

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ  
ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ»**

ΣΠΟΥΔΑΣΤΗΣ: ΜΠΟΥΜΠΟΥΚΑΣ ΚΟΣΜΑΣ-ΝΙΚΟΛΑΟΣ (Α.Μ.= 6833 )

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΜΑΥΡΙΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΠΑΤΡΑ, ΜΑΙΟΣ 2020

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την Πτυχιακή Εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου αναφέρεται στην θεωρητική ανάλυση της μεταφοράς θερμότητας και ρευστομηχανικής με σκοπό την εφαρμογή των αναλύσεων αυτών στην υπολογιστική επίλυση προβλημάτων μηχανικής.

Στην αρχή μελετάται η κατάστρωση των εξισώσεων για την επίλυση προβλημάτων μεταφοράς θερμότητας και ρευστομηχανικής και στη συνέχεια αναλύεται η μέθοδος επίλυσης και για σχετικά προβλήματα.

Ευχαριστώ θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Κ. Μαυρίδη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου προσέφερε για την πραγματοποίηση της Εργασίας.

**ΜΠΟΥΜΠΟΥΚΑΣ ΚΟΣΜΑΣ-ΝΙΚΟΛΑΟΣ**

Μάιος 2020

**Υπεύθυνη Δήλωση Σπουδαστή:** Ο κάτωθι υπογεγραμμένος σπουδαστής έχω επίγνωση των συνεπειών του Νόμου περί λογοκλοπής και δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της Πτυχιακής Εργασίας, έχω δε αναφέρει στην Βιβλιογραφία μου όλες τις πηγές τις οποίες χρησιμοποίησα και έλαβα ιδέες ή δεδομένα. Δηλώνω επίσης ότι, οποιοδήποτε στοιχείο ή κείμενο το οποίο έχω ενσωματώσει στην εργασία μου προερχόμενο από Βιβλία ή άλλες εργασίες ή το διαδίκτυο, γραμμένο ακριβώς ή παραφρασμένο, το έχω πλήρως αναγνωρίσει ως πνευματικό έργο άλλου συγγραφέα και έχω αναφέρει ανελλιπώς το όνομά του και την πηγή προέλευσης.

Ο σπουδαστής  
**ΜΠΟΥΜΠΟΥΚΑΣ ΚΟΣΜΑΣ-ΝΙΚΟΛΑΟΣ**

.....  
(Υπογραφή)

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα Πτυχιακή Εργασία αναφέρεται στην θεωρητική ανάλυση της μεταφοράς θερμότητας και ρευστομηχανικής με σκοπό την εφαρμογή των αναλύσεων αυτών στην υπολογιστική επίλυση προβλημάτων μηχανικής.

Η ανάπτυξη του θέματος γίνεται σε πέντε Κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρεται το αντικείμενο του προγράμματος επίλυσης προβλημάτων μεταφοράς θερμότητας και ρευστοδυναμικής.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο αναλύονται οι εξισώσεις διατήρησης και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις για την επίλυση των σχετικών προβλημάτων.

Στο τρίτο Κεφάλαιο αναλύονται ο τρόπος επίλυσης εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών και αναλύεται ο αλγόριθμος SIMPLE και στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο αναλύονται οι οριακές συνθήκες μαζί με τις έννοιες της αστάθειας-ακρίβειας και οικονομίας του συγκεκριμένου μοντέλου.

Στο 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο αναλύεται η δομή του υπολογιστικού προγράμματος TEACH-T.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΤΙΤΛΟΣ	ΣΕΛΙΔΑ
<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	1
<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</b>	2
<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b>	3
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	5
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup></b>	7
1.1 Αντικείμενο και χαρακτηριστικά του προγράμματος TEACH-T	7
1.2 Εφαρμογές μεθόδου	7
1.3 Μαθηματική δομή των υπολογιστικών κωδίκων	8
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup></b>	9
2.1 Εξισώσεις διατήρησης-Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις	9
2.2 Εξισώσεις Πεπερασμένων διαφορών	10
2.3 Ορος Πηγής	12
2.4 Τελική εξίσωση πεπερασμένων διαφορών	12
2.5 Εξαγωγή οριακών συνθηκών	13
2.6 Εξίσωση πεπερασμένων διαφορών για την ορμή	14
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup></b>	15
3.1 Επίλυση εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών	15
3.2 LBL Επίλυση εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών με χρήση του TDMA αλγόριθμου	15
3.3 SIMPLE αλγόριθμος	17
3.4 Σύγκλιση μεθόδου	21
3.5 Ακρίβεια μεθόδου	22
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup></b>	23
4.1 Τυρβώδες μοντέλο 2 εξισώσεων	23
4.2 Εξισώσεις μέσω χρονικών τιμών στη τυρβώδη ροή	24
4.3 Οριακές συνθήκες	25
4.4 Αστάθεια-Ακρίβεια-Οικονομία	30
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup></b>	32
5.1 Δομή του υπολογιστικού προγράμματος TEACH-T	32
5.2 Ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων των μεταβλητών του TEACH-T και συμβολισμός τους σε γλώσσα FORTRAN	38
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	82

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Την τελευταία εικοσαετία η αριθμητική λύση Ρευστοδυναμικών προβλημάτων έγινε πολύ ελκυστική και ένας μεγάλος αριθμός επιστημόνων ασχολήθηκε με το σχετικό αντικείμενο.

Για την επίλυση οποιουδήποτε ροικού πεδίου, είναι πλέον δυνατή η χρήση υπολογιστικών πακέτων, τα οποία ύστερα από προσαρμογή του υπό διερεύνηση προβλήματος, δίνουν αριθμητική λύση που πλησιάζει την πραγματική. Ένα πρόγραμμα Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, στην προσπάθεια για επίτευξη ενός όσο το δυνατόν περισσότερου ρεαλιστικού αποτελέσματος, πρέπει να ικανοποιεί κάποια γενικά χαρακτηριστικά.

Τα βασικά του στοιχεία είναι τα ακόλουθα:

- Η δημιουργία ενός πεπερασμένου πίνακα από σημεία (κόμβους) του ροικού πεδίου, που απαρτίζουν το υπολογιστικό πλέγμα.
- Η μετατροπή των μερικών διαφορικών εξισώσεων, σε ένα σύστημα όμοιων αλγεβρικών εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών, οι οποίες συσχετίζουν τις τιμές των εκάστοτε μεταβλητών στους κόμβους του πεδίου με τις τιμές στους γειτονικούς κόμβους.
- Η μετατροπή των εξισώσεων σε κατάλληλη μορφή για την επίλυσή τους από κάποια αξιόπιστη επαναληπτική τεχνική.
- Η παρουσίαση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της επαναληπτικής διαδικασίας.

Επίσης, οι παρακάτω όροι αυξάνουν την αξιοπιστία της υπολογιστικής λύσης:

- Γενικότητα εφαρμογής: Προσπάθεια δημιουργίας υπολογιστικού κώδικα με πεδίο εφαρμογής σε όσο το δυνατόν περισσότερες ροικές περιπτώσεις, με τις λιγότερες δυνατές αλλαγές.
- Ακρίβεια λύσης: Οι αλγεβρικές εξισώσεις αποτελούν προσεγγίσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η διαφορά μεταξύ των αριθμητικών λύσεων των πρώτων και των αναλυτικών λύσεων των δεύτερων, δηλ. το υπολογιστικό λάθος (truncation error), πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο.
- Σύγκλιση: Ιδιότητα μιας επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης ενός συστήματος όμοιων αλγεβρικών εξισώσεων που οδηγεί στην ομαλή επίλυσή τους. Μια αξιόπιστη μέθοδος συγκλίνει κάτω υπό οποιεσδήποτε συνθήκες.
- Οικονομία λύσης: Βασική ανάγκη μιας μεθόδου να είναι γρήγορη και οικονομική. Αυτή η ανάγκη για “υπολογιστική οικονομία” παίζει πολύ μεγάλο ρόλο στη δημιουργία κάθε υπολογιστικής μεθόδου.

Προβλέψεις στη Μεταφορά Θερμότητας και Ρευστομηχανικής μπορούν να ληφθούν με δύο κύριες μεθόδους: την πειραματική έρευνα και τον θεωρητικό υπολογισμό. Τα τελευταία χρόνια η συνεχής αύξηση της χωρητικότητας των υπολογιστών, η βελτίωση των μεθόδων επίλυσης των εξισώσεων Navier-Stokes (ή Reynolds) και η βελτίωση των τυρβωδών μοντέλων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των τυρβωδών τάσεων που εμφανίζονται στις εξισώσεις Reynolds, σε συνδυασμό με την ανάγκη για μεθόδους σχεδιασμού χαμηλού κόστους, οδήγησαν στην εκτενή χρήση των μεθόδων της Υπολογιστικής Θερμο-Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer (CFDHT)) σαν ένα επιπρόσθετο εργαλείο της διεξαγωγής των πειραμάτων και της σχεδιαστικής διαδικασίας.

Τα πλεονεκτήματα του θεωρητικού υπολογισμού από την αντίστοιχη πειραματική έρευνα είναι:

- Το χαμηλό κόστος, το πιο σπουδαίο πλεονέκτημα μιας υπολογιστικής πρόβλεψης. Στις περισσότερες εφαρμογές το κόστος κατασκευής και τρεξίματος ενός υπολογιστικού προγράμματος, είναι κατά πολλές τάξεις χαμηλότερο από το κόστος μιας αντίστοιχης πειραματικής διερεύνησης.
- Η ταχύτητα κατασκευής και εκτέλεσης μιας υπολογιστικής διερεύνησης σε αντιπαράθεση με μια αντίστοιχη πειραματική διερεύνηση.
- Οι πλήρεις πληροφορίες που αποτυπώνονται (με την λύση ενός προβλήματος με υπολογιστική μέθοδο) σε ολόκληρη την επιφάνεια λύσης που μας ενδιαφέρει και σε αντίθεση με το πείραμα, υπάρχουν ελάχιστες απρόσιτες περιοχές υπολογισμού και επίσης δεν υπάρχει διαταραχή ροής από τα όργανα λήψης μέτρησης.
- Η δυνατότητα εύκολης προσομοίωσης, σε έναν θεωρητικό υπολογισμό, των πραγματικών συνθηκών. Ένα υπολογιστικό πρόγραμμα δεν είναι δύσκολο να εξομοιώνει μικρές ή μεγάλες διαστάσεις, να χειρίζεται χαμηλές ή υψηλές θερμοκρασίες, τοξικές ή εύφλεκτες ουσίες ή να ακολουθεί πολύ γρήγορες ή πολύ αργές διαδικασίες.

Παρά τα παραπάνω πλεονεκτήματα του θεωρητικού υπολογισμού δεν πρέπει να υπάρχει άκρατος ενθουσιασμός και είναι χρήσιμο να συνεκτιμώνται τα μειονεκτήματα και οι περιορισμοί του. Ο υπολογισμός με την χρήση Η/Υ επιλύει τις συνέπειες ενός μαθηματικού μοντέλου. Η πειραματική έρευνα αντίθετα παρατηρεί την πραγματικότητα. Τα όρια ισχύος ενός μαθηματικού μοντέλου περιορίζουν τη χρησιμότητα του θεωρητικού υπολογισμού. Το τελικό αποτέλεσμα του θεωρητικού υπολογισμού εξαρτάται και από το μαθηματικό μοντέλο και από τη χρησιμοποιούμενη αριθμητική μέθοδο. Μια σωστή προσπάθεια πρόβλεψης θα πρέπει να είναι ένας συνετός συνδυασμός θεωρητικού υπολογισμού και πειράματος. Το ποσοστό συμμετοχής των δύο παραγόντων εξαρτάται από τη φύση του προς επίλυση προβλήματος, από τους στόχους της πρόβλεψης και από τους οικονομικούς και άλλους περιορισμούς της κατάστασης.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## 1.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ TEACH-T

Στα κεφάλαια 1 έως 5 δίδονται τα κύρια χαρακτηριστικά της γενικής μεθόδου πρόβλεψης για την μεταφορά ορμής, μάζας και θερμότητας, που είναι ενσωματωμένα στον υπολογιστικό κώδικα TEACH-T. Το υπολογιστικό πρόγραμμα είναι γραμμένο για μόνιμη διδιάστατη (δυνατότητα επέκτασης σε τρισδιάστατη), τυρβώδη (ή στρωτή), επίπεδη (ή αξονοσυμμετρική), ασυμπίεστη ροή με ανακυκλοφορία. Υπάρχει δυνατότητα επέκτασης για εφαρμογή σε μη-μόνιμες τρισδιάστατες ροές. Η παρεχόμενη λίστα προγράμματος είναι γραμμένη για ροή σε σωλήνα με απότομη εκτόνωση (γεωμετρία STEP).

Ο υπολογιστικός κώδικας επιλύει τις σχετικές εξισώσεις διατήρησης ορμής, μάζας, ενέργειας κ.ο.κ. με μία μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (hybrid). Οι χρησιμοποιούμενες κύριες υδροδυναμικές μεταβλητές είναι οι ταχύτητες και η πίεση. Για τη λύση των πεδίων ταχύτητας και πίεσης χρησιμοποιείται μία ειδική διαδικασία, η SIMPLE μέθοδος (Patankar and Spalding 1972) και η κάθε εξίσωση επιλύεται με μία LBL διαδικασία επίλυσης χρησιμοποιώντας τον TDMA αλγόριθμο.

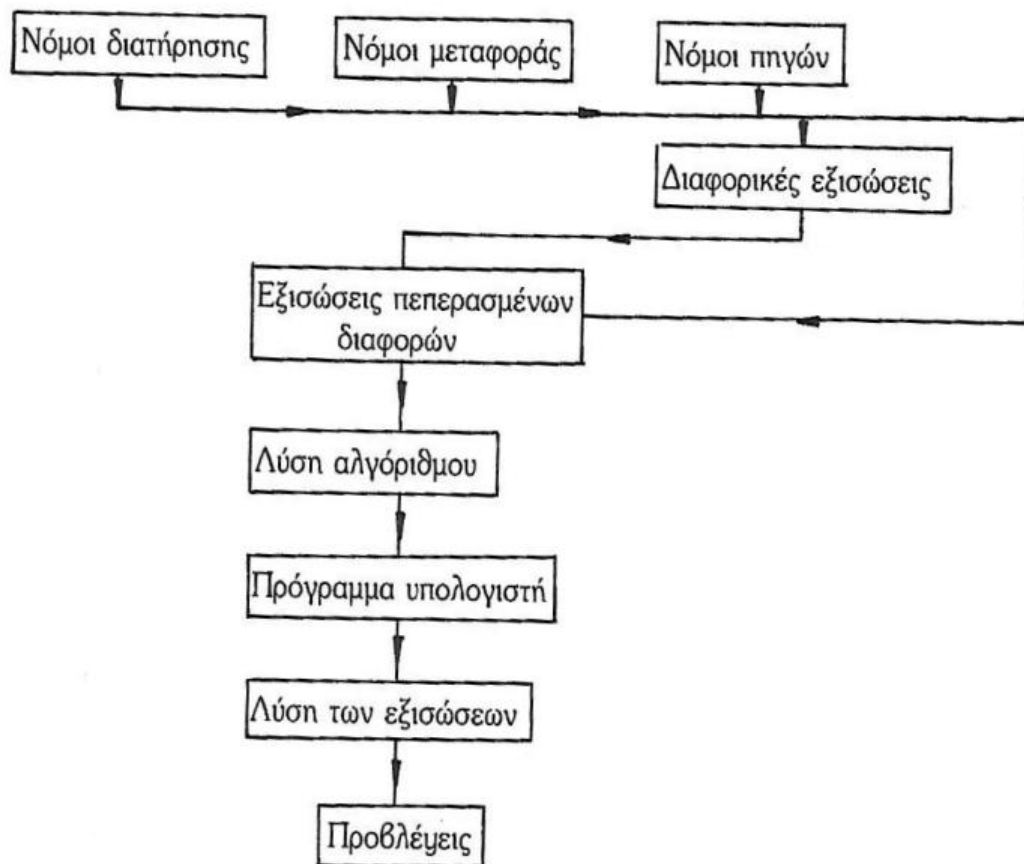
## 1.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Περιπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου:

- Στο πεδίο παραγωγής ισχύος είναι στους αεριοστροβίλους, στις παλινδρομικές μηχανές, στους καυστήρες και στους πυρηνικούς αντιδραστήρες.
- Στις χημικές εγκαταστάσεις στους εναλλάκτες θερμότητας, υψικαμίνους.
- Σε μελέτες περιβάλλοντος πρόβλεψης ρύπων, διάθεσης θερμικών, χημικών και ραδιενεργών αποβλήτων στην ατμόσφαιρα, στα ποτάμια κ.τ.λ.
- Στο πεδίο του διαστήματος στον υπολογισμό της οπισθέλκουσας και της άντωσης.
- Στην ψύξη-θέρμανση-αερισμό κτηρίων, στη βελτίωση των συνθηκών διαβίωσης και στη φυσιολογία, στην πρόβλεψη της ροής του αέρα και αίματος διά των νεφρών και των αρτηριών.

### 1.3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΚΩΔΙΚΩΝ

Η δομή της μαθηματικής διατύπωσης των υπολογιστικών κωδικών ακολουθεί το παρακάτω διάγραμμα ροής.



Όπως φαίνεται στο διάγραμμα ροής οι υπολογιστικοί κώδικες έχουν τη βάση τους στους νόμους της φύσης, της διατήρησης (ορμής, μάζας και ενέργειας) της μεταφοράς και των πηγών. Οι νόμοι της φύσης μετασχηματίζονται ευθέως σε μορφή πεπερασμένων διαφορών κάνοντας χρήση της ανάλυσης της μεθόδου του όγκου-ελέγχου. Τείνοντας του αριθμού των κόμβων του πλέγματος στο άπειρο, η προσέγγιση των σχηματιζόμενων εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών μπορεί να αντικαταστήσει αυτήν των διαφορικών εξισώσεων.

Για να καταστεί δυνατή η πρόβλεψη μέσω Η/Υ και να επιλυθούν οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών είναι απαραίτητος ένας αλγόριθμος επίλυσης που να ενσωματώνεται κατάλληλα στο πρόγραμμα του υπολογιστή, να εκμεταλλεύεται την ταχύτητά του και να αποδίδει την φυσική πραγματικότητα.

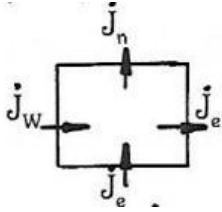


## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### 2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ-ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να δειχθεί πως μπορούν να συνδυασθούν οι νόμοι της φύσης σε μια διαφορική εξίσωση λαμβάνεται για παράδειγμα η μεταφορά της ορμής. Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Newton, για την κατάσταση της μόνιμης; Ροής το άθροισμα της ορμής ( $\mathcal{J}_i$ ) στη διεύθυνση  $i$  πρέπει να είναι ίσο με την καθαρή δύναμη στην αυτή διεύθυνση ( $S_i$ ). Η μαθηματική έκφραση είναι:

$$\mathcal{J}_{i,w} - \mathcal{J}_{i,e} + \mathcal{J}_{i,s} - \mathcal{J}_{i,n} = -S_i$$



Η μαθηματική έκφραση περιλαμβάνει ροές  $\mathcal{J}$  που παριστάνουν την μεταφορά της ορμής και με μεταφορά και με διάχυση (επενέργεια ιξώδους). Έχουν σαν αιτία τους νόμους μεταφοράς (νόμος ιξώδους του Newton). Βάσει του νόμου μεταφοράς, σε ένα νευτωνικό τυρβώδες ρευστό, η συνολική ροή είναι:

$$\mathcal{J}_x = \rho U U - \mu_t \frac{\partial U}{\partial x} + \text{επιπρόσθετοι όροι} \quad (2.1.1)$$

Στην σχέση (2.1.1) υπάρχουν επίσης επιπρόσθετοι όροι (ή πηγές) που συνεισφέρουν στην μεταφορά της ορμής, που παράγονται από τους «νόμους της πηγής» και περιγράφουν την συνεισφορά που οφείλεται στην πίεση, στις ανωστικές δυνάμεις κ.τ.λ. Νόμος πηγών:

$$S_x = -\frac{\partial P}{\partial x} + S'_x \quad (2.1.2)$$

Αντικαθιστώντας στην μαθηματική έκφραση του δεύτερου νόμου του Newton τους νόμους μεταφοράς και πηγών, λαμβάνουμε την διαφορική εξίσωση για την ορμή στην x-διεύθυνση:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho U U \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho U V \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_t \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + S'_x \quad (2.1.3)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις για την ορμή στις άλλες διευθύνσεις. Όπως και για άλλες διατηρούμενες ποσότητες, λαμβάνονται κατά όμοιο τρόπο.

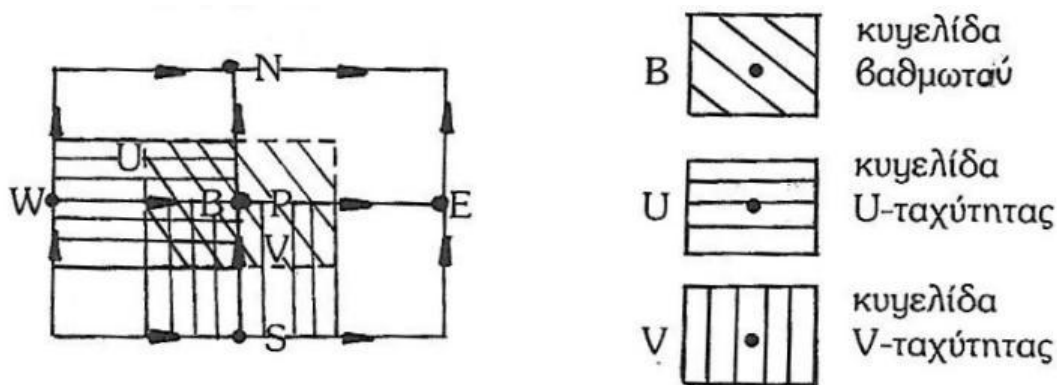
Η ομορφιά των εξισώσεων μεταφοράς στην διατήρηση των διαφόρων ιδιοτήτων (εκτός της μάζας), είναι ότι μπορούν να εκφραστούν με έναν γενικό τύπο, που για διδιάστατα προβλήματα σταθερής κατάστασης (μόνιμης ροής), για κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r U \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r V \Phi \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] - S_\Phi = 0 \quad (2.1.4)$$

Το  $\Phi=U, V, k, \epsilon, T, m_j$  κ.τ.λ., το  $\Gamma=\mu_t, \Gamma_k, \Gamma_\epsilon, \Gamma_\tau$  κ.τ.λ. Το  $S_\Phi$  παριστάνει τις πηγές σε σχέση με τη μεταφορά της μεταβλητής  $\Phi$ . Η εξίσωση της συνέχειας, ή αλλιώς διατήρησης της μάζας, έχει ειδική έκφραση και θα συζητηθεί στην συνέχεια, μετά την παραγωγή της εξίσωσης της διορθωτικής πίεσης. Για  $r=1$  και  $\partial r = \partial y$  πηγαίνουμε σε διδιάστατη επίπεδη ροή.

## 2.2 ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

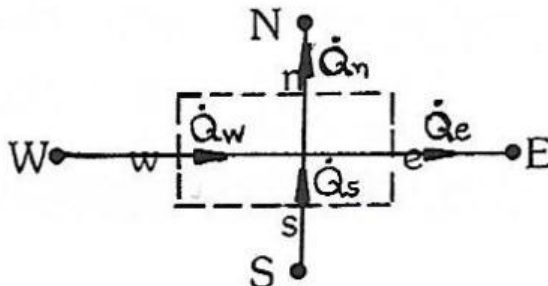
Για την παραγωγή των εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών από τις διαφορικές εξισώσεις πρέπει να αναπτυχθεί το κατάλληλο πλέγμα και θέσεις αποθήκευσης των μεταβλητών. Το χρησιμοποιούμενο πλέγμα στο επίπεδο- $x$ , είναι κανονικό ορθογώνιο με τυχαίες αποστάσεις των κόμβων  $\delta x_{PW} \neq \delta x_{EP}$  και δείχνεται με τις συνεχείς γραμμές:



Τυπικά συμπλέγματα U, V και βαθμοτών κυψελίδων (ή όγκων ελέγχου) δείχνονται με τις διακεκομμένες γραμμές. Κάθε κυψελίδα περιβάλλει το σημείο τοποθέτησης της σχετικής μεταβλητής. Οι μεταβλητές αποθηκεύονται σε διαφορετικές θέσεις του πλέγματος. Η πίεση και τα βαθμοτά αποθηκεύονται στους κόμβους του πλέγματος, ενώ οι ταχύτητες στα όρια των κυψελίδων των βαθμοτών. Αυτό το σύστημα αποθήκευσης γνωστό σαν μετατοπισμένο “staggered” πλέγμα, έχει το πλεονέκτημα ότι οι μεταβλητές U, V, P αποθηκεύονται έτσι ώστε οι κλίσεις πίεσης που οδηγούν τις ταχύτητες U και V είναι εύκολο να εκτιμηθούν και επιπλέον οι ταχύτητες αποθηκεύονται εκεί όπου χρειάζονται για τον υπολογισμό της μεταφερόμενης ροής. Στις (•) θέσεις αποθηκεύονται οι βαθμοτές μεταβλητές P, k, ε, T,  $m_j$ , στις (→) θέσεις η U ταχύτητα και στις (↑) θέσεις η V ταχύτητα.

