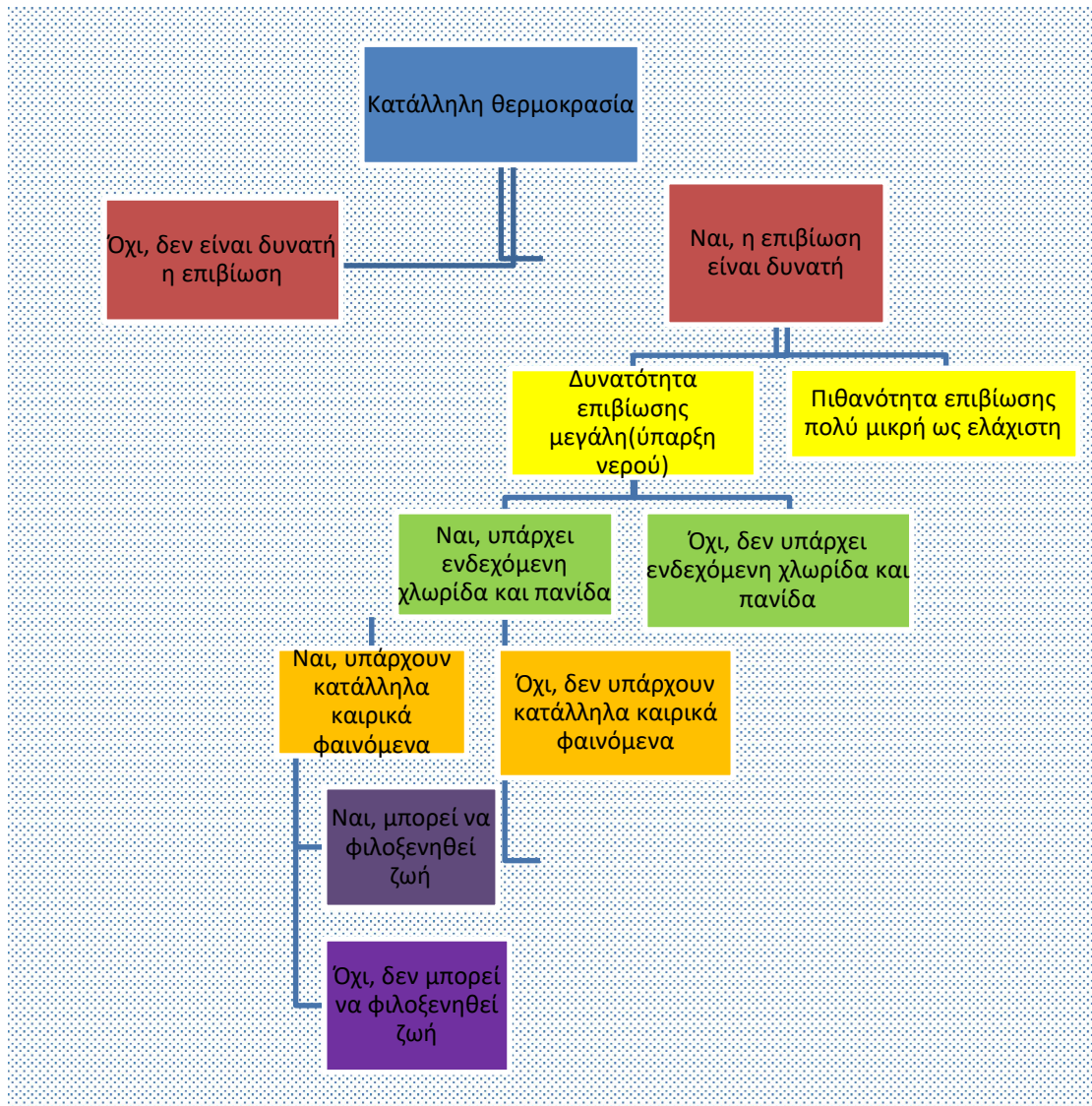
Εικόνα 3: Δημιουργία κλαδιών του δέντρου απόφασης με βάση το ερώτημα 3 (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Στην συνέχεια εξετάζεται το τελευταίο ερώτημα σχετικά με το οποίο αν ο πλανήτης έχει τις κατάλληλες συνθήκες για την ύπαρξη ζωής, τότε τα καιρικά του φαινόμενα είναι κατάλληλα για να φιλοξενήσει ανθρώπινη ζωή; Με βάση το τελευταίο αυτό ερώτημα, κατασκευάζονται τα επόμενα κλαδιά.



Εικόνα 4: Δημιουργία κλαδιών του δέντρου απόφασης με βάση το ερώτημα 4 (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Τέλος, αφού εξετάστηκαν ένας προς ένας όλοι οι παραπάνω παράγοντες, το μόνο συμπέρασμα που προκύπτει είναι αν είναι δυνατόν να υπάρξει ανθρώπινη ζωή στον πλανήτη με βάση τις προκαθορισμένες προϋποθέσεις (κανονική θερμοκρασία, ύπαρξη νερού, κατάλληλα καιρικά φαινόμενα και γενικά ιδανικές συνθήκες για την ύπαρξη ζωής). Οπότε, το τελικό δέντρο απόφασης μπορεί να είναι το επόμενο σχήμα, όπου ουσιαστικά αποτελεί την μίξη όλων των προηγούμενων «κλαδιών» τα οποία αναπαριστούν την μετάβαση από τα διάφορα σενάρια ως προς την τελική απόφαση, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι η απάντηση στο ερώτημα αν μπορεί να υπάρξει ζωή σε ένα πλανήτη που ανακαλύφθηκε πρόσφατα.



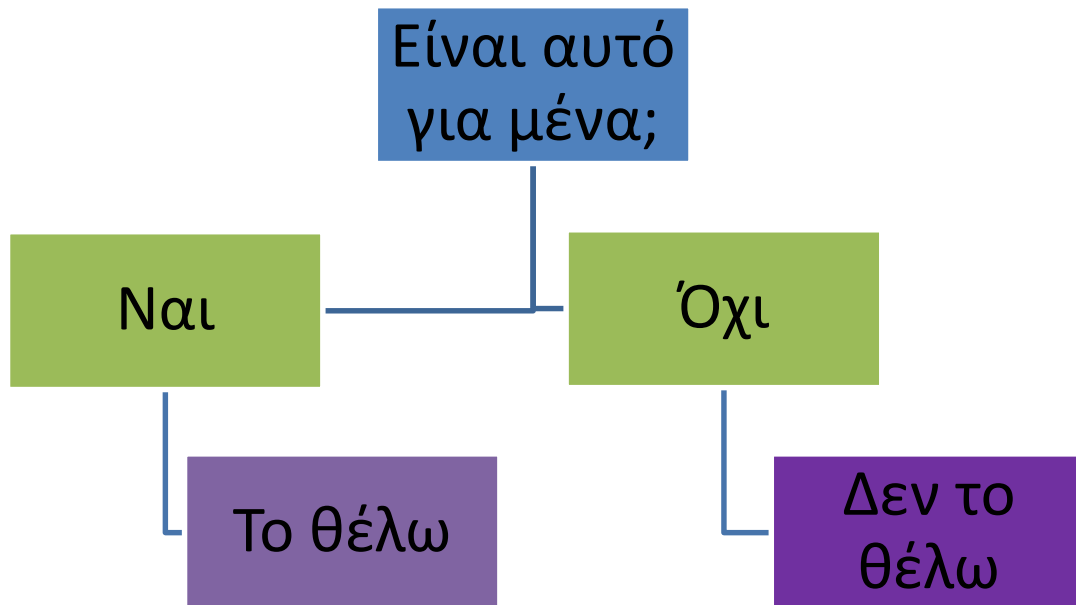
Εικόνα 5: Τελική μορφή του δέντρου απόφασης για το παράδειγμα σχετικά με την ύπαρξη ζωής σε ένα πλανήτη που ανακαλύφθηκε σχετικά πρόσφατα (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Η κατασκευή ενός δέντρου απόφασης μπορεί να είναι αρκετά απλή ή σύνθετη, ανάλογα με το πόσα ερωτήματα-παράγοντες υπάρχουν για να φτάσει κάποιος στην τελική απόφαση. Το προηγούμενο παράδειγμα είχε 4 παράγοντες και συνεπώς η κατασκευή του δέντρου απόφασης ήταν σχετικά απλή, ενώ άλλες περιπτώσεις είναι ακόμα απλούστερες, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί (Njeri, 2017)

### Παράδειγμα 2: Το δίλημμα της γάτας

Μια κατοικίδια γάτα βρίσκεται στο στάδιο ενηλικίωσής της και ενδιαφέρεται να ανακαλύψει ποια λεία είναι εδώδιμη για αυτήν και ποια όχι. Συνεπώς, όταν κυνηγάει

κάποια λεία (για παράδειγμα, ποντίκια ή καναρίνια), αφού πιάσει την λεία θα πρέπει να αποφασίσει στην συνέχεια αν θα την φάει ή αν θα την απορρίψει (κάτι το οποίο μπορεί να εκληφθεί ως «απόφαση»). Το σκεπτικό με το οποίο λοιπόν η γάτα θα αποδεχθεί την λεία σαν φαγητό ή αν θα την απορρίψει μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά με ένα απλό δέντρο απόφασης, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Εικόνα 6: Δέντρο απόφασης για το δίλημμα της γάτας (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Γενικότερα, όσο λιγότερες παραμέτρους και παράγοντες έχει ένα πρόβλημα, τόσο πιο εύκολο είναι να κατασκευασθεί το αντίστοιχο δέντρο απόφασης. Όταν ο αριθμός των ερωτημάτων είναι αρκετά μικρός το δέντρο απόφασης μπορεί να κατασκευαστεί χειροκίνητα, ενώ όσο μεγαλώνει ο αριθμός των παραμέτρων κάτι τέτοιο είναι πρακτικά ανέφικτο με το χέρι, οπότε για την κατασκευή του δέντρου απόφασης σε προβλήματα με πολλές παραμέτρους χρησιμοποιείται εξειδικευμένο λογισμικό, και τα δύο προηγούμενα παραδείγματα ήταν γενικά για αποφάσεις που λαμβάνει κάποιος στην ζωή του.

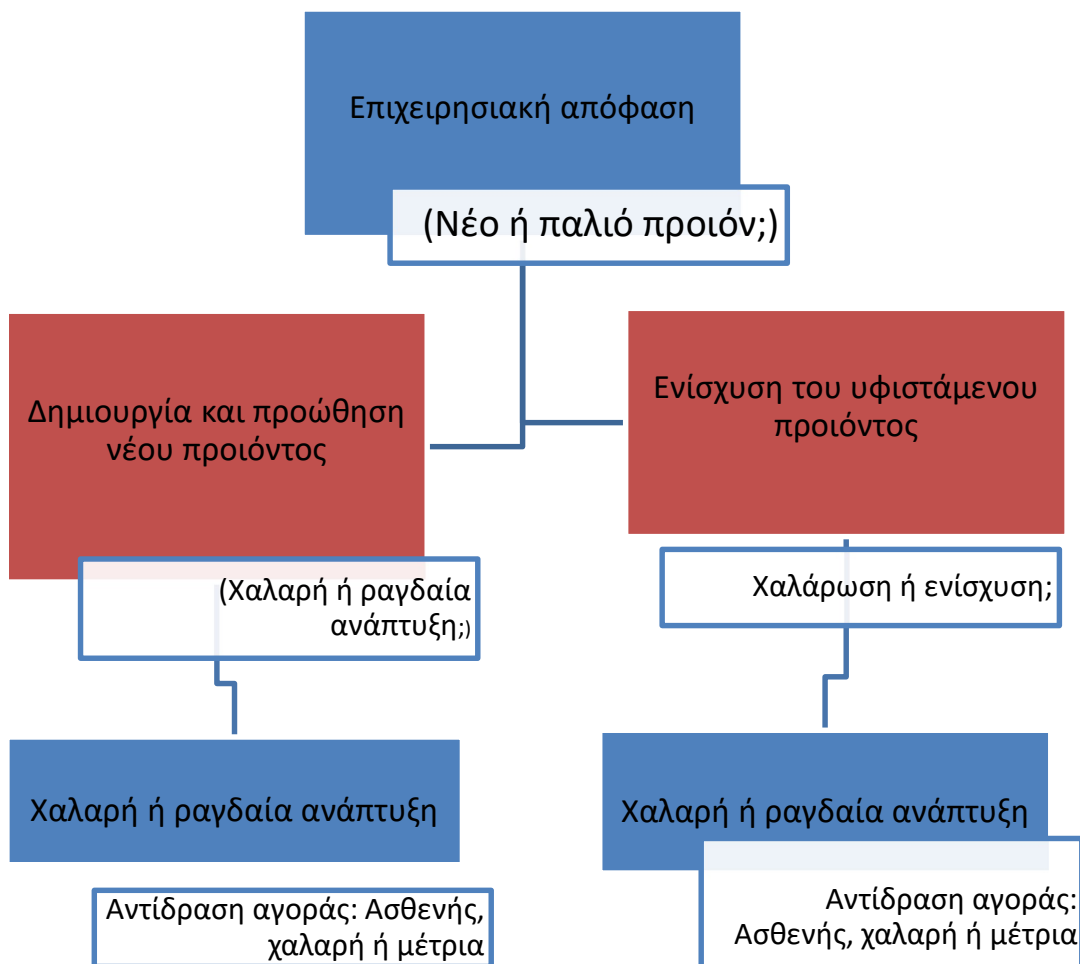
Στην πράξη όμως, τα περισσότερα προβλήματα γύρω από τα δέντρα απόφασης έχουν να κάνουν με πραγματικές επιχειρηματικές αποφάσεις που έχουν να πάρουν επιχειρήσεις ανεξαρτήτως μεγέθους και κλάδου δραστηριοποίησης έτσι ώστε να αυξήσουν το αντίστοιχο μερίδιο στην αγορά και να διατηρήσουν το ανταγωνιστικό τους πλεονέκτημα, οπότε για την συνέχεια ακολουθεί ένα παράδειγμα το οποίο συναντάται αρκετά συχνά στο επιχειρησιακό περιβάλλον και στην διαμόρφωση προϊόντων/υπηρεσιών, το οποίο είναι αρκετά ρεαλιστικό

για οποιαδήποτε επιχείρηση δραστηριοποιείται στο εμπόριο αγαθών και υπηρεσιών (Mind Tools, 2018).

### **Παράδειγμα 3: Επιχειρησιακή απόφαση**

Μια επιχείρηση (X) παράγει το προϊόν (Y) σε μια αγορά η οποία πλέον δεν γνωρίζει τόση ζήτηση για το συγκεκριμένο προϊόν και η επιχείρηση θα πρέπει να αποφασίσει αν θα διαμορφώσει καλύτερα το συγκεκριμένο προϊόν ή αν θα δημιουργήσει ένα καινούργιο έτσι ώστε να διαφοροποιήσει το χαρτοφυλάκιό της. Σε περίπτωση που επιλέξει να προωθήσει ένα καινούργιο προϊόν, αυτό μπορεί να γίνει είτε με «χαλαρή» προώθηση είτε με «ραγδαία» προώθηση (αναφερόμενοι σε χρονικά διαστήματα), ενώ η αντίδραση της αγοράς από την προώθηση αυτού του προϊόντος ενδέχεται να είναι ασθενής, μέτρια ή ισχυρή.

Σε περίπτωση που επιλέξει να διαμορφώσει το παλιό της προϊόν, αυτό μπορεί να γίνει είτε με την «χαλάρωσή» του από θέμα τιμής και ποιότητας είτε με την « ενίσχυσή» του από θέμα τιμής και ποιότητας ενώ η αντίδραση της αγοράς από την προώθηση αυτού του προϊόντος ενδέχεται επίσης να είναι ασθενής, μέτρια ή ισχυρή. Με βάση τα παραπάνω, η επιχείρηση έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο αποφάσεις, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να την οδηγήσει είτε σε επιτυχή είτε σε ανεπιτυχή έκβαση. Οπότε, μπορεί να κατασκευαστεί το επόμενο δέντρο απόφασης που αποτελεί μια γραφική απεικόνιση των αποφάσεων που μπορεί να πάρει η επιχείρηση.



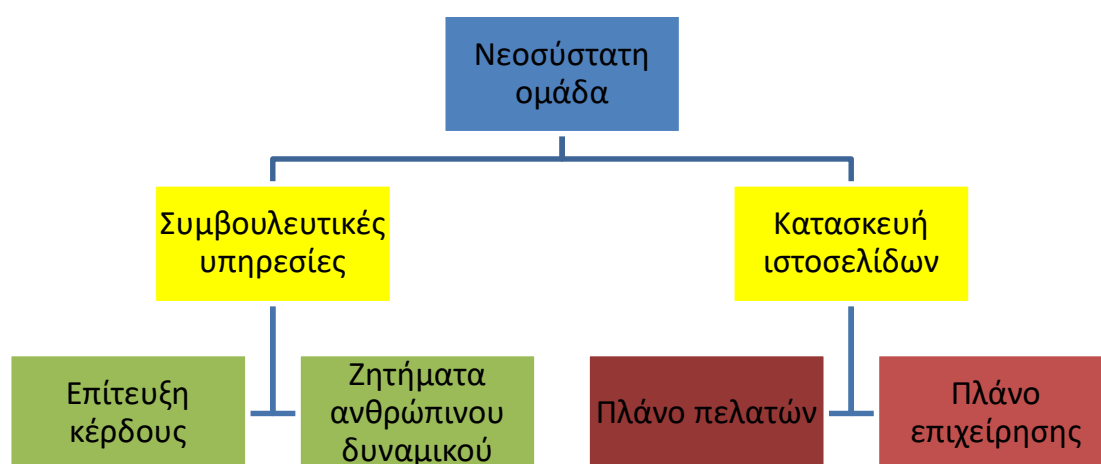
Εικόνα 7: Δέντρο απόφασης για την δημιουργία ενός νέου προϊόντος ή την ενίσχυση του παλιού (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα για την λήψη αποφάσεων στο επιχειρηματικό περιβάλλον είναι η περίπτωση μιας νεοσύστατης ομάδας φιλόδοξων επιχειρηματιών για την δημιουργία μιας επιχείρησης σχετικά με την επιλογή πεδίου δραστηριοτήτων.