Η προσέγγιση με την μέθοδο του όγκου ελέγχου (ή κυψελίδας) είναι όμοια με την ολοκληρωτική μέθοδο, αλλά έχει περισσότερο φυσική. Η τιμή κάποιας ιδιότητας  $\Phi$  που αναφέρεται στο σημείο του κόμβου αναφέρεται στην μέση τιμή του όγκου ελέγχου. Ο νόμος διατήρησης για την μεταφορά κάποιας εκτατικής ιδιότητας  $\Phi$  (μάζας, ορμής, ενέργειας κ.λ.π.), μπορεί να οριστεί: [(Η μεταβολή του  $\Phi$  στην κυψελίδα)=(με τον καθαρό ρυθμό εισαγωγής του  $\Phi$  στην κυψελίδα με μεταφορά)+(τον καθαρό ρυθμό εισαγωγής του  $\Phi$  στην κυψελίδα με διάχυση)+(τον ρυθμό παραγωγής του  $\Phi$  μέσα στην κυψελίδα)]. Και μαθηματικώς:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} dV + \dot{Q}_w - \dot{Q}_e + \dot{Q}_s - \dot{Q}_n + \int_V S_\Phi dV = 0$$



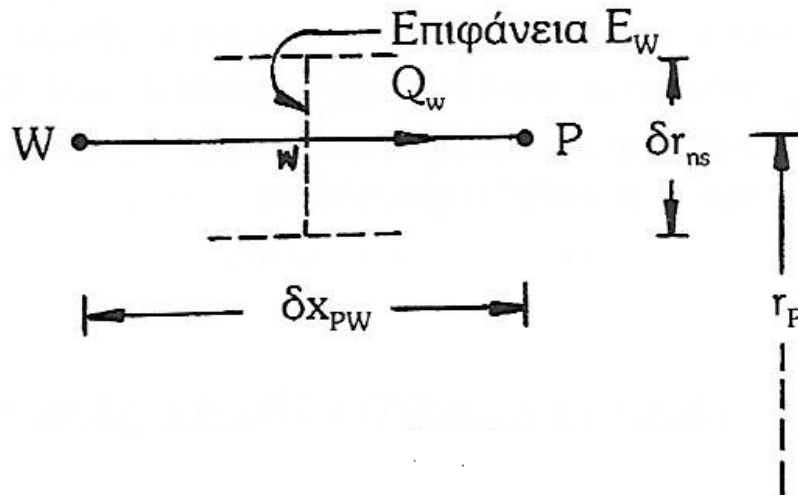
Τα  $w$ ,  $e$ ,  $s$ ,  $n$ , παριστάνουν τα όρια των κυψελίδων. Το  $Q_i$  την συνολική ροή λόγω μεταφοράς και διάχυσης, σαν άθροισμα γύρω από τα όρια των κυψελίδων, δίδοντας φυσική αντίληψη και τονίζοντας τη διατήρηση. Ο όρος  $S_\Phi$  παριστάνει την παραγωγή στην μονάδα του όγκου στην κυψελίδα και  $\Phi=U, V, T, m_j, k, \epsilon$  ( $\Phi=1$  για την μάζα).  $\Delta(\rho\Phi)/\Delta t=0$  για ροή σταθερής κατάστασης (μόνιμη ροή).

Θεωρώντας χάριν ευκολίας μονοδιάστατη μεταφορά διά των ορίων της κυψελίδας, η “exact” μέθοδος επίλυσης του Spalding (1972), για το δυτικό όριο της κυψελίδας δίνει:

$$\mathcal{Q}_w \approx \rho_w U_w E_w \left[ f_w \Phi_w + (-f_w) \Phi_P \right]$$

$$f_w \equiv \frac{\exp\left(\frac{P_{EW}}{2}\right)}{\exp\left(\frac{P_{EW}}{2}\right) + 1}, \quad (\text{Αριθμός Peclet}) \quad P_{EW} \equiv \frac{\rho_w U_w \delta x_{PW}}{\Gamma_w}$$

$$A_w = r_p \delta r_{ns}, \quad \rho_w = \frac{\rho_w + \rho_P}{2}, \quad \Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_P}{2}$$



Το  $Q_w$  είναι το μεταφερόμενο βαθμωτό  $\Phi$  υπό την έννοια της μέσης τιμής, που λαμβάνεται μέσω του συντελεστού ισοζύγισης (ο οποίος εξαρτάται από τον τοπικό αριθμό Peclet). Εάν η πυκνότητα  $\rho$  και ο συντελεστής διάχυσης  $\Gamma$  δεν είναι αποθηκευμένα σε ομοιόμορφα πλέγματα, χρησιμοποιούνται ισοζυγισμένες τιμές προς επιβεβαίωση της συνέχειας της ροής.

Προς αποφυγή των «ακριβών υπολογιστικά» εκθετικών σχέσεων, υιοθετείται μία μέθοδος που χρησιμοποιεί την “piece-wise” (Patankar 1980) γραμμική προσέγγιση, για τον υπολογισμό της “exact”  $\mathcal{Q}_w \approx P_{EW}$  σχέσης (με μικρή απώλεια ακρίβειας). Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο χρησιμοποιείται μια “central” μέθοδος διαφορών για χαμηλό αριθμό  $P_{EW}$  (Peclet) και μία “upwind” μέθοδος διαφορών (ασυμπτωτικά της upwind σχέσης) για μεγάλο αριθμό  $P_{EW}$ . Για αυτό και η μέθοδος ονομάζεται μεικτή (“hybrid”) μέθοδος.

$$\frac{\dot{Q}_w}{\rho_w U_w E_w} \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}[(1+2P_{ew}^{-1})\Phi_W + (1-2P_{ew}^{-1})\Phi_P] & \text{για } -2 < P_{ew} < 2 \\ \Phi_W & \text{για } P_{ew} \geq 2 \\ \Phi_P & \text{για } P_{ew} \leq -2 \end{cases}$$

Τα  $\mathcal{Q}_e$ ,  $\mathcal{Q}_n$  και  $\mathcal{Q}_s$  παράγονται κατά όμοιο τρόπο.

### 2.3 ΟΡΟΣ ΠΗΓΗΣ

Η συνολική παραγωγή στον όγκο ελέγχου δεν μπορεί να εκφρασθεί επακριβώς δίχως να γνωρίζουμε την ακριβή έκφραση του όρου πηγής  $S_\Phi$ . Παρόλα αυτά μπορούμε να της δώσουμε μια γραμμικοποιημένη μορφή:

$$-\int_V S_\Phi dV = b\Phi_P + c$$

$b$  και  $c$  παράγονται κατά την ολοκλήρωση και γραμμικοποίηση του όρου πηγής  $S_\Phi$  και είναι γενικώς συνάρτηση του  $\Phi$ . Αυτός ο τρόπος προσέγγισης δίνει πλεονεκτήματα και ευκολία στην χρήση στο υπολογιστικό πρόγραμμα, στις διάφορες ροϊκές καταστάσεις.

### 2.4 ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Για την περίπτωση ροής σταθερής κατάστασης με αντικατάσταση στο νόμο διατήρησης των εκφράσεων της ροής και της παραγωγής, παράγουμε και με τη βοήθεια της συνέχειας την τελική εξίσωση πεπερασμένων διαφορών:

$$(\alpha_P - b)\Phi_P = \sum_i \alpha_i \Phi_i + c$$

$\alpha_n$ ,  $\alpha_s$ ,  $\alpha_p$  και  $\alpha_w$  συνδυάζουν συντελεστές μεταφοράς διάχυσης.

$$\alpha_P = \sum_i \alpha_i, \quad \sum_i = \text{άθροισμα των γειτονικών N, S, E, W.}$$

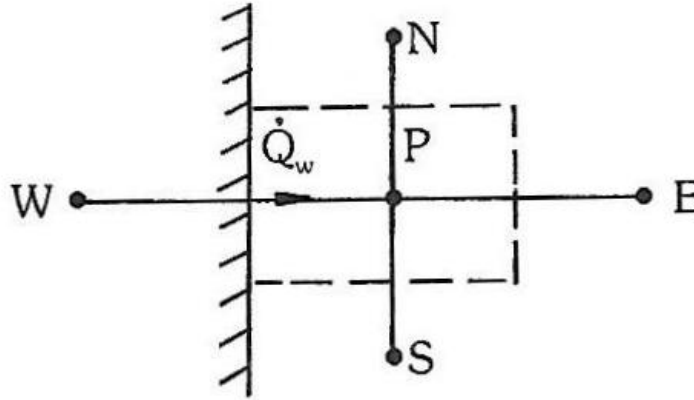
$$\alpha_W = \rho_w U_w E_w f_w, \quad \alpha_N = \rho_n U_n E_n f_n$$

$$\alpha_S = \rho_s U_s E_s f_s, \quad \alpha_E = \rho_e U_e E_e f_e$$

Με τη βοήθεια της συνέχειας το  $\alpha_p$  εκφράζει το άθροισμα των συνδυαζόμενων συντελεστών ροής στους κόμβους N, S, E, W. Όταν  $b=c=0$ , το  $\Phi_p$  παριστάνει την μέση τιμή του αθροίσματος των γειτονικών κόμβων.

## 2.5 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ

Η γενική εξίσωση πεπερασμένων διαφορών δεν είναι εφαρμόσιμη στα όρια της περιοχής υπολογισμών. Απαιτείται ειδική μεταχείριση στις κυψελίδες δίπλα στα όρια, ώστε να υπάρχει πλεονέκτημα τόσο στο νόμο της διατήρησης όσο και στον υπολογισμό της ροής. Δείχνεται στο παρακάτω σχήμα τυπική κυψελίδα που το δυτικό όριό της συμπίπτει με τοίχωμα.



Σύμφωνα με αυτή την διευθέτηση υπάρχει σύνδεση μεταξύ  $\Phi_P$  και  $\Phi_W$  στην γενική εξίσωση πεπερασμένων διαφορών. Διακόπτεται η σύνδεση μεταξύ των  $\Phi_P$  και  $\Phi_W$  θέτοντας τον συντελεστή  $\alpha_w=0$ . Επίσης χρειάζεται να επέμβουμε στην ροή  $\mathcal{Q}_w$ . Οι ροές  $\mathcal{Q}_n$ ,  $\mathcal{Q}_s$  και  $\mathcal{Q}_e$  σύμφωνα με το σχήμα παραμένουν ανεπηρέαστες. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι επέμβασης στο  $\mathcal{Q}_w$ . Εδώ υιοθετείται η μεταχείριση της “False” (λάθος) πηγής με καθορισμό των σταθερών  $b$  και  $c$  (εύκολα στον προγραμματισμό).

Εάν θέλουμε να εισάγουμε την οριακή ροή  $\mathcal{Q}_o$  θέτουμε:

$$\alpha_w = 0, \quad b = 0, \quad c = \dot{Q}_o$$

Εάν θέλουμε να εισάγουμε την οριακή τιμή  $\Phi_o$  πρέπει:

$$\dot{Q}_w = \alpha'_w(\Phi_o - \Phi_P)$$

και θέτουμε:

$$\alpha_w = 0, \quad b = -\alpha'_w, \quad c = \alpha'_w \Phi_o$$

Εάν το σχετικό όριο της περιοχής των υπολογισμών είναι τοίχωμα το  $\alpha'_w$  πρέπει να εκτιμηθεί από τις συναρτήσεις τοίχου, ή από άλλο μοντέλο που περιγράφει την ροή κοντά στον τοίχο.

Πολλές φορές το  $\Phi$  χρειάζεται να έχει μια σταθερή τιμή μέσα στην περιοχή υπολογισμών (δευτερεύουσα δέσμη έγχυσης μέσα στην περιοχή υπολογισμών). Η μεταχείριση της “False” πηγής είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο σε αυτές τις περιπτώσεις. Θέτουμε:

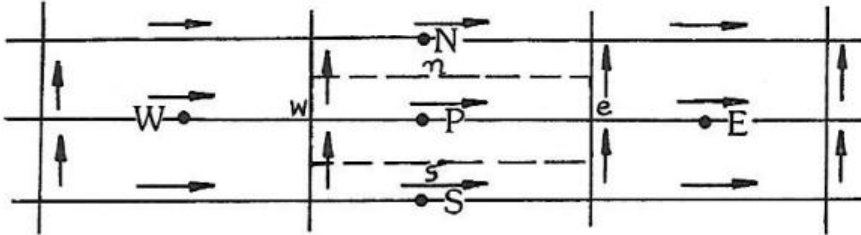
$$b = -\gamma, \quad c = \gamma \Phi_{fix}$$

Όπου  $\gamma$  ( $\equiv$  μεγάλος αριθμός), π.χ.  $10^{30}$  και  $\Phi_{fix} \equiv$  η επιθυμούμενη σταθερή τιμή μέσα στην περιοχή υπολογισμών.

## 2.6 ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΜΗ

Η προηγούμενη εξίσωση πεπερασμένων διαφορών που έχει παραχθεί στηρίχθηκε σε βαθμωτές μεταβλητές. Οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για την ορμή παράγονται όμοια με μόνη εξαίρεση την μετατόπιση του όγκου ελέγχου επειδή και οι ταχύτητες είναι μετατοπισμένες. Η U-εξίσωση που αναφέρεται στην κυψελίδα είναι:

$$(\alpha_P - b)U_P = \sum_i \alpha_i U_i + E_{ew}(P_W - P_P) + c$$



$$\alpha_w = \rho_w U_w E_{ew} f_w, \quad E_{ew} = \Gamma_P \delta \Gamma_{ns}, \quad f_w = f_{Hybrid-Difference}(Re_w)$$

$$Re_w = \frac{\rho_w U_w \delta \chi_{PW}}{\mu_w}, \quad \rho_w U_w = \frac{1}{2}(\rho_w U_w + \rho_P U_P)$$

Για τις πιέσεις θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο της εξίσωσης της διορθωτικής πίεσης. Οι ταχύτητες στα όρια της κυψελίδας, οι πυκνότητες κ.τ.λ. υπολογίζονται με παρεμβολή, ώστε να ικανοποιείται η συνέχεια για την συνολική ροή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

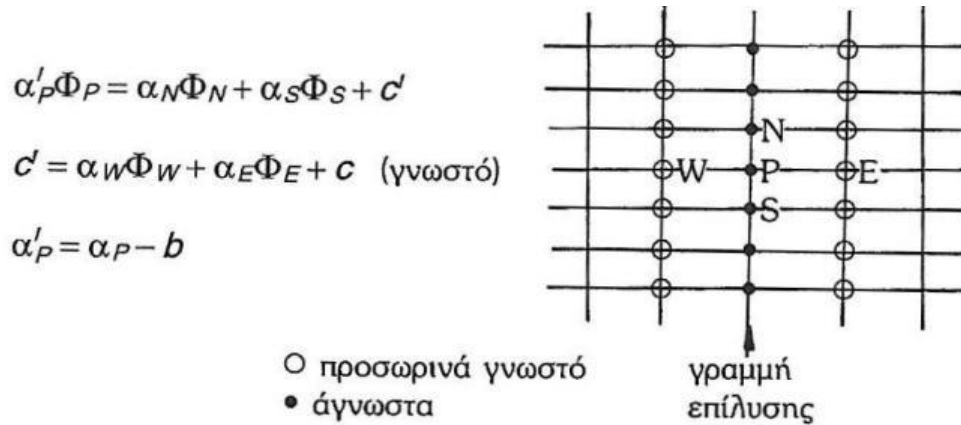
### 3.1 ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Περιγράφεται η γενική “Line-By-Line” (LBL), επαναληπτική διαδικασία επίλυσης όλων των εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών και ένας ειδικός αλγόριθμος (SIMPLE) για τις υδροδυναμικές εξισώσεις.

### 3.2 LBL ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΤΔΜΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Γενικά η Line-By-Line διαδικασία είναι μια επαναληπτική μέθοδος, με αρχική υπόθεση των τιμών του πεδίου λύσης και βελτίωση της λύσης από γραμμή σε γραμμή.

Κατά την λύση των εξισώσεων για τα σημεία της ίδιας γραμμής (π.χ. γραμμή N-S), οι τιμές των γειτονικών γραμμών υποτίθενται προσωρινά γνωστές. Η εξίσωση τότε για κάθε σημείο στην γραμμή N-S μετασχηματίζεται σε τέτοια μορφή ώστε μόνο τρεις τιμές ( $\Phi_P$ ,  $\Phi_N$  και  $\Phi_S$ ) να είναι άγνωστες.



Το σύστημα των εξισώσεων για όλα τα σημεία της N-S γραμμής παίρνει μια ιδιαίτερα απλή μορφή και ο πίνακας των μη μηδενικών συντελεστών είναι τριδιαγώνιος (tri-diagonal). Γενικά τα  $\Phi_1$  και  $\Phi_{i+1}$  είναι γνωστά στις εφαρμογές.

$$\begin{array}{rcl}
 -\beta_2 \Phi_1 + D_2 \Phi_2 - \alpha_2 \Phi_3 & & = c_2' \\
 -\beta_3 \Phi_2 + D_3 \Phi_3 - \alpha_3 \Phi_4 & & = c_3' \\
 \swarrow \quad \searrow & & \\
 -\beta_j \Phi_{j-1} + D_j \Phi_j - \alpha_j \Phi_{j+1} & & = c_j' \\
 \swarrow \quad \searrow & & \\
 -\beta_i \Phi_{i-1} + D_i \Phi_i - \alpha_i \Phi_{i+1} & & = c_i'
 \end{array}$$

$D \equiv \alpha'_P, \quad \alpha \equiv \alpha_N, \quad \beta \equiv \alpha_S, \quad \Phi_1, \quad \Phi_{i+1} \equiv \text{γνωστά.}$

Εξισώσεις αυτού του τύπου επιλύονται εύκολα με τον TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) αλγόριθμο, από το σημείο  $j=2$  στο  $j=I$  στην γραμμή N-S.

Για τις ανάγκες του TDMA αλγορίθμου, το σύστημα των εξισώσεων με αλγεβρικό χειρισμό μετατρέπεται σε γενικές επαναληπτικές σχέσεις για το  $\Phi_j$  και τους συντελεστές  $A_j$  και  $C_j''$ . Χειριζόμενοι καταλλήλως την  $j$ -οστή εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\Phi_j = Q_j \Phi_{j+1} + R_j \Phi_{j-1} + Z_j$$

όπου:

$$Q_j = \frac{\alpha_j}{D_j}, \quad R_j = \frac{\beta_j}{D_j}, \quad Z_j = \frac{C_j}{D_j}$$

Οι εξισώσεις γίνονται:

$$\Phi_2 = Q_2 \Phi_3 + R_2 \Phi_1 + Z_2 \quad (i)$$

$$\Phi_3 = Q_3 \Phi_4 + R_3 \Phi_2 + Z_3 \quad (ii)$$

$$\Phi_4 = Q_4 \Phi_5 + R_4 \Phi_3 + Z_4 \quad (iii)$$

$$\Phi_n = Q_n \Phi_{n+1} + R_n \Phi_{n-1} + Z_n$$

Το  $\Phi_1$  είναι γνωστό. Απαλοίφοντας το  $\Phi_2$  από την (ii) και το  $\Phi_3$  από την (iii) κ.ο.κ., παράγεται ένας γενικός τύπος για το  $\Phi_j$ :

$$\Phi_j = A_j \Phi_{j+1} + C_j''$$

όπου:

$$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}}, \quad C_j'' = \frac{\beta_j C_{j-1}'' + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}}$$

Σημειωτέον:

$$A_1 = 0, \quad C_1'' = \Phi_1.$$

Με την εφαρμογή του TDMA αλγορίθμου στην γραμμή N-S, υπολογίζονται από τις επαναληπτικές σχέσεις τα  $A_j$  και  $C_j''$  από  $j=2$  έως  $j=n$ . Από την γενική επαναληπτική σχέση λαμβάνονται τα  $\Phi_j$  ξεκινώντας με το  $\Phi_n$  και τελειώνοντας με το  $\Phi_2$  ( $\Phi_1, \Phi_{n+1}$  γνωστά). Εφαρμόζοντας τον TDMA αλγόριθμο σε όλο το πεδίο ο υπολογισμός ξεκινάει π.χ. από την ακρότατη γραμμή N-S. Στη συνέχεια ο υπολογισμός επαναλαμβάνεται κατά μήκος των επόμενων γειτονικών γραμμών N-S κάνοντας χρήση τις πρόσφατες υπολογισθείσες τιμές  $\Phi_j$  διά της ενσωμάτωσής των στο C. Όλο το πλέγμα σαρώνεται (σάρωση= κίνηση από μία γραμμή πλέγματος σε άλλη) και ενδέχεται να κάνουμε χρήση πολλών σαρώσεων για να επιτευχθεί η επιθυμητή λύση. Αποκλίσεις της κατεύθυνσης των διασχίσεων (διάσχιση= κίνηση κατά μήκος μιας καθορισμένης γραμμής πλέγματος) και των σαρώσεων είναι δυνατές.



### 3.3 SIMPLE ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Οι άγνωστες μεταβλητές προς επίλυση είναι οι κύριες υδροδυναμικές μεταβλητές  $U, V, P$  και οι επιπρόσθετες βαθμωτές μεταβλητές  $k, \varepsilon, T, m_j$  κ.τ.λ. Κάθε άγνωστη απαιτεί προς επίλυση μια εξίσωση. Οι βαθμωτές μεταβλητές ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση. Και οι ταχύτητες  $U, V$  επίσης ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση (με τις εξισώσεις της ορμής). Η πίεση όμως δεν έχει εξίσωση. Υπάρχει μία επιπρόσθετη εξίσωση, η εξίσωση της συνέχειας, αλλά σ' αυτήν δεν υπάρχει ο όρος της πίεσης. Συνεπώς χρειάζεται ειδική μεθοδολογία για να ληφθεί η πίεση  $P$ . Η χρησιμοποιούμενη εδώ μεθοδολογία συνίσταται στην επίλυση των εξισώσεων της ορμής αρχικά, έχοντας εκτιμήσει ένα πεδίο πίεσης. Κατόπιν λήψεως των εκτιμώμενων ταχυτήτων  $U, V$  και τελικώς διορθώσεις του πεδίου πίεσης, έχοντας σε συμφωνία το πεδίο ταχυτήτων με την εξίσωση συνέχειας. Αυτή η διαδικασία επίλυσης είναι γνωστή σαν SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) αλγόριθμος (Patankar and Spalding, 1972).

Αρχικά υποτίθεται το πεδίο πίεσης  $P$  και λύνονται οι εξισώσεις της ορμής με την LBL μέθοδο και παράγονται αντίστοιχες ταχύτητες  $U^*, V^*$ . Οι μη σωστές τιμές των  $P^*, U^*$  και  $V^*$  απαιτούν διόρθωση  $P', U', V'$ .

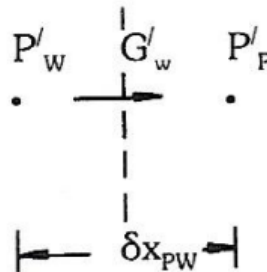
$$P = P^* + P', U = U^* + U', V = V^* + V', G = G^* + G'$$

Το μετατοπισμένο "staggered" σύστημα πλέγματος παρέχει πλεονέκτημα στις διορθώσεις των ταχυτήτων, ή της ροής ( $G'$ ), με την έκφραση των  $G'_w, G'_e, G'_n, G'_s$  σαν συντελεστών χρονικών κλίσεων  $t'$ , των  $P'$ . Χρησιμοποιούμε γραμμικοποιημένη σχέση ροής για την λήψη του  $G'_w$  σε όρους του  $P'$ .

$$G'_w = \frac{t'_w(P'_P - P'_W)}{\delta X_{PW}}, t'_w = -\rho^* \delta X_{PW} \frac{\partial U^*_w}{\partial (P^*_P - P^*_W)}$$

και

$$G'_w = \rho^* \frac{\partial U^*_w}{\partial (P^*_W - P^*_P)} (P'_W - P'_P)$$

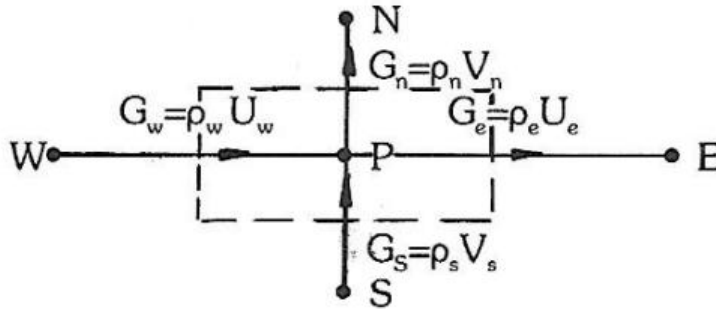


Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της ορμής σε όρους των  $U^*, V^*$  και  $P^*$ , η έκφραση για το  $G'_w$  μετασχηματίζεται τελικά σε έναν απλό τύπο, με τον συντελεστή  $D_w$  σε όρους των  $a_p$  και  $b$ .

$$G'_W = \rho^* D_W (P'_W - P'_P), \quad D_W = \frac{\partial U^*_W}{\partial (P^*_W - P^*_P)} = \frac{E_{eW}}{(\alpha_P - b)}$$

Για ασυμπιέστη ροή  $G' = \rho^* U'$ . Στην συμπιεστή ροή χρειάζεται προσοχή στον υπολογισμό των πυκνοτήτων. Εάν οι ταχύτητες είναι διορθωμένες, η εξίσωση διατήρησης της μάζας θα ικανοποιείται και η πηγή της μάζας  $S_m$  είναι μηδέν. Φυσικά στις αρχικά υποτιθέμενες ταχύτητες  $U^*$  και  $V^*$  και συνεπώς  $G^*$  γενικώς δεν ικανοποιείται η συνέχεια και υπάρχει μία καθαρή πηγή μάζας. Για έναν τυπικό όγκο ελέγχου:

$$G_e E_e - G_w E_w + G_n E_n - G_s E_s = S_m \delta V$$



Ο σκοπός εδώ είναι να διορθωθούν ταχύτητες και πιέσεις έτσι ώστε να απαλοφθεί η πηγή μάζας. Αντικαθιστώντας  $G_w = G' + G^*$  κ.ο.κ. στην εξίσωση διατήρησης της μάζας, παράγεται μία εξίσωση Poisson για την διορθωτική  $P'$ .

$$(\alpha_P - b) P'_P = \sum_i \alpha_i P'_i + M_P + C$$

όπου:

$$\alpha_P = \sum_i \alpha_i, \quad \alpha_w = \rho_w D_w E_w \quad \text{κ.ο.κ.}$$

$$M_P = G^*_w E_w - G^*_e E_e + G^*_s E_s - G^*_n E_n \equiv \text{πηγή υπολειπόμενης μάζας σε σχέση με τις υποτιθέμενες ροές } G^*.$$

Επίλυση της διορθωτικής πίεσης  $P'$  με την LBL μέθοδο, συμπληρώνει την διαδικασία λήψης των διορθώσεων  $U'$ ,  $V'$  και  $P'$  που απαιτούνται για τα  $U^*$ ,  $V^*$  και  $P^*$ . Στα όρια των πεδίων λύσης, εάν υπάρχει ταχύτητα κάθετη στο όριο, δεν χρειάζονται διορθώσεις πίεσης. Π.χ. στο δυτικό όριο ο συντελεστής  $D_w$  πρέπει να είναι μηδέν και επιτυγχάνεται θέτοντας  $\alpha_w = 0$  στην εξίσωση της πίεσης:

$$U_w = U_{\text{οριο}} - U^*_{\text{οριο}} = D_w (P'_w - P'_P) = 0$$

Εάν δίνεται η οριακή πίεση π.χ.  $P_w = P_{\text{οριο}}$ , η διορθωτική πίεση  $P'_w$  είναι μηδέν. Τότε τα  $U_w$  και  $D_w$  λαμβάνονται κατά όμοιο τρόπο, ή από την εξίσωση της ορμής (π.χ. με γραμμικοποίηση της εξίσωσης Bernoulli ( $P = P_{\text{οριο}} + \frac{1}{2} \rho U^2_w$ )).

$$P_W = P_{\text{οριο}}, \quad P'_W = 0$$

$$U_W = \alpha P_P + \beta, \quad U'_W = \alpha P'_P$$

Τα διάφορα επί μέρους μέρη του SIMPLE αλγορίθμου που αναφέρθηκαν προηγούμενα συνδυάζονται τώρα με την επίλυση των εξισώσεων των μη υδροδυναμικών μεταβλητών, προς επίτευξη μιας συνολικά συνδυασμένης διαδικασίας επίλυσης. Υποτίθεται το πεδίο όλων των μεταβλητών (U, V, P, T, k, ε κ.ο.κ.). Υπολογίζονται οι συντελεστές των εξισώσεων ορμής και επιλύονται οι βελτιωμένες τιμές U\*, V\* με την μέθοδο LBL, χρησιμοποιώντας επικρατούσες πιέσεις:

$$(\alpha_P - b)U_P^* = \sum_i U_i^* + E_{ew}(P_W^* - P_P^*) + c$$

Ενδέχεται να λάβουν χώρα περισσότερες της μιας σαρώσεις δίχως όμως αποχρονικοποιήσεις των συντελεστών. Σ' αυτό το σημείο ικανοποιούνται οι εξισώσεις της ορμής, αλλά όχι και η εξίσωση της συνέχειας. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι συντελεστές της διορθωτικής εξίσωσης P' και επιλύεται η εξίσωση αυτή με τη μέθοδο LBL. Συνήθως για την εξίσωση διορθωτικής πίεσης απαιτούνται περισσότερες της μιας σαρώσεις δίχως αποχρονικοποίηση των συντελεστών. Κατόπιν υπολογίζονται οι διορθωτικές ταχύτητες U' και V' και P, U και V λαμβάνονται από τις σχέσεις:

$$P = P^* + P', \quad U = U^* + U', \quad V = V^* + V'$$

Σ' αυτό το σημείο ικανοποιείται επακριβώς η συνέχεια αλλά όχι και οι εξισώσεις ορμής. Στο επόμενο βήμα υπολογίζονται οι συντελεστές των μη υδροδυναμικών εξισώσεων και επιλύονται τα σχετικά βαθμωτά Φ με την μέθοδο LBL. Ο απαιτούμενος αριθμός σαρώσεων στο ίδιο χρονικό βήμα, εξαρτάται από την φύση του προβλήματος.

Τελικά εκτελείται ένα τεστ σύγκλισης, που αν δεν είναι επιτυχές τότε τα προσφάτως ληφθέντα πεδία των μεταβλητών θεωρούνται υποτιθέμενα και επαναλαμβάνεται η διαδικασία μέχρι τελικής σύγκλισης.

Στην συνέχεια περιγράφεται συνοπτικά η μεθοδολογία του SIMPLE αλγορίθμου για την περίπτωση της διδιάστατης μόνιμης ροής για καρτεσιανές συντεταγμένες.

Η εξίσωση συνέχειας είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Για σταθερής κατάστασης (μόνιμη) διδιάστατη ροή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Η εξίσωση συνέχειας γίνεται:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad \equiv \quad \frac{\Delta \rho u}{\Delta x} + \frac{\Delta \rho v}{\Delta y} = 0$$

Με ολοκλήρωση στον όγκο ελέγχου:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) dV = 0 \Rightarrow (\Delta \rho u) \Delta y \Delta z + (\Delta \rho v) \Delta x \Delta z = 0$$

$$\Rightarrow ((\rho u)_e - (\rho u)_w) \Delta y \Delta z + ((\rho v)_n - (\rho v)_s) \Delta x \Delta z = 0$$

Χρησιμοποιώντας ένα μη διορθωμένο πεδίο πίεσης  $p^*$  αφενός μεν ικανοποιούνται οι εξισώσεις ορμής με τον υπολογισμό των  $u^*$  και  $v^*$ , αλλά όχι και η εξίσωση της συνέχειας. Ισχύει:

$$p = p^* + p' \quad p = \text{πραγματική}, \quad p^* = \text{υποτιθέμενη}, \quad p' = \text{διορθωτική πίεση.}$$

Οι ταχύτητες μπορούν να διορθωθούν μέσω των σχέσεων:

$$u = u^* + u', \quad v = v^* + v'$$

Παράγονται οι εξισώσεις διορθωτικής ταχύτητας με αφαίρεση της πραγματικής λύσης από την αρχική υποτιθέμενη:

$$\alpha_e u'_e = \sum \alpha_i u'_i + A_e (p'_p - p'_e)$$

Εάν τεθεί ίσος με μηδέν ο όρος  $\sum \alpha_i u'_i$  δίδει έμμεσα στην εξίσωση λύση ορθή (ισχύει η εξίσωση σε περίπτωση σύγκλισης).

$$u'_e = \frac{A_e}{\alpha_e} (p'_p - p'_e) = d_e (p'_p - p'_e) \quad \text{όπου: } d_e = \frac{A_e}{\alpha_e}$$

Ο τύπος της διορθωτικής ταχύτητας:

$$u'_e = d_e (p'_p - p'_e) A_e$$

μπορεί να γραφεί και:

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_p - p'_e)$$

Αντικατάσταση της πραγματικής ταχύτητας στην εξίσωση συνέχειας:

$$[\rho_e (u_e^* + u'_e) - \rho_w (u_w^* + u'_w)] \Delta y \Delta z +$$

$$+ [\rho_n (u_n^* + u'_n) - \rho_s (u_s^* + u'_s)] \Delta x \Delta z = 0$$

Αντικατάσταση διορθωτικών ταχυτήτων σε όρους διορθωτικών πιέσεων:

$$0 = \Delta y \Delta z \{ \rho_e [u_e^* + d_e (p'_p - p'_e)] - \rho_w [u_w^* + d_w (p'_w - p'_p)] \} +$$

$$+ \Delta x \Delta z \{ \rho_n [u_n^* + d_n (p'_p - p'_n)] - \rho_s [u_s^* + d_s (p'_s - p'_p)] \}$$

Καταλήγουμε στην τελική έκφραση για την εξίσωση διορθωτικής πίεσης:

$$\alpha_P \rho'_P = \alpha_E \rho'_e + \alpha_W \rho'_w + \alpha_S \rho'_s + \alpha_N \rho'_n + b$$

$$\alpha_E = \rho_e d_e \Delta y \Delta z$$

$$\alpha_W = \rho_w d_w \Delta y \Delta z$$

$$\alpha_S = \rho_s d_s \Delta x \Delta z$$

$$\alpha_N = \rho_n d_n \Delta y \Delta z$$

$$\alpha_P = \alpha_E + \alpha_W + \alpha_S + \alpha_N$$

$$b = (-\rho_e u_e^* + \rho_w u_w^*) \Delta y \Delta z + (-\rho_n u_n^* + \rho_s u_s^*) \Delta x \Delta z$$

Και σε περίπτωση ύπαρξης και του χρονικού όρου στην εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^o) \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

Ο όρος b γίνεται:

$$b = \frac{(\rho_P - \rho_P^o) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + (\rho_w u_w^* - \rho_e u_e^*) \Delta y \Delta z + (\rho_s u_s^* - \rho_n u_n^*) \Delta x \Delta z$$

### 3.4 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ

Όλες οι εξισώσεις ικανοποιούν συνθήκες για σύγκλιση του πίνακα (Scarborough, 1930):

$$|\alpha_P - b| \leq \sum_i |\alpha_i|, \text{ με } b \leq 0$$

Κατά την διαδικασία επίλυσης η σύγκλιση προσδιορίζεται στο τέλος κάθε επανάληψης, με βάση το κριτήριο της «υπολοιπόμενης πηγής», σύμφωνα με το οποίο συγκρίνονται οι «υπολοιπόμενες πηγές» κάθε εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών με κάθε τιμή αναφοράς  $R_{\Phi, \text{αναφ.}}$  ( $R_{\Phi, \text{αναφ.}}$  = μία πολύ μικρή τιμή).

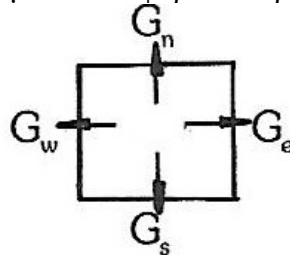
Με την χρήση μιας κατάλληλης μεθόδου υποχαλάρωσης για μια επαναληπτική διαδικασία, μπορεί να βελτιωθεί η σύγκλιση και πολλές φορές αποφεύγεται η απόκλιση. Οι εξισώσεις που λύνονται είναι μη γραμμικές και είναι απαραίτητη υποχαλάρωση (under-relaxation):

$$\Phi_P^{NEW} = f \Phi_P + (1 - f) \Phi_P^{OLD}$$

$f$ =συντελεστής υποχαλάρωσης,  $\Phi_p^{NEW}$ =τωρινή μεταβλητή με υποχαλάρωση,  $\Phi_p$ =τωρινή μεταβλητή,  $\Phi_p^{OLD}$ =μεταβλητή προηγούμενης επανάληψης.

Εάν οι ροές μάζας δεν ικανοποιούν την συνέχεια ενδέχεται να ανακύψει μια κατάσταση όπου όλα τα  $\alpha_i$  να είναι μηδέν. Οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών παίρνουν μορφή:

$$\alpha_P = \sum_j \alpha_j$$



Η λύση είναι να προστεθεί μία «λάθος» (false) πηγή, διά της μεθόδου της γραμμικοποιημένης πηγής. Η τελική τότε εξίσωση πεπερασμένων διαφορών έχει επιπρόσθετες σταθερές τις  $b_f$  και  $c_f$ . Η γραμμικοποιημένη πηγή  $S_f$  είναι:

$$S_f = |\dot{m}_{καθαρο}|(\Phi_P^{OLD} - \Phi_P) = b_f \Phi_P + c_f$$

όπου:

$$\dot{m}_{καθαρο} = \sum_i \dot{m}_i$$

με

$$\dot{m}_w = G_w E_w$$

κ.ο.κ.

Ο τύπος της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών που πρέπει να λυθεί γίνεται:

$$(\alpha_P - b - b_f)\Phi_P = \sum_j \alpha_j \Phi_j + c + c_f$$

Αυτή η προσθήκη βοηθάει στην ευστάθεια της διαδικασίας επίλυσης χωρίς να έχει επίδραση στην τελική λύση.

### 3.5 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΥ

Η ακρίβεια της διαδικασίας επίλυσης γενικά είναι συνάρτηση της σύγκλισης και του αριθμού των χρησιμοποιούμενων κόμβων πλέγματος. Για κάθε διαμόρφωση ροής, αναζητείται λύση που να είναι ανεξάρτητη του πλέγματος, με αύξηση του αριθμού των γραμμών του πλέγματος μέχρις ότου να μην παρατηρείται παραπέρα μεταβολή της τελικής λύσης.

Κύρια πηγή λανθασμένης πρόβλεψης είναι η «λάθος» (false) διάχυση, που συμβαίνει όταν ο αριθμός Peclet είναι μεγάλος και η ροή είναι πλάγια στο πλέγμα (στην μέθοδο πεπερασμένων διαφορών υπολογίζεται το  $\Phi_p$  σαν μέση τιμή των γειτονικών  $\Phi_i$ ). Θα μπορούσε σαν λύση να τεθεί το πλέγμα παράλληλο των ροϊκών γραμμών, ή να καταστούν όλοι οι αριθμοί Peclet μικροί.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### 4.1 ΤΥΡΒΩΔΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η ενσωμάτωση στην διαδικασία επίλυσης ενός τυρβώδους μοντέλου, για να ληφθεί λύση των εξισώσεων μέσω χρονικών τιμών της μέσης ροής, με την βοήθεια δύο τυρβωδών ποσοτήτων  $k$  και  $\varepsilon$ , που λαμβάνονται από τις εξισώσεις μεταφοράς των. Σύμφωνα με την θεώρηση των μέσων χρονικών τιμών Reynolds οι στιγμιαίες τιμές ταχυτήτων και βαθμωτών μεταβλητών στις μέσες τιμές και στις διακυμάνσεις των:

$$\hat{U}_i = U_i + u_i, \quad \hat{\Phi} = \Phi + \phi'$$

Για ροές σταθερής κατάστασης και με την χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων οι εξισώσεις μέσω χρονικών τιμών για την συνέχεια, ορμή και μεταφορά βαθμωτού λαμβάνουν την έκφραση:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\rho \overline{u_i u_j}) - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}[\mu(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i})] + S_{ui}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\rho \overline{u_j \phi'}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\mu}{\sigma_\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}) + S_\Phi$$

$\mu$ =στρωτό ιξώδες,  $\sigma_\Phi$ =στρωτός αριθμός Prandtl/Schmidt. Δυστυχώς αυτές οι εξισώσεις περιέχουν άγνωστες τάσεις Reynolds  $\overline{\rho u_i u_j}$  και βαθμωτές ροές  $\overline{\rho u_j \phi'}$ . Αυτές οι τυρβώδεις διαχυτικές ροές παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό της συμπεριφοράς της ροής καθώς αντιπροσωπεύουν τις επιδράσεις στο επίπεδο της μικρο-κλίμακας.

Η υιοθετούμενη μέθοδος για την λήψη ενός κλειστού συστήματος εξισώσεων είναι ένα μοντέλο «ενεργού» ιξώδους, στο οποίο οι άγνωστες τυρβώδεις διαχυτικές ροές εκφράζονται σε όρους βάσει της «υπόθεσης κλίσης μεταφοράς» (Hinge, 1959), στην οποία οι ροές υποτίθενται ανάλογες των κλίσεων των μέσων ιδιοτήτων της ροής. Οι σταθερές της αναλογίας είναι το  $\mu_t$  ή το  $\mu_t/\sigma_{\Phi,t}$ .

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t (\frac{2U_i}{2x_j} + \frac{2U_j}{2x_i}), \quad -\rho \overline{u_j \phi'} = \frac{\mu_t}{\sigma_{\Phi,t}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$$

$\mu_t$ =τυρβώδες ιξώδες,  $\sigma_{\Phi,t}$ =ενεργός αριθμός Prandtl/Schmidt.

Το  $\sigma_{\Phi,t}$  υποτίθεται συχνά γνωστό και από την διαστατική ανάλυση το  $\mu_t$  συνάγεται ότι είναι συνάρτηση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $k$  και του ρυθμού σκέδασής της  $\varepsilon$ .  $k$  και  $\varepsilon$  τα παίρνουμε από τις εξισώσεις μεταφοράς των, γ' αυτό και ονομάζεται τυρβώδες μοντέλο  $k$ - $\varepsilon$ , δύο εξισώσεων:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$c_\mu$ =συντελεστής τριβής, βάσει πειραματικών μετρήσεων  $c_\mu=0.09$ .

#### 4.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕΣΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΤΗΝ ΤΥΡΒΩΔΗ ΡΟΗ

Δίδονται οι εξισώσεις μέσων χρονικών τιμών για την συνέχεια, ορμή και μεταφορά βαθμωτού για διδιάστατες, σταθερής κατάστασης τυρβώδεις αξονοσυμμετρικές (ή επίπεδες  $r=1$ ) ροές:

Συνέχεια:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho U) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho V) = 0$$

Ορμή:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(r\rho UU) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho VU)\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(r\mu_{eff}\frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial r}(r\mu_{eff}\frac{\partial U}{\partial r})\right] + S_u$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(r\rho UV) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho VV)\right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(r\mu_{eff}\frac{\partial V}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial r}(r\mu_{eff}\frac{\partial V}{\partial r})\right] - \mu_{eff}\frac{V}{r^2} + S_v$$

$$S_u = \frac{\partial}{\partial x}(\mu_{eff}\frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mu_{eff}\frac{\partial V}{\partial r})$$

$$S_v = \frac{\partial}{\partial x}(\mu_{eff}\frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mu_{eff}\frac{\partial V}{\partial r}) - \mu_{eff}\frac{V}{r^2}$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t, \quad \Gamma_{eff} = \frac{\mu}{\sigma_\Phi} + \frac{\mu_t}{\sigma_{\Phi,t}}$$

Μεταφορά Βαθμωτού:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(r\rho U\Phi) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho V\Phi)\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(r\Gamma_{eff}\frac{\partial \Phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial r}(r\Gamma_{eff}\frac{\partial \Phi}{\partial r})\right] + S_\Phi$$

Εδώ τα  $\mu_{eff}$  και  $\Gamma_{eff}$  είναι οι ενεργοί συντελεστές ανταλλαγής, που αναπαριστούν το άθροισμα της στρωτής και της τυρβώδους μεταφοράς. Σε υψηλούς αριθμούς Reynolds (πλήρης τυρβώδης ροή) οι επιδράσεις της μοριακής μεταφοράς  $\mu$  και  $\Gamma$  είναι αμελητέες και παραλείπονται στις εξισώσεις. Στις εκφράσεις  $S_u$  και  $S_v$  παραλείπονται επιπρόσθετοι όροι που σχετίζονται με μη-ομοιόμορφο ιξώδες και που η επίδρασή τους αρχίζει να γίνεται σημαντική για σημαντικές αλλαγές των ιδιοτήτων του ρευστού.

Οι απαραίτητες εξισώσεις για την τυρβώδη κινητική ενέργεια  $k$  και τον ρυθμό σκέδασης της  $\epsilon$ , που συμπληρώνουν τις εξισώσεις μέσω χρονικών τιμών για διδιάστατη, σταθερής κατάστασης αξονοσυμμετρική ροή είναι:

Τυρβώδης ενέργεια  $k$ :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}(r\rho Uk) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho Vk) = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(r\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial r})\right] + \underbrace{G - C_{DPE}}_{S_k}$$



Ρυθμός σκέδασης ενέργειας  $\varepsilon$ :

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (r \rho U \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V \varepsilon) \right] = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \right] + \underbrace{C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}}_{S_\varepsilon}$$

όπου:

$$G = \mu_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{V}{r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right\} + S_G$$

$$S_G = -\frac{2}{3} \mu_t \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V) + \frac{\partial U}{\partial x} \right]^2$$

Οι σταθερές (Launder και Spalding, 1974):

$C_\mu$	$C_D$	$C_1$	$C_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
0.09	1.0	1.44	1.92	1.0	1.3

Φαίνεται η ομοιότητα αυτών των εξισώσεων με εκείνες της μέσης ροής με την αντικατάσταση  $S_k = G - C_D \rho \varepsilon$  και

$$S_\varepsilon = C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Το  $G$  παριστάνει την παραγωγή του  $k$  από την μέση ροή, μέσω της τυρβώδους διατμητικής τάσης και για να είμαστε ακριβείς, το  $\varepsilon$  είναι ο ρυθμός της σκέδασης του ιξώδους του  $k$  σε θερμότητα από τις πολύ μικρές τυρβώδεις δίνες. Οι συντελεστές  $C$  και οι αριθμοί Prandtl  $\sigma$ , είναι γενικά εμπειρικές συναρτήσεις, αλλά λαμβάνονται σαν σταθερές για υψηλούς αριθμούς Reynolds. Το  $S_G$  έχει και άλλους όρους παραγωγής, που οι επιδράσεις τους είναι μικρές, εκτός ροών μη-ομοιόμορφων ιδιοτήτων.

#### 4.3 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Στην είσοδο της υπολογιστικής περιοχής της ροής οι μεταβλητές  $U$ ,  $V$ ,  $\Phi$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$ , μπορεί να καθορισθούν από την καλή γνώση της ιδιαίτερης κατάστασης της ροής (πειραματικές μετρήσεις), ή να εκτιμηθούν. Π.χ. ο ρυθμός σκέδασης  $\varepsilon$  μπορεί να εκτιμηθεί από την διαστατική ανάλυση, βασιζόμενοι στο γεγονός ότι η τύρβη χαρακτηρίζεται από την ενέργειά της  $k$  και μία κλίμακα μήκους  $L$ , που παριστάνει το μέγεθος των τυρβωδών δινών ( $\varepsilon \approx k^{3/2} / L$ ).

Στην έξοδο της υπολογιστικής περιοχής (για μεγάλους αριθμούς Reynolds), ο προσδιορισμός των μεταβλητών δεν είναι σημαντικός. Η συνήθης πρακτική είναι να θέτουμε κάθετες κλίσεις ίσες με μηδέν και να λαμβάνουμε τις ταχύτητες εξόδου από το ισοζύγιο μάζας.

Κοντά στον τοίχο ο τοπικός Reynolds γίνεται πολύ μικρός και το τυρβώδες μοντέλο ανεπαρκές (είναι σχεδιασμένο για υψηλούς αριθμούς Reynolds). Αυτό σε συνδυασμό με την απότομη μεταβολή των μεταβλητών κοντά στον τοίχο κάνει προσεκτική την εκλογή της θέσης των κόμβων του πλέγματος κοντά στον τοίχο.

Οι εξισώσεις της μέσης ροής  $U$ ,  $V$ ,  $P'$  και  $\Phi$  της στρωτής ροής μετατρέπονται για την τυρβώδη ροή, αντικαθιστώντας το  $\mu$  με  $\mu_{\text{eff}}$ , το  $\Gamma$  με  $\Gamma_{\text{eff}}$  και με την εισαγωγή κάποιων επιπρόσθετων όρων πηγής, με την χρήση γραμμικοποίησης πηγής. Οι εξισώσεις  $k$  και  $\varepsilon$  δεν είναι διαφορετικές από τις άλλες εξισώσεις μεταφοράς βαθμωτού, θεωρώντας τα  $S_k$  και  $S_\varepsilon$  επιπρόσθετους όρους πηγής, που εισάγονται με τη μέθοδο γραμμικοποίησης πηγής.

$$\int_V S_k dV = bk_P + c = -\frac{C_\mu C_{DP}^2 k_p^* \delta V}{\mu_t} k_P + G \delta V$$

$$\int_V S_\varepsilon dV = b\varepsilon_P + c = \frac{C_{2p} \varepsilon_p^* \delta V}{k_P} \varepsilon_P + \frac{C_{1\varepsilon} G \delta V}{k_p^*}$$

$\delta V$ =όγκος κυψελίδας,  $k_p^*$ ,  $\varepsilon_p^*$ =προηγούμενες τιμές.

$$G \cong 2 \left[ \left( \frac{U_e - U_w}{\delta x_{ew}} \right)^2 + \left( \frac{V_n - V_s}{\delta r_{ns}} \right) + \dots \right]$$

Ένα σημείο που πρέπει να προσεχθεί σχετικά με την μεταχείριση των πηγών  $S_k$  και  $S_\varepsilon$  είναι ότι το  $b$  δεν πρέπει να είναι αρνητικό. Πράγμα που μας παρέχει ευστάθεια λύσης και επιβεβαιώνει ότι οι τιμές του  $k$  που υπολογίζονται δεν καθίστανται ποτέ αρνητικές.