#### Παράδειγμα 4: Απόφαση δραστηριοτήτων για μια νεοσύστατη επιχείρηση.

Μια νεοσύστατη ομάδα επιχειρηματιών έχει σαν στόχο να ανοίξει μια επιχείρηση η οποία θα δραστηριοποιηθεί είτε στον τομέα παροχής συμβουλευτικών υπηρεσιών (consulting services) είτε στον τομέα της πληροφορικής και της ανάπτυξης λογισμικών και την δημιουργία ιστοσελίδων. Στην πρώτη περίπτωση, οι επιχειρησιακές συμβουλές μπορούν να είναι είτε ως προς την λήψη αποφάσεων για την επίτευξη κέρδους είτε ως προς τις συμβουλές για την διαχείριση του ανθρώπινου δυναμικού επιχειρήσεων. Στην δεύτερη περίπτωση οι ιστοσελίδες των πελατών μπορούν να δημιουργούνται είτε με βάση το δικό τους πλάνο είτε με βάση το πλάνο της ίδιας της επιχείρησης ως προς την επιλογή γραφικών, πλαισίων κλπ. Με βάση τα παραπάνω, να κατασκευαστεί το δέντρο απόφασης για την νεοσύστατη ομάδα επιχειρηματιών με βάση τις δεδομένες επιλογές.

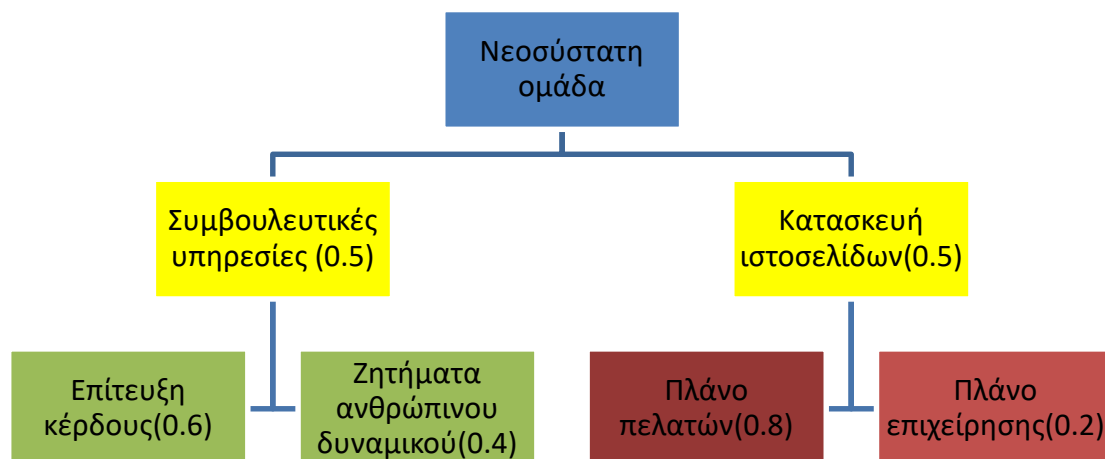
Το δέντρο απόφασης για το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να είναι το επόμενο σχήμα, όπου όλες οι δυνατές επιλογές παρουσιάζονται αναλυτικά.



Εικόνα 8: Δέντρο απόφασης για την δημιουργία μιας επιχείρησης και την επιλογή τομέα χωρίς συγκεκριμένες πιθανότητες (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)



Στο παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να προσθέσουμε και τις πιθανότητες επίτευξης κάθε σχεδίου. Υποθέτοντας για παράδειγμα πως η ομάδα επιχειρηματιών έχει ίσες πιθανότητες να επιλέξει το πεδίο δραστηριοτήτων (50-50) και στην συνέχεια πως αν επιλέξει την πρώτη περίπτωση, οι επιχειρησιακές συμβουλές μπορούν να είναι είτε ως προς την λήψη αποφάσεων για την επίτευξη κέρδους με πιθανότητα έστω 60% είτε ως προς τις συμβουλές για την διαχείριση του ανθρώπινου δυναμικού επιχειρήσεων με πιθανότητα 40%. Στην δεύτερη περίπτωση οι ιστοσελίδες των πελατών μπορούν να δημιουργούνται είτε με βάση το δικό τους πλάνο με πιθανότητα έστω 80% είτε με βάση το πλάνο της ίδιας της επιχείρησης ως προς την επιλογή γραφικών, πλαισίων κλπ. 20%. Τότε, το δέντρο απόφασης μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα έτσι ώστε να περιλαμβάνει αυτές τις πιθανότητες, οι οποίες παρουσιάζονται στο αντίστοιχο πλαίσιο.



Εικόνα 9: Δέντρο απόφασης για την δημιουργία μιας επιχείρησης και την επιλογή τομέα με συγκεκριμένες πιθανότητες (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Χωρίς να λάβουμε υπόψη κάποια κόστη για την δημιουργία της επιχείρησης, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις πιθανότητες του αντίστοιχου πεδίου δραστηριοτήτων στο οποίο θα καταλήξει τελικά η επιχείρηση, καθώς τα ενδεχόμενα επιλογής του πεδίου δραστηριοτήτων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, οπότε οι αντίστοιχες πιθανότητες ισούνται

με το γινόμενο των πιθανοτήτων των ενδεχομένων να επιλεγεί κάθε κατάσταση. Συγκεκριμένα για το παράδειγμα, υπολογίζονται οι κάτωθι πιθανότητες:

$P(\text{Η επιχείρηση θα ασχοληθεί με συμβουλευτικές υπηρεσίες ως προς την επίτευξη κέρδους})=0.5*0.6=0.3$

$P(\text{Η επιχείρηση θα ασχοληθεί με συμβουλευτικές υπηρεσίες ως προς την διαχείριση ζητημάτων ανθρώπινου δυναμικού})=0.5*0.4=0.2$

$P(\text{Η επιχείρηση θα ασχοληθεί με την κατασκευή ιστοσελίδων ανάλογα με το πλάνο των πελατών})=0.5*0.8=0.4$

$P(\text{Η επιχείρηση θα ασχοληθεί με την κατασκευή ιστοσελίδων ανάλογα με το δικό της πλάνο})=0.5*0.2=0.1$

Προφανώς οι παραπάνω πιθανότητες αθροίζουν στην μονάδα, καθώς  $0.3+0.2+0.4+0.1=1$  που περιλαμβάνει το σύνολο όλων των δυνατών περιπτώσεων που έχει να διαλέξει η ομάδα των επιχειρηματιών.

Ωστόσο, αν και τα ποσοστά εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη, τόσο συχνά εμφανίζονται και τα αντίστοιχα κόστη που απαιτούνται για μια απόφαση, και όσο περισσότερο γνωστές είναι οι πιθανότητες επιτυχίας-αποτυχίας για μια απόφαση τόσο πιο εύκολο είναι να εκτιμηθούν τα ενδεχόμενα οφέλη-απώλειες ως προς την λήψη της. Στην συνέχεια ακολουθούν λυμένες ασκήσεις και παραδείγματα ως προς την κατασκευή δέντρου αποφάσεων και την εκτίμηση της ANA από αρκετές διαφορετικές οπτικές γωνίες και επιχειρηματικές διαδικασίες.

#### **Παράδειγμα 5: Απόφαση για picnic**

Ένα ζευγάρι επιθυμεί να κανονίσει να πάει εκδρομή και να οργανώσει picnic, ανάλογα φυσικά με τις καιρικές συνθήκες και με την προϋπόθεση πως ο καιρός είναι κατάλληλος για εκδρομή στην εξοχή. Έστω πως η πιθανότητα να πάνε για picnic είναι 0.65 και με βάση τις πληροφορίες από τα υπάρχοντα δεδομένα για τον καιρό, υπάρχει πιθανότητα 70% ο καιρός να είναι κακός (συνεπώς, 30%) να είναι καλός. Έπειτα,

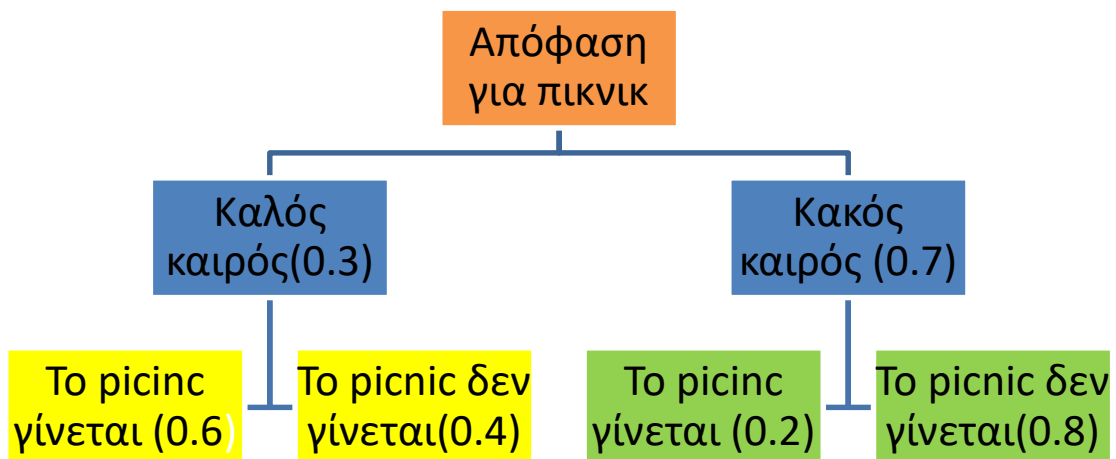
- Σε περίπτωση καλού καιρού, το picnic θα γίνει με πιθανότητα 60%(δεν θα γίνει με πιθανότητα 40%)

- Σε περίπτωση κακού καιρού, το picnic θα γίνει με πιθανότητα 20%(δεν θα γίνει με πιθανότητα 80%)

Να κατασκευαστεί το αντίστοιχο δέντρο απόφασης και να εκτιμηθεί η πιθανότητα το ζευγάρι να οργανώσει το picnic.

### ΛΥΣΗ

Με βάση τα δοθέντα δεδομένα, μπορούμε να κατασκευάσουμε εύκολα το επόμενο δέντρο απόφασης στο οποίο παρουσιάζονται αναλυτικά οι εκτιμώμενες πιθανότητες



Εικόνα 10: Δέντρο απόφασης για την οργάνωση μιας εκδρομής με picnic με συγκεκριμένες πιθανότητες (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Η συνολική πιθανότητα το ζευγάρι να οργανώσει εκδρομή με picnic ισούται με

$$P(\text{Έχει καλό καιρό και το ζευγάρι πάει για picnic}) + P(\text{Δεν έχει καλό καιρό και το ζευγάρι πάει για picnic}) = 0.3 * 0.6 + 0.7 * 0.2 = 0.18 + 0.14 = 0.32 (32\%).$$

### Παράδειγμα 6: Απόφαση ενός υπαλλήλου για φαγητό

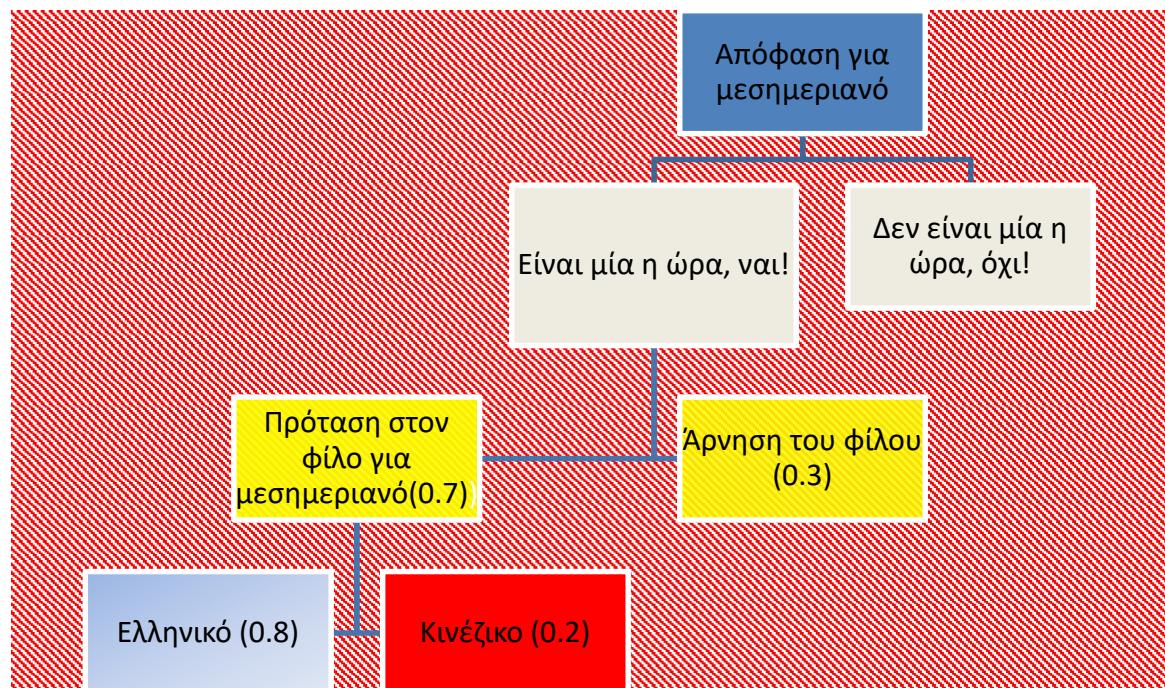
Ένας υπάλληλος βρίσκεται στο γραφείο του και περιμένει την ώρα που θα πάει για διάλειμμα έτσι ώστε να μπορέσει να φάει μεσημεριανό, και η ώρα της επιχείρησης που κάνουν διάλειμμα είναι αυστηρά στις 13:00. Ωστόσο, επειδή ο υπάλληλος πεινάει, κοιτάζει το ρολόι του, και σε περίπτωση που έχει περάσει 13:00 μπορεί να πάει να φάει. Στην

συνέχεια, ρωτάει τον φίλο του αν και αυτός επιθυμεί να πάνε να φάνε μαζί, ο οποίος θα απαντήσει καταφατικά με πιθανότητα 70% και αρνητικά με πιθανότητα 30%.

Κατόπι, ο υπάλληλος ρωτάει τον φίλο του αν θα φάνε σε ελληνικό ή κινέζικο εστιατόριο, όπου ο άλλος έχει 80% πιθανότητα να επιλέξει ελληνικό εστιατόριο. Να κατασκευαστεί το αντίστοιχο δέντρο απόφασης και να εκτιμηθεί η πιθανότητα οι δύο φίλοι να πάνε σε ελληνικό εστιατόριο.

## ΛΥΣΗ

Με βάση τα δοθέντα δεδομένα, μπορούμε να κατασκευάσουμε εύκολα το επόμενο δέντρο απόφασης στο οποίο παρουσιάζονται αναλυτικά οι εκτιμώμενες πιθανότητες



Εικόνα 11: Δέντρο απόφασης για την απόφαση μεσημεριανού φαγητού με συγκεκριμένες πιθανότητες (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Η συνολική πιθανότητα οι δύο φίλοι να πάνε σε ελληνικό εστιατόριο για το μεσημεριανό τους ισούται με

$$P(\text{Ο φίλος αποδέχεται και πάνε σε ελληνικό εστιατόριο})=0,7*0,8=0,56(56\%)$$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα να πάνε σε κινέζικο ισούται με

$$P(\text{Ο φίλος αποδέχεται και πάνε σε ελληνικό εστιατόριο})=0,7*0,2=0,14(14\%)$$

Αν στο επόμενο παράδειγμα προσθέσουμε και τα αντίστοιχα κόστη, υποθέτοντας για παράδειγμα πως στο Ελληνικό εστιατόριο η μερίδα φαγητού κοστίζει κατά μέσο όρο 15 € και στο κινέζικο 20€, τότε η Αναμενόμενη Χρηματική Απόδοση (ANA) για το ελληνικό εστιατόριο θα είναι  $0,56*15=8,4€$  για κάθε υπάλληλο, ενώ για το κινέζικο θα είναι  $0,14*20=3,2€$ , οπότε υπό αυτήν την άποψη θα συνέφερε τους υπαλλήλους να πάνε για μεσημεριανό στο κινέζικο εστιατόριο.

Τα δέντρα απόφασης είναι σημαντικά στη μηχανική μάθηση, καθώς όχι μόνο μας επιτρέπουν να απεικονίσουμε έναν αλγόριθμο για την επιλογή μιας απόφασης, αλλά είναι ένας τύπος μηχανικής μάθησης (machine learning, Skeritt, 2018), ενώ αν είναι γνωστά τα κόστη και οι ανάλογες πιθανότητες, μπορούμε μέσω κατάλληλου λογισμικού (πχ, μέσω Python, R Project κ.α.) να υπολογίσουμε τις πιθανότητες και τα οφέλη/απώλειες για πολύπλοκα ζητήματα αποφάσεων. Ωστόσο, επειδή αυτό ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσης εργασίας, θα παρουσιαστούν στην συνέχεια ορισμένα σχετικά απλά λυμένα παραδείγματα ως προς την λήψη πολύπλοκων αποφάσεων χρησιμοποιώντας τα δέντρα απόφασης και την εκτίμηση της ANA.

## Λυμένες ασκήσεις και παραδείγματα στην λήψη πολύπλοκων αποφάσεων

### **Παράδειγμα 1: Επίλυση δέντρου απόφασης για την έρευνα σχετικά με την κατασκευή ενός φαρμάκου**

Η φαρμακευτική επιχείρηση GIANT S.A. σκοπεύει να χρησιμοποιήσει μια ερευνητική ομάδα για να δημιουργήσει και να προωθήσει ένα φάρμακο για την κατάθλιψη (anti-depressive drug) και ο αντιπρόεδρος της επιχείρησης πρέπει να λάβει μια κατάλληλη απόφαση για την δημιουργία ενός τέτοιου φαρμάκου. Συγκεκριμένα, υπολογίζει πως το συνολικό κόστος θα πρέπει να ανέρχεται στα 100.000€ χωρίς να υπάρχει κάποια προηγούμενη εγγύηση πως το φάρμακο θα έχει απόλυτη επιτυχία, ενώ η ίδια η επιχείρηση εκτιμά πως η πιθανότητα το φάρμακο να είναι αποτελεσματικό είναι μοιρασμένη στα δύο (50% να είναι αποτελεσματικό και 50% να είναι αναποτελεσματικό).

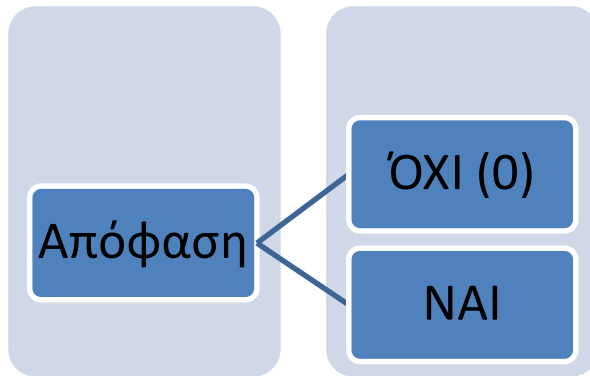
Σε περίπτωση που η ερευνητική ομάδα καταφέρει και βρει κάποιο φάρμακο, μετά θα πρέπει να αποφασιστεί αν θα το παράγει η ίδια η επιχείρηση ή αν θα πουλήσουν τα δικαιώματα σε κάποιο ερευνητικό εργαστήριο για 300.000€. Σε περίπτωση που παράγει η ίδια το προϊόν και η παραγωγή είναι ομαλή, η επιχείρηση θα έχει μια απόδοση 500000€. Ωστόσο, υπάρχει πιθανότητα 20% να παρουσιαστούν προβλήματα στην παραγωγή εξαιτίας ανανέωσης και αναδιαμόρφωσης των εγκαταστάσεων παραγωγής, και σε αυτήν την περίπτωση το κέρδος θα είναι μόνο 100000€.

Να απεικονιστεί το πρόβλημα σε ένα δέντρο αποφάσεων και να βρεθεί η βέλτιστη εναλλακτική λύση για την αρχική απόφαση που πρέπει να λάβει η εταιρία.

### **ΛΥΣΗ**

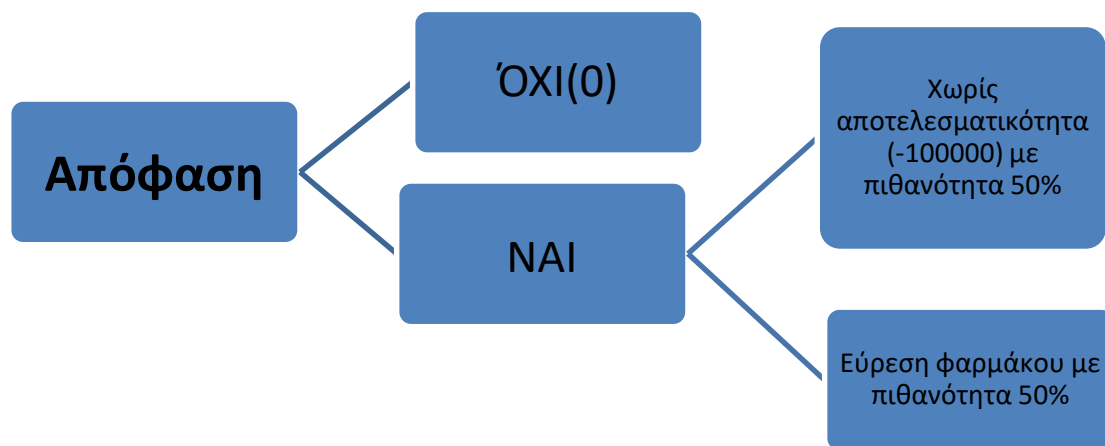
Το δέντρο αποφάσεων κατασκευάζεται ως εξής: Κάτω από κάθε κλάδο αναγράφεται το καθαρό κέρδος (έσοδα μείον το συνολικό κόστος) και η αντίστοιχη πιθανότητα όπου αυτή υπάρχει. Αρχικά, αν η επιχείρηση GIANT S.A. αποφασίσει αν θα κάνει ή όχι την έρευνα, θα

έχουμε τον «κορμό» του δέντρου απόφασης όπου η επιχείρηση αν δεν κάνει τίποτα θα έχει συνολικά έσοδα μηδέν.



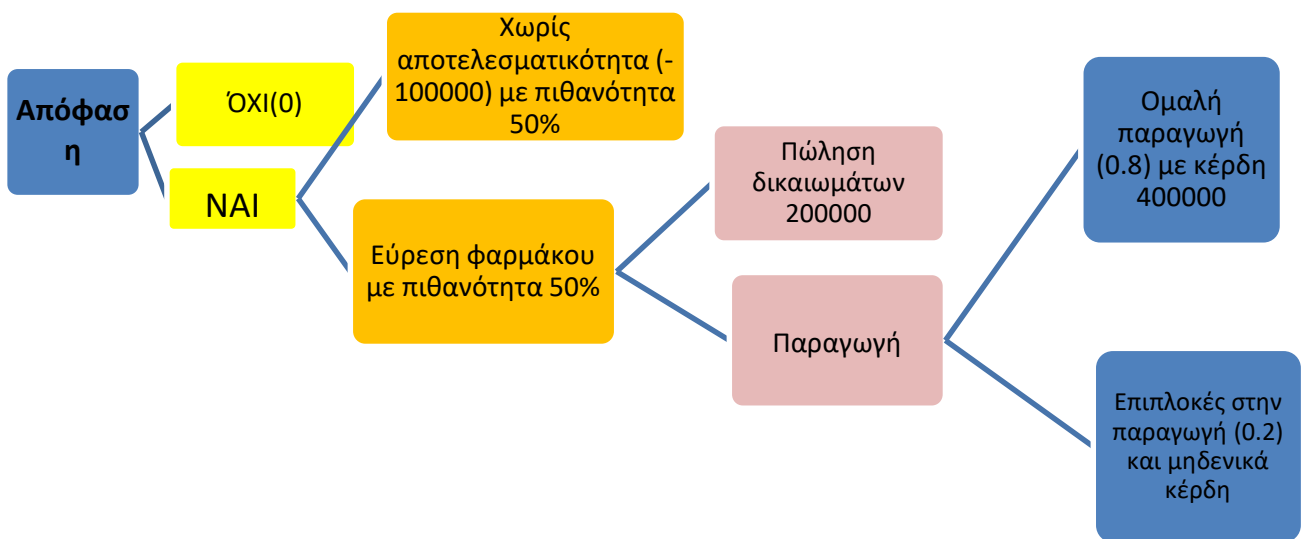
**Εικόνα 12: «Κορμός» του δέντρου απόφασης του παραδείγματος 1 (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)**

Στην συνέχεια, αν η επιχείρηση προβεί στην απόφαση για την δημιουργία ενός τέτοιου φαρμάκου, τότε έχει ίσες πιθανότητες να βγει κερδισμένη ή χαμένη (-100000€), οπότε τα επόμενα «κλαδιά» του δέντρου απόφασης κατασκευάζονται ως εξής:



**Εικόνα 13: Δημιουργία «κλαδιών» για το δέντρο απόφασης του παραδείγματος 1(Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)**

Στην συνέχεια αν η επιχείρηση πουλήσει τα δικαιώματα θα έχει κέρδος  $500000 - 300000 = 200000\text{€}$ , ενώ σε περίπτωση ομαλής παραγωγής (πιθανότητα 80%) θα έχει συνολικά κέρδη  $500000 - 100000 = 400000\text{€}$  και σε περίπτωση που παρουσιαστούν προβλήματα στην παραγωγή θα έχει μηδενικές απώλειες. Συνολικά, το δέντρο απόφασης παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα



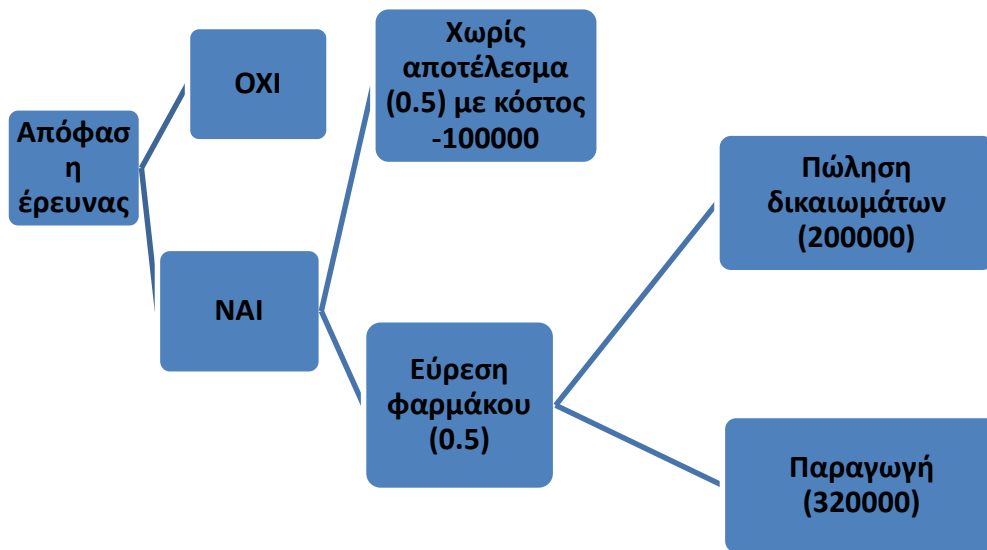
**Εικόνα 14: Δέντρο απόφασης για το παράδειγμα 1 (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)**

Αφού κατασκευάστηκε το δέντρο απόφασης, στην συνέχεια υπολογίζουμε την ANA του τελευταίου από δεξιά κόμβου, η οποία θα ισούται με

$$0.8 \cdot 400000 + 0.2 \cdot 0 = 320000 \text{€}$$

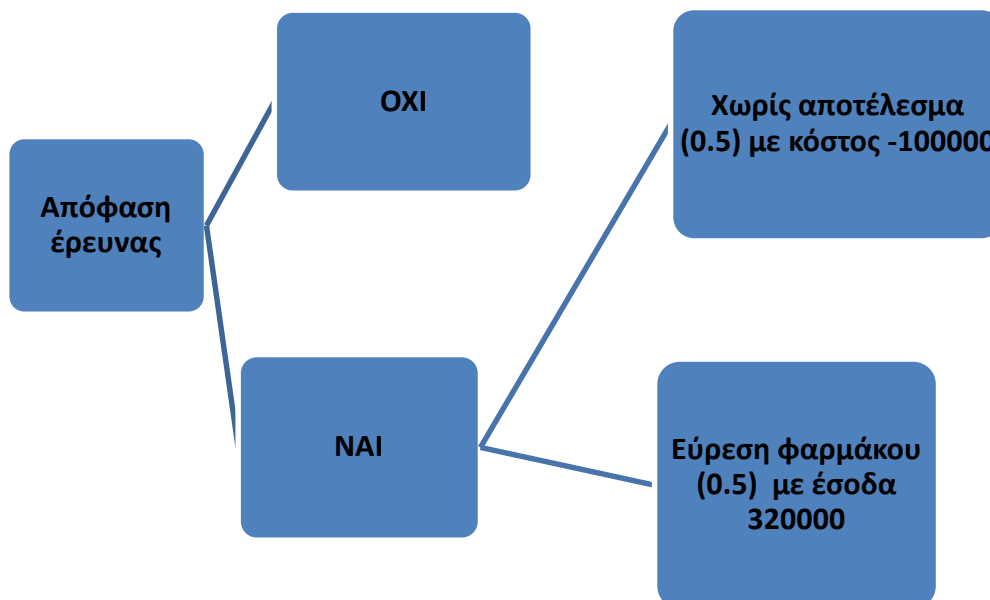
Στην συνέχεια διαγράφουμε τον τελευταίο κόμβο (ουσιαστικά «πριονίζουμε» τα τελευταία κλαδιά του δέντρου) και θα έχουμε το δέντρο απόφασης





**Εικόνα 15:** «Πριόνισμα» του δέντρου απόφασης ανάλογα με την βέλτιστη κοινή απόφαση (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Ο τελευταίος κόμβος από δεξιά είναι ο κόμβος απόφασης, και έτσι θα επιλεγθεί ο κόμβος με την μεγαλύτερη αναλογικά αξία, στην συνέχεια διαγράφεται ο κόμβος και τελικά το δέντρο θα πάρει την μορφή

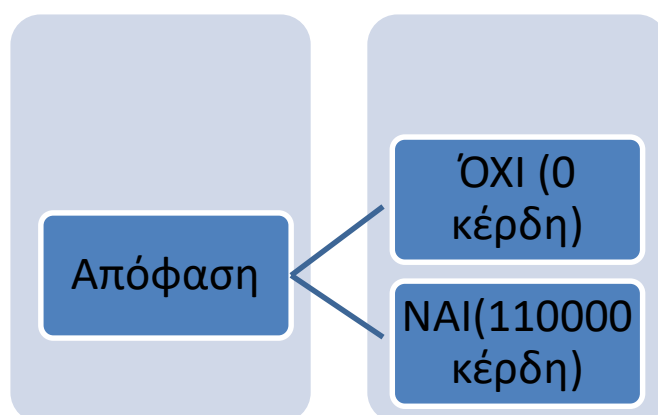


**Εικόνα 16:** «Πριόνισμα» του δέντρου απόφασης ανάλογα με την βέλτιστη κοινή απόφαση (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Τελικά, υπολογίζεται η ANA του τελευταίου από δεξιά κόμβου η οποία θα ισούται με

$$0,5*(-100000)+0,5*3200000=110000$$

Οπότε, η τελική μορφή του δέντρου θα είναι η ακόλουθη



**Εικόνα 17: Τελική μορφή του δέντρου απόφασης του παραδείγματος 1 (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)**

Οπότε, η βέλτιστη εναλλακτική λύση για την αρχική απόφαση της επιχείρησης GIANT S.A. είναι να διεξαχθεί η έρευνα για το νέο φάρμακο κατά της κατάθλιψης, καθώς θα της αποφέρει σταδιακά κέρδη 110000€, καθώς αυτή η απόφαση παρέχει την μέγιστη ANA.

#### **Παράδειγμα 2: Επίλυση δέντρου απόφασης για την απόφαση εξαγοράς επιχειρήσεων**

Μια επιχείρηση πώλησης ηλεκτρονικών ειδών, έστω η Α, ενδιαφέρεται να προβεί σε μια συγχώνευση μέσω της εξαγοράς μιας άλλης επιχείρησης προκειμένου να μεγιστοποιήσει τα έσοδα και να ελαχιστοποιήσει τις απώλειες, και υπάρχουν δύο υποψήφιες μικρότερες επιχειρήσεις για την συγχώνευση, η Β και η Γ (καθώς όταν συγχωνεύονται κάποιες επιχειρήσεις συνήθως είναι προς το συμφέρον και των δύο). Αν η Α συγχωνευτεί με την Β, το κόστος εξαγοράς ανέρχεται στα 50000Μ (όπου Μ δηλώνονται οι χρηματικές μονάδες), ενώ για την αντίστοιχη συγχώνευση με την Γ το κόστος εξαγοράς είναι 100000Μ.

Επειδή δεν είναι δυνατόν να είναι εξαρχής γνωστό το αποτέλεσμα του συνολικού εγχειρήματος, στην πρώτη περίπτωση (εξαγορά της Β) η πιθανότητα επιτυχίας είναι 60% και στην δεύτερη περίπτωση (εξαγορά της Γ) η πιθανότητα επιτυχίας είναι 50%.

Σε περίπτωση εξαγοράς της επιχείρησης Β έχουμε τις παρακάτω πιθανότητες των ενδεχομένων

- Στο ενδεχόμενο επιτυχίας, η επιχείρηση A θα αποκτήσει υψηλά έσοδα που θα ανέρχονται σε 180000 Μ με πιθανότητα 70%, ή χαμηλά έσοδα 150000Μ
- Στο ενδεχόμενο επιτυχίας, η επιχείρηση A θα αποκτήσει υψηλά έσοδα που θα ανέρχονται σε 120000 Μ με πιθανότητα 50%, ή αντίστοιχες απώλειες 60000Μ

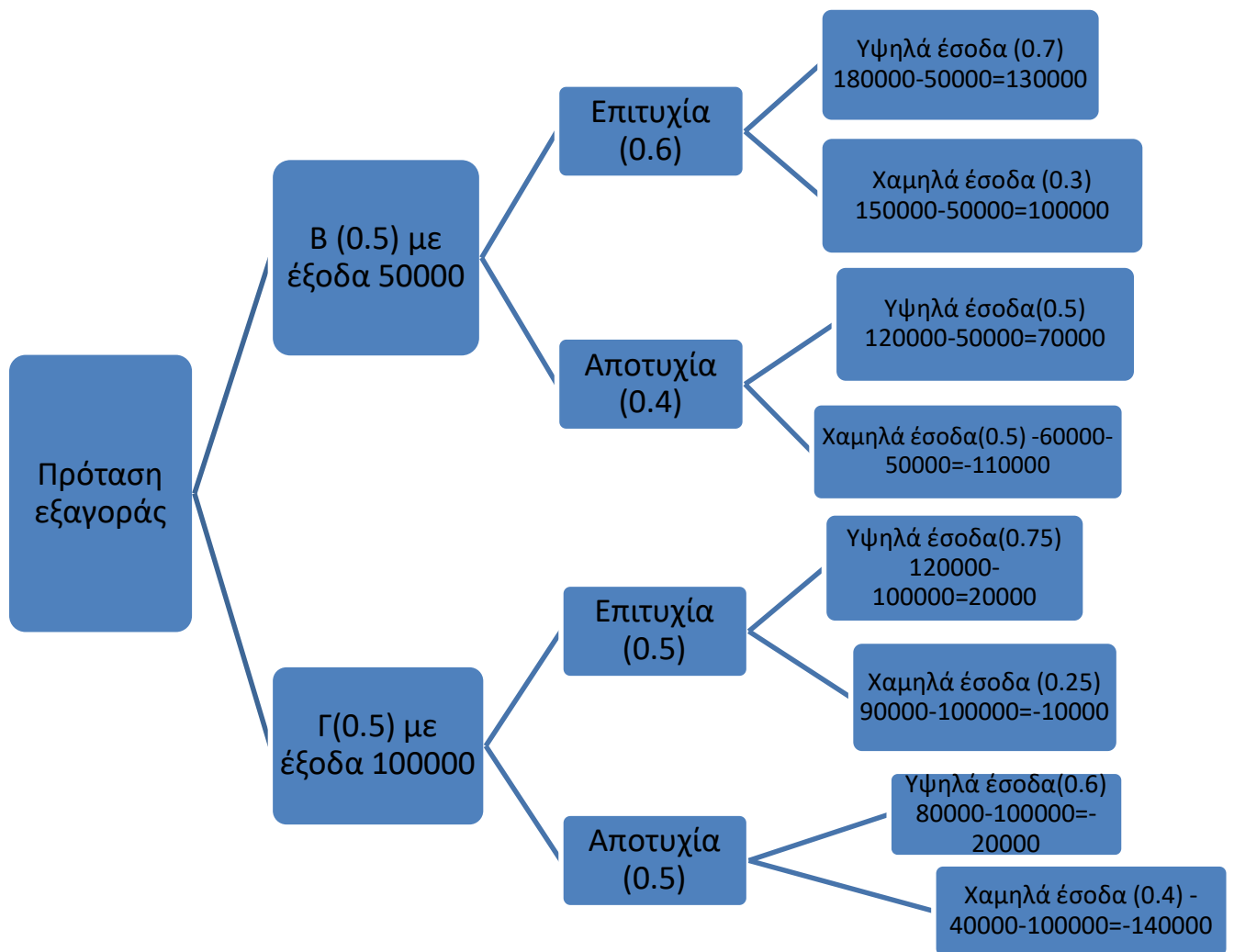
Σε περίπτωση εξαγοράς της επιχείρησης Γ έχουμε τις παρακάτω πιθανότητες των ενδεχομένων

- Στο ενδεχόμενο επιτυχίας, η επιχείρηση A θα αποκτήσει υψηλά έσοδα που θα ανέρχονται σε 120000 Μ με πιθανότητα 75%, ή χαμηλά έσοδα 90000Μ
- Στο ενδεχόμενο επιτυχίας, η επιχείρηση A θα αποκτήσει υψηλά έσοδα που θα ανέρχονται σε 80000 Μ με πιθανότητα 60%, ή αντίστοιχες απώλειες 40000Μ

Να κατασκευαστεί το αντίστοιχο δέντρο αποφάσεων και να βρεθεί η βέλτιστη εναλλακτική λύση για την αρχική απόφαση που πρέπει να λάβει η εταιρία Α.