Γενικά κοντά στον τοίχο θεωρούνται ότι επικρατούν συνθήκες μιας μονοδιάστατης ροής Couette. Το οριακό στρώμα θεωρείται σταθερής διατμητικής τάσης ( $\tau = \tau_w$ ) και σταθερής ροής θερμότητας ( $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_w$ ). Οι συνθήκες αυτές απαιτούν αδιαπέραστο τοίχο με κλίσεις πίεσης μηδενικές ή αμελητέες στην κατεύθυνση της ροής:

$$\frac{\tau_w}{dP/dx} \gg y$$

Η εξίσωση της ορμής μετασχηματίζεται τότε σε μια ιδιαίτερα απλή αδιάστατη μορφή:

$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{dU}{dy} \quad \text{ή} \quad \frac{\tau}{\tau_w} = \left( 1 + \frac{\mu_t}{\mu} \right) \frac{dU^+}{dy^+}$$

Στην περιοχή κοντά στον τοίχο ο τοπικός αριθμός Reynolds μεταβάλλεται σημαντικά και η υιοθετούμενη προσέγγιση είναι η εξάρτηση του τοπικού αριθμού Reynolds,  $y^+$ , που βασίζεται στην απόσταση  $y$  από τον τοίχο και στην ταχύτητα τριβής  $U_\tau$ :

$$y^+ = \frac{U_\tau y}{\nu}, \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Η περιοχή κοντά στον τοίχο χωρίζεται σε τρεις υποπεριοχές (Hinge, 1959). Στο ιξώδες υπόστρωμα  $0 < y^+ < 5$ , όπου επικρατούν οι επιδράσεις του ιξώδους, στο αδρανές υπόστρωμα  $30 < y^+ < 400$ , όπου η ροή είναι πλήρως τυρβώδης αλλά  $\tau = \tau_w$  και στο μεταβατικό στρώμα  $5 < y^+ < 30$ , όπου η ροή δεν είναι επηρεασμένη μόνο από το ιξώδες αλλά ούτε και πλήρως τυρβώδης. Ακολουθείται ο διαχωρισμός της ροής με καθορισμό του σημείου  $y^+ = 11.63$  (όπου η γραμμική κατανομή της ταχύτητας του ιξώδους υποστρώματος συναντά την λογαριθμική

κατανομή του αδρανούς υποστρώματος), κάτω από το οποίο η ροή υποτίθεται πλήρως ιξώδης και πάνω πλήρως τυρβώδης.

$$\text{Για } y^+ \leq 11.63, \frac{\mu_t}{\mu} \ll 1, \tau \sim \tau_w. \Rightarrow U^+ = y^+$$

$$\begin{aligned} \text{Για } y^+ > 11.63, \frac{\mu_t}{\mu} \gg 1, \tau \sim \tau_w, \nu_t \sim \kappa y U_\tau. \Rightarrow \\ \Rightarrow U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + \text{const} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \end{aligned}$$

$U^+ = U/U_\tau$ ,  $\kappa = 0.4187$  σταθερά von Karman και  $E$  είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης που εξαρτάται από το μέγεθος της μεταβολής της διατμητικής τάσης εγκαρσίως του οριακού στρώματος και της τραχύτητας του τοίχου. Η τιμή  $E = 9.8$  είναι για λείο τοίχο και σταθερή διατμητική τάση. Επιδράσεις μεταφοράς μάζας εγκάρσια του οριακού στρώματος και διαφορετικές κλίσεις πίεσης, ενσωματώνονται με τροποποίηση του  $E$ .

Επίσης υπάρχει μεγάλο μηχανολογικό ενδιαφέρον για πρόβλεψη χαρακτηριστικών μεταφοράς στους τοίχους. Η ίδια μεταχείριση όπως και στην μεταφορά ορμής, εφαρμόζεται και για την μεταφορά θερμότητας. Η αντίστοιχη αδιάστατη εξίσωση είναι:

Μεταφορά βαθμωτού (π.χ.  $\Phi = T$ ):

$$\dot{q}'' = (\Gamma + \Gamma_t) c_p \frac{dT}{dy}, \quad \frac{\dot{q}''}{\dot{q}''_w} = \left( \frac{\Gamma}{\mu} + \frac{\Gamma_t}{\mu} \right) \frac{dT^+}{dy^+}$$

Υποτίθεται σταθερή ροή θερμότητας εγκάρσια του οριακού στρώματος.

$$\text{Για } y^+ \leq 11.63, \Gamma \gg \Gamma_t, \dot{q}'' \sim \dot{q}''_w. \Rightarrow T^+ = \sigma_\Phi y^+$$

$$\begin{aligned} \text{Για } y^+ > 11.63, \Gamma \ll \Gamma_t, \dot{q}'' \sim \dot{q}''_w, \frac{\Gamma_t}{\rho} = \frac{\nu_t}{\sigma_{\Phi,t}} \sim \frac{\kappa y U_\tau}{\sigma_{\Phi,t}}. \Rightarrow \\ \Rightarrow T^+ = \frac{\sigma_{\Phi,t}}{\kappa} \ln y^+ + C_T \{ \sigma_\Phi \} = \sigma_{\Phi,t} [U^+ + P \{ \frac{\sigma_\Phi}{\sigma_{\Phi,t}} \}] \end{aligned}$$

$$\text{Όπου: } T^+ = \frac{\rho U_\tau c_p (T_w - T)}{\dot{q}''_w}, \quad \sigma_\Phi = \frac{c_p \mu}{\kappa}, \quad \sigma_{\Phi,t} \text{ τυρβώδης αριθμός Prandtl και:}$$

$$P \left\{ \frac{\sigma_\Phi}{\sigma_{\Phi,t}} \right\} = 9.24 \left[ \left( \frac{\sigma_\Phi}{\sigma_{\Phi,t}} \right)^{3/4} + 1 \right] \quad (\text{Jayatillaka, 1966}).$$

$C_p$  = ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση,  $\kappa$  = συντελεστής αγωγιμότητας.

Όπως και προηγουμένως ο αριθμός διαχωρισμού Reynolds είναι 11.63. Για  $y^+ < 11.63$  η μεταφορά υποτίθεται ότι λαμβάνει χώρα με μοριακή δραστηριότητα. Για  $y^+ > 11.63$  υποτίθεται ότι η μεταφορά οφείλεται καθ'ολοκληρία στην τύρβη. Η παράμετρος  $T^+$ , ροής θερμότητας, είναι μία λογαριθμική συνάρτηση του  $y^+$  και επίσης ενός όρου, ο οποίος με την σταθερά ολοκλήρωσης  $C_T$  συνδυάζεται με την  $P$ -συνάρτηση (ισχύει για αδιαπέραστους λείους τοίχους).

Η μεταχείριση στον τοίχο των  $\kappa$  και  $\epsilon$  εξισώσεων βασίζεται πάλι στην θεώρηση μονοδιάστατης, σταθερής διατμητικής τάσης Couette ροής οριακού στρώματος. Η υιοθετούμενη προσέγγιση ισχύει μόνο στο αδρανές υπόστρωμα, όπου η ροή υποτίθεται πλήρως τυρβώδης,  $y^+ > 30$ , αλλά επαρκώς κοντά στον τοίχο, ώστε να ισχύει η παραδοχή της σταθερής διατμητικής τάσης ( $y^+ < 400$ ). Σε αυτήν την περιοχή, ο τοπικός ρυθμός παραγωγής της τύρβης εξισορροπείται από τον ρυθμό της σκέδασής της  $\epsilon$ :

$$-\rho v \frac{du}{dy} = \varepsilon \text{ παράγοντας } k = \left(\frac{\tau_l}{\rho}\right) C_\mu^{1/2} \Rightarrow \tau_l = \rho C_\mu^{1/2} k \text{ διατμητική τάση στο αδρανές υπόστρωμα}$$

και

$$\varepsilon^{++} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y}$$

Η εξίσωση της τυρβώδους ενέργειας μετασχηματίζεται σε μία απλή σχέση που περιγράφει την διατμητική τάση  $\tau_l$  ( $\square \tau_w$ ) και τον ρυθμό σκέδασης  $\varepsilon$ , μέσα στο αδρανές υπόστρωμα.

Η εξίσωση  $\varepsilon$  μετασχηματίζεται σ'έναν τύπο που αποτυπώνει τροποποίηση του  $\sigma_\varepsilon$  σ'αυτήν την περιοχή:

$$C_1 = C_2 - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon C_\mu^{1/2}} \text{ και: } \sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{(C_2 - C_1) C_\mu^{1/2}}$$

Μία από τις πιο σημαντικές συνέπειες της θεώρησης ισορροπίας είναι η τελική έκφραση για την διατμητική τάση τοίχου  $\tau_w$ , σε όρους του  $k$  και των σταθερών της τύρβης.

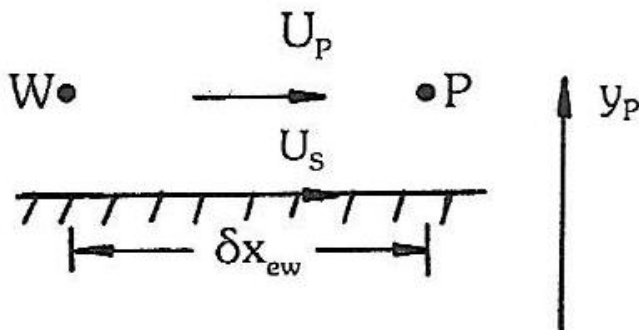
$$\tau_w = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k^{1/2} \kappa U}{\ln(Ey^+)}$$

$$\tau_w = \frac{U}{U^+} \rho C_\mu^{1/4} k^{1/2}, U^+ \cong \frac{U \sqrt{\rho \tau_l}}{\tau_w}, y^+ = \frac{y \sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu} \cong \frac{y \rho C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\mu}$$

Επίσης η σχέση για το  $\varepsilon$  με ολοκλήρωση στον όγκο ελέγχου (ή κυψελίδα), την παρακείμενη στον τοίχο (με επέκταση της ισορροπίας στην  $k$  εξίσωση στο ιξώδες υπόστρωμα και στο ενδιάμεσο στρώμα):

$$\int_V \varepsilon dV \cong \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2} U^+ dV}{y} \text{ με } U^+ = \begin{cases} y^+ & \text{για } y^+ \leq 11.63 \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{για } y^+ > 11.63 \end{cases}$$

Για την ενσωμάτωση τώρα των οριακών συνθηκών τοίχου υποτίθεται μία εφαπτομενική ταχύτητα  $U_p$ , στο συνηθισμένο ισοζύγιο ορμής, για έναν κόμβο κοντά στον τοίχο:



Γι' αυτήν την γεωμετρία τίθεται  $\alpha_s=0$ . Η ενσωμάτωση της σωστής έκφρασης της διατμητικής δύναμης εισάγεται διά της μεθόδου της πηγής:

Για τον κόμβο P εντός της τυρβώδους περιοχής ( $y^+ > 11.63$ ):

$$F_s = \tau_s \delta x_{ew} = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_{pw}^{1/2} (U_p - U_s) \kappa \delta x_{ew}}{\ln(Ey^+)}$$

όπου:

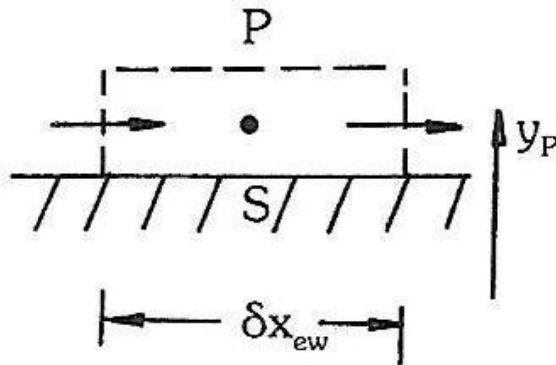
$$k_{pw} = \frac{k_p + k_w}{2}, \quad y^+ = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_{pw}^{1/2} y_p}{\mu}$$

Για τον κόμβο P εντός του ιξώδους υποστρώματος ( $y^+ < 11.63$ ):

$$F_s = \tau_s \delta x_{ew} = \frac{\mu (U_p - U_s) \delta x_{ew}}{y_p}$$

Για τις ταχύτητες τις κάθετες στον τοίχο δεν χρειάζεται ειδική μεταχείριση.

Η ενσωμάτωση των οριακών συνθηκών τοίχου για τις βαθμωτές μεταβλητές ακολουθεί την ίδια διαδικασία, όπως και στην περίπτωση της ορμής. Μηδενίζεται η έκφραση  $\alpha_s$  και η ροή βαθμωτού  $Q_s$  από το ισοζύγιο θερμότητας:



Για το P μέσα στην τυρβώδη περιοχή ( $y^+ > 11.63$ ):

$$\dot{Q}_s = \dot{q}' \delta x_{ew} = \frac{\rho C C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} (T_p - T_s) \delta x_{ew}}{T^*}$$

όπου:

$$T^+ = \sigma_{\Phi, t} \left[ U^+ + Pr \left( \frac{\sigma_\Phi}{\sigma_{\Phi, t}} \right) \right]$$

Για το P μέσα στο ιξώδες υπόστρωμα ( $y^+ < 11.63$ ):

$$Q_s = \dot{q}' \delta x_{ew} = \frac{\mu (T_p - T_s) \delta x_e}{\sigma_\Phi y_p}$$

Η ενσωμάτωση του  $Q_s$  επιτυγχάνεται πάλι με την μέθοδο της γραμμικοποίησης της πηγής.

Η ενσωμάτωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας  $k$  απαιτεί ειδική διαδικασία. Χρησιμοποιώντας το ισοζύγιο για το  $k$  τίθεται  $\alpha_s=0$  στον τοίχο. Ο όρος παραγωγής  $G$  στην  $k$ -εξίσωση μετασχηματίζεται σε μια απλούστερη μορφή, σε συνάρτηση με την διατμητική τάση  $\tau_s$  ( $\square \tau_w$ ):

$$\int_V \mu_t \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 dV \cong \frac{\tau_s (U_P - U_S) \delta V}{y_P}$$

Όπου  $\tau_s$ ,  $U_S$  θεωρούνται μέσες τιμές στην κυψελίδα και:

$$\int_V C_{Dp} \epsilon dV \cong \frac{C_{Dp} C_\mu^{3/4} (k_P^{*1/2} K_P - K_S^{3/2}) U^+ \delta V}{y_P}$$

όπου:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad \text{για} \quad y^+ > 11.63$$

και:

$$U^+ = y^+ \quad \text{για} \quad y^+ \leq 11.63$$

Ολόκληρη η πηγή  $S_k = G - C_{Dp} \epsilon$  για το ισοζύγιο του  $k$ , ενσωματώνεται στον κώδικα διά της μεθόδου της πηγής με τη βοήθεια των συντελεστών  $b$  και  $c$ .

Η ροή στον τοίχο σε αντίθεση με το  $k$  (που είναι μηδέν), για το  $\epsilon$  φτάνει στην μέγιστη τιμή (πολύ μεγαλύτερη της ελεύθερης ροής). Αυτή η συμπεριφορά έχει αποτέλεσμα να είναι δύσκολο, στο ισοζύγιο του  $\epsilon$ , στην κυψελίδα κοντά στον τοίχο να χειριστούμε το  $\alpha_s$ . Εδώ υιοθετείται μια καθορισμένη τιμή για το  $\epsilon_p$  (ανεξάρτητη του  $y^+$ ), βασισμένοι σε σχέσεις ισορροπίας. Μέσα στο αδρανές υπόστρωμα (όπου ο αριθμός  $Re$  είναι μεγάλος):

$$\epsilon_p = \frac{C_\mu K_P^{3/2}}{L}, \quad L = C_\mu^{1/4} \kappa y \text{ στην περιοχή του τοίχου}$$

συνεπώς:

$$\epsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\kappa y_P}$$

όπου:  $L$  είναι κλίμαξ μήκους σκέδασης της τύρβης. Η τιμή  $\epsilon_p$  ενσωματώνεται με την μέθοδο εισαγωγής των σταθερών  $b$  και  $c$  (π.χ.  $b = -10^{30}$ ,  $c = \epsilon_p 10^{30}$ ).

#### **4.4 ΑΣΤΑΘΕΙΑ-ΑΚΡΙΒΕΙΑ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ**

Σε πολλές σύνθετες ροές ενδέχεται να παρουσιαστούν αριθμητικές αστάθειες και απαιτούνται τότε προσθετικές τεχνικές για να επιτευχθεί σύγκλιση. Στις απλές ροές υπάρχουν τρεις βασικές αιτίες που προκαλούν αστάθεια. Λάθος καθορισμός του αρχικού πεδίου ενδέχεται να έχει αποτέλεσμα την αστάθεια. Μπορεί να απαλοιφθεί με βελτίωση του αρχικού πεδίου ή με χρήση συντελεστών υποχαλάρωσης. Μια δεύτερη αιτία στην παραγωγή εστιών αστάθειας είναι η εκλογή ακατάλληλων συντελεστών υποχαλάρωσης. Για διόρθωση επαναρυθμίζονται οι συντελεστές υποχαλάρωσης. Μια τρίτη αιτία είναι η ελλιπής επίλυση των εξισώσεων

πεπερασμένων διαφορών κατά την διάρκεια της επανάληψης. Η εξίσωση διορθωτικής πίεσης  $P'$  είναι η περισσότερο ευαίσθητη σε αυτήν την περίπτωση, γιατί σε κάθε επανάληψη το αρχικό πεδίο της  $P'$  είναι μηδέν. Αύξηση του αριθμού εφαρμογής της LBL μεθόδου απαλοίφει αυτήν την αστάθεια.

Η ακρίβεια εξαρτάται πρώτον από τον βαθμό που η λύση ικανοποιεί τις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών. Ο βαθμός αυτός αντικατοπτρίζεται από την τάση των υπολειπόμενων πηγών. Δεύτερον από τον βαθμό που οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών ικανοποιούν τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Γενικά χρησιμοποιούνται μικρότερα μεγέθη πλεγμάτων, προς επίτευξη λύσης ανεξάρτητης του πλέγματος. Τρίτον και οι εφαρμοζόμενες συνθήκες στα όρια και οι θέσεις των ορίων ενδέχεται να επηρεάζουν την ακρίβεια της λύσης. Βελτίωση μπορεί να επιτευχθεί με ρύθμιση των συνθηκών και των θέσεων εφαρμογής. Και τέταρτον μία πλήρως συγκλιμένη ανεξάρτητη πλέγματος λύση, βασιζόμενη σε ικανοποιητικές οριακές συνθήκες και θέσεις εφαρμογής, εξαρτάται από την επάρκεια του τυρβώδους μοντέλου, στο πόσο καλά οι προβλέψεις αντανakλούν την πραγματικότητα σε σύγκριση με τις πειραματικές μετρήσεις.

Πράγματι σε πολύπλοκες ροές η ανεπάρκεια του τυρβώδους μοντέλου ενδέχεται να είναι αιτία διαφόρων ασταθειών. Είναι σημαντικό να διακρίνουμε μεταξύ υπολογιστικών λαθών και αστάθειας (που μπορούν να εξαλειφτούν), από εκείνα που οφείλονται στη φυσική μοντελοποίηση.

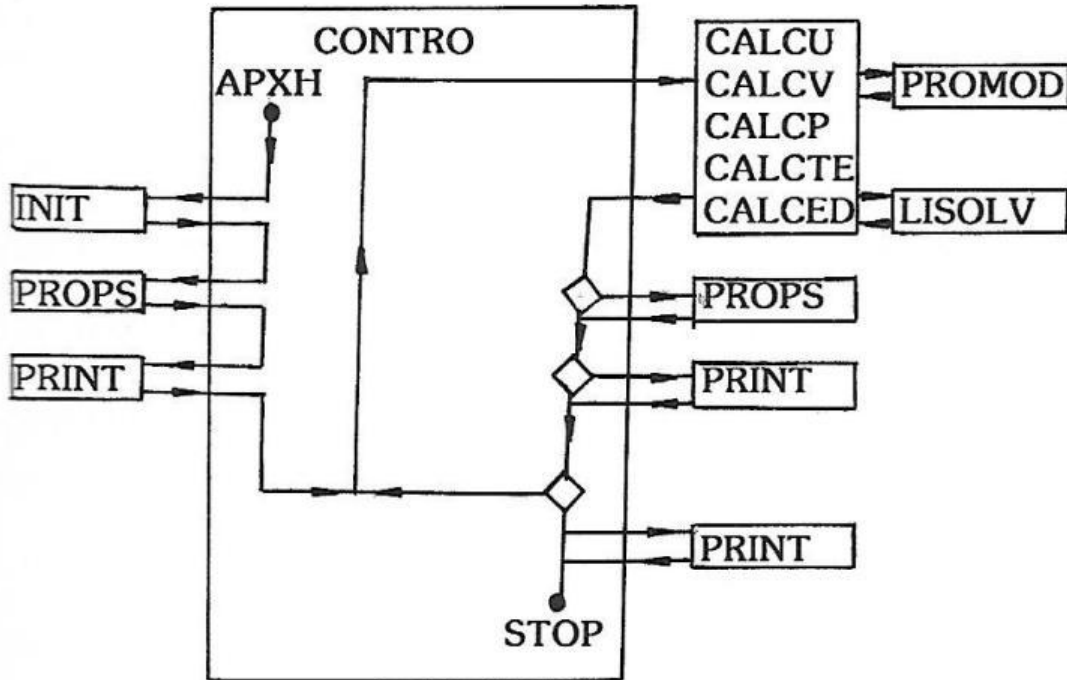
Οι απαιτήσεις οικονομίας, υπολογιστικού χρόνου και αποθήκευσης, δύνανται να ελαχιστοποιηθούν με ορισμένες τεχνικές. Πρώτον με ακριβή προσδιορισμό των αρχικών πεδίων, π.χ. ξεκινώντας από σωστό προηγούμενο υπολογισμό, μειώνεται ο υπολογιστικός χρόνος σημαντικά. Δεύτερον με βέλτιστη διευθέτηση του πλέγματος, συγκέντρωση κόμβων πλέγματος σε περιοχές με απότομες κλίσεις και μείωσης σε περιοχές όπου οι κλίσεις είναι σχεδόν ομοιόμορφες. Μείωση του μεγέθους της υπολογιστικής περιοχής είναι επίσης χρήσιμη για την οικονομία του πλέγματος. Τρίτον με την εύρεση μέσω πειράματος και δοκιμής των συντελεστών υποχαλάρωσης βελτιώνεται ο παράγοντας σύγκλισης. Και τέταρτον με βάση πιο ρεαλιστικό κριτήριο σύγκλισης για σύνθετες ροές, περίπου 1% των υπολειπόμενων πηγών (σε απλές ροές το κριτήριο διατηρείται στο 0.1%).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### 5.1 ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ TEACH-T

Το TEACH-T είναι ένα πρόγραμμα για διδιάστατες σταθερής κατάστασης στρωτές ή τυρβώδεις ροές σε καρτεσιανές ή κυλινδρικές συντεταγμένες. Στην κανονική του μορφή επιλύει για τις μεταβλητές  $u$ ,  $V$ ,  $P$ ,  $k$  και  $\epsilon$  (κάποιες επιπλέον μεταβλητές προστίθενται εύκολα).

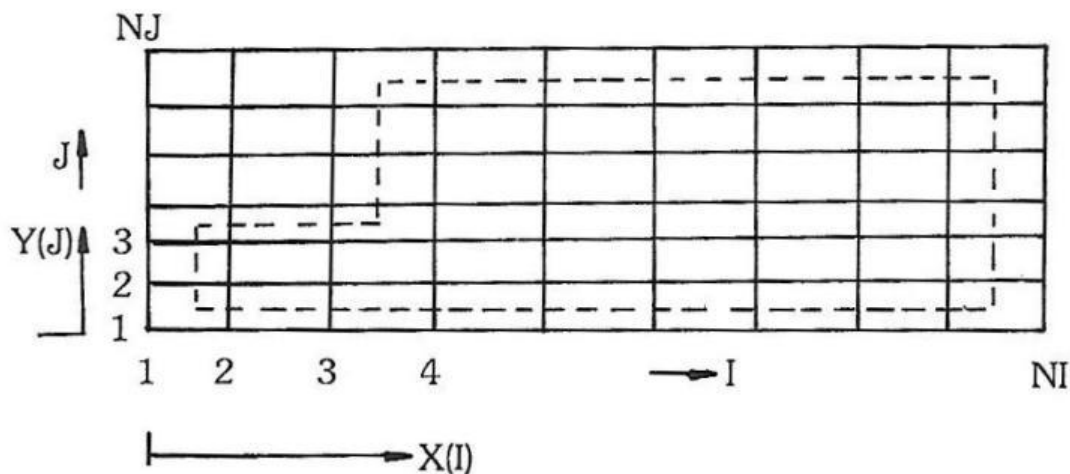
Το παρακάτω διάγραμμα ροής δείχνει τη συνολική δομή του:



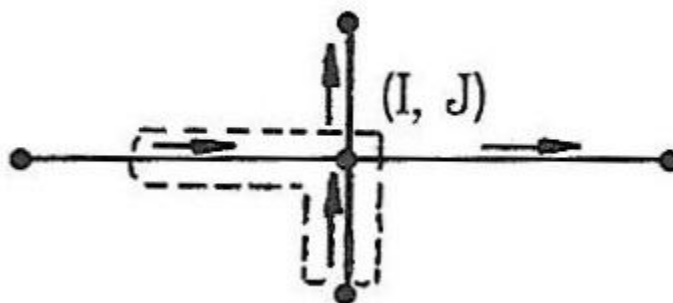
Υπάρχουν πέντε γενικές υπορουτίνες σχετικές για κάθε ιδιαίτερη μεταβλητή που θα επιλυθεί: CONTRO, INIT, PROPS, PROMOD, LISOLV και PRINT. Επιπροσθέτως υπάρχει το σύστημα υπορουτινών CALCΦ. Ο γενικός έλεγχος του προγράμματος εξασκείται από την κύρια υπορουτίνα CONTRO, που εκτελεί τις αρχικές και τελικές λειτουργίες και επίσης ελέγχει την επανάληψη. Οι υπορουτίνες CALCΦ εκτελούν τους κύριους υπολογισμούς των εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών για κάθε μεταβλητή  $\Phi$ . Τροποποιήσεις πηγών και οριακών συνθηκών γίνονται στην PROMOD ενώ η PROPS υπολογίζει τις ιδιότητες του ρευστού (ιξώδες, πυκνότητα κ.τ.λ.). Η INIT εκτελεί την αρχική προεργασία, η PRINT δίνει τις λύσεις εξόδου και η LISOLV εκτελεί την LBL επανάληψη. Οι υπορουτίνες INIT, LISOLV, PRINT και οι CALCΦ είναι ανεξάρτητες του τύπου του προβλήματος. Κατάλληλες τροποποιήσεις σε κάθε ιδιαίτερο πρόβλημα απαιτούνται μόνο στην CONTRO, PROMOD και σε σπάνιες περιπτώσεις στην PROPS.