#### **ΛΥΣΗ**

Κατασκευάζεται το δένδρο απόφασης με αντίστοιχη μεθοδολογία όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, και κάτω από κάθε κλάδο αναγράφονται τα έσοδα ή το κόστος που υπάρχει όπως δόθηκε με βάση την εκφώνηση (το κόστος δηλώνεται με αρνητικό αριθμό) ενώ στο τέλος του δένδρου οι αριθμοί που αναγράφονται κάθετα είναι το καθαρό κέρδος (έσοδα- κόστος) σε κάθε περίπτωση.



**Εικόνα 18: Δέντρο απόφασης για το παράδειγμα 2 (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)**

Στην συνέχεια υπολογίζεται η ANA των τεσσάρων τελευταίων από δεξιά κόμβων ως εξής

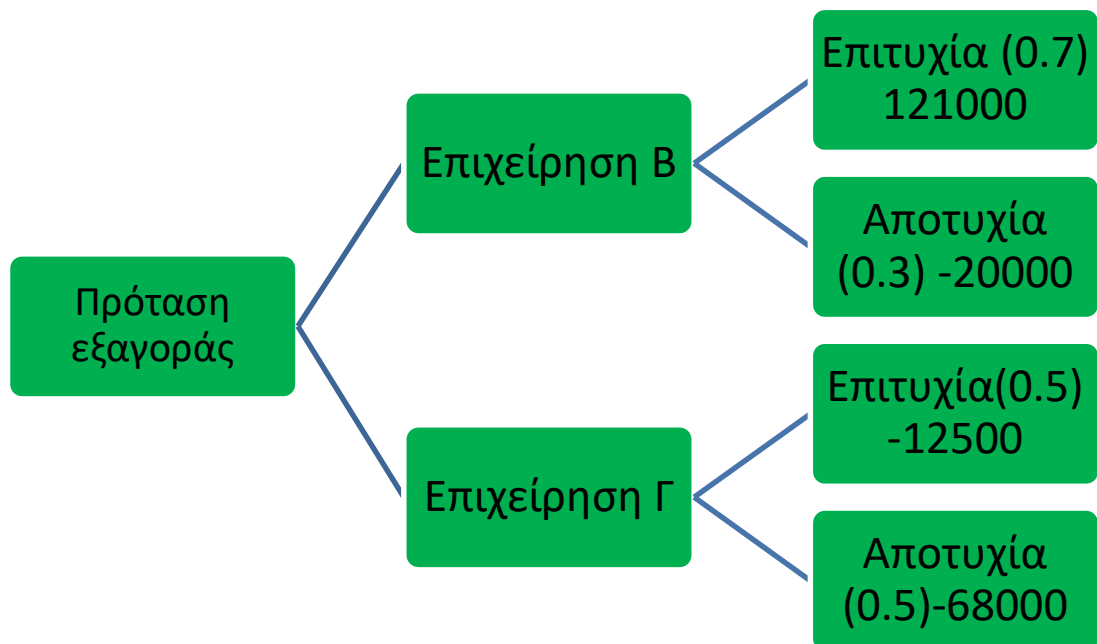
$$0,7 * 130000 + 0,3 * 100000 = 1210000$$

$$0,5 * 700000 + 0,5 * (-110000) = -200000$$

$$0,75 * 200000 + 0,25 * (-110000) = -12500$$

$$0,6 * (-20000) + 0,4(-140000) = -68000$$

Διαγράφουμε τους κόμβους αυτούς και προκύπτει το τελικό δένδρο απόφασης



**Εικόνα 19: Τελική μορφή του δέντρου απόφασης του παραδείγματος 2(Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)**

Υπολογίζουμε έπειτα την ANA των δύο τελευταίων από δεξιά κόμβων

$$0,7 * 121000 + 0,3 * (-20000) = 78700€$$

$$0,5 * (-12500) + 0,5 * (-68000) = -40250€$$

Οπότε, η βέλτιστη λύση για την επιχείρηση A είναι η εξαγορά της επιχείρησης B, καθώς έχει την μέγιστη ANA.

Τα επόμενα προβλήματα έχουν να κάνουν με την κατασκευή πίνακα απώλειας ευκαιρίας, δέντρου αποφάσεων, αναμενόμενης απώλειας ευκαιρίας (EOL) και αναμενόμενης χρηματικής αξίας (ANA), και συγκεκριμένα με παραδείγματα που οι αποδόσεις μπορεί να αντιπροσωπεύουν είτε κόστος είτε κέρδος.

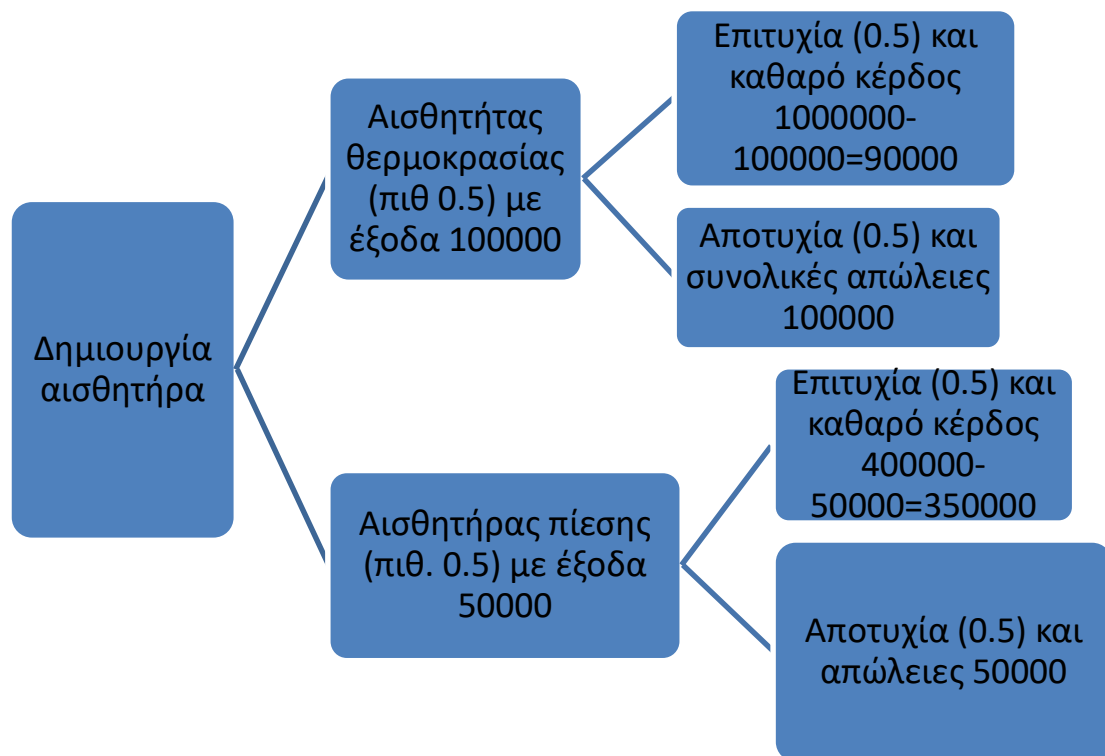
### **Παράδειγμα 3: Κατασκευή ενός μοντέλου αισθητήρα**

Μια κατασκευαστική επιχείρηση που εμπορεύεται αισθητήρες για πλοία επιθυμεί να κατασκευάσει ένα νέο μοντέλο αισθητήρα, και έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο τύπους αισθητήρα: Θα κατασκευάσει είτε ένα ανιχνευτή θερμοκρασίας με κόστος ανάπτυξης 100000€ είτε αισθητήρα πίεσης που είναι φθηνότερος αλλά λιγότερο αποδοτικός με κόστος ανάπτυξης 50000€. Σε περίπτωση που ο αισθητήρας πίεσης κατασκευαστεί με επιτυχία, η

επιχείρηση θα μπορεί να είναι σε θέση να πουλήσει τον αισθητήρα σε ναυτιλιακή επιχείρηση με συνολικά έσοδα 400000€. Να κατασκευαστεί το αντίστοιχο δέντρο αποφάσεων και να βρεθεί η βέλτιστη εναλλακτική λύση για την αρχική απόφαση που πρέπει να λάβει η εταιρία Α (Υποθέτουμε ισοπίθανα ενδεχόμενα επιτυχίας και αποτυχίας για κάθε μοντέλο αισθητήρα).

### ΛΥΣΗ

Το δέντρο απόφασης κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας παρόμοια μεθοδολογία με τα προηγούμενα παραδείγματα, και μπορεί να είναι το ακόλουθο σχήμα



**Εικόνα 20: Τελική μορφή του δέντρου απόφασης του παραδείγματος 3(Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)**

Έπειτα υπολογίζουμε την μέγιστη ANA που θα ισούται με

$$0.5 \cdot 900000 - 0,5 \cdot 100000 = 0,5 \cdot 800000 = 400000\text{€}$$

$$0.5 \cdot (350000) - 0,5 \cdot 50000 = 0,5 \cdot 300000 = 60000\text{€}$$

Εύκολα συμπεραίνουμε πως η επιχείρηση θα πρέπει να επενδύσει στην κατασκευή του αισθητήρα θερμοκρασίας, καθώς έτσι θα επιτύχει μεγαλύτερο μελλοντικό κέρδος.

#### Παράδειγμα 4: Πωλήσεις αυτοκινήτων

Μια βιομηχανία αυτοκινήτων γνωρίζει πως η εβδομαδιαία ζήτηση για ένα συγκεκριμένο μοντέλο παραγωγής της κυμαίνεται από 0 ως 3 αμάξια. Το κόστος κατασκευής ενός αυτοκινήτου είναι 15000 M (όπου M συμβολίζει τις χρηματικές μονάδες), ενώ η πώληση ενός αυτοκινήτου αυτού του μοντέλου κοστίζει 25000 M. Θεωρείται πως όσα αυτοκίνητα δεν πωλούνται σε μια εβδομάδα παραμένουν διαθέσιμα για την επόμενη, και συνεπώς δεν προσμετρούνται για τα κέρδη της προηγούμενης εβδομάδας. Ζητείται

- 1) Να κατασκευαστεί ο πίνακας αποδόσεων της αυτοκινητοβιομηχανίας.
- 2) Να κατασκευαστεί ο πίνακας απώλειας ευκαιρίας της αυτοκινητοβιομηχανίας.
- 3) Να κατασκευαστεί το δέντρο αποφάσεων της αυτοκινητοβιομηχανίας.
- 4) Να καθοριστεί η απόφαση για τον αριθμό των παραγόμενων αυτοκινήτων που θα είναι πιο συμφέρουσα για την βιομηχανία με την μέθοδο της αναμενόμενης χρηματικής αξίας.
- 5) Να καθοριστεί η απόφαση για τον αριθμό των παραγόμενων αυτοκινήτων που θα είναι πιο συμφέρουσα για την βιομηχανία με την μέθοδο της αναμενόμενης απώλειας ευκαιρίας.

Θεωρείται πως όλες οι τιμές ζήτησης μπορούν να συμβούν με ίσες πιθανότητες.

#### ΛΥΣΗ

1) Αρχικά θα πρέπει να υπολογιστούν οι αποδόσεις (οι οποίες στο συγκεκριμένο παράδειγμα αντιπροσωπεύουν το κέρδος της βιομηχανίας από την πώληση αυτοκινήτων, και συνεπώς αντιπροσωπεύουν κέρδος) για κάθε χρηματική περίοδο. Οπότε, βρίσκονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί θέτοντας

Z: Ζήτηση, Π: Παραγωγή, ΕΣ=Έσοδα, Κ=Κόστος (τα ποσά εκφράζονται σε χιλιάδες M)

- $Z = 0, \Pi = 0 \rightarrow KE = Z - \Pi = 0 - 0 = 0$
- $Z = 0, \Pi = 1 \rightarrow K = 0 * 25 - 1 * 15 = -15$
- $Z = 0, \Pi = 2 \rightarrow K = 0 * 25 - 2 * 15 = -30$

- $Z = 0, \Pi = 3 \rightarrow K = 0 * 25 - 3 * 15 = -45$
- $Z = 1, \Pi = 1 \rightarrow K = 1 * 25 - 1 * 15 = 10$
- $Z = 1, \Pi = 2 \rightarrow K = 1 * 25 - 2 * 15 = -5$
- $Z = 1, \Pi = 3 \rightarrow K = 1 * 25 - 3 * 15 = -20$
- $Z = 2, \Pi = 1 \rightarrow K = 2 * 25 - 1 * 15 = 35$
- $Z = 2, \Pi = 2 \rightarrow K = 2 * 25 - 2 * 15 = 20$
- $Z = 2, \Pi = 3 \rightarrow K = 2 * 25 - 3 * 15 = 5$
- $Z = 3, \Pi = 1 \rightarrow K = 3 * 25 - 1 * 15 = 60$
- $Z = 3, \Pi = 2 \rightarrow K = 3 * 25 - 2 * 15 = 45$
- $Z = 3, \Pi = 3 \rightarrow K = 3 * 25 - 3 * 15 = 30$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, κατασκευάζεται ο επόμενος πίνακας αποδόσεων για το συγκεκριμένο παράδειγμα

Πίνακας 1: Πίνακας αποδόσεων για την ζήτηση αυτοκινήτων

		Παραγωγή			
Ζήτηση	0	1	2	3	
0	0	-15	-30	-45	
1	0	10	-5	-20	
2	0	35	20	5	
3	0	60	45	30	

2) Για να κατασκευάσουμε τον πίνακα απώλειας εργαζόμαστε ως εξής: Για την πρώτη γραμμή του πίνακα αποδόσεων βρίσκουμε την μεγαλύτερη απόδοση

$$\max\{0, -15, -30, -45\} = 0$$

Και στην συνέχεια αφαιρούμε από την μεγαλύτερη απόδοση (0) τις υπόλοιπες αποδόσεις, οπότε θα έχουμε

$0-0=0$ ,  $0-(-15)=15$ ,  $0-(-30)=30$ ,  $0-(-45)=45$ , και αυτά τα στοιχεία που προέκυψαν είναι και τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα απώλειας.

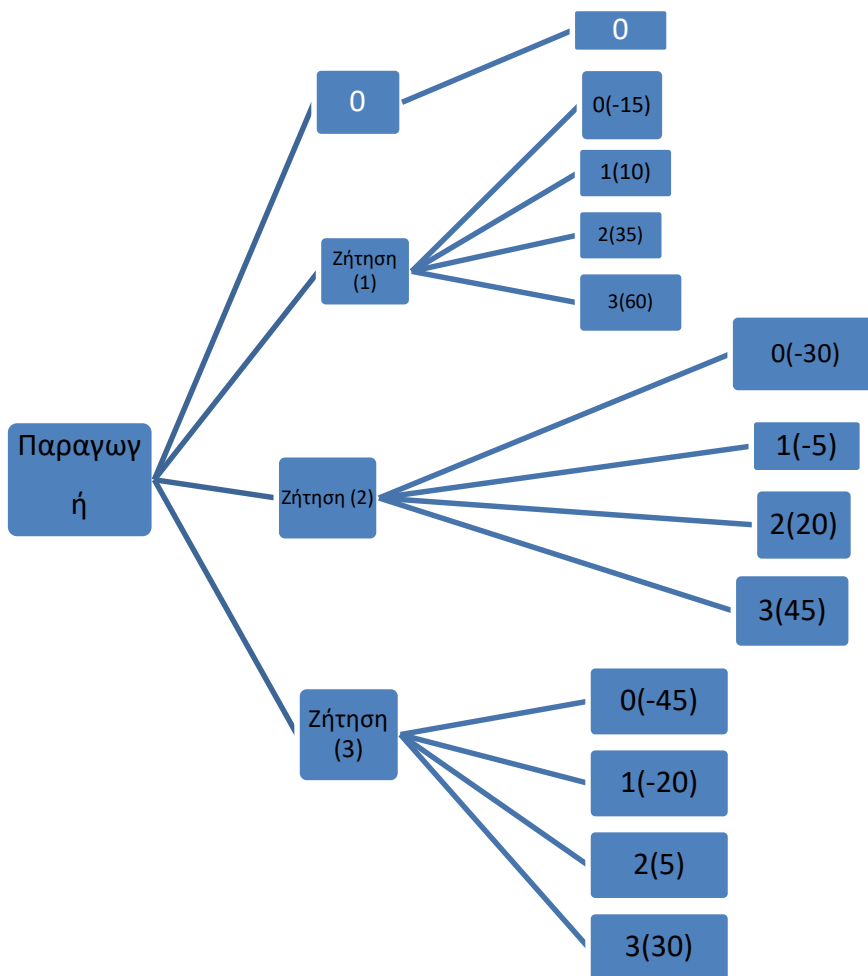
Εργαζόμενοι παρόμοια, προκύπτει τελικά ο ακόλουθος πίνακας απώλειας



Πίνακας 2: Πίνακας απώλειας για το παράδειγμα πώλησης αυτοκινήτων

Παραγωγή				
Ζήτηση	0	1	2	3
0	0	15	30	45
1	10	0	15	30
2	35	0	15	30
3	60	0	15	30

3) Το δέντρο απόφασης μπορεί να έχει την ακόλουθη μορφή (δεντροδιάγραμμα), όπου στις αντίστοιχες παρενθέσεις παρουσιάζεται το αντίστοιχο κόστος ή κέρδος ενώ στα αριστερά παρουσιάζεται η αντίστοιχη ποσότητα αυτοκινήτων



**Εικόνα 9: Δέντρο απόφασης για την αγορά ζήτηση αυτοκινήτων (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)**

4) Από την υπόθεση έχουμε πως όλες οι τιμές ζήτησης είναι ισοπίθανες, οπότε κάθε μία έχει πιθανότητα εμφάνισης 25%, και στην συνέχεια υπολογίζονται οι μέσες αναμενόμενες χρηματικές αξίες (ANA) για κάθε επίπεδο παραγωγής

$$EMV(0) = 0.25(0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

$$EMV(1) = 0.25(-15 + 10 + 35 + 60) = 22.5$$

$$EMV(2) = 0.25(-30 - 5 + 20 + 45) = 7.5$$

$$EMV(3) = 0.25(-45 - 20 + 5 + 30) = -7.5$$

Και στην συνέχεια υπολογίζουμε την μέγιστη από αυτές τις αποδόσεις, δηλαδή επιλέγουμε την  $\max\{0, 22.5, 7.5, -7.5\} = 22.5$ . Οπότε με κριτήριο την αναμενόμενη χρηματική αξία, η βιομηχανία θα πρέπει να παράγει 1 αυτοκίνητο σε εβδομαδιαία βάση.