Προς επίδειξη του υπολογιστικού κώδικα TEACH-T λαμβάνεται η γεωμετρία STEP (ροή σε γεωμετρία σωλήνα απότομης εκτόνωσης). Στο σχήμα δείχνεται ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι συντεταγμένες:





Για κυλινδρικές συντεταγμένες  $R(J)=Y(J)$  ενώ για επίπεδες ροές  $R(J)=1$ . Η περιοχή υπολογισμών είναι το ορθογώνιο που περιορίζεται με  $I=2$  έως  $(NI-1)$  και  $J=2$  έως  $(NJ-1)$ . Εάν είναι επιθυμητό η περιοχή υπολογισμών μπορεί να μεταβληθεί. Να σημειωθεί ότι τα όρια της περιοχής της ροής (διακεκομμένες γραμμές) συμπίπτουν πάντοτε με τα όρια των κύριων όγκων ελέγχου. Οι δείκτες  $(I,J)$  αναφέρονται στους κόμβους των οποίων οι συντεταγμένες είναι  $X(I)$  και  $Y(J)$ . Στο σχήμα φαίνεται το “staggered” σύστημα αποθήκευσης πλέγματος.



Οι βαθμωτές μεταβλητές αποθηκεύονται στους κύριους κόμβους πλέγματος ( $\bullet$ ),  $P \rightarrow P(I,J)$ ,  $P' \rightarrow PP(I,J)$ ,  $k \rightarrow TE(I,J)$ ,  $\varepsilon \rightarrow ED(I,J)$ ,  $\mu_{\text{eff}} \rightarrow VIS(I,J)$ ,  $\rho \rightarrow DEN(I,J)$ , ενώ οι σχετικές ταχύτητες είναι μετατοπισμένες στις θέσεις ( $\rightarrow$ ) και ( $\uparrow$ ),  $U \rightarrow U(I,J)$ ,  $V \rightarrow V(I,J)$ . Οι θέσεις αποθήκευσης των μεταβλητών στο παραπάνω σχήμα είναι εντός των διακεκομμένων γραμμών. Να σημειωθεί ότι λόγω του τρόπου αποθήκευσης, οι υπολογισμοί για βαθμωτές μεταβλητές ξεκινούν στο σημείο  $(2,2)$ , για την ταχύτητα  $U$  στο  $(3,2)$  και για την ταχύτητα  $V$  στο  $(2,3)$ .

Η επίλυση της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών για κάποια μεταβλητή  $\Phi (=U, V, P$  κ.ο.κ.), λαμβάνεται θέτοντας  $INCAL\Phi = \text{“.TRUE.”}$ . Εάν θέσουμε  $INCAL\Phi = \text{“.FALSE.”}$ , δεν επιλύεται η αντίστοιχη εξίσωση. Ομοίως το  $INPRO$  ελέγχει τον υπολογισμό των ιδιοτήτων του ρευστού. Η δεικτιοδότηση που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό του αριθμού εφαρμογής της LBL μεθόδου, δίχως αποχρονικοποίηση των συντελεστών, για κάθε μεταβλητή  $\Phi$  είναι  $NSWP\Phi$  (αριθμός σαρώσεων). Συχνά λαμβάνει τιμές από 1 έως 6 εξαρτώμενο από το κάθε  $\Phi$  και την ροή.

Οι συντελεστές υποχαλάρωσης λαμβάνουν τιμές ομοίως με τον παράγοντα  $URF\Phi$ , που λαμβάνει γενικώς τιμές μεταξύ 0.5 και 1.0 εξαρτώμενο από το ιδιαίτερο  $\Phi$ .

Παρακολούθηση των επαναλήψεων, έλεγχος και εξαγωγή αποτελεσμάτων δίδουν στον χρήστη μία καλύτερη αντίληψη της επιτυχίας/αποτυχίας της υπολογιστικής διαδικασίας για ένα πρόβλημα. Για την παρακολούθηση το σύνολο των εκτελούμενων επαναλήψεων και αποθηκεύεται σαν NITER και το απόλυτο άθροισμα των υπολοίπων πηγών σαν RESORΦ. Για την εξίσωση  $P'$  η απόλυτη πηγή μάζας αποθηκεύεται σαν RESORM. Τα RESOR συνήθως κανονικοποιούνται. Η επανάληψη ελέγχεται ώστε οι υπολογισμοί να τερματίζονται για τρεις λόγους: η μέγιστη υπολοίπιση πηγή SORCE είναι υπερβολικά μεγάλη ύστερα από 20 επαναλήψεις (αποκλίνουσα λύση). SORCE είναι μικρότερη της επιθυμητής τιμής SORMAX. Και NITER έχει επιτύχει τον μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό MAXIT.

Η εξίσωση  $P'$  μπορεί να ικανοποιηθεί από διάφορα πεδία πίεσης. Δηλ. η πίεση προκαθορίζεται στην θέση (IPREF,JPREF) και καθορίζεται σ' αυτήν την τιμή με όλες τις άλλες μετρούμενες πιέσεις στους άλλους κόμβους σχετικές με αυτήν την τιμή. Έτσι εάν η θέση αυτή είναι μέσα στην περιοχή λύσης, η στάθμη της πίεσης είναι καθορισμένη.

Σε κάθε επανάληψη τυπώνονται τα NITER, RESOR και μεταβλητές σε μια καθορισμένη θέση (IMON,JMON). Οι πίνακες των μεταβλητών τυπώνονται πριν και μετά της συνέχειας της επανάληψης. Για τύπωση στο εσωτερικό της συνέχειας της επανάληψης χρησιμοποιείται η μεταβλητή INDPRI. Ο τύπος των εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών που προγραμματίστηκαν είναι:

$$(\alpha_P - b - c_P)\Phi_P = \alpha_N\Phi_N + \alpha_S\Phi_S + \alpha_E\Phi_E + \alpha_W\Phi_W + c + c_P\Phi^{OLD}$$

όπου:

$$\alpha_P = \alpha_N + \alpha_S + \alpha_E + \alpha_W, \quad c_P = \max(0, M_P).$$

$M_P$  είναι η καθαρή εκροή από τον όγκο ελέγχου. Το  $c_P$  χρησιμοποιείται μόνο σαν ένα τέχνασμα που εξασφαλίζει ευστάθεια, που με την χρήση του οι συντελεστές του  $\Phi_P$  παραμένουν πεπερασμένοι, σε περίπτωση ύπαρξης καθαρής εκροής.

Τα σύμβολα της γλώσσας FORTRAN εκλέγονται προσεκτικά ώστε να υπάρχει άμεση σχέση στην έκφρασή τους με τα αντίστοιχα τους στις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών.

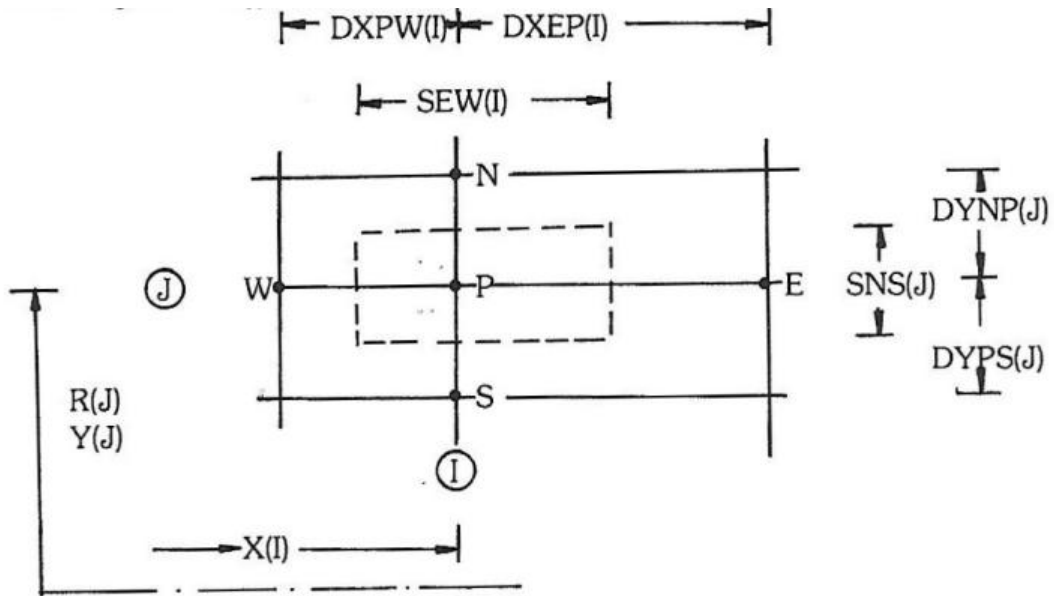
$$\alpha_P \rightarrow AP(I,J), \quad \alpha_N = AN(I,J), \quad \alpha_S = AS(I,J), \quad \alpha_W = AW(I,J)$$

$$(c + c_P\Phi^{OLD}) \rightarrow SU(I,J), \quad (b - c_P) \rightarrow SP(I,J)$$

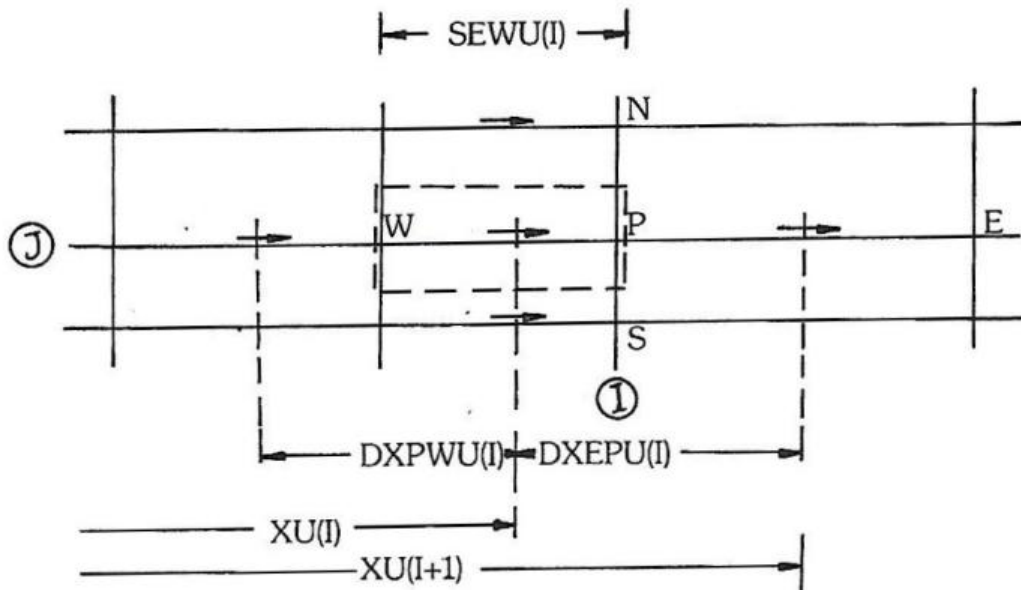
ή στον τύπο της διορθωτικής ταχύτητας:

$$D_u \rightarrow DU(I,J), \quad D_v \rightarrow DV(I,J).$$

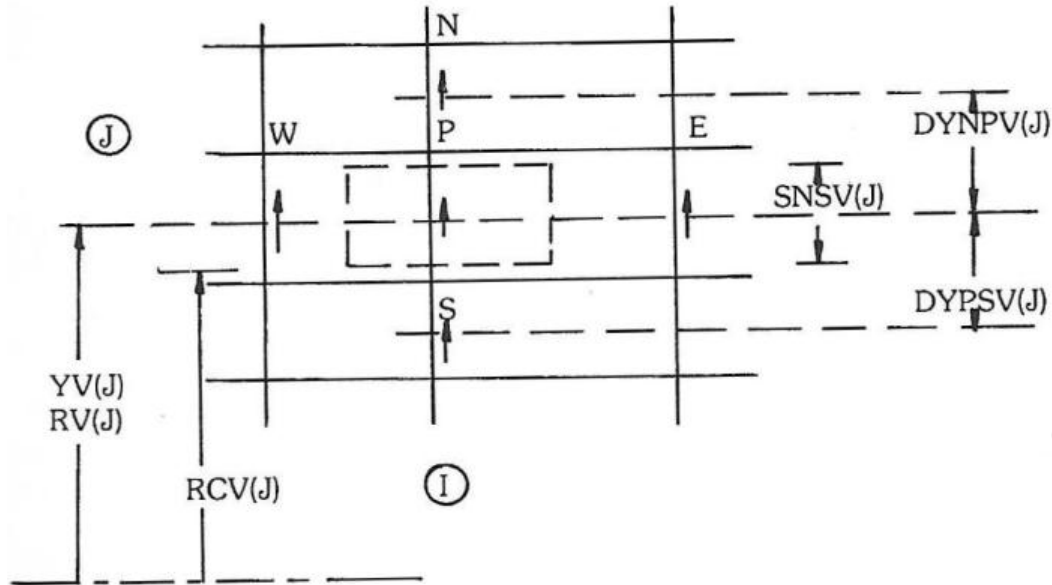
Στο παρακάτω σχήμα δίδεται η κυψελίδα (όγκος ελέγχου) αποθήκευσης βαθμωτών (P, T, k, ε κ.ο.κ.) με μεταβλητές FORTRAN σχετικές με τις διαστάσεις/συντεταγμένες:



Το σχήμα αυτό όπως και τα δύο επόμενα είναι επεξηγηματικά και ο χρήστης θα βρει σ' αυτά μεγάλη βοήθεια στην υιοθέτηση του TEACH-T για διάφορα προβλήματα. Να σημειωθεί ότι τα όρια της κυψελίδας των βαθμωτών βρίσκονται στο μεσο-διάστημα των κυρίων κόμβων πλέγματος.



Να σημειωθεί ότι το δυτικό όριο της κυψελίδας ευρίσκεται στο μεσο-διάστημα του  $DXPWU(I)$  και παρομοίως το ανατολικό όριο κείται στο μεσο-διάστημα του  $DXEPU(I)$ . Το βόρειο και το νότιο όριο κείτονται στο μεσο-διάστημα των αποστάσεων NP και PS αντίστοιχα.



Το βόρειο όριο της κυψελίδας ευρίσκεται στο μεσο-διάστημα του DYNPV(J). Ομοίως το νότιο όριο ευρίσκεται στο μεσο-διάστημα του DYPV(J). Το δυτικό και ανατολικό όριο κείτονται στο μεσο-διάστημα των WP και PE αντίστοιχα.

Στη συνέχεια περιγράφονται η δομή και οι συναρτήσεις των διαφόρων υπορουτινών του προγράμματος TEACH-T. Γενικά κάθε υπορουτίνα υποδιαιρείται σε τμήματα για διευκόλυνση κατανόησης όλου του προγράμματος. Παρακάτω δίδονται οι λειτουργίες των διαφόρων τμημάτων της κύριας υπορουτίνας. CONTROL:

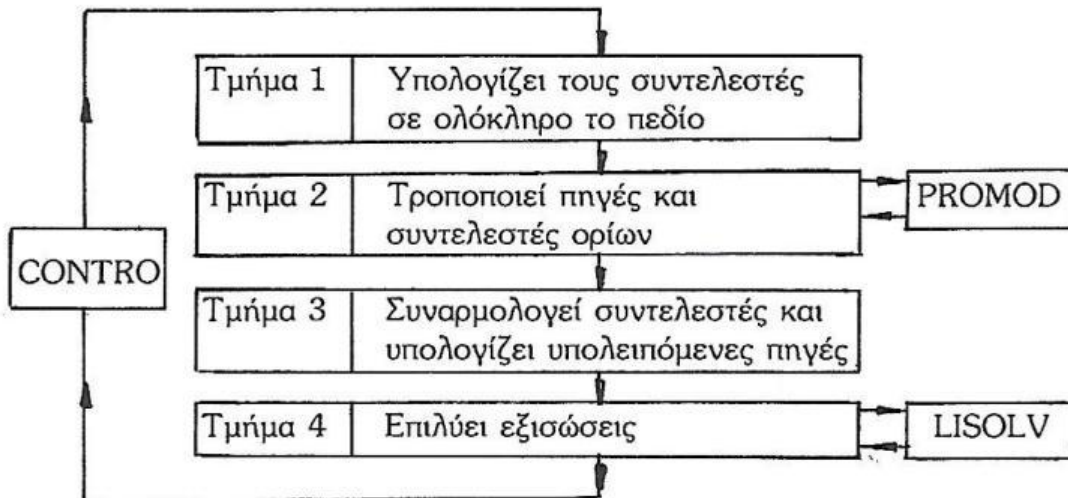
Τμήμα 1: Τυπώνονται έξω τα αρχικά στοιχεία του πλέγματος, οι παράμετροι ελέγχου του προγράμματος, οι σταθερές του προβλήματος και κάποια άλλα σχετικά στοιχεία.

Τμήμα 2: Γίνονται οι υπολογισμοί των παραμέτρων του πλέγματος, η προεργασία για τον εφοδιασμό των πινάκων (μέσω της INIT) και η περιγραφή των καθορισμένων οριακών τιμών, καθώς και προκαταρκτική τύπωση των αρχικών μεταβλητών.

Τμήμα 3: Προπαρασκευάζει και ελέγχει την επανάληψη και δίδει ενδιάμεσες εκτυπώσεις των NITER, RESOR, Φ(IMON, JMON) και τις κατανομές των Φ (εάν το NITER είναι ακριβές πολλαπλάσιο του INDPRI).

Τμήμα 4: Δίδεται η τελική εκτύπωση, οι υπολογισμοί των συντελεστών διατμητικής τάσης, κανονικοποίηση των κατανομών κ.ο.κ.

Στον επόμενο πίνακα δίδεται η γενική μορφή όλων των CALCΦ υπορουτινών, πλην της CALCP:



Η είσοδος και η έξοδος κάθε μίας από αυτές τις υπορουτίνες είναι η CONTRO.

Τμήμα 1: Υπολογίζει τους συντελεστές σε ολόκληρο το πεδίο, με χρήση των εκφράσεων της συνολικής ροής. Οι υπολογισμοί αυτοί είναι ανεξάρτητοι του τύπου του προβλήματος.

Τμήμα 2: Καλείται η PROMOD για να τροποποιηθούν πηγές και συντελεστές ορίων για να αποτυπώσουν το ιδιαίτερο πρόβλημα.

Τμήμα 3: Υπολογίζονται όλοι οι συντελεστές και οι υπολοιπόμενες πηγές RESORΦ από τα Φ της προηγούμενης επανάληψης.

Τμήμα 4: Καλείται η LISOLV για εφαρμογή της μεθόδου LBL.

Η CALCCP υπορουτίνα διακρίνεται από τις υπόλοιπες CALCΦ υπορουτίνες. Στο Τμήμα 1 έχει ένα επιπρόσθετο χαρακτηριστικό. Οι απόλυτες πηγές μάζας συσσωρεύονται και αποθηκεύονται σαν RESORM. Δεν υπολογίζονται υπολοιπόμενες πηγές για την P'-εξίσωση επειδή δεν μας παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες. Η P'-εξίσωση είναι απίθανο να λάβει μοναδική μορφή επειδή τα  $\alpha_i$  είναι απίθανο να γίνουν μηδέν. Συνεπώς δεν λαμβάνονται ιδιαίτερες προφυλάξεις στην εισαγωγή «λάθος» πηγών. Για την CALCCP υπορουτίνα υπάρχει ένα επιπρόσθετο τμήμα, το Τμήμα 5, για τον υπολογισμό των διορθώσεων πίεσης και ταχυτήτων. Στην υπορουτίνα PROPS υπολογίζονται οι ιδιότητες του ρευστού (θερμοδυναμικές και μεταφοράς, π.χ.  $\mu_{eff}$ ,  $\Gamma_{eff}$  κ.τ.λ.).

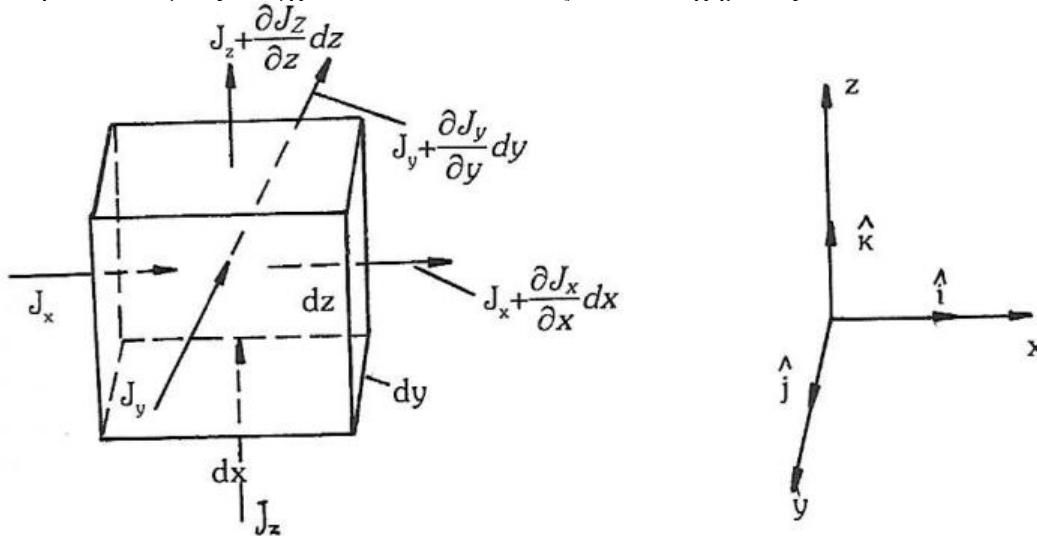
Η επαναληπτική μέθοδος LBL εκτελείται στην υπορουτίνα LISOLV, που έχει τέτοια διεύθυνση ώστε να επιλύει κατά μήκος των γραμμών N-S με W-E σαρώσεις. Εάν είναι επιθυμητό μπορεί η LISOLV να επιλύει κατά μήκος των γραμμών W-E και N-S σαρώσεις. Τα πιο σημαντικά στοιχεία της LISOLV είναι ο PHI(I,J) πίνακας, που περιέχει τις υπολογιζόμενες μεταβλητές και τους δείκτες θέσης ISTART και JSTART. Η υπορουτίνα INIT υπολογίζει στο Τμήμα 1 τις συντεταγμένες του πλέγματος, τις αποστάσεις των μεσο-διαστημάτων μεταξύ των κόμβων, τις διαστάσεις της κυψελίδας. Το R(J) τίθεται ίσο με 1.0 εάν INDCOS=1 (επίπεδη ροή), ή ίσο με το Y(J) εάν INDCOS=2 (αξονοσυμμετρική ροή). Στο Τμήμα 2 καθορίζονται οι αρχικές τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών των πινάκων.

Η εκτύπωση των εξαρτημένων μεταβλητών των πινάκων εκτελείται από την υπορουτίνα PRINT. Τα ιδιαίτερα στοιχεία είναι PHI(I,J) πίνακας προς υπολογισμό, X(I), Y(J) συντεταγμένης θέσης αποθήκευσης, HEAD πίνακας που περιέχει την σειρά των ονομάτων των περιεχομένων μεταβλητών, ISTART, JSTART αρχικές τιμές δεικτών I, J.

Γενικά το υπολογιστικό πρόγραμμα TEACH-T είναι γραμμένο έτσι ώστε να είναι εύκολα κατανοητό και πολλές από τις υπορουτίνες του (πλην των CONTRO, PROPS και PROMOD), δεν χρειάζονται τροποποιήσεις για άλλους τύπους προβλημάτων.