5) Παρακάτω υπολογίζεται η αναμενόμενη απώλεια ευκαιρίας (EOL) για κάθε τιμή της παραγωγής :

$$EOL(0) = 0.25(0 + 10 + 35 + 60) = 0.25 * 105 = 22.5$$

$$EOL(1) = 0.25(0.15 + 0 + 0 + 0) = 15 * 0.25 = 3.75$$

$$EPL(2) = 0.25(30 + 15 + 15 + 15) = 0.25 * 75 = 18.75$$

$$EOL(3) = 0.25(45 + 30 + 30 + 30) = 0.25 * 135 = 33.75$$

Και στην συνέχεια υπολογίζουμε την ελάχιστη από αυτές τις αποδόσεις, δηλαδή επιλέγουμε την  $\max\{22.5, 3.75, 18.75, 33.75\} = 22.5$ . Οπότε με κριτήριο την αναμενόμενη απώλεια ευκαιρίας, η βιομηχανία θα πρέπει να παράγει 1 αυτοκίνητο σε εβδομαδιαία βάση. Παρατηρούμε λοιπόν πως και οι δύο μέθοδοι καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα, οπότε η βιομηχανία θα πρέπει να παράγει ένα αμάξι την εβδομάδα για να έχει κέρδος.

#### **Παράδειγμα 5: Επιλογή μιας εταιρίας διανομής προϊόντων**

Μια βιομηχανία ρούχων ( Έστω η επιχείρηση P) θέλει να επιλέξει ανάμεσα σε 2 επιχειρήσεις διανομής προϊόντων (Έστω A και B) ως προς την προώθηση των προϊόντων της προς τους πελάτες, και οι 2 επιχειρήσεις ακολουθούν διαφορετική πολιτική τιμολόγησης σε μηνιαία βάση. Η επιχείρηση A χρεώνει 30000 € την διανομή και παράδοση των προϊόντων όσες φορές και αν χρειαστεί μέσα στον μήνα, ενώ η επιχείρηση B χρεώνει κάθε φορά 10000 € για κάθε φορά που αναλαμβάνει διανομή.

Υποθέτοντας πως η επιχείρηση P έχει υπολογίσει τις πιθανότητες να αναλάβει παραγγελίες ρούχων για όλο τον μήνα και η κατανομή τους είναι ως εξής

$P(0)=0.1, P(1)=0.15, P(2)=0.2, P(3)=0.3, P(4)=0.2, P(5)=0.05$ , και με βάση αυτά τα στοιχεία να υπολογιστεί ο πίνακας αποδόσεων, και να βρεθεί η κατάλληλη απόφαση για την επιχείρηση P με βάση την μέθοδο της αναμενόμενης χρηματικής αξίας.

#### **ΛΥΣΗ**

Σε αυτό το παράδειγμα οι αποδόσεις αντιπροσωπεύουν το αντίστοιχο κόστος που θα έχει η επιχείρηση σε περίπτωση που επιλέξει μια από τις δύο εταιρίες διανομής προϊόντων. Με βάση τα δεδομένα μας, κατασκευάζουμε τον επόμενο πίνακα αποδόσεων

<b>Συχνότητα</b>	<b>Κόστος εταιρίας A</b>	<b>Κόστος εταιρίας B</b>
------------------	--------------------------	--------------------------

---

### παραγγελιών

0	0	0
1	30000	10000
2	30000	20000
3	30000	30000
4	30000	40000
5	30000	50000

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μέθοδο της αναμενόμενης χρηματικής αξίας για να καθορίσουμε την απόφαση που θα πρέπει να πάρει η επιχείρηση ως εξής για κάθε επιχείρηση

$$EMV(A) = 0.1 * 0 + 0.15 * 30000 + 0.2 * 30000 + 0.3 * 30000 + 0.2 * 30000 + 0.05 * 30000 = 0.9 * 30000 = 27000€$$

$$EMV(B) = 0.1 * 0 + 0.15 * 10000 + 0.2 * 20000 + 0.3 * 30000 + 0.2 * 40000 + 0.05 * 50000 = 25000€$$

Επειδή εδώ οι αποδόσεις υποδηλώνουν το κόστος, η επιχείρηση θα πρέπει να επιλέξει την μικρότερη από τις παραπάνω ποσότητες, δηλαδή

$$\min\{EMV(A), EMV(B)\} = \min\{27000, 25000\} = 25000 = EMV(B)$$

Συνεπώς, συμφέρει την επιχείρηση P να συνεργαστεί με την επιχείρηση B για την διανομή των προϊόντων της.

### Παράδειγμα 6: Επιλογή αγοράς υποδημάτων

Ένα κατάστημα υποδημάτων επιθυμεί να αποφασίσει πόσα αθλητικά ζευγάρια μπορεί να παραγγείλει για το νέο έτος. Η παραγγελία για ένα συγκεκριμένο τύπο αθλητικών υποδημάτων γίνεται ανά 100άδες ζευγάρια.

- Αν η επιχείρηση παραγγείλει 100 ζευγάρια τότε κοστίζουν 12€ ανά ζεύγος
- Αν η επιχείρηση παραγγείλει 200 ζευγάρια τότε κοστίζουν 10€ ανά ζεύγος
- Αν η επιχείρηση παραγγείλει 300 ζευγάρια τότε κοστίζουν 8€ ανά ζεύγος

Η τιμή πώλησης είναι στα 15€ το ζευγάρι, ωστόσο όσα μείνουν απούλητα θα διατεθούν στο τέλος της σεζόν στην μισή τιμή, και υποθέτουμε για απλοϊκούς λόγους πως η συνολική ζήτηση μπορεί να πάρει μόνο 3 τιμές, 100,150 και 200, χωρίς να υπάρχει η δυνατότητα νέας παραγγελίας μετά την αρχική, ενώ αν ένα προϊόν εξαντληθεί στην διάρκεια του έτους δεν συντρέχει κίνδυνος απώλειας της εμπιστοσύνης των πελατών.

(1) Να κατασκευαστεί ο πίνακας αποδόσεων του καταστήματος

(2) Να κατασκευαστεί ο πίνακας απώλειας ευκαιρίας του καταστήματος

(3) Να καθοριστεί η απόφαση για τον αριθμό των παραγόμενων αυτοκινήτων που θα είναι πιο συμφέρουσα για την βιομηχανία με την μέθοδο της αναμενόμενης χρηματικής αξίας, υποθέτοντας πως ο διευθυντής υπολόγισε τις παρακάτω πιθανότητες

$$P(100)=P(150)=0.4, P(200)=0.2$$

#### ΛΥΣΗ

(1) Ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με το παράδειγμα 4, υπολογίζονται οι παρακάτω αποδόσεις (που εδώ αντιπροσωπεύουν κέρδος σε €) για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ζήτησης και προσφοράς, και θα είναι

- $Z = 100, \Pi = 100 \rightarrow KE = Z - \Pi = 15 * 100 - 12 * 100 = 300$
- $Z = 100, \Pi = 200 \rightarrow K = 15 * 100 + 7,5 * 100 - 10 * 200 = 1050$
- $Z = 100, \Pi = 300 \rightarrow K = 15 * 100 + 7,5 * 100 - 8 * 300 = -150$
- $Z = 150, \Pi = 100 \rightarrow K = 15 * 150 + 7,5 * 150 - 12 * 100 = 2175$
- $Z = 150, \Pi = 200 \rightarrow K = 15 * 150 + 7,5 * 150 - 10 * 200 = 250$
- $Z = 150, \Pi = 300 \rightarrow K = 15 * 150 + 7,5 * 150 - 300 * 8 = 975$
- $Z = 200, \Pi = 100 \rightarrow K = 15 * 200 - 12 * 100 = 1800$
- $Z = 200, \Pi = 200 \rightarrow K = 15 * 200 + 7,5 * 200 - 10 * 200 = 2500$
- $Z = 200, \Pi = 300 \rightarrow K = 15 * 200 + 7,5 * 200 - 8 * 300 = 2100$

Έτσι ο πίνακας αποδόσεων του καταστήματος υποδημάτων κατασκευάζεται και είναι ο ακόλουθος

Παραγγελία			
Ζήτηση	100	200	300
100	300	1050	-150

150	2715	175	975
200	1800	2500	2100

(2) Ο πίνακας απώλειας κατασκευάζεται με παρόμοια μεθοδολογία όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα και θα ισούται με

	Παραγωγή		
Ζήτηση	100	200	300
100	750	0	1200
150	0	2540	1740
200	700	0	400

(3) Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες χρηματικές αξίες με την μέθοδο της αναμενόμενης χρηματικής απόδοσης ως εξής

$$EMV(100) = 0.4 * 300 + 0.4 * 1050 + 0.2 * (-150) = 510$$

$$EMV(150) = 0.4 * 2715 + 0.4 * 175 + 0.2 * (975) = 961$$

$$EMV(200) = 0.4 * 1800 + 0.4 * 2500 + 0.2 * 2100 = 1300$$

Και προφανώς το κατάστημα υποδημάτων θα επιλέξει την μέγιστη αναμενόμενη χρηματική απόδοση, δηλαδή την τρίτη επιλογή. Κατά συνέπεια, το κατάστημα υποδημάτων θα παραγγείλει 300 ζεύγη παπουτσιών.

#### Παράδειγμα 7: Επιλογή ενός φύλου από μια τράπουλα

Έστω πως η πιθανότητα επιλογής ενός φύλου από μια «αμερόληπτη» τράπουλα το οποίο να είναι σπαθί είναι 0.25, και στοιχηματίζουμε 100€ πως η επιλεγμένη κάρτα θα είναι σπαθί, τότε έχουμε 25% πιθανότητα να κερδίσουμε 100€ και 75% πιθανότητα να χάσουμε 100€. Να υπολογιστεί η ANA

ΛΥΣΗ

Η ANA μπορεί εύκολα να εκτιμηθεί ως εξής:

$$E(\text{κερδίζουμε})=0.25*100=25\text{€}$$

$$E(\text{χάνουμε})=0.75*100=75\text{€}$$

$$\text{Άρα ANA}=25-75=-50\text{€}$$

### **Παράδειγμα 8: Επιλογή συνεργείου καθαρισμού**

Μια πολυκατοικία ενδιαφέρεται να επιλέξει ανάμεσα σε δύο συνεργεία καθαρισμού για τον καθαρισμό της, και κάθε συνεργείο έχει την δική του προσφορά. Το συνεργείο Α αναλαμβάνει να καθαρίσει την πολυκατοικία με 500 € το μήνα, ανεξάρτητα από το πόσες φορές χρειαστεί να έρθει, ενώ το συνεργείο Β χρεώνει την επίσκεψη 150€ κάθε φορά. Υποθέτοντας πως η πολυκατοικία χρειάζεται καθαρίσματα το πολύ μέχρι 5 φορές κάθε μήνα, και με βάση τις επόμενες πιθανότητες οι οποίες έχουν εκτιμηθεί από τον διαχειριστή της πολυκατοικίας

Να κατασκευαστεί ο πίνακας απόδοσης που θα βοηθήσει τον διαχειριστή στην λήψη της απόφασης και να εφαρμοστεί η μέθοδος της αναμενόμενης χρηματικής απόδοσης ως προς την επιλογή συνεργείου.

ΛΥΣΗ

Εδώ πρόκειται για ένα παράδειγμα που οι αποδόσεις εκφράζουν το κόστος συνεργείου καθαρισμού, και έτσι η απόφαση έγκειται στο ποιο συνεργείο είναι πιο οικονομικό. Με βάση τα στοιχεία, κατασκευάζεται ο ακόλουθος πίνακας αποδόσεων

Συχνότητα καθαρισμού	Συνεργείο Α	Συνεργείο Β
0	0	0
1	500	150
2	500	300
3	500	450
4	500	600
5	500	750

Έπειτα εφαρμόζεται η μέθοδος της αναμενόμενης χρηματικής απόδοσης ως εξής

$$EMV(A) = 0.1 * 0 + 0.1 * 5000 + 0.2 * 500 + 0.3 * 500 + 0.2 * 500 + 0.1 * 500 = 450$$

$$EMV(B) = 0.1 * 0 + 0.1 * 150 + 0.2 * 300 + 0.3 * 450 + 0.2 * 600 + 0.1 * 750 \\ = 15 + 60 + 135 + 120 + 75 = 405$$

Επιλέγουμε την μικρότερη απόδοση (αφού αντιπροσωπεύουν κόστος), και κατά συνέπεια συμφέρει την πολυκατοικία να επιλέξει το συνεργείο καθαρισμού Β.

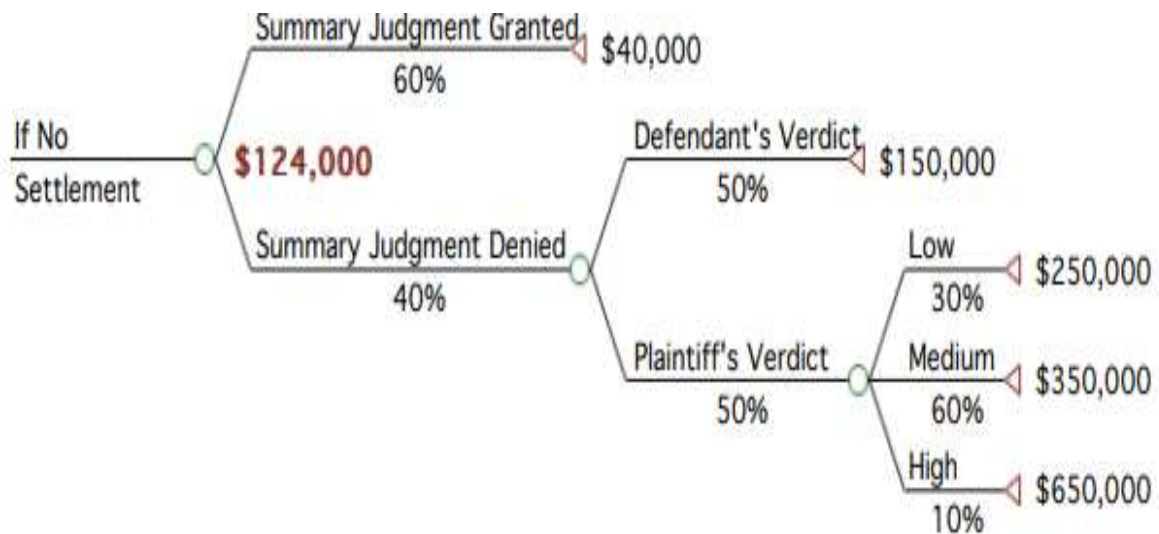
#### Παράδειγμα 9: Απόφαση δικαστηρίου

Έστω πως μια αντιδικία μεταξύ δύο πλευρών για μια φτάνει μέχρι τον δρόμο του δικαστηρίου με την ελπίδα πως ο ενάγων θα διεκδικήσει κάποιο μεγάλο χρηματικό ποσό από το αντίπαλο μέρος. Έστω λοιπόν πως έχουμε το παρακάτω δέντρο απόφασης για την αντιδικία και τα πιθανά οφέλη-απώλειες από τις δύο πλευρές, οπότε εδώ ουσιαστικά πρόκειται για ένα πρόβλημα στο οποίο καλούνται οι δικηγόροι να εξετάσουν αν αξίζει να κάνουν διαπραγματεύσεις με τις δύο πλευρές ή όχι (Klein, 2009).

Η κατάσταση σε αυτήν την περίπτωση έχει ως εξής: Αν οι πλευρές δεν τα βρουν μεταξύ τους, η αντιπαράθεση καταλήγει στο δικαστήριο και σε περίπτωση που γίνει αποδεκτό το αίτημα και δικαιωθεί ο ενάγων με πιθανότητα 60% θα του στοιχίσει 30000€, ενώ με πιθανότητα 40% απορρίπτεται το αίτημά του. Αν όμως απορριφθεί το αίτημα του ενάγοντα και η ετυμηγορία είναι κατά του ενάγοντα (με πιθανότητα 50%), τότε θα πληρώσει 120.000, ενώ αν είναι υπέρ του θα πληρωθεί 250000€ με πιθανότητα 30% (χαμηλό πρόστιμο),



350000€ με πιθανότητα 60%(μέτριο πρόστιμο) ή 650000€ με πιθανότητα 10%(υψηλό πρόστιμο), ως κατά το δοκούν:



Εικόνα 21: Δέντρο απόφασης για την αντιδικία μεταξύ πλευρών σε δικαστήριο (Πηγή: Klein, 2009)

Να βρεθεί η βέλτιστη εναλλακτική λύση για τους δικηγόρους σχετικά με το αν πρέπει να θα εκπροσωπήσουν τις δύο πλευρές στο δικαστήριο.