## 5.2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΤΟΥ TEACH-T ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΕ ΓΛΩΣΣΑ FORTRAN

Θεωρείται ο όγκος ελέγχου διαστάσεων  $d_x$ ,  $d_y$ ,  $d_z$  του σχήματος:



Ας υποθέσουμε ότι στον στοιχειώδη όγκο  $dV$  εισέρχεται μια ποσότητα που εκφράζεται από το διάνυσμα  $\vec{J}$ :

$$\vec{J} = J_x \hat{i} + J_y \hat{j} + J_z \hat{k}$$

Καθώς η ποσότητα αυτή περνά από τον όγκο  $dV$  μεταβάλλεται και εξέρχεται σαν:

$$J_i + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} dx_i$$

στην διεύθυνση  $i$ . Τότε για την ίδια διεύθυνση η μεταβολή της ποσότητας  $J_i$  θα είναι:

$$(\text{Μεταβολή } J_i) = \frac{\partial J_i}{\partial x_i} dx_i$$

Αν η ποσότητα αυτή είναι ανηγμένη στην επιφάνεια εισαγωγής τότε η καθαρή εκροή της ποσότητας αυτής για κάθε διεύθυνση ξεχωριστά θα είναι:

$$x \rightarrow \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} dx\right) dy dz$$

$$y \rightarrow \left(\frac{\partial J_y}{\partial y} dy\right) dx dz$$

$$z \rightarrow \left(\frac{\partial J_z}{\partial z} dz\right) dx dy$$

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη συνολική εκροή από τον στοιχειώδη όγκο ποσότητας J:

$$\text{Εκροή} = \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) dx dy dz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Εκροή}/(\text{μονάδα όγκου}) = \sum_i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \text{div} \vec{J}$$

Ας υποθέσουμε ακόμα ότι η ποσότητα αυτή είναι τέτοιας φύσεως που διατηρείται σταθερή. Τότε η εκροή της ποσότητας  $\text{div} \vec{J}$  θα προέρχεται (αν δεν είναι μηδενική) από κάποια άλλη ποσότητα J που περιέχει ο όγκος ελέγχου dV ή/και από κάποια πηγή J μέσα στον όγκο dV. Αν η μεταβολή του  $\vec{J}$  έγινε σε χρόνο dt, τότε η απαίτηση για διατήρηση αυτής της ποσότητας εκφράζεται με την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial(\rho J)}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = S_J \quad (5.2.1)$$

όπου ρ: πυκνότητα του J στον όγκο dV.  $S_J$ : πηγή J στον όγκο dV. Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την γενική μορφή των εξισώσεων διατήρησης. Κάθε εξίσωση διατήρησης στη Φυσική μπορεί να μετασχηματιστεί σε αυτήν την μορφή. Η εξίσωση της συνέχειας εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας όταν αυτή εισέρχεται σε έναν στοιχειώδη όγκο dV κάτω από ένα ροϊκό πεδίο ταχύτητας  $\vec{u}$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{χωρίς πηγή μάζας})$$

Η εξίσωση αυτή σε κυλινδρικές συντεταγμένες γίνεται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\phi \rho)}{\partial \phi} + \frac{\partial(u_z \rho)}{\partial z} = 0$$

Σε μόνιμη 2-D ροή η εξίσωση αυτή γίνεται:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) + \frac{\partial(u \rho)}{\partial z} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{όπου} \\ u = u_z \\ v = u_r \end{array} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(r \rho u) = 0 \quad (5.2.2)$$

Οι εξισώσεις της ορμής εκφράζουν την διατήρηση της ορμής σε κάθε διεύθυνση του χώρου. Έτσι υπάρχουν τρεις τέτοιες εξισώσεις με γενική μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \text{div}(\rho \vec{u} u_i) = \text{div}(\mu \text{grad} u_i) + S_i$$

όπου:  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)$ : Μεταβολή της ορμής στον χρόνο.

$\text{div}(\rho \vec{u} u_i)$ : Ο όρος συναγωγής που εκφράζει την καθαρή εκροή ορμής από τον στοιχειώδη όγκο  $dV$ .

$\text{div}(\mu \text{grad} u_i)$ : Όρος διάχυσης που εκφράζει την ανακατανομή της ορμής λόγω των δυνάμεων ιξώδους.

$S_i$ : πηγή ορμής

$i$ : διεύθυνση διατήρησης της ορμής

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες σε 2-D μόνιμη ροή η εξίσωση αυτή γράφεται:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial z}(\rho u r u_i) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v r u_i) - \frac{\partial}{\partial z}(\eta \mu \frac{\partial u_i}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial r}(\eta \mu \frac{\partial u_i}{\partial r}) \right] = S_i \quad (5.2.3)$$

Στην μορφή αυτή η εξίσωση της ορμής χρησιμοποιείται στο πρόγραμμα TEACH. Ο όρος των πηγών εκφράζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

α) Εξίσωση ορμής στην x-διεύθυνση:

$$S_u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\eta \mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}(\eta \mu \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x}(\mu \text{div} \vec{u}) \quad (5.2.4)$$

β) Εξίσωση ορμής στην y-διεύθυνση:

$$S_v = \frac{\rho \omega^2}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\eta \mu \frac{\partial v}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}(\mu r \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{2}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \text{div} \vec{u}) \quad (5.2.5)$$

Δεχτήκαμε την ροή ως 2-D αλλά κρατήσαμε την ταχύτητα  $\omega$  στον όρο:

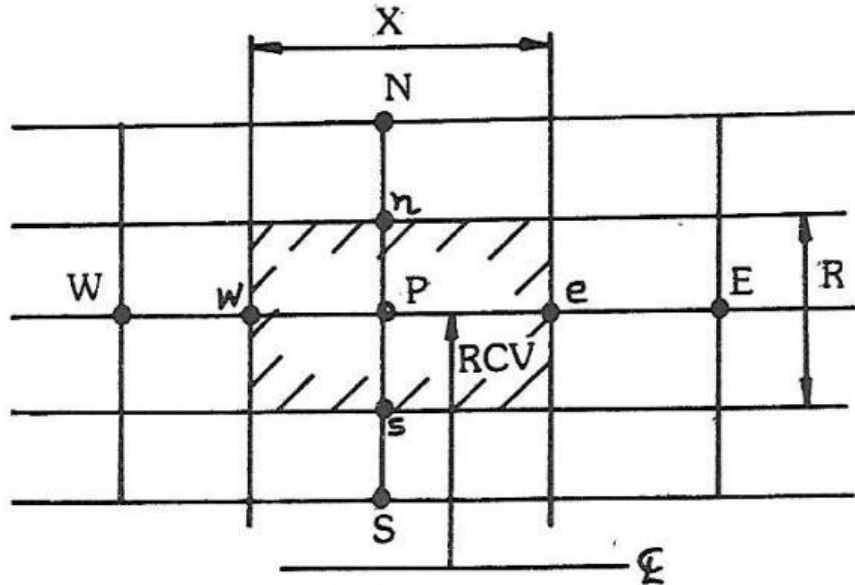
$$\frac{\rho \omega^2}{r}$$

Στην ουσία αυτό συμβαίνει γιατί η ροή που έχουμε είναι αξονοσυμμετρική με αποτέλεσμα η ταχύτητα της συντεταγμένης  $\phi$  να είναι μεν διαφορετική σε κάθε σημείο ενός επιπέδου υπολογισμών, αλλά και είναι σταθερή σε κάθε άλλο επίπεδο υπολογισμών.

Μπορούμε δηλαδή να φανταστούμε ένα επίπεδο υπολογισμών μέσα στον κύλινδρο στον οποίο η ταχύτητα  $\omega$  παρουσιάζει μια κατανομή που την διατηρεί για κάθε άλλο όμοιο επίπεδο στον θάλαμο καύσης.



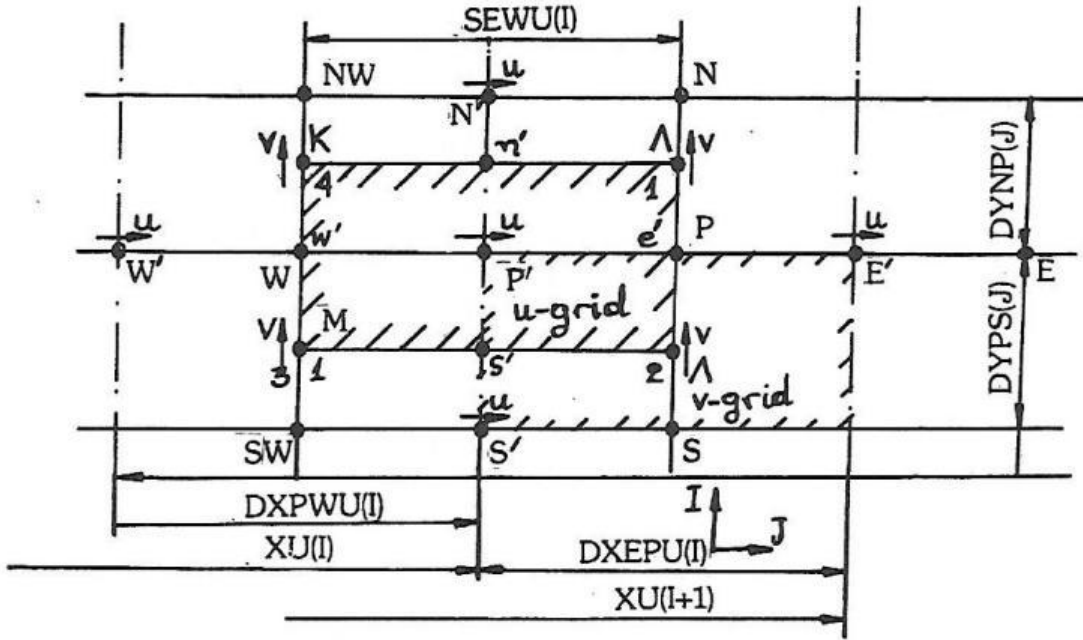




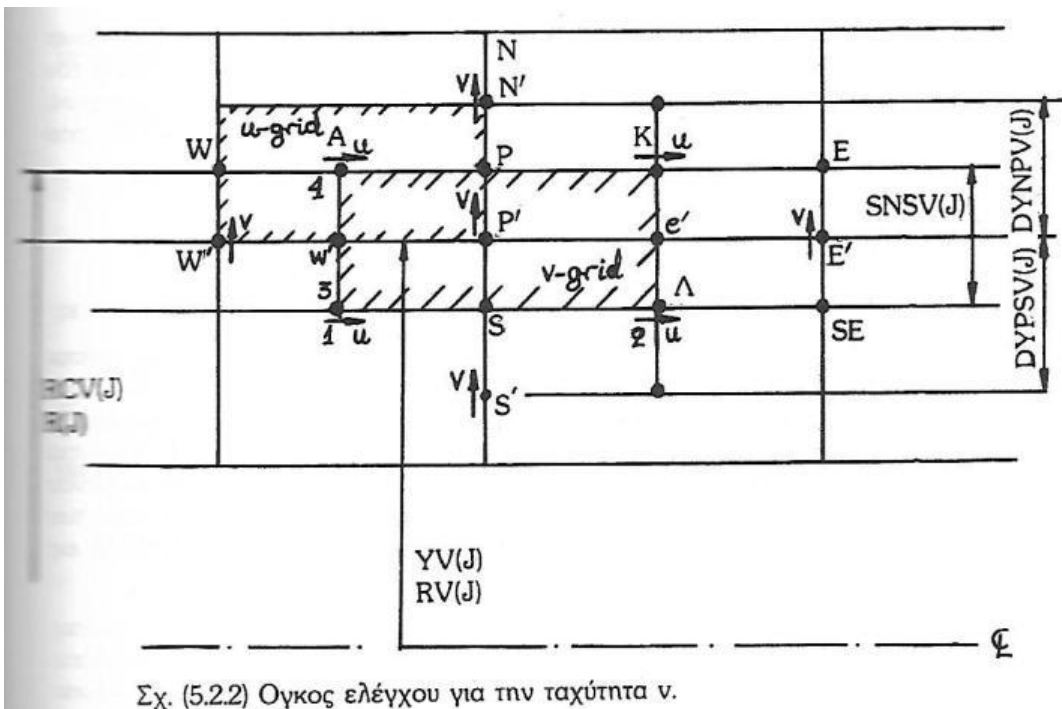
Ο όγκος ελέγχου που στο πρόγραμμα συμβολίζεται με VOL είναι:

$$VOL = R \times (RCV\phi) = R \times RCV$$

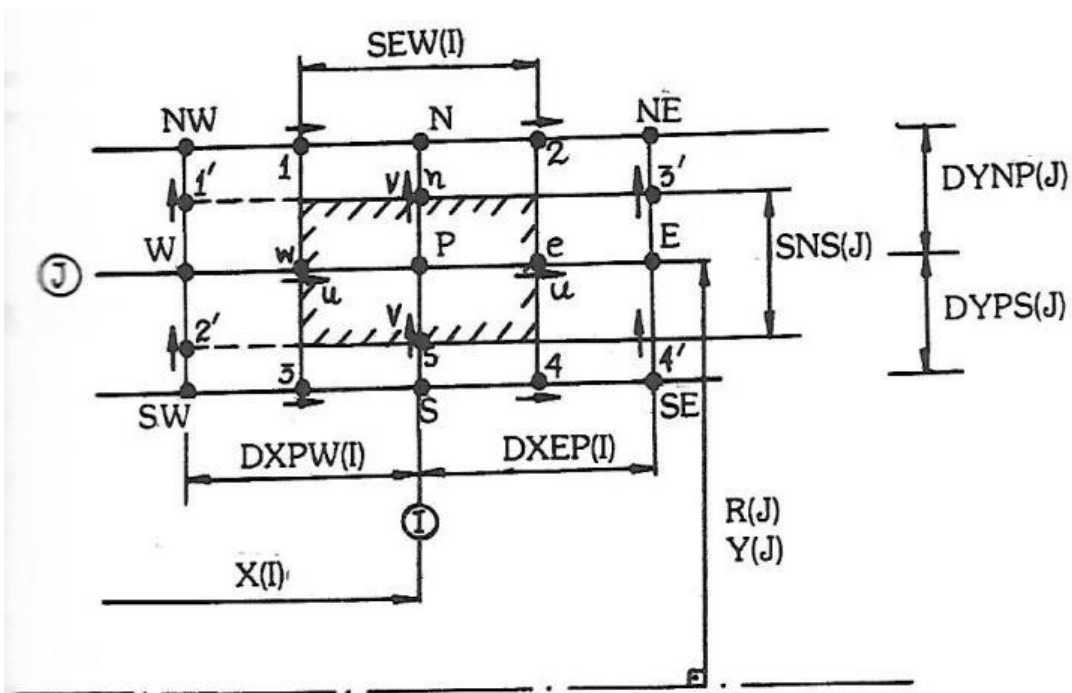
με βάση τη θεώρηση του  $\phi=1$ . Ολοκληρώνουμε τις διαφορικές εξισώσεις όχι πάνω σε επιφάνειες  $dx dy$  αλλά στον όγκο  $dv$  όπου:  $dv = r d\phi r dx$ , παρόλο που αναφερόμαστε σε 2D ροή και χρησιμοποιούμε 2D εξισώσεις. Η ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων οδηγεί τελικά σε αποθήκευση όλων των μεταβλητών (πίεση, ταχύτητα κ.τ.λ.) στο κέντρο του όγκου ελέγχου P. Έχει όμως αποδειχθεί ότι κάτι τέτοιο μπορεί να οδηγήσει σε υπολογιστικά σφάλματα, κυρίως στον καθορισμό του όρου  $-\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)$  στις εξισώσεις ορμής. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται μια παραλλαγή της παραπάνω μεθόδου. Η νέα μέθοδος επιβάλλει την χρήση διαφορετικών όγκων ελέγχου για την ολοκλήρωση των εξισώσεων της ορμής σε σχέση με κάποιο βασικό όγκο ελέγχου. Έτσι ο υπολογισμός της ταχύτητας  $u$  γίνεται με την ολοκλήρωση της εξίσωσης της ορμής στην  $x$  (ή  $z$ ) διεύθυνση, σε ένα πλέγμα όγκων ελέγχου μετατοπισμένο αντίθετα προς την διεύθυνση αυτή, δηλ. προς τα αριστερά. Όμοια ο υπολογισμός της  $v$  γίνεται σε ένα μετατοπισμένο όγκο ελέγχου προς τα κάτω. Αντίθετα η πίεση και άλλα χαρακτηριστικά μεγέθη της ροής όπως η πυκνότητα, ιξώδες κλπ. Αποθηκεύονται στο βασικό πλέγμα του P. Στα σχ. (5.2.1) και σχ. (5.2.2) δείχνονται τα μετατοπισμένα πλέγματα υπολογισμού των ταχυτήτων  $u$  και  $v$  με συμβολισμό των διαστάσεών τους σύμφωνα με το πρόγραμμα TEACH. Ορισμένες διαστάσεις των πλεγμάτων ίσως να δίνουν την εντύπωση ότι περισσεύουν. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι τοποθετημένα τα πλέγματα στη μέση των αποστάσεων των κόμβων P, N, S, E, W. Έχουμε όμως δυνατότητα επιλογής μη ομοιόμορφου πλέγματος. Η κατανόηση της γεωμετρίας των πλεγμάτων είναι πολύ σημαντική για να γίνουν αντιληπτές οι ολοκληρώσεις των διαφορικών εξισώσεων. Ειδικότερα πρέπει να δοθεί προσοχή στα συμπληρωματικά πλέγματα  $u$ ,  $v$  των πλεγμάτων  $v$ ,  $u$  αντίστοιχα και πως στις άκρες των πλεγμάτων  $v$ ,  $u$  εντοπίζονται ταχύτητες άλλης διεύθυνσης από αυτήν που ολοκληρώνεται. Έτσι στο πλέγμα της  $u$ -ταχύτητας στα τέσσερα άκρα της, ορίζονται ταχύτητες  $v$  των γύρω-γύρω πλεγμάτων τύπου  $v$  και το αντίστροφο.



Σχ. (5.2.1) Ογκος ελέγχου για την ταχύτητα  $u$ .



Σχ. (5.2.2) Ογκος ελέγχου για την ταχύτητα  $v$ .



Σχ. (5.2.3) Ογκος ελέγχου για την πίεση P, πυκνότητα ρ, ιξώδες μ.

Τα πλέγματα υπολογίζονται στην υπορουτίνα INIT η οποία αναλαμβάνει τον μηδενισμό όλων των μεταβλητών που θα υπολογισθούν στην συνέχεια του προγράμματος και τον υπολογισμό των γεωμετρικών μεγεθών των πλεγμάτων. Αρχικά γίνεται ένας έλεγχος για την τιμή του δείκτη INDCOS που προσδιορίζει το είδος των συντεταγμένων που θα χρησιμοποιηθούν:

- INDCOS={
- 1 Καρτεσιανό Σύστημα συντεταγμένων (ΚΣΣ)
  - 2 Κυλινδρικό Σύστημα συντεταγμένων (ΚΛΣΣ)

Στην περίπτωση που έχουμε (ΚΣΣ) η τιμή της ακτίνας R(J) γίνεται μονάδα αφού εδώ αντί γι' αυτήν έχουμε την απόσταση Y(J). Πριν προχωρήσουμε όμως θα πρέπει να πούμε ότι στην αρχή του προγράμματος έχουν υπολογισθεί οι αποστάσεις Y(J) και X(I) του πλέγματος. Η οριζόντια θέση του P καθορίζεται από την X(I) και η απόσταση μεταξύ του προηγούμενου στο πλέγμα P και του τωρινού ορίζεται από την DXPW(I), ενώ η απόστασή του από το επόμενο μέσω της DXEP(I). Επομένως αν ορίσουμε την DXEP(I) ως εξής:

$$DXEP(I) = X(I+1) - X(I)$$

Είναι φανερό ότι θα ισχύει:

$$DXPW(I+1) = DXEP(I)$$

Θέτουμε επίσης τιμές για τις οριακές θέσεις του πλέγματος που εκφράζονται στον άξονα x: (1)=πρώτη θέση, NI=τελευταία θέση. Οι οριακές τιμές προφανώς θα είναι:

$$DXPW(1) = 0 \text{ και } DXEP(NI) = 0$$

Τα ίδια ακριβώς ισχύουν για τις κατακόρυφες αποστάσεις DYNP(J) και DYPS(J) οι οποίες και γίνονται:

$$DYPS(J+1) = DYNP(J) \text{ όπου } DYNP(J) = Y(J+1) - Y(J)$$

με οριακές τιμές:

$$DYPS(1)=0, DYNP(NJ)=0$$

αφού έχουμε καθορίσει στον άξονα y: (1)=πρώτη θέση, NJ=τελευταία θέση.

Αφού έχουμε καθορίσει αυτές τις αποστάσεις από το σχήμα είναι φανερό ότι:

$$SEW(I)=1/2[DXEP(I)+DXPW(I)]$$

με οριακές τιμές:

$$SEW(1)=0 \text{ και } SEW(NI)=0$$

Όμοια και για την y-διεύθυνση θα έχουμε τώρα:

$$SNS(J)=1/2[DYNP(J)+DYPS(J)]$$

Με οριακές τιμές:

$$SNS(1)=0 \text{ και } SNS(NJ)=0$$

Στη συνέχεια πάμε στο σχήμα (5.2.1) για να υπολογίσουμε τη γεωμετρία του πλέγματος της ταχύτητας U. Από το σχήμα φαίνεται:

$$XU(I)=1/2[X(I)+X(I-1)]$$

Με τον τρόπο αυτό τοποθετούμε το κέντρο P' για το πλέγμα U στο μέσο μεταξύ των σημείων P και W. Αυτό είναι πολύ σημαντικό για τους υπολογισμούς των εξισώσεων ορμής-συνέχειας στο πλέγμα. Στην συνέχεια υπολογίζουμε όπως κάναμε και για το πλέγμα-P τις αποστάσεις μεταξύ των διαδοχικών σημείων P των όγκων ελέγχου. Έχουμε:

$$DXEPU(I)=XU(I+1)-XU(I)$$

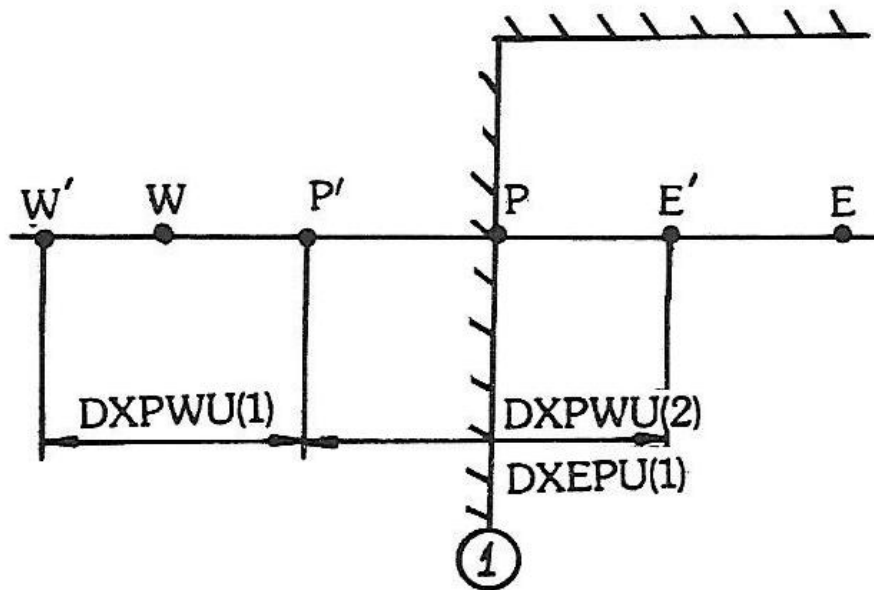
$$DXPWU(I+1)=DXEPU(I)$$

Οι οριακές τιμές θα είναι:

$$DXPWU(1)=0 \text{ και } DXPWU(2)=0$$

$$DXEPU(1)=0 \text{ και } DXEPU(NI)=0$$

Στο παρακάτω σχήμα γίνονται φανερές οι παραπάνω οριακές συνθήκες:



Από το σχήμα (5.2.1) μπορούμε να υπολογίσουμε:

$SEWU(I)=X(I)-X(I-1)$  με οριακή τιμή  $SEWU(1)=0$

Στο πλέγμα  $-V$  (βλέπε σχήμα (5.2.2)), θα έχουμε για τις ακτίνες  $RV(J)$ , ή τις  $YV(J)$  στο ΚΣΣ:

$RV(J)=1/2[R(J)+R(J-1)]$

$YV(J)=1/2[Y(J)+Y(J-1)]$

με οριακή τιμή  $YV(1)=RV(1)=0$

Με τον τρόπο αυτό τοποθετείται το κέντρο της  $V$ -κυψελίδας στη μέση της απόστασης  $PS$ . Στη συνέχεια υπολογίζεται η ακτίνα της πάνω γραμμής της  $V$ -κυψελίδας που σε άλλη περίπτωση δεν θα ήταν ίση με την  $R(J)$  από την παρακάτω σχέση:

$RCV(J)=1/2[RV(J+1)+RV(J)]$

με οριακές τιμές:  $RCV(1)=R(1)$  και  $RCV(NJ)=R(NJ)$

Έτσι μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις κάθετες αποστάσεις μεταξύ των διαδοχικών κυψελίδων τύπου  $V$  όπως κάναμε και για τις οριζόντιες αποστάσεις στην  $U$ -κυψελίδα ως εξής:

$DYNPV(J)=YV(J+1)-YV(J)$

$DYPSV(J+1)=DYNPV(J)$

με οριακές τιμές:

$DYPSV(1)=0$  και  $DYPSV(2)=0$

$DYNPV(NJ)=0$

Τέλος υπολογίζουμε κάποιους γεωμετρικούς συντελεστές για τις  $u$  και  $v$  κυψελίδες που δεν έχουν νόημα να αναφερθούν εδώ αφού θα τους δούμε όταν θα τους χρειαστούμε παρακάτω στην ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων.

Για τον υπολογισμό της  $u$  (CALCU), γράφεται πάλι η εξίσωση της ορμής στην  $x$ -διεύθυνση (ή  $z$ ):

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} ((\rho u) r u) + \frac{\partial}{\partial r} ((\rho v) r u) \right] - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\eta \mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial r} (\eta \mu \frac{\partial u}{\partial r}) \right] = S_u \quad (5.2.6)$$

I
II  
 Οροι συναγωγής                      Οροι διάχυσης

Ολοκληρώνουμε στην συνέχεια κάθε όρο στον όγκο ελέγχου του πλέγματος  $u$ .

Οροι συναγωγής:

$$\iiint \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r u) r d\phi dx dr = \int_{r=3}^{r=4} \int_{x=1}^{x=2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r u) dx dr$$

$$\Rightarrow \int_3^4 (\rho u) r u \Big|_1^2 dr = \int_3^4 (\rho u) r u \Big|_2 dr - \int_3^4 (\rho u) r u \Big|_1 dr$$

(α)
(β)

Στην γραμμή 2 στο σημείο P αναφέρεται το προς υπολογισμό μέγεθος  $(\rho u)/2$ . Στο P ορίζεται το  $\rho$ , δεν ορίζεται όμως το  $u$ . Έτσι θα πρέπει να πάρουμε κάποια μέση τιμή για αυτό. Λόγω της γεωμετρίας του πεδίου θα έχουμε:

$$u_P = u'_E \frac{SEWU(I)}{SEWU(I) + SEWU(I+1)} + u'_P \frac{SEWU(I+1)}{SEWU(I) + SEWU(I+1)}$$

Μην ξεχνούμε ότι τα  $u$  αποθηκεύονται μόνο στα σημεία ( $P'$ ,  $N'$ ,  $S'$ ,  $W'$ ). Για απλοποίηση των υπολογισμών το πρόγραμμα στην υπορουτίνα INIT καθορίζει τον γεωμετρικό συντελεστή:

$$WFE(I) = \frac{SEWU(I)}{SEWU(I) + SEWU(I+1)}$$

οπότε:

$$u_p = u_E / (1 - WFE(I) + u_p / WFE(I))$$

ή με δείκτες για τις ταχύτητες:

$$u_p = u(I+1, J)(1 - WFE(I)) + u(I, J)WFE(I)$$

Η πυκνότητα στο P συμβολίζεται με DEN(I,J) και έτσι ο όρος  $\rho u/2$  θα είναι:  $=u_p$  DEN(I,J)

Η συναγόμενη ταχύτητα  $u$  δεν είναι άλλη από την  $u_p$ . Ο όρος  $drI_3^4$  εκφράζει το μήκος μεταξύ των γραμμών 3-4 και σύμφωνα με τα σχήματα των πλεγμάτων είναι ο όρος SNS(J). Το  $r$  πάλι από τα πλέγματα είναι RCV(J) οπότε μπορούμε να έχουμε την επιφάνεια:

$$AREA_{EW} = SNS(J) RCV(J)$$

Για απλούστευση (σύμφωνα με το πρόγραμμα) θέτουμε:

$$GE = DEN(I, J) (U(I+1, J) (1 - WFE(I)) + U(I, J)WFE(I))$$

$$CE = AREA_{EW} GE$$

με αποτέλεσμα ο όρος αυτός να γράφεται:

$$\text{Convection } E = CE \quad u_p = CE(U(I, J) WFE(I) + U(I+1, J) (1 - WFE(I)))$$

όπου  $u_p$  η συναγόμενη ταχύτητα. Στην γραμμή 1 στο σημείο W που αναφέρεται το άλλο ολοκλήρωμα τα πράγματα είναι ακριβώς ίδια. Απλώς οι δείκτες είναι μετατοπισμένοι κατά μία θέση προς τα αριστερά. Έτσι ενώ ο όρος  $rdrI_3^4$  παραμένει AREA<sub>EW</sub> η πυκνότητα γράφεται  $\rho_w$  ή DEN(I-1,J) και η ταχύτητα  $u_w$  υπολογίζεται:

$$u_w = U(I, J) WFE(I) + U(I-1, J) (1 - WFE(I))$$

όπου:

$$WFW(I) = \frac{SEWU(I-1)}{SEWU(I) + SEWU(I-1)}$$

Θέτουμε τους συντελεστές:

$$GW = DEN(I-1, J) (U(I, J) WFW(I) + U(I-1, J) (1 - WFW(I)))$$

$$CW = GW \quad AREA_{EW}$$

με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα να γράφεται:

$$\text{Convection } W = CW \quad U_w = CW(U(I, J) WFW(I) + U(I-1, J) (1 - WFW(I)))$$

όπου:  $U_w$

η συναγόμενη ταχύτητα.







Στο ολοκλήρωμα αυτό τα μεγέθη είναι ίδια με τη διαφορά ότι οι δείκτες είναι μετατοπισμένοι μία θέση προς τα κάτω. Έτσι η μέση τιμή της ποσότητας  $(\rho v)_{|3}$  υπολογίζεται με βάση το σημείο B' και είναι:

$$(\rho v)_{|3} = \left[ \frac{1}{2}(\rho_w + \rho_{sw}) U(I-1, J) + \frac{1}{2}(\rho_s + \rho_p) U(I, J) \right] / 2$$

οπότε με βάση τα σύμβολα του προγράμματος:

$$GS = 0.5(DEN(I, J-1) + DEN(I, J)) V(I, J)$$

$$GSW = 0.5(DEN(I-1, J) + DEN(I-1, J-1)) V(I-1, J)$$

Το μέγεθος  $dx_{|1}^2$  είναι το SEWU(I) ενώ η ακτίνα r τώρα αναφέρεται στην γραμμή 3 και συμβολίζεται με RV(J). Επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$0.5(GS + GSW) AREAS U'_s$$

όπου: AREAS = RV(J) SEWU(I). Η ταχύτητα  $U'_s$  υπολογίζεται όμοια με την  $U'_n$  σαν:

$$U'_s = \frac{U_p + U_s}{2} = 0.5(U(I, J) + U(I, J-1))$$

Θέτουμε ακόμα  $GS = 0.5(GS + GSW)$ . Έτσι το ολοκλήρωμα γράφεται τελικά:

$$\text{Convection } S = 0.5CS(U(I, J) + U(I, J-1))$$

Όροι διάχυσης:

$$\begin{aligned} \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) r d\phi dx dr &= \int_{r=3}^{r=4} \int_{x=1}^{x=2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dr = \\ &= \int_3^4 \eta \mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_2 dr - \int_3^4 \eta \mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_1 dr \end{aligned}$$

Το  $\left( r \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) / 2$  αναφέρεται στο σημείο P. Εκεί ορίζεται το ιξώδες ως  $\mu_p = VIS(I, J)$ . Η ακτίνα r εκφράζεται από το μέγεθος RCV(J) ενώ το  $dr_{|3}$  από το μήκος SNS(J). Μένει να υπολογίσουμε τον όρο  $(\partial u / \partial x)_{|2}$ . Η u αποθηκεύεται στα κοντινά σημεία P' και E' και επομένως μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_2 = \frac{U_E - U_P}{\Delta x_{EP}} = \frac{U(I+1, J) - U(I, J)}{DXEP U(I)}$$

Θέτοντας  $AREA_{EW} = SNS(J) RCV(J)$  και  $DE = (VIS(I, J) AREA_{EW}) / DXPEU(I)$  το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\text{Diffusion } E = DE(U(I+1, J) - U(I, J))$$

Με όμοιο τρόπο αναφερόμαστε στο σημείο W οπότε έχουμε:

$$\mu_w = VIS(I-1, J), \quad AREA_{EW} = RCV(J) SNS(J)$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_1 = \frac{U_P - U_W}{\Delta x_{PW}} = \frac{U(I, J) - U(I-1, J)}{DXPW U(I)}$$

Ονομάζουμε  $DW=(VIS(I-1,J)AREAEW)/DXPWU(I)$  και προκύπτει:

$$\text{Diffusion } W=DW(U(I,J)-U(I-1,J))$$

$$\int_3^4 \int_1^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) dx dr = \int_1^2 \left( \eta \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_3^4 dx =$$

$$= \int_1^2 \underbrace{\eta \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_4}_{(a)} dx - \int_1^2 \underbrace{\eta \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_3}_{(b)} dx$$

Το μέγεθος  $\eta \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_4$  αναφέρεται στο σημείο n'. Εδώ όμως δεν μπορούμε να ορίσουμε το ιξώδες. Παίρνουμε λοιπόν για αυτό μια μέση τιμή με την βοήθεια των γύρω σημείων N, NW, W, P. Έτσι θα έχουμε:

$$\mu'_n = 0.25(\mu_P + \mu_N + \mu_{NW} + \mu_W)$$

και με τα σύμβολα του προγράμματος:

$$VISN = 0.25(VIS(I,J) + VIS(I,J+1) + VIS(I-1,J) + VIS(I-1,J+1))$$

Ο όρος:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_4 = \frac{U_N - U_P}{\Delta r_{NP}} = \frac{U(I, J+1) - U(I, J)}{DYNP(J)}$$

Ο όρος  $dx \Big|_1^2 = SEWU(I)$  και το r στην θέση που υπολογίζονται τα παραπάνω μεγέθη είναι RV(J+1). Θέτουμε:

$$AREAN = RV(J+1) SEWU(I), \quad DN = (VISN AREAN) / DYNP(I)$$

οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:  $\text{Diffusion } N = DN(U(I,J+1) - U(I,J))$ .

Τα μεγέθη υπολογίζονται όμοια με το προηγούμενο ολοκλήρωμα με την διαφορά ότι τώρα αναφέρονται στο σημείο s'. Έτσι θα έχουμε:

$$AREAS = RV(J) SEWU(I)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_3 = \frac{U_P - U_S}{\Delta r_{PS}} = \frac{U(I, J) - U(I, J-1)}{DYPS(J)}$$

Θέτουμε:

$$VISS = \mu_B = 0.25(\mu_P + \mu_S + \mu_{SW} + \mu_W) = 0.25(VIS(I,J) + VIS(I,J-1) + VIS(I-1,J-1) + VIS(I-1,J)).$$

βρίσκουμε την μέση τιμή του μ στο B'. Τέλος θέτουμε:

$$DS = VISS AREAS / DYPS(J)$$

με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα να γίνεται:

$$\text{Diffusion } S = DS (U(I,J) - U(I,J-1))$$

Όροι πηγών:

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.2.4) οι όροι πηγών για την εξίσωση της ορμής σε αυτήν την διεύθυνση είναι:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\eta \mu \frac{\partial V}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\eta \mu \frac{\partial u}{\partial z}) - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \text{div} \vec{u}) \quad (5.2.8)$$

Για την μετατροπή των όρων αυτών σε εξισώσεις διαφορών ακολουθείται μια διαφορετική μέθοδος. Επειδή οι όροι αυτοί εκφράζουν πηγές μέσα στον όγκο ελέγχου θα έχουν και μια σταθερή τιμή μέσα σε αυτόν σε σχέση πάντα με τις διαστάσεις του. Έτσι θα μετατρέψουμε τις εξισώσεις σε ΕΠΔ και μετά θα πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με τον όγκο ελέγχου. Μέσα στον όγκο αυτόν η πυκνότητα διατηρείται σταθερή κάθε στιγμή αφού η ροή είναι μόνιμη με αποτέλεσμα  $\text{div} u = 0$ . Έτσι ο τελευταίος όρος της (5.2.8) φεύγει. Μπορούμε λοιπόν να έχουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{P_P - P_W}{\Delta x P W} = \frac{P_W - P_P}{SEWU(I)} = \frac{P(I-1, J) - P(I, J)}{SEWU(I)}$$

Ο όγκος ελέγχου είναι:

$$VOL = RCV(J) SEWU(I) SNS(J)$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} & (P(I-1, J) - P(I, J)) / SEWU(I) RCV(J) SEWU(I) SNS(J) = \\ & = (P(I-1, J) - P(I, J)) / SEWU(I) SEWU(I) RCV(J) SNS(J) = \\ & = [P(I-1, J) - P(I, J)] AREAEW. \end{aligned}$$

Στο πρόγραμμα τίθεται  $DU(I, J) = AREAEW$  και έτσι ο όρος αυτός γράφεται  $DU(I, J) [P(I-1, J) - P(I, J)]$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\eta \mu \frac{\partial V}{\partial z}) = \frac{1}{r} \frac{\eta \mu \frac{\partial V}{\partial z} |_{r'} - \eta \mu \frac{\partial V}{\partial z} |_s}{\Delta r r' S}$$

Ο όρος  $\frac{\partial V}{\partial z} |_{r'}$  ή  $\frac{\partial V}{\partial x} |_{r'}$  γράφεται:

$$\frac{\partial V}{\partial x} |_{r'} = \frac{V_A - V_K}{\Delta x K A} = \frac{V(I, J+1) - V(I-1, J+1)}{SEWU(I)}$$

και ο άλλος γίνεται:

$$\frac{\partial V}{\partial x} |_s = \frac{V_A - V_M}{\Delta x A M} = \frac{V(I, J) - V(I-1, J)}{SEWU(I)}$$

Οι όροι αυτοί περιγράφονται σαν DVDXN και DVDXS αντίστοιχα. Έτσι τελικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned} & 1/r [DVDXN r \mu |_{r'} - DVDXS r \mu |_s] / DYNPV(J) = \\ & = 1/RCV(J) (DVDXN RV(J+1) VISN - DVDXS RV(J) VISS) / DYNPV(J) \end{aligned}$$

Ο όρος αυτός ονομάζεται SORCE2.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{r} \frac{\eta \mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P - \eta \mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_W}{SEWU(I)}$$

Εδώ τα  $r$  μένουν σταθερά και έτσι φεύγουν, ενώ τα  $\partial u / \partial x$  είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P = \frac{U_E - U_P}{\Delta x E P} = \frac{U(I+1, J) - U(I, J)}{DXEP U(I)}$$

που ονομάζεται DUDXE.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_W = \frac{U_P - U_W}{\Delta x P W} = \frac{U(I, J) - U(I-1, J)}{DXPW U(I)}$$

που ονομάζεται DUDXW. Έτσι θα έχουμε:

$$SORCE2 = (VIS(I, J) DUDXE - VIS(I-1, J) DUDXW) / SEWU(I)$$

Έτσι έχουμε όρους πηγών:

$$Source = DU(I, J) (P(I-1, J) - P(I, J)) + SORCE1 VOL + SORCE2 VOL$$

Συνθέτοντας τις εξισώσεις για την CALCU προκύπτει:

$$[Convection N - Convection S] + [Convection E - Convection W] - [Diffusion N - Diffusion S] - [Diffusion E - Diffusion W] = Source \rightarrow$$

$$\rightarrow CE(U(I, J) WFE(I) + U(I+1, J)(1 - WFE(I))) - CW(U(I, J) WFW(I) + U(I-1, J)(1 - WFW(I))) + 0.5CN(U(I, J+1) + U(I, J) - 0.5CS(U(I, J) + U(I, J-1))) - DE(U(I+1, J) - U(I, J)) + DW(U(I, J) - U(I-1, J)) - DN(U(I, J+1) - U(I, J)) + DS(U(I, J) - U(I, J-1)) = DU(I, J)(P(I-1, J) - P(I, J)) + SORCE1 VOL + SORCE2 VOL$$

$$\rightarrow V(I, J)[CEWFE(I) - CWFW(I) + 0.5CN - 0.5CS + DE + DW + DN + DS] = U[(I-1, J)[CW(1 - WFW(I)) + DW] + U(I+1, J)[DE - CE(1 - WFE(I)) + U(I, J-1)][0.5CS + DS] + U(I, J+1)[DN - 0.5CN] + DU(I, J)(P(I-1, J) - P(I, J)) + SORCE1 VOL + SORCE2 VOL$$

θέτουμε:

$$AW = CW(1 - WFW(I)) + DW$$

$$AE = DE - CE(1 - WFE(I))$$

$$AS = 0.5CS + DS$$

$$AN = DN - 0.5CN$$

$$A_p = CEWFE(I) - CWFW(I) + 0.5CN + DE - 0.5CS + DW + DN + DS$$

Υπολογισμός της  $V$  (CALCV):

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r V) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho V r V) \right] - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta \mu \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] = S_V \quad (5.2.9)$$

όροι συναγωγής

όροι διάχυσης

Ολοκληρώνουμε στη συνέχεια ξεχωριστά κάθε όρο ακολουθώντας την λογική της CALCU.

Όροι συναγωγής:

$$\iiint_{V_v} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r V) dx r d\phi dr = \int_3^4 (\rho u r V) \Big|_1^2 dr =$$

$$\int_3^4 \rho u r V \Big|_2 dr - \int_3^4 \rho u r V \Big|_1 dr$$

(α)                      (β)

α) Στην γραμμή 2 στο σημείο ε' η τιμή του μεγέθους συναγωγής (ρu) θα υπολογισθεί σαν η μέση τιμή στα γύρω σημεία. Η πυκνότητα ρ αποθηκεύεται στα σημεία P, E, S και SE ενώ η ταχύτητα u στα σημεία K, λ και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$(\rho u)_P = [1/2(\rho_{SE} + \rho_S) U(I+1, J-1) + 1/2(P_p + P_e) U(I+1, J)] / 2$$

(U<sub>λ</sub>)                      (U<sub>K</sub>)

Ο όρος  $dr I_3^4 = SNSV(J)$  ενώ στην γραμμή αυτή το  $r = RV(J)$  και έτσι μπορούμε να θέσουμε:

$$AREA_{EW} = SNSV(J) RV(J)$$

Οπότε τελικά με τα σύμβολα του προγράμματος μπορούμε να γράψουμε:

$$GE = 0.5(DEN(I, J) + DEN(I+1, J)) U(I+1, J)$$

$$GSE = 0.5(DEN(I+1, J-1) + DEN(I, J-1)) U(I+1, J-1)$$

Επειδή τα σημεία A, K τοποθετήθηκαν στην μέση των γραμμών WP και PE αντίστοιχα η ταχύτητα V στο ε' γράφεται:

$$V_e = (V_E' + V_P') / 2 + 0.5(V(I+1, J) + V(I, J))$$

Έτσι τελικά το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\text{Convection } E = 0.5CE (V(I+1, J) + V(I, J))$$

όπου:  $CE = 0.5(CE + GSW) AREA_{EW}$

Ο υπολογισμός για τον όρο αυτόν είναι όμοιος με την διαφορά ότι ο δείκτης I γίνεται I-1. Έτσι θα έχουμε:

$$GW = 0.5(DEN(I, J) + DEN(I-1, J)) U(I, J)$$

$$GSW = 0.5(DEN(I-1, J-1) + DEN(I, J-1)) U(I, J-1)$$

$$CW = 0.5(GW + GSW) AREA_{EW}$$

Η ταχύτητα V στο W θα γίνει:

$$V_w' = (V_W' + V_P') / 2 = 0.5(V(I, J) + V(I-1, J))$$

και:





$$\text{AREAS}=\text{R}(\text{R}(\text{J}-1) \text{ SEW}(\text{I}))$$

Η ταχύτητα στο S γράφεται:

$$V_S=V(\text{I},\text{J})\text{WFS}(\text{J})+V(\text{I},\text{J}-1)(1-\text{WFS}(\text{J}))$$

όπου:

$$\text{WFS}(\text{J})=\text{SNSV}(\text{J}-1)/(\text{SNSV}(\text{J})+\text{SNSV}(\text{J}-1))$$

και ορίζεται στην υπορουτίνα INIT.

Θέτουμε:

$$\text{GS}=\text{DEN}(\text{I},\text{J}-1)V_S \text{ και } \text{CS}=\text{GS AREAS}$$

Η συναγόμενη ταχύτητα V είναι ίδια με αυτή που εκφράζει η εξίσωση:

$$V_S=V(\text{I},\text{J}) \text{ WFS}(\text{J})+V(\text{I},\text{J}-1) (1-\text{WFS}(\text{J}))$$

και έτσι το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\text{Convection S}=\text{CS}(V(\text{I},\text{J}) \text{ WFS}(\text{J})+V(\text{I},\text{J}-1) (1-\text{WFS}(\text{J})))$$

Όροι διάχυσης:

$$\iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (\eta \mu \frac{\partial V}{\partial x}) r d\phi dx dr = \int_3^4 \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x} (\eta \mu \frac{\partial V}{\partial x}) dx dr =$$

$$\int_3^4 \eta \mu \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_2 dr - \int_3^4 \eta \mu \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_1 dr$$

(α)                      (β)

Στην γραμμή 2 στο σημείο ε' το  $r=\text{RV}(\text{J})$  ο όρος  $dr \Big|_3^4 = \text{SNSV}(\text{J})$  ενώ το ιξώδες θα υπολογισθεί σαν η μέση τιμή των γύρω τιμών αφού αυτό δεν αποθηκεύεται στο ε' αλλά στα P, E, SE, S. Έτσι έχουμε:

$$\mu \Big|_{\epsilon'} = \text{VISE} = 0.25(\text{VIS}(\text{I},\text{J})+\text{VIS}(\text{I}+1,\text{J})+\text{VIS}(\text{I},\text{J}-1)+\text{VIS}(\text{I}+1,\text{J}-1))$$

Θέτουμε  $\text{AREA EW}=\text{RV}(\text{J}) \text{ SNSV}(\text{J})$

Η παράγωγος  $\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_2$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_2 = \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{\epsilon'} = \frac{V_E - V_P}{\Delta X_{EP}} = \frac{V(\text{I}+1,\text{J}) - V(\text{I},\text{J})}{\text{DXEP}(\text{I})}$$

Θέτοντας:

$$\text{DE}=\text{VISE AREA EW}/\text{DXEP}(\text{I})$$

το ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$\text{Diffusion E}=\text{DE}(V(\text{I}+1,\text{J})-V(\text{I}, \text{J}))$$

Στην γραμμή 1 στο σημείο w' ο υπολογισμός είναι ίδιος με την θέση όπου I, το I-1.

$$\mu|_w = \text{VISW} = 0.25(\text{VIS}(I,J) + \text{VIS}(I,J-1) + \text{VIS}(I-1,J) + \text{VIS}(I-1,J-1))$$

$$\text{AREAEW} = R(J) \text{SNSV}(J)$$

Ο όρος  $\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_1$  γίνεται:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_w = \frac{V_P - V_W}{\Delta x_{PW}} = \frac{V(I,J) - V(I-1,J)}{DXPW(I)}$$

Έτσι θέτουμε:

$$DW = \text{VISW} \text{AREAEW} / DXPW(I)$$

το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\text{Diffusion W} = DW (V(I,J) - V(I-1,J))$$

$$\int_3^4 \int_1^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta \mu \frac{\partial V}{\partial r} \right) dx dr = \int_1^2 \eta \mu \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_3^4 dx =$$

$$= \int_1^2 \eta \mu \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_4 dx - \int_1^2 \eta \mu \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_3 dx$$

Στην γραμμή 4 στο σημείο P το ιξώδες  $\mu$  αποθηκεύεται στο P οπότε θέτουμε  $\mu_p = \text{VIS}(I,J)$  ενώ η ακτίνα  $r = R(J)$  και το:

$$dx \Big|_3^4 = SEW(I)$$

Ο όρος  $\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_4$  γράφεται:

$$\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_4 = \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_P = \frac{V_N - V_P}{\Delta r_{NP}} = \frac{V(I,J+1) - V(I,J)}{DYNPV(J)}$$

Θέτουμε:

$$\text{AREAN} = R(J) * SEW(I)$$

και έχουμε:

$$DN = \text{VIS}(I,J) \text{AREAEW} / DYNPV(J)$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\text{Diffusion N} = DN (V(I, J+1) - V(I, J))$$

Στην γραμμή 3 στο σημείο S ο υπολογισμός είναι ίδιος με πριν με τη διαφορά ότι ο δείκτης J γίνεται J-1.