### ΛΥΣΗ

Ξεκινώντας από την κάτω δεξιά άκρη του παραπάνω δέντρου αποφάσεων και με την διαδικασία «Αποκλεισμός κρίσης», όπου μια ετυμηγορία για τον ενάγοντα έχει ως αποτέλεσμα μια πιθανότητα 10% να πάρει 200.000€, μια πιθανότητα 80% να πάρει 300.000€ και μια πιθανότητα 10% να πάρει 500.000€, υπολογίζουμε την ANA

$$(0.1 * \$ 200.000) + (0.8 * \$ 300.000) + (0.1 * \$ 500.000) =$$

$$\$ 20.000 + \$ 240.000 + \$ 50.000 = \$ 310.000$$

Έπειτα, απαλείφοντας την κάτω δεξιά άκρη (κόμβος) και δεδομένου πως υπάρχει 50% πιθανότητα η ετυμηγορία του δικαστηρίου να είναι υπέρ του ενάγοντα, υπολογίζουμε την ANA του επόμενου κάτω δεξιά κόμβου η οποία θα ισούται με

$$310000*(0.50)=155000€$$

Αντίστοιχα, η ANA για την πλευρά του κατηγορούμενου θα ισούται με

$$120000*(0.50)=60000€$$

Προσθέτοντας τις δύο αυτές ποσότητες θα έχουμε  $60000+155000=215000$

Η πιθανότητα το δικαστήριο να αρνηθεί το αίτημα του ενάγοντα είναι 0.4, οπότε θα έχουμε  $215000*0,4=86000\text{€}$ , ενώ η πιθανότητα να εγκριθεί το αίτημα και να προχωρήσουν οι δικαστικές διαδικασίες είναι 0.6 και η ANA ισούται με  $0.6*30000=18000\text{€}$ .

Συνεπώς, η συνολική αναμενόμενη χρηματική απόδοση για αυτήν την περίπτωση θα ισούται με  $86000+18000=104000\text{€}$ , παρέχοντας στους δικηγόρους (και τον ενάγοντα) ένα καλό μέρος για να αρχίσουν οι διαπραγματεύσεις διευθέτησης των αντιπαραθέσεων.

### **Παράδειγμα 10: Διαχείριση ρίσκου για ένα project IT**

Μια επιχείρηση έχει αναλάβει την διαχείριση για ένα έργο τεχνολογίας πληροφοριών (IT project) το οποίο να ικανοποιεί τις προσδοκίες των καταναλωτών, το οποίο αποτελεί επίσης μια ευκαιρία για την αύξηση των κερδών. Η πιθανότητα ρίσκου έτσι ώστε να αποτύχει το εγχείρημα εκτιμήθηκε 10% και σε περίπτωση που συμβεί, θα κοστίζει στην επιχείρηση 50000€ , ενώ από την άλλη πλευρά η πιθανότητα να αξιοποιηθεί αποτελεσματικά η ευκαιρία ισούται με 15% και σε αυτήν την περίπτωση η επιχείρηση θα κερδίσει 30000€. Να υπολογιστεί η ANA σχετικά με την λήψη της απόφασης.

ΛΥΣΗ

Με βάση τα δεδομένα, η συνολική ANA αυτού του εγχειρήματος θα ισούται με

$$\begin{aligned} \text{ANA} &= P(\text{Το εγχείρημα αποτυγχάνει}) * (\text{Συνολικά έξοδα}) + P(\text{Η ευκαιρία αξιοποιείται}) * P(\text{Έσοδα από τις πωλήσεις αν αξιοποιηθεί η ευκαιρία σωστά}) \\ &= 0.10(-50000 + 0.15*30000) = -5000 + 4500 = -500\text{€} \end{aligned}$$

### **Παράδειγμα 11: Κατασκευή συστήματος αγωγών**

Μια μεγάλη επιχείρηση που δραστηριοποιείται στον χώρο του φυσικού αερίου επιθυμεί να δημιουργήσει ένα νέο σύστημα-δίκτυο αγωγών για την κυκλοφορία του φυσικού αερίου έτσι ώστε να ικανοποιήσει τις αυξανόμενες ανάγκες κατανομής του προϊόντος. Ωστόσο, το πρόγραμμα αντιμετωπίζει στοιχειώδεις ρίσκα (θετικά και αρνητικά) τα οποία μπορεί να οδηγήσουν σε καθυστερήσεις και σε μη προβλέψιμα κόστη, σύμφωνα με τα παρακάτω στοιχεία.

- Ρίσκο 1: Υπάρχει 25% πιθανότητας για μεγάλη βροχή, κάτι το οποίο θα έχει σαν αποτέλεσμα την καθυστέρηση του έργου για τουλάχιστον 3 εβδομάδες και ένα επιπλέον κόστος 100000€
- Ρίσκο 2: Υπάρχει 15% πιθανότητα αύξησης του κόστους εγκαταστάσεων (πχ. Ενοίκια και λογαριασμοί), κάτι που θα είχε σαν αποτέλεσμα ένα επιπλέον κόστος 200000€
- Ρίσκο 3: Υπάρχει 10% πιθανότητα αύξησης των εργατικών κοστών, καθώς οι εργάτες ενδεχόμενα να ζητήσουν αύξηση ενώ δουλεύουν κάτω από αντίξοες συνθήκες, το οποίο θα έχει σαν αποτέλεσμα την επιβάρυνση με έξτρα 90000€
- Ρίσκο 4:: Υπάρχει 30% πιθανότητα η αύξηση της αποδοτικότητας του εξοπλισμού (γεωτρύπανα, μηχανήματα κλπ) εξαιτίας ιδανικών εδαφικών συνθηκών, κάτι το οποίο θα έχει σαν αποτέλεσμα το πρόγραμμα να προχωρήσει γρηγορότερα κατά 2 εβδομάδες και να εξοικονομήσει στην επιχείρηση 50000€.

Με βάση τα παραπάνω, να κατασκευαστεί ο πίνακας αποδόσεων και ANA και να υπολογιστεί η συνολική ANA για το συγκεκριμένο έργο.

#### ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας αυτά τα στοιχεία, κατασκευάζεται ο επόμενος πίνακας αποδόσεων (που εδώ μπορεί να εκφράζουν είτε κόστος είτε κέρδος ανάλογα αν το ρίσκο έχει θετικό ή αρνητικό αντίκτυπο).

Ρίσκο	Πιθανότητα	Επίδραση (€)	ANA=Πιθανότητα*επίδραση
1	25%	-100000	-25000
2	15%	-200000	-30000
3	10%	-90000	-9000
4	30%	50000	15000
<b>Συνολική ANA</b>			<b>-49000</b>

Οπότε, η επιχείρηση θα χρειαστεί να δαπανήσει 49000€ για την κατασκευή του δικτύου σωλήνωσης αγωγών φυσικού αερίου.

## Παράδειγμα 12: Επιλογή συμβάσεων

Μια επιχείρηση εξετάζει εάν θα πρέπει να υποβάλει προσφορά για δύο συμβάσεις (Σ1 και Σ2) που προσφέρονται από κυβερνητικό τμήμα για την προμήθεια ορισμένων εξαρτημάτων. Η εταιρεία διαθέτει τρεις επιλογές:

- Επιλογή της Σ1 μόνο
- Επιλογή της Σ2 μόνο
- Επιλογή και των δύο συμβάσεων.

Στην περίπτωση που υποβληθούν προσφορές, η εταιρεία θα επιβαρυνθεί με επιπλέον έξοδα. Οι δαπάνες αυτές θα πρέπει να ανακτηθούν πλήρως από τη τιμή της σύμβασης, αλλά ο κίνδυνος φυσικά είναι ότι εάν μια προσφορά δεν είναι επιτυχής, η εταιρεία θα βγει χαμένη. Στην συνέχεια έχουμε τα παρακάτω σενάρια

- Το κόστος της προκήρυξης για τη σύμβαση Σ1 είναι μόνο 50000€. Το κόστος προμήθειας εξαρτημάτων αν η προσφορά είναι επιτυχής θα είναι 18000€.
- Το κόστος της πρόσκλησης υποβολής προσφορών για τη σύμβαση Σ2 είναι μόνο 14000€. Το κόστος προμήθειας εξαρτημάτων αν η προσφορά είναι επιτυχής θα είναι 12000€.
- Το κόστος υποβολής προσφορών και για τις δύο συμβάσεις είναι 55000€, και το κόστος προμήθειας εξαρτημάτων αν η προσφορά είναι επιτυχής θα ισούται με 24000€.

Για κάθε σύμβαση έχουν καθοριστεί πιθανές τιμές προσφοράς. Επιπλέον, έχουν γίνει υποκειμενικές εκτιμήσεις σχετικά με την πιθανότητα σύναψης της σύμβασης με συγκεκριμένη τιμή προσφοράς με βάση τα στοιχεία του επόμενου πίνακα. Σημειώνεται ότι η εταιρεία μπορεί να υποβάλει μόνο μία προσφορά και δεν μπορεί, για παράδειγμα, να υποβάλει δύο προσφορές (σε διαφορετικές τιμές) για την ίδια σύμβαση.

Επιλογή σύμβασης	Ενδεχόμενες τιμές σύμβασης (σε χιλ. €)	Πιθανότητα σύναψης σύμβασης
Σ1	130	20%
Σ1	115	85%

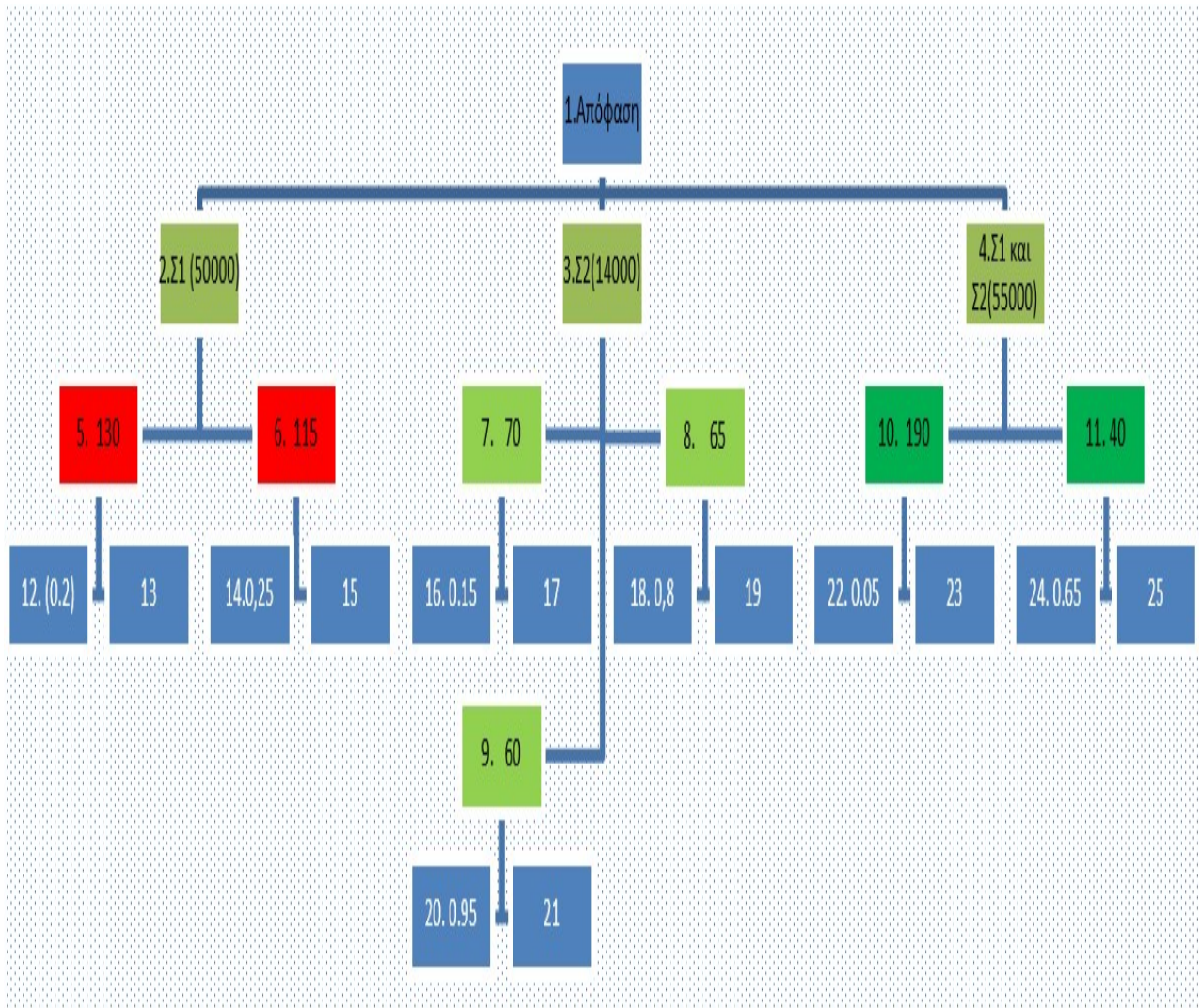
Σ2	70	15%
Σ2	65	80%
Σ2	60	95%
Και οι δύο	190	5%
Και οι δύο	140	65%

Σε περίπτωση που οι προσφορές της εταιρείας τόσο για την Σ1 όσο και για την Σ2 όσο και τις δύο συμβάσεις μαζί (με βάση τις τιμές που αναφέρονται παραπάνω) είτε καμία σύμβαση.

1. Τι προτείνετε να κάνει η εταιρεία και γιατί;
2. Ποιο είναι το μειονέκτημα και η άνοδος της προτεινόμενης πορείας δράσης σας;
3. Ένας σύμβουλος έχει προσεγγίσει την εταιρεία σας με μια προσφορά που σε αντάλλαγμα 20,000€ σε μετρητά θα εξασφαλίσει ότι εάν προσφέρετε 60,000€ για το συμβόλαιο Σ2 μόνο η προσφορά σας είναι εγγυημένη για επιτυχία. Πρέπει να αποδεχθείτε την προσφορά της ή όχι και γιατί;

#### **ΛΥΣΗ**

- 1) Με βάση τα δεδομένα, κατασκευάζεται το δέντρο απόφασης στο οποίο παρουσιάζονται οι αντίστοιχοι κόμβοι αποφάσεων σε συνδυασμό με τα ανάλογα οφέλη/απώλειες και τις αναγραφόμενες πιθανότητες, όπου φυσικά αυτές υπάρχουν.



Εικόνα 22: Δέντρο απόφασης για την επιλογή σύμβασης ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Στην συνέχεια επιλύεται το πρόβλημα μέσω της διαδικασίας λύσης δέντρου αποφάσεων που (για το παράδειγμα αυτό) περιλαμβάνει την επεξεργασία του συνολικού κέρδους για κάθε ένα από τα μονοπάτια από τον αρχικό κόμβο στον τερματικό κόμβο (όλοι οι αριθμοί σε χιλιάδες €).

#### Βήμα 1:

- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 12, προσφέρουμε μόνο για την πρώτη σύμβαση (κόστος 50), σε τιμή 130 και κερδίζουμε το συμβόλαιο, και με βάση το κόστος προμήθειας εξαρτημάτων 18, το συνολικό κέρδος ισούται με  $130 - 50 - 18 = 62$

- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 13, προσφέρουμε μόνο για την πρώτη σύμβαση (κόστος 50), σε τιμή 130 και χάνουμε τη σύμβαση, και το συνολικό κέρδος είναι -50
- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 14, προσφέρουμε μόνο για την πρώτη σύμβαση (κόστος 50), σε τιμή 115 και κερδίζουμε το συμβόλαιο, συνεπακόλουθα το κόστος προμήθειας εξαρτημάτων 18, το συνολικό κέρδος ισούται με  $115-50-18 = 47$
- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 15, προσφέρουμε μόνο για την πρώτη σύμβαση (κόστος 50), σε τιμή 115 και χάνουμε τη σύμβαση, το συνολικό κέρδος ισούται με -50
- Στη διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 16, προσφέρουμε μόνο για την δεύτερη σύμβαση(κόστος 14), σε τιμή 70 και κερδίζουμε το συμβόλαιο, συνεπακόλουθα το κόστος προμήθειας εξαρτημάτων 12, το συνολικό κέρδος ισούται με  $70-14-12 = 44$
- Στη διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 17, προσφέρουμε μόνο για την δεύτερη σύμβαση (κόστος 14), σε τιμή 70 και χάνουμε τη σύμβαση, το συνολικό κέρδος ισούται με -14
- Στη διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 18, προσφέρουμε μόνο για την δεύτερη σύμβαση (κόστος 14), σε τιμή 65 και κερδίζουμε το συμβόλαιο, συνεπακόλουθα το κόστος προμήθειας εξαρτημάτων 12, το συνολικό κέρδος ισούται με  $65-14-12 = 39$
- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 19, προσφέρουμε μόνο διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 19, προσφέρουμε μόνο για την δεύτερη σύμβαση (κόστος 14), σε τιμή 65 και χάνουμε τη σύμβαση, το συνολικό κέρδος -14 (κόστος 14), σε τιμή 65 και χάνουμε τη σύμβαση, το συνολικό κέρδος είναι 14
- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 20, προσφέρουμε μόνο για την δεύτερη σύμβαση (κόστος 14), σε τιμή 60 και κερδίζουμε το συμβόλαιο, συνεπακόλουθα το κόστος προμήθειας εξαρτημάτων 12, το συνολικό κέρδος είναι  $60-14-12 = 34$
- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 21, προσφέρουμε μόνο για την δεύτερη σύμβαση (κόστος 14), σε τιμή 60 και χάνουμε τη σύμβαση, το συνολικό κέρδος είναι -14
- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 22, προσφέρουμε και για τις δύο συμβάσεις (κόστος 55), σε τιμή 190 και κερδίζουμε το συμβόλαιο, συνεπακόλουθα το κόστος προμήθειας εξαρτημάτων 24, το συνολικό κέρδος ισούται με  $190-55-24 = 111$

- Στη διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 23, προσφέρουμε και για τις δύο συμβάσεις ( κόστος 55), σε τιμή 190, και χάνουμε τη σύμβαση, το συνολικό κέρδος -55
- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 24, προσφέρουμε και για τις δύο συμβάσεις (κόστος 55), σε τιμή 140 και κερδίζουμε το συμβόλαιο, συνεπακόλουθα το κόστος εφοδιασμού εξαρτημάτων 24, το συνολικό κέρδος  $140-55-24 = 61$
- Στην διαδρομή προς τον τερματικό κόμβο 25, προσφέρουμε και για τις δύο συμβάσεις (κόστος 55), σε τιμή 140 και χάνουμε τη σύμβαση, το συνολικό κέρδος -55

Οπότε, κατασκευάζουμε τον πίνακα αποδόσεων (που εδώ εκφράζει το κέρδος από την υπογραφή της σύμβασης)

Τερματικός κόμβος	Συνολικό κέρδος
12	62
13	-50
14	47
15	-50
16	44
17	-14
18	39
19	-14
20	34
21	-14
22	111
23	-55
24	61
25	-55

Στην συνέχεια εκτελούμε το δεύτερο βήμα της διαδικασίας λύσης δέντρων αποφάσεων όπου εργαζόμαστε υπολογίζοντας την ANA για κάθε κάτω δεξιά γωνία του δέντρου απόφασης και επιλέγοντας την μεγαλύτερη για κάθε περίπτωση (αφού εδώ οι αποδόσεις εκφράζονται σε κέρδη) και θα είναι:



## Βήμα 2:

- Για τον τυχαίο κόμβο 5 το ANA είναι  $0,2 * (62) + 0,8 * (-50) = -27,6$
- Για τον τυχαίο κόμβο 6 το ANA είναι  $0,85 * (47) + 0,15 * (-50) = 32,45$

Ως εκ τούτου, η καλύτερη απόφαση στον κόμβο απόφασης 2 είναι η υποβολή προσφοράς σε τιμή 115 ( $\max(\text{ANA}) = 32.45$ ).

- Για τον τυχαίο κόμβο 7 το ANA είναι  $0,15 * (44) + 0,85 * (-14) = -5,3$
- Για τον τυχαίο κόμβο 8 το ANA είναι  $0,80 * (39) + 0,20 * (-14) = 28,4$
- Για τον τυχαίο κόμβο 9 το ANA είναι  $0,95 * (34) + 0,05 * (-14) = 31,6$

Ως εκ τούτου, η καλύτερη απόφαση στον κόμβο απόφασης 3 είναι η υποβολή προσφοράς σε τιμή 60 ( $\max(\text{ANA}) = 31,6$ ).

- Για τον τυχαίο κόμβο 10 το ANA είναι  $0,05 * (111) + 0,95 * (-55) = -46,7$
- Για τον τυχαίο κόμβο 11 το ANA είναι  $0,65 * (61) + 0,35 * (-55) = 20,4$

2) Ως εκ τούτου, η καλύτερη απόφαση στον κόμβο απόφασης 4 είναι η υποβολή προσφορών σε τιμή 140 ( $\max(\text{ANA}) = 20,4$ ). Το αντίστοιχο μειονέκτημα είναι απώλεια 50 και το καθαρό κέρδος είναι 47.

3) Όσον αφορά την προσφορά των συμβούλων αγνοώντας τις ηθικές εκτιμήσεις, θα μπορούσαμε βέβαια να αποδεχτούμε την προσφορά των 60.000€ για την δεύτερη σύμβαση μόνο και αν κάναμε κάτι τέτοιο ουσιαστικά θα είχαμε 9%5 πιθανότητα να γίνει αποδεχτή η προσφορά μας. Ως εκ τούτου, υπάρχουν ουσιαστικά τρεις επιλογές:

- όπως προηγουμένως, η προσφορά για την πρώτη σύμβαση μόνο σε τιμή 115, θα έχει  $\text{ANA}=32,45$ , απώλεια -50 ( με πιθανότητα 0,15), και ωφέλεια 47 (με πιθανότητα 0,85)
- η προσφορά για την δεύτερη σύμβαση μόνο σε τιμή 60, χωρίς την βοήθεια από τον σύμβουλο θα έχει ANA 31,6, απώλειες-14 (πιθανότητα 0,05), ανοδική 34 (πιθανότητα 0,95)
- (με την προϋπόθεση ότι μπορεί να εκπληρώσει την υπόσχεσή της να εγγυηθεί ότι θα πετύχουμε), έχουμε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα με κέρδος 34 (τερματικός κόμβος 20) - 20 (μετρητά που έχουν καταβληθεί στον σύμβουλο) = 14

Οπότε, με κριτήριο την ANA θα εξακολουθούσαμε να υποστηρίζουμε την αρχική μας απόφαση. Εξετάζοντας τους κινδύνους (πιθανότητες) της απώλειας χρημάτων και

εξετάζοντας την πρόταση για την δεύτερη σύμβαση μόνο για 60000, θα πληρώναμε ουσιαστικά τον σύμβουλο 20000 για να αποφύγουμε την απώλεια 14.000 (με πιθανότητα 5%). Συνέπεια, με την πληρωμή 20000 προκειμένου να εγγυηθούμε ότι δεν θα έχουμε απώλειες 14000 οι οποίες θα προκύψουν με πιθανότητα 0,05 (μία στις είκοσι) δεν φαίνεται να είναι μια πολύ καλή επένδυση και έτσι θα πρέπει να απορρίψουμε την προσφορά του συμβούλου (ή να του προσφέρουμε ένα μικρότερο χρηματικό ποσό σε αντάλλαγμα την εγγύησή της).

### **Παράδειγμα 13: Επιλογή συμβάσεων**

Η MDG (Metal Discovery Group) είναι ένας μεγάλος όμιλος που έχει σκοπό να διεξάγει γεωλογικές εξερευνήσεις σε μια συγκεκριμένη περιοχή αγροτεμαχίων προκειμένου να εξακριβωθεί εάν υπάρχουν ή όχι σημαντικές μεταλλικές αποθέσεις (που αξίζουν περαιτέρω εμπορική εκμετάλλευση). Ο όμιλος έχει την επιλογή να αγοράσει εξ ολοκλήρου ένα αγροτεμάχιο έναντι 3 εκ. για να προχωρήσει στην γεωλογική του εξερεύνηση. Εάν η επιχείρηση αγοράσει αυτό το αγροτεμάχιο τότε θα έχει την δυνατότητα να πραγματοποιήσει μια γεωλογική εξερεύνηση της γης. Η εμπειρία του παρελθόντος δείχνει ότι για τον τύπο του αγροτεμαχίου που εξετάζεται, οι γεωλογικές εξερευνήσεις κοστίζουν περίπου 1 εκατ. € και αποφέρουν σημαντικές μεταλλικές αποθέσεις ως εξής:

- μαγγάνιο με πιθανότητα 1%
- χρυσό με πιθανότητα 0.05%
- ασήμι με πιθανότητα 0,2%

Υποθέτουμε πως μόνο ένα από αυτά τα τρία μέταλλα βρίσκεται πάντα (αν υπάρχει), δηλαδή δεν υπάρχει πιθανότητα να βρεθούν δύο ή περισσότερα από αυτά τα μέταλλα και καμία πιθανότητα να βρεθεί άλλο μέταλλο από τις παραπάνω κατηγορίες. Εάν βρεθεί μαγγάνιο, τότε το αγροτεμάχιο μπορεί να πωληθεί για 30 εκατομμύρια €, αν βρεθεί ο χρυσός, τότε το αγροτεμάχιο μπορεί να πωληθεί για £ 250 εκατομμύρια € και αν βρεθεί ασήμι, το αγροτεμάχιο μπορεί να πωληθεί για 150 εκ. €.

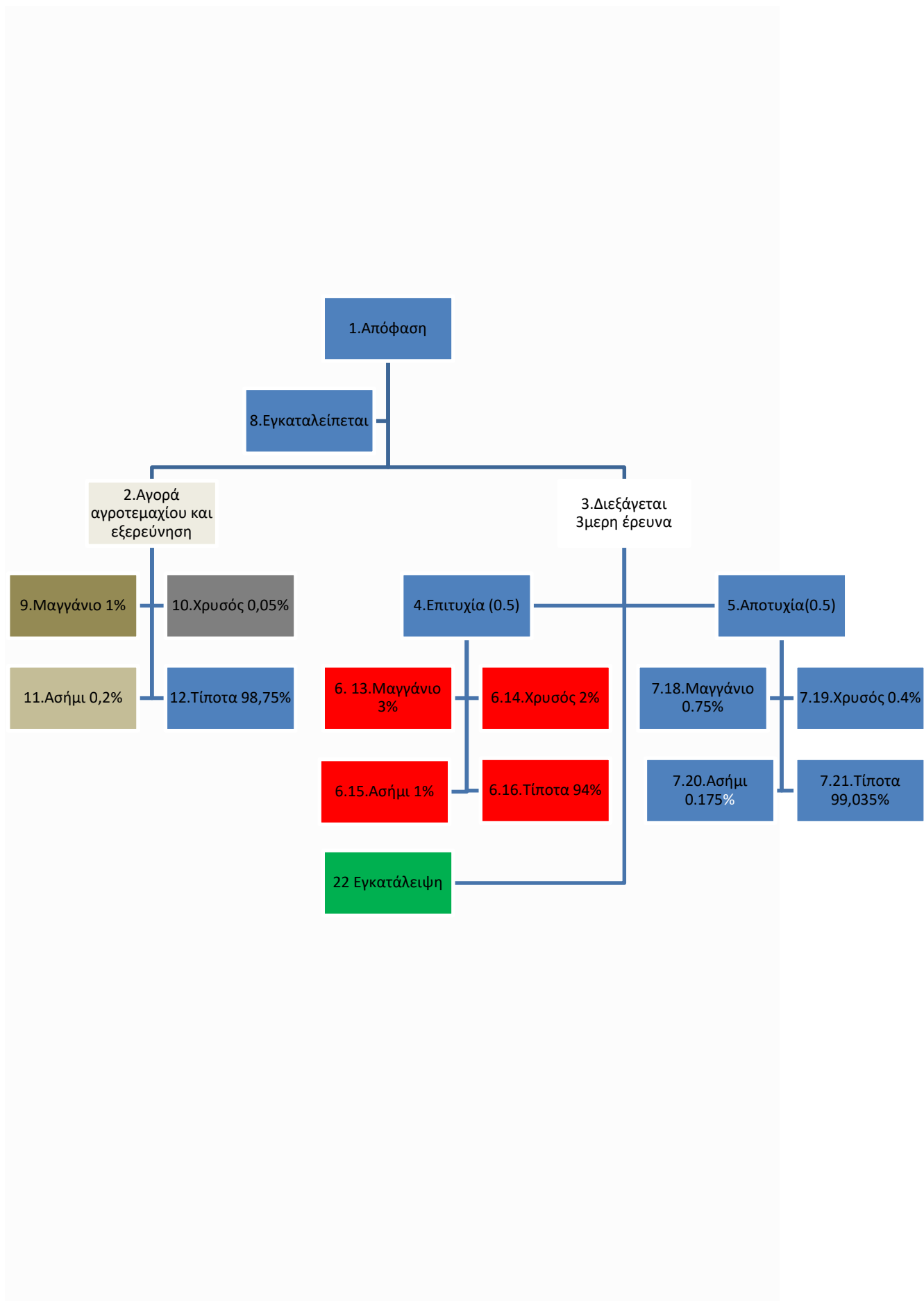
Η επιχείρηση μπορεί, αν το επιθυμεί, να πληρώσει 750.000 € για το δικαίωμα διεξαγωγής δοκιμαστικής έρευνας τριών ημερών πριν αποφασίσει αν θα αγοράσει το αγροτεμάχιο ή όχι. Τέτοιες τριήμερες διερευνήσεις μπορούν να δώσουν μόνο μια προκαταρκτική ένδειξη για το κατά πόσο υπάρχουν σημαντικές μεταλλικές αποθέσεις ή όχι (σε καμία περίπτωση μια απλή δοκιμαστική έρευνα δεν εξασφαλίζει απόλυτα την ύπαρξη πολύτιμων μετάλλων) και η εμπειρία του παρελθόντος δείχνει ότι οι εξερευνήσεις δοκιμών τριών ημερών

κοστίζουν 250.000€ και δείχνουν ότι υπάρχουν σημαντικά αποθέματα μετάλλων κατά 50%.

Σε περίπτωση που η τριήμερη εξερεύνηση δοκιμής υποδεικνύει σημαντικά αποθέματα σε μέταλλο, τότε οι πιθανότητες εύρεσης μαγγανίου, χρυσού και αργύρου αυξάνονται στο 3%, 2% και 1% αντίστοιχα. Εάν η τριήμερη εξερεύνηση δεν καταδείξει σημαντικές μεταλλικές αποθέσεις τότε οι πιθανότητες εύρεσης μαγγανίου, χρυσού και αργύρου μειώνονται στο 0,75%, 0,04% και 0,175% αντίστοιχα. Τι απόφαση θα πρέπει να πάρει η επιχείρηση για να έχει κάποιο όφελος και γιατί; Αν μια επιχείρηση με παρεμφερή επαγγελματικές δραστηριότητες είναι διατεθειμένη να πληρώσει τα μισά από τα σχετικά κόστη γεώτρησης και σαν αντάλλαγμα επιθυμεί τα μισά από τα κέρδη, κάτω από ποιες καταστάσεις θα έπρεπε η MDG να συνεργαστεί και για ποιους λόγους; (Υπόδειξη: Να κατασκευαστεί το δέντρο απόφασης για το συγκεκριμένο πρόβλημα και να υπολογιστούν αναλυτικά τα βήματα επίλυσης του αλγορίθμου)

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα αποτελεί μια χαρακτηριστική περίπτωση λήψης πολύπλοκων επιχειρηματικών αποφάσεων, και για τους σκοπούς αυτούς κατασκευάζεται το επόμενο δέντρο απόφασης (παρουσιάζονται επίσης και οι αντίστοιχοι κόμβοι).



Εικόνα 23: Δέντρο απόφασης για την επιλογή αγροτεμαχίου για ενδεχόμενη εξόρυξη μετάλλων (Πηγή: Δημιουργία του συγγραφέα)

Εργαζόμενοι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, υλοποιούμε τον αλγόριθμο και θα είναι (ποσά σε €)

Βήμα 1<sup>ο</sup>:

- (Κόμβος 8) αν η επιχείρηση εγκαταλείψει το έργο, θα έχουμε μηδενικό κέρδος
- (Κόμβος 9) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος 3 εκατ.), να εξερευνήσει (κόστος 1 εκατ.) και να βρει μαγγάνιο (έσοδα 30 εκατ.), το συνολικό κέρδος 26 εκ.
- (Κόμβος 10) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος 3 εκατ.), να διερευνήσει (κόστος 1 εκατ.) και να βρει χρυσό (έσοδα 250 εκατ.), με συνολικό κέρδος 246 εκ.
- (Κόμβος 11) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος 3 εκατ.), να διερευνήσει (κόστος 1 εκατ.) και βρει ασήμι (έσοδα 150 εκατ.), το συνολικό κέρδος 146 εκ.
- (Κόμβος 12) Η επιχείρηση μπορεί (κόστος 3 εκατ.), να διερευνήσει (κόστος 1 εκατ.) και να μη βρει τίποτα, το συνολικό κέρδος -4 εκ
- (Κόμβος 13) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος 0,75εκ + 0,25εκ), να διαπιστώσει ότι έχει αυξημένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών αποθέσεων, να αγοράσει και να διερευνήσει (κόστος 4εκ) και να βρει μαγγάνιο (έσοδα 30 εκατ. ), ενώ το συνολικό κέρδος ισούται με 25 εκ.
- (Κόμβος 14) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος 0,75 εκατ. + 0,25 εκατ.), να διαπιστώσει ότι έχει αυξημένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών αποθέσεων, οπότε αγοράζει και διερευνά (κόστος 4 εκατ.) και βρίσκει χρυσό (έσοδα 250 εκατ. ), το συνολικό κέρδος 245 εκ.
- (Κόμβος 15) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος 0,75εκ + 0,25εκ=1εκ), να διαπιστώσει ότι έχει αυξημένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών αποθεμάτων, έτσι αγοράζει και διερευνά (κοστίζουν 4 εκατ.) και βρίσκει ασήμι (έσοδα 150 εκατ. ), το συνολικό κέρδος 145 εκ.
- (Κόμβος 16) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος 0,75εκ + 0,25εκ=1εκ), να διαπιστώσει ότι έχει αυξημένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών αποθεμάτων, έτσι αγοράζει και διερευνά (κοστίζουν 4 εκατ.) δεν βρίσκει τίποτα με συνολικό κόστος 5 εκ.
- (Κόμβος 17) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος 0,75εκ + 0,25εκ=1εκ), να διαπιστώσει ότι έχει αυξημένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών αποθεμάτων, ωστόσο αποφασίζει να εγκαταλείψει, με συνολικό κέρδος -1 εκ.

- (Κόμβος 18) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος  $0,75\text{εκ} + 0,25\text{εκ}=1\text{εκ}$ ), να διαπιστώσει ότι έχει αυξημένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών αποθεμάτων, αγοράζει και διερευνά (κόστος  $4\text{εκ}$ ) και βρίσκει μαγγάνιο (έσοδα  $30\text{ εκατ.}$ ), το συνολικό κέρδος  $25\text{ εκ.}$
- (Κόμβος 19) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος  $0,75\text{εκ} + 0,25\text{εκ}=1\text{εκ}$ ), να διαπιστώσει ότι έχει αυξημένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών αποθεμάτων, αγοράζει και διερευνά (κόστος  $4\text{εκ}$ ) και βρίσκει χρυσό (έσοδα  $250\text{ εκατ.}$ ), το συνολικό κέρδος  $255\text{ εκ.}$
- (Κόμβος 20) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος  $0,75\text{εκ} + 0,25\text{εκ}=1\text{εκ}$ ), να διαπιστώσει ότι έχει αυξημένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών αποθεμάτων, αγοράζει και διερευνά (κόστος  $4\text{εκ}$ ) και βρίσκει ασήμι (έσοδα  $150\text{ εκ.}$ ) και το συνολικό κέρδος  $145\text{ εκ.}$
- (Κόμβος 21) Η επιχείρηση μπορεί με (κόστος  $0,75\text{εκ} + 0,25\text{εκ}=1\text{εκ}$ ), να διαπιστώσει ότι έχει αυξημένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών αποθεμάτων, αγοράζει και διερευνήσει (κόστος  $4\text{εκ}$ ) και να μη βρει τίποτα, με συνολικό κόστος  $-5\text{εκ.}$
- (Κόμβος 22) Τέλος, η επιχείρηση μπορεί με (κόστος  $0,75\text{εκ} + 0,25\text{εκ}=1\text{εκ}$ ), να διαπιστώσει ότι έχει διαπιστώνουμε ότι έχουμε μειωμένη πιθανότητα σημαντικών μεταλλικών κοιτασμάτων, αποφασίζει να εγκαταλείψει το έργο.

Συνοπτικά, παρουσιάζεται ο πίνακας με τις ενδεχόμενες απώλειες-οφέλη ανά κόμβο του παραπάνω δέντρου απόφασης

Κόμβος	Συνολικό έσοδο (σε εκ. €)
8	0
9	26
10	246
11	146
12	-4
13	25
14	245
15	145
16	-5
17	-1
18	25

19	245
20	145
21	-5
22	-1

Στην συνέχεια εκτελείται το δεύτερο βήμα επίλυσης του δέντρου απόφασης όπου υπολογίζονται οι ANA και διαγράφονται σταδιακά οι κάτω δεξιά άκρες (κλαδιά) του δέντρου απόφασης.

Ξεκινώντας από τον κόμβο 7 που καταλήγει στους κόμβους 15-21 (ο κόμβος 7 είναι η «ρίζα» των κλαδιών 15-21) η ANA που αντιστοιχεί σε αυτόν τον κόμβο θα ισούται με

$$0.0075*25+0.0004*245+0.00175*145+0.99035*(-5)=-4,4125 \text{ €}$$

Η ANA στον κόμβο 5 ισούται με -1 εκ (κόστος διεξαγωγής αλλά δεν βρίσκονται μέταλλα), οπότε εδώ η καλύτερη απόφαση είναι αυτή που έχει το μικρότερο κόστος, οπότε ANA=-1.

Η ANA για τον κόμβο 6 (η επιχείρηση βρίσκει μέσω της διερεύνησης ισχυρή ένδειξη ύπαρξης μετάλλων) θα ισούται με

$$0.03*25+0.02*245+0.01*145+0.94*(-5)=2.4\text{εκ}$$

Οπότε, εδώ η καλύτερη απόφαση εδώ πέρα για την επιχείρηση είναι να επενδύσει αφού θα έχει κέρδος (ANA=2.4)

Η ANA για τον κόμβο 3 (αποφασίζει αν θα διεξάγει ή όχι την τριήμερη έρευνα) ισούται με  $0.5*2.4+0.5*(-1)=0.7 \text{ εκ.}$

Η ANA για τον κόμβο 2 (η επιχείρηση απλά προχωρεί στην αγορά του αγροτεμαχίου χωρίς να σκεφτεί καν να κάνει έρευνα) θα ισούται με

$$0.01*26+0.0005*246+0.002*146+0.9875*(04)=-3.275 \text{ εκ}$$

Συνοψίζοντας , η επιχείρηση έχει να διαλέξει ανάμεσα σε 3 εναλλακτικές επιλογές:

- Δεν προχωράει καθόλου στην διεξαγωγή του εγχειρήματος και έχει ANA=0
- Αγοράζει αγροτεμάχιο και εξερευνεί με ANA=-3.275
- Διεξάγει 3ημερη έρευνα και δοκιμές με ANA=0,7εκ.

Προφανώς ανάμεσα σε αυτές τις τρεις επιλογές θα επιλέξει την τελευταία καθώς θα της αποφέρει κέρδος 0.7 εκ. €. Επίσης, η ίση κατανομή των δαπανών και των εσόδων (50:50) περιορίζει κατά το ήμισυ όλα τα νομισματικά μεγέθη στους παραπάνω υπολογισμούς και έτσι η βέλτιστη απόφαση EMV είναι ακριβώς όπως και πριν. Εντούτοις, σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, αν αποδεχτεί να μοιραστεί τα κόστη και τα έσοδα με την άλλη επιχείρηση, η εταιρεία ουσιαστικά διαφοροποιεί τον κίνδυνο καθώς συμπάσχει πλέον με την δεύτερη επιχείρηση, και σε μακροπρόθεσμη βάση μπορεί να έχει καλά αποτελέσματα (η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου είναι πολύ συνηθισμένη τακτική στην λήψη αποφάσεων για την ελαχιστοποίηση του ανάλογου ρίσκου).

Ολοκληρώνοντας, η ANA μπορεί εύκολα να εκφράζει την αναμενόμενη μέση τιμή σε προβλήματα πιθανοτήτων με την συμμετοχή διακριτών τ. μ. , κάτι το οποίο είναι αρκετά σαφές μέσα από το επόμενο παράδειγμα.

#### **Παράδειγμα 14: Ρίψη ενός ζαριού και ANA**

Έστω πως έχουμε ένα πείραμα το οποίο έχει να κάνει με την ρίψη ενός «αμερόληπτου» ζαριού 3 φορές στις οποίες καταγράφουμε τα αποτελέσματα, και ορίζουμε την τ. μ.  $X$  που δηλώνει τον αριθμό των κεφαλών που εμφανίζονται στο νόμισμα, και προφανώς η  $X$  παίρνει τιμές 0,1,2,3. Οι πιθανότητες να έρθουν σε κάθε περίπτωση είναι 1/8, 3/8, 3/8 και 1/8. Οπότε, η αναμενόμενη τιμή της τ. μ.  $X$  θα ισούται με

$$E(X) = 0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Οπότε, ουσιαστικά σε 3 ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος περιμένουμε να έρθουν συνολικά 1.5 κεφαλές, και η μέση τιμή αυτής της τ. μ. μπορεί να εκφραστεί σαν ANA.

#### **Παράδειγμα 15: Υπολογισμός ANA για την λήψη αμερόληπτου νομίσματος**

Έστω πως ρίχνουμε ένα «αμερόληπτο» νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί κεφαλή για πρώτη φορά, και έστω  $X$  η τ.μ. που έχει να κάνει με τον αριθμό των ρίψεων. Να υπολογιστεί η ANA μέχρι να εμφανιστεί πρώτη φορά κεφαλή .

ΛΥΣΗ



Οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η τ. μ.  $X$  είναι 1,2,3,... και η συνάρτηση πιθανότητας ισούται με

$$P(X = x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} \dots * \frac{1}{2} (x \text{ φορές}) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x = 1,2,3..$$

Οπότε και η ANA σε αυτήν την περίπτωση θα ισούται απλά με την αναμενόμενη μέση τιμή της τ. μ.  $X$ , δηλαδή

$$ANA = E(X) = 1 * \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{2^2} + 3 * \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + 1 = 2$$

### Παράδειγμα 16: Αποτελέσματα Λόττο

Έστω πως στην τελευταία κλήρωση του ΛΟΤΤΟ τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα

Αριθμός των σφαιρών που ταιριάζουν	Πιθανότητα	Κέρδος (σε €)
6	0.000000071	4,894,097
5+bonus ball	0.000000429	390,643
5	0.000018449	2,226
4	0.000968619	164
3	0.0177	25
<3	0.9814	0

Να υπολογιστεί η ANA ενός τυχαίου παίκτη.

ΛΥΣΗ

Με βάση τον ορισμό της μέσης τιμής, έχουμε την ANA να ισούται με

ANA=P(έξι νούμερα ταιριάζουν)\*Κέρδος στα έξι νούμερα + P(πέντε νούμερα ταιριάζουν)\*Κέρδος στα πέντε νούμερα ταιριάζουν+bonus) +P(5νούμερα ταιριάζουν)\*Κέρδος στα 5 νούμερα + P(4 νούμερα ταιριάζουν)\*Κέρδος στα 4 νούμερα ταιριάζουν+ P(3 νούμερα ταιριάζουν)\*Κέρδος στα 3νούμερα + P(κάτω από 3 νούμερα ταιριάζουν) \*Κέρδος στα κάτω από 3 νούμερα=0,000000071\*4894097+...+0,0177\*25+0,9814\*0=...=1,158€

Δηλαδή, ένα δίκαιο ποσό για την συμμετοχή στο τυχερό παιχνίδι με βάση την ANA είναι στα 1.15€.

### Παράδειγμα 17: Εταιρία τεχνολογίας και προώθηση καινοτόμου προϊόντος

Η Synartec είναι μια μικρή εταιρεία τεχνολογίας με ένα νέο και καινοτόμο προϊόν που θέλει να ξεκινήσει στην αγορά. Η εταιρία έχει διάφορες εναλλακτικές στρατηγικές που μπορεί να προχωρήσει. Μπορεί να ξεκινήσει είτε με μια απευθείας προσέγγιση και να προωθήσει το προϊόν κατευθείαν στην αγορά χρησιμοποιώντας συμβατικά κανάλια διανομής (πχ, διανομές κάτοικόν), ή να χρησιμοποιήσει το internet. Μια τρίτη επιλογή περιλαμβάνει την περίπτωση που η Synartec έχει εξουσιοδοτήσει μια άλλη εταιρία να προωθήσει το προϊόν της πληρωμής ενός τέλους άδειας ανεξάρτητα από την επιτυχία του προϊόντος.

Πώς πρέπει να ξεκινήσει η εταιρεία το προϊόν; Η εταιρεία έχει κάνει κάποια αρχική έρευνα αγοράς και ο διευθύνων σύμβουλος Jack Holmes πιστεύει ότι η ζήτηση για το προϊόν μπορεί να ταξινομηθεί σε τρεις κατηγορίες: υψηλή, μεσαία ή χαμηλή. Ο Jack πιστεύει ότι αυτές οι κατηγορίες θα εμφανιστούν με πιθανότητες 0,2, 0,35 και 0,45 αντίστοιχα και οι σκέψεις του σχετικά με τα πιθανά κέρδη (σε χιλιάδες €) που κερδίζονται σε κάθε σχέδιο παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα, και με βάση αυτές τις τιμές να υπολογιστεί η ANA για αυτήν την περίπτωση.

Τρόπος προώθησης/Ζήτηση του προϊόντος	Υψηλή	Μέτρια	Χαμηλή
Απευθείας	100	55	-25
Μέσω διαδικτύου	46	25	15
Μέσω εξουσιοδοτημένης επιχείρησης	20	20	20

ΛΥΣΗ

Η ANA υπολογίζεται με βάση τις δοθείσες πιθανότητες και για κάθε περίπτωση θα ισούται με (τα ποσά εκφράζονται σε χιλιάδες €)

$$\text{ANA(Απευθείας προώθηση)}=0,2*100+0,35*55+0,45*(-24)=28$$

$$\text{ANA(Προώθηση μέσω του διαδικτύου)}=0,2*46+0,35*25+0,45*15=24,7$$

$$\text{ANA (Προώθηση μέσω εξουσιοδοτημένης επιχείρησης)}=20$$

Με κριτήριο την ANA, επειδή εδώ εκφράζει το κέρδος που θα έχει η Synartec, η απευθείας προώθηση έχει το μεγαλύτερο κέρδος, οπότε και αυτήν την προσέγγιση θα πρέπει να επιλέξει η συγκεκριμένη επιχείρηση.

#### d. Συμπεράσματα – Συζήτηση

Τα Μαθηματικά χαρακτηρίζονται συχνά ως τα πιο ακριβή όλων των επιστημών. Τα μαθηματικά συχνά έχουν τις ρίζες τους στις πυρκαγιές της δημιουργικότητας, που γεννιούνται από τις εξωλογικές λογικές διαδικασίες φωτισμού και διαίσθησης. Η εξεύρεση λύσεων που βασίζεται αποκλειστικά στις διαδικασίες λογικής και παραδοτικής λογικής παραμορφώνουν την πραγματική φύση της επίλυσης προβλημάτων. Βεβαίως, υπάρχουν προβλήματα στα οποία η λογική παραπλανητική συλλογιστική αρκεί για την εξεύρεση λύσης. Αλλά αυτά δεν είναι πραγματικά προβλήματα. Τα πραγματικά προβλήματα χρειάζονται τις εξωλογιστικές διαδικασίες δημιουργικότητας, διορατικότητας και φωτισμού, για να παράγουν λύσεις.

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, είναι προφανές πως τα δέντρα απόφασης μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αρκετές περιπτώσεις για να επιλύσουν αρκετά δύσκολα προβλήματα επιχειρηματικών αποφάσεων, όπως επίσης και η μέθοδος της αναμενόμενης χρηματικής αξίας και της αναμενόμενης απώλειας, αρκεί φυσικά η κάθε απόφαση να έχει να κάνει ανάλογα με το κέρδος ή κόστος. Ένα δέντρο αποφάσεων μπορεί να βοηθήσει πολλές επιχειρήσεις έτσι ώστε να σταθμίσουν τις

πιθανές συνέπειες μιας απόφασης εναντίον κάποιας άλλης απόφασης. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί ακόμη και να βοηθήσει στο να υπολογιστούν οι αναμενόμενες αποδόσεις των αποφάσεων.

Για παράδειγμα, η εκτίμηση της αξίας χρηματικών μονάδων για όλα τα αποτελέσματα και τις πιθανότητες που σχετίζονται με κάθε αποτέλεσμα, αυτοί οι αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστεί ποια αρχική απόφαση θα οδηγήσει στη μεγαλύτερη μέση χρηματική απολαβή. Τα δέντρα αποφάσεων παρέχουν ένα πλαίσιο για να εξετάσουν την πιθανότητα και τις απολαβές των αποφάσεων, οι οποίες μπορούν να συνεισφέρουν στην ανάλυση μιας απόφασης για την επιλογή της βέλτιστης λύσης. Ωστόσο, τα δέντρα απόφασης έχουν και μερικά μειονεκτήματα, δεδομένου ότι τα αποτελέσματα των αποφάσεων και των απολαβών μπορεί να βασίζονται κυρίως στις προσδοκίες μιας επιχείρησης. Όταν λαμβάνονται πραγματικές αποφάσεις, οι απολαβές ενδέχεται να μην είναι οι ίδιες με αυτές που έχουν αρχικά προγραμματιστεί, καθώς μπορεί να προκύψουν ως αποτέλεσμα μιας απλής απόφασης, με συνέπεια να οδηγήσει σε ένα μη ρεαλιστικό δέντρο αποφάσεων που θα μπορούσε να καθοδηγήσει μια επιχείρηση προς μια κακή απόφαση. Ωστόσο, τα δέντρα απόφασης είναι μια πολύ εύκολη, ευέλικτη και κατανοητή επιλογή κατανοητά όταν υπάρχουν μόνο λίγες πιθανές αποφάσεις (Hamel, 2018).

Για παράδειγμα, επιχειρήσεις που θέλουν να διαλέξουν ανάμεσα σε μια επιλογή μάρκετινγκ για την προώθηση των προϊόντων τους προφανώς θα επιλέξουν ανάμεσα σε αυτή που έχει το χαμηλότερο κόστος, ενώ μια επιχείρηση που πουλάει πχ. ηλεκτρονικές συσκευές και θέλει να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, θα επιλέξει την ποσότητα εκείνη που η ζήτησή της αποφέρει το χαμηλότερο αναλογικά κόστος.

## 6. Βιβλιογραφία

Bibby, T. (2002). Creativity and logic in primary-school mathematics: A view from the classroom. *For the Learning of Mathematics*, 22(3), 10–13.

Bruder, R. (2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. In W. Herget & L. Flade (Eds.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen* (pp. 69–78). Berlin: Volk und Wissen.  
<https://www.youtube.com/watch?v=hBDO7jhsyqg>

Bruder, R. (2005). Ein aufgabenbasiertes anwendungsorientiertes Konzept für einen nachhaltigen Mathematikunterricht—am Beispiel des Themas “Mittelwerte”. In G. Kaiser & H. W. Henn (Eds.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation* (pp. 241–250). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: CornelsenVerlag Scriptor.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions. In F.M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp.3–34). Springer.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for designing mobile learning environments. In D. Churchill, J. Lu, T. K. F. Chiu, & B. Fox (Eds.), *Mobile learning design* (pp. 20–36)., lecture notes in educational technology NY: Springer.

Collet, C. (2009). Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation fördern. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen. In G. Krummheuer, & A. Heinze (Eds.), *Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik*, Band 2, Münster: Waxmann.

Collet, C., & Bruder, R. (2008). Longterm-study of an intervention in the learning of problem-solving in connection with self-regulation. In O. Figueras, J. L. Cortina, S.

Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, (Vol. 2, pp. 353–360).

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Math*, 83(1), 87–101.

English, L. D. & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st- Century mathematics education. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 313–335). NY: Routledge.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87, 519–524.

Halmos, P. R. (1994). What is teaching? *The American Mathematical Monthly*, 101(9), 848–854.

Hamel, G. (2018). Advantages & Disadvantages of Decision Trees. [online] Available at: <https://www.techwalla.com/articles/advantages-disadvantages-of-decision-trees> [Accessed 7 Jun. 2019].

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics education and technology—Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*. NY: Springer.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763–804). National Council of Teachers of Mathematics, Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematical tasks: The role of tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 191–225). New York: Springer/

Liljedahl, P. (2008). *The AHA! experience: Mathematical contexts, pedagogical implications*. Saarbrücken, Germany: VDM Verlag.

Liljedahl, P., & Allan, D. (2014). Mathematical discovery. In E. Carayannis (Ed.), *Encyclopedia of creativity, invention, innovation, and entrepreneurship*. New York, NY: Springer.

Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 20–23.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans: Tarquin Publications.

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology*, 73, 449–471.

Moreno-Armella, L., & Santos-Trigo, M. (2016). The use of digital technologies in mathematical practices: Reconciling traditional and emerging approaches. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 595–616). New York: Taylor and Francis.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Perels, F., Schmitz, B., & Bruder, R. (2005). Lernstrategien zur Förderung von mathematischer Problemlösekompetenz. In C. Artelt & B. Moschner (Eds.), *Lernstrategien und Metakognition. Implikationen für Forschung und Praxis* (pp. 153–174). Waxmann education.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: An evolving research and practice domain. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 39(5, 6): 523–536.

Santos-Trigo, M. (2014). Problem solving in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 496–501). New York: Springer.

Schmidt, E., & Cohen, J. (2013). *The new digital age. Reshaping the future of people nations and business*. NY: Alfred A. Knopf.

Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (Eds.). (2015). *Mathematical problem posing. From research to practice*. NY: Springer.

Singer, F., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 9–26.

Törner, G., Schoenfeld, A. H., & Reiss, K. M. (2007). Problem solving around the world: Summing up the state of the art. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 5–6.

Watson, A., & Ohtani, M. (2015). Themes and issues in mathematics education concerning task design: Editorial introduction. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education, an ICMI Study 22* (pp. 3–15). NY: Springer.

Upasana (2019). *Decision Tree | Decision Tree Introduction With Examples | Edureka*. [online] Edureka. Available at: <https://www.edureka.co/blog/decision-trees/>

Njeril, R. (2017). *A Brilliant Explanation of Decision Tree Algorithms*. [online] Acheron Analytics. Available at: <http://www.acheronanalytics.com/acheron-blog/brilliant-explanation-of-a-decision-tree-algorithms>

Skerritt, B. (2018). *What is a Decision Tree in Machine Learning?*. [online] Hacker Noon. Available at: <https://hackernoon.com/what-is-a-decision-tree-in-machine-learning-15ce51dc445d>

Mindtools.com. (2018). *Decision Tree Analysis: Choosing by Projecting "Expected Outcomes"*. [online] Available at: <https://www.mindtools.com/dectree.html>

Klein, D. (2009). [online] Settlementperspectives.com. Available at: [http://www.settlementperspectives.com/wp-content/uploads/2009/01/2009\\_01\\_04\\_degrootkleintree.pdf](http://www.settlementperspectives.com/wp-content/uploads/2009/01/2009_01_04_degrootkleintree.pdf)