Έτσι θα έχουμε:



$$\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_S = \frac{V_P - V_S}{\Delta r_{PS}} = \frac{V(I, J) - V(I, J-1)}{DYPSV(J)}$$

$$\mu \Big|_S = VIS(I, J-1)$$

$$r = R(J-1)$$

και

$$AREAS = R(J-1) SEW(I)$$

$$DS = (VIS(I, J-1) AREAS) / DYPSV(J)$$

με αποτέλεσμα το ολοκλήρωμα να γράφεται:

$$\text{Diffusion } S = DS (V(I, J) - V(I, J-1))$$

Όροι πηγών:

Σύμφωνα με την εξίσωση (5.2.5) υπολογίζονται οι εξής όροι:

$$\frac{\rho w^2}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (\eta \mu \frac{\partial V}{\partial r}) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (\mu r \frac{\partial u}{\partial r})$$

$$\frac{\rho w^2}{r} = \frac{\rho w^2}{r} \Big|_P = \frac{P \Big|_P w^2 \Big|_P}{r \Big|_P} =$$

$$\frac{1/2(P_P + P_S) [1/2(w_P + w_S)]^2}{RV(J)} =$$

$$= [0.5(DEN(I, J) + DEN(I, J-1)) 0.25(W(I, J) + W(I, J-1))^2] / RV(J) =$$

$$[0.125(DEN(I, J) + DEN(I, J-1))(W(I, J) + W(I, J-1))^2] / RV(J)$$

Το αποτέλεσμα αυτό πολλαπλασιάζεται με το:

$$VOL = RV(J) SEW(I) SNSV(J).$$

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_P = -\frac{P_P - P_S}{\Delta r_{PS}} = \frac{P_S - P_P}{\Delta r_{PS}} =$$

$$\frac{P(I, J-1) - P(I, J)}{SNSV(J)}$$

όταν πολλαπλασιαστεί με τον όγκο VOL θα γίνει:

$$= \frac{[P(I, J-1) - P(I, J)]}{SNSV(J)} RV(J) SEW(I) SNSV(J) =$$

επειδή έχουμε θέσει:

$$AREAN=R(J) SEW(I)$$

και:

$$AREAS=R(J-1) SEW(I)$$

το μέγεθος:

$$\begin{aligned} 0.5(AREAN+AREAS)&=0.5SEW(I)(R(J)+R(J+1))= \\ &=SEW(I) [(R(J)+R(J-1))/2]=RV(J) SEW(I) \end{aligned}$$

τίθεται σαν:

$$DV(I,J)=0.5(AREAN+AREAS)$$

Έτσι έχουμε τελικά:

$$=(P(I,J-1)-P(I, J)) DV(I,J)$$

Στην συνέχεια:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\eta \mu \frac{\partial V}{\partial r}) \Big|_P &= \frac{1}{r} \Big|_P \frac{(\eta \mu \frac{\partial V}{\partial r}) \Big|_P - (\eta \mu \frac{\partial V}{\partial r}) \Big|_S}{\Delta r_{PS}} = \\ &= \frac{1}{RV(J)} \frac{RCV(J) VIS(I, J) \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_P - RCV(J-1) VIS(I, J-1) \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_S}{SNSV(J)} \end{aligned}$$

Και οι όροι  $\frac{\partial V}{\partial r}$  θα είναι:

$$\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_P = \frac{V_N - V_P}{\Delta r_{NP}} = \frac{V(I, J+1) - V(I, J)}{DYNPV(J)} = DVDYN$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_S = \frac{V_P - V_S}{\Delta r_{PS}} = \frac{V(I, J) - V(I, J-1)}{DYPSV(J)} = DVDYS$$

Έτσι έχουμε:

$$SORCE2=[(VIS(I,J)RCV(J)DVDYN-VIS(I,J-1)RCV(J-1)DVDYS)]/[RV(J)SNSV(J)]$$

Ο όρος:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (\mu r \frac{\partial u}{\partial r}) \Big|_P &= \frac{1}{r} \Big|_P \frac{(\mu r \frac{\partial u}{\partial r}) \Big|_{e'} - (\mu r \frac{\partial u}{\partial r}) \Big|_{w'}}{\Delta x_{W'E'}} = \\ &= \frac{1}{r} \Big|_P \frac{r \Big|_{E',W',P} [(\mu \frac{\partial u}{\partial r}) \Big|_{e'} - (\mu \frac{\partial u}{\partial r}) \Big|_{w'}]}{\Delta x_{W'E'}} = \\ &= \frac{VISE \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{e'} - VIW \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{w'}}{DXEPU(I)} \end{aligned}$$

Όπου οι όροι  $\frac{\partial u}{\partial r}$  είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{e'} = \frac{u_K - u_\Lambda}{\Delta r_{K\Lambda}} = \frac{U(I+1, J) - U(I+1, J-1)}{SNSV(J)} = DUDYE$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{w'} = \frac{u_A - u_M}{\Delta r_{AM}} = \frac{U(I, J) - U(I, J-1)}{SNSV(J)} = DUDYW$$

Έτσι ο όρος αυτός γίνεται:

$$SORCE1 = [VISE DUDYE - VISW DUDYW] / DXEPU(I)$$

Αν ονομάσουμε τον πρώτο όρο που υπολογίσαμε (με το W) σαν SORCEW θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Source &= SORCEW VOL + SORCE1 VOL + SORCE2 VOL + \\ &+ (P(I, J-1) - P(I, J)) DV(I, J) \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε:

$$[Convection N - Convection S] + [Convection E - Convection W] -$$

$$-[Diffusion N - Diffusion S] - [Diffusion E - Diffusion W] = Source$$

και με αντικατάσταση των ισοδυνάμων τους:

$$\begin{aligned} &0.5CE(V(I+1, J) + V(I, J)) - 0.5CW(V(I, J) + V(I-1, J)) + CN(V(I, J+1)(1 - WFN(J)) + \\ &+ V(I, J) WFN(J)) - CS(V(I, J) WFS(J) + V(I, J-1)(1 - WFS(J))) - DE(V(I+1, J) - V(I, J)) + \\ &+ DW(U(I, J) - U(I-1, J)) - DN(V(I, J+1) - V(I, J)) + DS(V(I, J) - V(I, J-1)) = Source \Rightarrow \\ &\Rightarrow V(I, J)[CN WFN(J) - CS WFS(J) + DE + DW + DN + DS - 0.5CE - 0.5CW] = \\ &= V(I+1, J)[-0.5CE + DE] + V(I-1, J)[0.5CW + DW] + V(I, J+1)[DN - CN(1 - WFN(J))] + \\ &+ V(I, J-1)[DS + CS(1 - WFS(J))] + Source \end{aligned}$$

και τελικά υπάρχει η απαίτηση για την παραγωγή της διακριτοποιημένης (discretization) εξίσωσης:

$$AE=DE-0.5CE$$

$$AW=DW+0.5CW$$

$$AN=DN-CN(1-WFN(J))$$

$$AS=DS+CS(1-WFS(J))$$

$$AP=CNWFN(J)-CS*WFS(J)+DE+DW+DN+DS-0.5CE-0.5CW$$

Υπολογισμός της πίεσης P (CALCP)

Για τον υπολογισμό της πίεσης δεν υπάρχει κάποια διαφορική εξίσωση. Για τον λόγο αυτό εφαρμόζεται μια ειδική τεχνική. Στις εξισώσεις ορμής, στους όρους των πηγών, περιέχονται και οι όροι πίεσεως του τύπου  $-\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)$ .

Όταν αυτοί οι όροι εκφράστηκαν με την βοήθεια των πεπερασμένων διαφορών, εμφανίστηκαν στους υπολογισμούς όροι του τύπου  $(P_\alpha - P_\beta)$  που δεν μπορούν να υπολογισθούν αφού δεν είναι γνωστή η πίεση. Γενικά οι εξισώσεις της ορμής απαιτούν την γνώση της κατανομής της πίεσης. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η κατανομή της πίεσης είναι γνωστή και έστω ότι την συμβολίζουμε με  $P^*$ . Δηλώνεται στην υπορουτίνα INIT και τίθεται ίση με μηδέν για κάθε σημείο του πλέγματος  $-P$ . Τότε όμως η  $u$  και η  $v$  που υπολογίζονται είναι λάθος αφού οι όροι  $\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)$  υπολογίζονται λάθος. Στο σημείο αυτό έρχεται να μας βοηθήσει η εξίσωση της συνέχειας η οποία δεν έχει όρους πίεσης αλλά μόνο ταχύτητας. Θα πρέπει λοιπόν με κάποιο τρόπο να διορθώσουμε τις ταχύτητες  $u$ ,  $v$  έτσι ώστε να επαληθεύουν την εξίσωση της συνέχειας. Αυτό επιτυγχάνεται με τον εξής τρόπο:

Αν υποθέσουμε ότι οι διορθώσεις των  $u$ ,  $v$ ,  $P$ , συμβολίζονται σαν  $u'$ ,  $v'$ ,  $P'$  τότε ισχύει:

$$P=P^*+P'$$

$$u=u^*+u' \quad \text{Πραγματικές τιμές των } P, u, v$$

$$v=v^*+v'$$

Στην πραγματικότητα όλοι οι υπολογισμοί που έγιναν στα προηγούμενα αναφέρονται στα μεγέθη  $P^*$ ,  $u^*$ ,  $v^*$ .

Όλες οι εξισώσεις ορμής μπορούν να παρουσιασθούν στην παρακάτω γενική μορφή:

$$\alpha_e u_e^* = \sum_i \alpha_{ie} u_i^* + b + (P_P^* - P_E^*) A_e \quad (5.2.10)$$

Αυτή η εξίσωση αν γραφθεί για τις πραγματικές τιμές των ταχυτήτων και των πιέσεων θα είναι:

$$\alpha_e u_e = \sum_i \alpha_{ie} u_i + b + (P_P - P_E) A_e \quad (5.2.11)$$

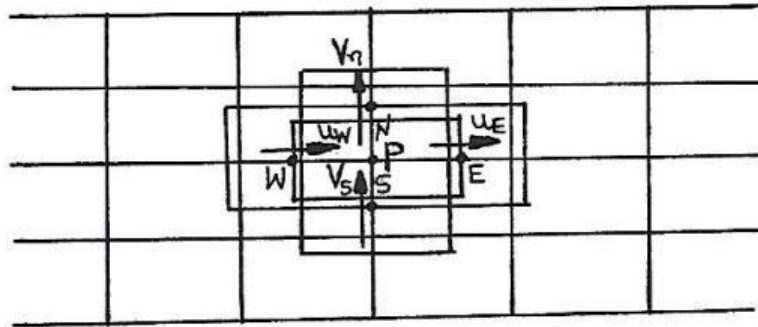
Αν κάνουμε την πράξη (5.2.11)-(5.2.10) θα πάρουμε:

$$\alpha_e u_e' = \sum_i \alpha_{ie} u_i' + (P_P' - P_E') A_e$$

Ο όρος  $\sum_i a_i u'_i$  ύστερα από πολλές επαναλήψεις θα γίνει πολύ μικρός, αφού τελικά οι διορθώσεις στις ταχύτητες θα έχουν πλησιάσει το μηδέν οπότε μπορούμε να τον αμελήσουμε. Τότε θα έχουμε:

$$\alpha_e u'_e = (P'_P - P'_E) A_e$$

Σε κάθε σημείο P αντιστοιχούν από δύο πλέγματα τύπου U και V όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Έτσι με τη βοήθεια αυτής της σχέσης μπορούμε να υπολογίσουμε τις διορθώσεις όλων των ταχυτήτων του πλέγματος P.



Σχ. (5.2.4) Πλέγματα τύπου U, V στο σημείο P.

$$\alpha_n V'_n = -(P'_N - P'_P) A_N \rightarrow V'_n = -A_N / \alpha_n (P'_N - P'_P)$$

$$\alpha_s V'_s = -(P'_P - P'_S) A_S \rightarrow V'_s = -A_S / \alpha_s (P'_P - P'_S)$$

$$\alpha_w u'_w = -(P'_P - P'_W) A_w \rightarrow u'_w = -A_w / \alpha_w (P'_P - P'_W)$$

$$\alpha_e u'_e = -(P'_E - P'_P) A_E \rightarrow u'_e = -A_E / \alpha_e (P'_E - P'_P)$$

Οι όροι  $A_i/\alpha_i$  έχουν υπολογισθεί στις CALCU και CALCV. Συγκεκριμένα σε κάθε υπολογισμό του όρου  $\partial P/\partial x_i$  είχαμε υπολογίσει και έναν όρο εμβαδού (τα  $A_i$ ) που είχαμε ονομάσει DU για την CALCU και DV για την CALCV. Στο τέλος των υπορουτίνων γίνεται ο μετασχηματισμός:

$$DU = DU/AP, \quad DV = DV/AP$$

Οι όροι AP είναι οι  $\alpha_i$  των σχέσεων οπότε αυτές γράφονται:



$$V'_n = DV(I, J+1)(P'_P - P'_N)$$

$$V'_s = DV(I, J)(P'_S - P'_P)$$

$$u'_w = DU(I, J)(P'_W - P'_P)$$

$$u'_e = DU(I+1, J)(P'_P - P'_E)$$

Οι όροι DU και DV ορίζονται στα πλέγματα u και v αντίστοιχα οπότε οι συντεταγμένες I, J αντιστοιχούν σε αυτά τα πλέγματα. Θέτοντας δείκτες και στις πιέσεις με βάση φυσικά το -P πλέγμα και συμβολίζοντας τις διορθώσεις P σύμφωνα με το πρόγραμμα ως PP θα έχουμε:

$$V'_n = DV(I, J+1)(PP(I, J) - PP(I, J+1)) \quad (5.2.12)$$

$$V'_s = DV(I, J)(PP(I, J-1) - PP(I, J)) \quad (5.2.13)$$

$$u'_w = DU(I, J)(PP(I-1, J) - PP(I, J)) \quad (5.2.14)$$

$$u'_e = DU(I+1, J)(PP(I, J) - PP(I+1, J)) \quad (5.2.15)$$

Καταφέραμε με τον τρόπο αυτό να συνδέσουμε τις διορθώσεις των πιέσεων με τις διορθώσεις των ταχυτήτων. Για να υπολογίσουμε και τις διορθώσεις των ταχυτήτων θα χρειαζόμασταν 2 εξισώσεις. Συμφέρει λοιπόν απλώς να υπολογίσουμε τις διορθώσεις των πιέσεων και μέσω αυτών να υπολογίσουμε με την βοήθεια των σχέσεων (5.2.12) μέχρι (5.2.15) τις διορθώσεις των ταχυτήτων. Μένει λοιπόν να βρούμε μία σχέση που συνδέει τις ταχύτητες μεταξύ τους. Αυτή η σχέση θα μας δοθεί από την εξίσωση της συνέχειας. Γράφουμε για μια ακόμα φορά την εξίσωση αυτή:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V) + \frac{\partial}{\partial x} (r\rho u) \right] = 0 \quad (5.2.16)$$

Τώρα την ολοκληρώνουμε στον όγκο ελέγχου του P και θα έχουμε:

$$\iiint_{V_P} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V) + \frac{\partial}{\partial x} (r\rho u) \right] r d\varphi dx dr = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_{A_P} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V) + \frac{\partial}{\partial x} (r\rho u) \right] dx dr = 0 \Rightarrow$$

$$\iint \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V) dx dr + \iint \frac{\partial}{\partial x} (r\rho u) dx dr = 0 \Rightarrow$$

$$\int_w^e (r\rho V) \Big|_s^n dx + \int_s^n (r\rho u) \Big|_w^e dr = 0 \quad (5.2.17)$$

Θα αναλύσουμε τώρα κάθε όρο χωριστά αφού προηγουμένα τοποθετήσουμε  $u = u^* + u'$  και  $v = v^* + v'$ .

$$\int_w^e (rp v) \Big|_s^n dx + \int_s^n (rp u) \Big|_w^e dr = - \left\{ \int_w^e (rp v^*) \Big|_s^n dx + \int_s^n (rp u^*) \Big|_w^e dr \right\} \quad (5.2.18)$$

(I) (II)

Το τμήμα (II) αποτελεί έναν όρο που μπορούμε να τον χαρακτηρίσουμε σαν πηγή του σφάλματος των υπολογισμών των διορθώσεων. Το τμήμα (I) μας δίνει τις διορθώσεις. Επειδή το μόνο που αλλάζει στην προηγούμενη σχέση είναι τα u, v θα κάνουμε έναν γενικότερο υπολογισμό με την βοήθεια της εξίσωσης (5.2.17). Ο όρος αυτός γράφεται:

$$\int_w^e (rp V)_n dx - \int_w^e (rp V)_s dx$$

και με βάση ότι έχουμε κάνει μέχρι τώρα, μετατρέπεται σε ΕΠΔ ως εξής:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2}(\rho_N + \rho_P) r_n V_n \Delta x_{ew} \right] - \left[ r_s \frac{1}{2}(\rho_P + \rho_S) V_s \Delta x_{ew} \right] = \\ & = \left[ 0.5 \frac{DEN(I, J+1) + DEN(I, J)}{DENN} R V(J+1) \frac{SEW(I)}{AREAN} V_n \right] - \\ & - \left[ 0.5 \frac{DEN(I, J) + DEN(I, J-1)}{DENS} R V(J) \frac{SEW(I)}{AREAS} V_s \right] = \\ & = \underbrace{DENN \quad AREAN}_{\text{σταθερό}} V_n - \underbrace{DENS \quad AREAS}_{\text{σταθερό}} V_s \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Ο δεύτερος όρος γράφεται:

$$= \int_s^n (rp u)_e dr - \int_s^n (rp u)_w dr$$

και με βάση την ανάλυση που έχουμε καθορίσει θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & = \left[ \frac{1}{2}(\rho_P + \rho_E) r_e u_e \Delta r_{ns} \right] - \left[ \frac{1}{2}(\rho_W + \rho_P) r_w u_w \Delta r_{ns} \right] = \\ & = \left[ 0.5 \frac{DEN(I, J) + DEN(I+1, J)}{DENE} R C V(J) u_e \frac{SNS(J)}{AREAEW} \right] - \\ & \left[ 0.5 \frac{DEN(I, J) + DEN(I-1, J)}{DENW} R C V(J) u_w \frac{SNS(J)}{AREAEW} \right] = \\ & = DENE \quad AREAEW \quad u_e - DENW \quad AREAEW \quad u_w \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Μπορούμε τώρα να καθορίσουμε τον όρο της πηγής και το διορθωτικό τμήμα:

Όρος πηγής:

Από την (5.2.19) εξίσωση θέτοντας την ταχύτητα V του πλέγματος -V θα πάρουμε:

$$= DENN \quad AREAN \quad V(I, J+1) - DENS \quad AREAS \quad V(I, J-1) = CN - CS \quad (5.2.21)$$

Το ίδιο κάνουμε και για την (5.2.20) και έχουμε:

$$= \text{DENE AREAEW } U(I+1,J) - \text{DENW AREAEW } U(I,J) = \text{CE} - \text{CW} \quad (5.2.22)$$

Όρος διόρθωσης:

Στην (5.2.18) θέτουμε τους όρους των διορθωτικών ταχυτήτων έτσι όπως υπολογίστηκαν στις εξισώσεις (5.2.12-5.2.15) και έχουμε:

$$= \text{DENN AREAN } \underbrace{DV(I,J+1)}_{AN(I,J)} (PP(I,J) - PP(I+1,J)) -$$

$$- \text{DENS AREAS } \underbrace{DV(I,J)}_{AS(I,J)} (PP(I,J-1) - PP(I,J)) =$$

$$= AN(I,J) (PP(I,J) - PP(I+1,J)) - AS(I,J) (PP(I,J-1) - PP(I,J))$$

Στην εξίσωση (5.2.20) αντικαθίστανται οι διορθωτικοί όροι ταχυτήτων και έχουμε:

$$= \text{DENE AREAEW } \underbrace{DU(I+1,J)}_{AE(I,J)} (PP(I,J) - PP(I+1,J)) -$$

$$- \text{DENW AREAW } \underbrace{DU(I,J)}_{AW(I,J)} (PP(I-1,J) - PP(I,J)) =$$

$$= AE(I,J) (PP(I,J) - PP(I+1,J)) - AW(I,J) (PP(I-1,J) - PP(I,J))$$

Έτσι αν συνθέσουμε όλους αυτούς τους όρους θα έχουμε:

$$AP(I,J)PP(I,J) = AN(I,J)PP(I+1,J) + AS(I,J)PP(I,J-1) + AW(I,J)PP(I-1,J) + \\ + AE(I,J)PP(I+1,J) - (CN - CS + CE - CW)$$

όπου:

$$AP(I,J) = AN(I,J) + AS(I,J) + AW(I,J) + AE(I,J)$$

Έτσι καταλήξαμε σε μορφή ίδια με αυτήν που έχουμε φέρει τις άλλες εξισώσεις ώστε να μπορεί να επιλυθεί με την μέθοδο TDMA, στην ίδια υπορουτίνα (LISOLV). Αφού λοιπόν η υπορουτίνα CALCP υπολογίσει τις διορθώσεις PP(I,J), στο τέλος διορθώνει τις τιμές των ταχυτήτων.

Σύμφωνα με τις (5.2.12-5.2.13) για την ταχύτητα V θα γράψουμε:

$$V(I,J) = \underbrace{V(I,J)}_{V^*} + \underbrace{DV(I,J)(PP(I,J-1) - PP(I,J))}_{V'}$$

Σύμφωνα με τις (5.2.14-5.2.15) η ταχύτητα V θα γίνει:

$$U(I,J) = \underbrace{U(I,J)}_{U^*} + \underbrace{DU(I,J)(PP(I-1,J) - PP(I,J))}_{U'}$$

Η πίεση θα υπολογισθεί με την βοήθεια του διορθωτικού παράγοντα PP(I,J) όχι γραμμικά αλλά με την βοήθεια του συντελεστού υποχαλάρωσης URFP. Για να γίνει αυτό χρειαζόμαστε και μία



πίεση αναφοράς. Αυτή ονομάζεται PPREF και σύμφωνα με το πρόγραμμα εκφράζει τη διόρθωση της πίεσης στο σημείο (IPREF,JPREF)=(NJM1,2) όπου το NJM1=NJ-1 με NJ το άκρο στην y-διεύθυνση του πλέγματος υπολογισμών. Με τον τρόπο αυτό η σωστή (διορθωμένη) πίεση θα είναι:

$$P'_i(I,J) = P(I,J) + URFP \frac{P(I,J) - PPREF}{P'(IPREF, JPREF)}$$

Αφού γίνει αυτό οι διορθώσεις PP(I,J) μηδενίζονται και το πρόγραμμα επιστρέφει στο κυρίως τμήμα του.

Υπολογισμός της ταχύτητας W (CALCW):

Θα γράψουμε τώρα την εξίσωση της ορμής στην διεύθυνση φ όπου η ταχύτητα είναι η w:

$$\text{div}(\rho \vec{u}w) - \text{div}(\mu \text{grad}w) = S_i$$

Αυτή γίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(\rho r Vw) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u w) \right] - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(\eta r \frac{\partial w}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial x}(\eta \frac{\partial w}{\partial x}) \right] = S_i$$

(1) Όροι συναγωγής

(2) Όροι διάχυσης

Όροι συναγωγής:

$$\iiint_{V_P} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(\rho r Vw) \right) dr dx r d\phi =$$

$$= \iint_{A_P} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r Vw) dr dx$$

Ο υπολογισμός θα γίνει πάνω στο πλέγμα του σημείου P. Αν η ροή ήταν 3D (καθαρά) τότε θα υπολογίζονταν σε μετατοπισμένο πλέγμα στην φ-διεύθυνση. Η προβολή αυτού του υποθετικού πλέγματος στο επίπεδό μας δίνει το P-πλέγμα:

$$\int_w^e (\rho r Vw) \Big|_s^n dx = \int_w^e (\rho r Vw)_n dx - \int_w^e (\rho r Vw)_s dx$$

(α)

(β)

α) Ο όρος αυτός θέλει την πυκνότητα στο σημείο n, στο οποίο δεν αποθηκεύεται. Έτσι παίρνουμε την μέση τιμή της μεταξύ των N, P σημείων στα οποία αποθηκεύεται:

$$\rho \Big|_n = \frac{\rho_N + \rho_P}{2} = 0.5(DEN(I, J+1) + DEN(I, J))$$

Στο n, η ταχύτητα V ορίζεται ως V(I,J+1). Έτσι έχουμε:

$$GN = 0.5(DEN(I, J+1) + DEN(I, J)) V(I, J+1)$$

Η w θα είναι:

$$w_n = [w_N + w_P] / 2 = 0.5(W(I, J+1) + W(I, J))$$

Ο όρος:

$$dx|_w^e = SEW(I)$$

και:

$$r = RV(J+1)$$

αφού αφορά την ταχύτητα V στο n.

Έτσι έχουμε τον όρο:

$$= GN \cdot w_n \cdot \frac{SEW(I) \cdot RV(J+1)}{AREAN}$$

θέτουμε:

$$CN = GN \cdot AREAN$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\text{Convection N} = 0.5 \cdot CN \cdot (W(I,J) + W(I,J+1))$$

β) Για τον όρο αυτό επαναλαμβάνονται τα ίδια αλλά με δείκτη J-1 στην θέση του J:

$$GS = 0.5 \cdot (DEN(I,J) + DEN(I,J-1)) \cdot V(I,J)$$

Επιφάνεια:

$$AREAS = RV(J) \cdot SEW(I)$$

και την ταχύτητα:

$$w_s = 0.5 \cdot (W(I,J) + W(I,J-1))$$

θέτοντας:

$$CS = G_s \cdot AREAS$$

θα πάρουμε το ολοκλήρωμα:

$$\text{Convection S} = 0.5 \cdot CS \cdot (W(I,J) + W(I,J-1))$$

Για τον δεύτερο όρο συναγωγής:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial x} (\rho u w) dx dr &= \int_s^n (\rho u w)|_w^e dr = \\ &= \int_s^n (\rho u w)|_e dr - \int_s^n (\rho u w)|_w dr \\ &\quad (a) \qquad \qquad (b) \end{aligned}$$

α) Εδώ θα έχουμε:

$$(\rho u)_e = 0.5 \cdot (DEN(I,J) + DEN(I+1,J)) \cdot U(I+1,J) = GE$$

$$w_e = (0.5) \cdot (W_p + W_E) = 0.5 \cdot (W(I,J) + W(I+1,J))$$

$$r_e = RCV(J)$$

και:

$$dr|_s^n = SNS(I)$$

Έτσι θέτοντας:

$$CE = CE \frac{RCV(I) SNS(J)}{AREAEW}$$

$$\text{Convection } E = 0.5 CE (W(I,J) + W(I+1,J))$$

β) Όμοια και εδώ θα έχουμε:

$$(\rho_w)_w = 0.5(DEN(I,J) + DEN(I-1,J)) \quad V(I,J) = GW$$

$$w_w = 0.5(W_p + W_w) = 0.5(W(I,J) + W(I-1,J))$$

$$r_w = RCV(I)$$

και:

$$dr|_s = SNS(J)$$

Έτσι θέτοντας:

$$CW = GW \text{ AREAEW}$$

θα πάρουμε:

$$\text{Convection } W = 0.5 CW (W(I,J) + W(I-1,J))$$

Όροι διάχυσης:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial r} \left( \eta \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right) dx dr &= \int_w^e \left( \eta \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right) |_s^n dx = \\ &= \int_w^e \left( \eta \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right)_n dx - \int_w^e \left( \eta \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right)_s dx \\ &\quad \text{(α)} \qquad \qquad \qquad \text{(β)} \end{aligned}$$

α) Εδώ οι όροι θα είναι:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_n = \frac{W_N + W_P}{\Delta r_{NP}} = \frac{W(I, J+1) - W(I, J)}{DYNP(J)}$$

$$\mu_n = VISN = 0.5(VIS(I, J+1) + VIS(I, J))$$

$$r_n = RV(J+1)$$

και:

$$dx|_w^e = SEW(I)$$

οπότε έχουμε:

$$AREAN = RV(J+1) SEW(I)$$

Θέτουμε:

$$DN = \frac{VISN \cdot AREAN}{DYNP(J)}$$

και έτσι το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\text{Diffusion N} = DN (W(I,J+1) - W(I,J))$$

β) Εδώ όμοια οι όροι γίνονται:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_s = \frac{w_P - w_S}{\Delta r_{PS}} = \frac{W(I,J) - W(I,J-1)}{DYPS(J)}$$

$$r_s = RV(J)$$

και:

$$dx \Big|_w^e = SEW(I)$$

οπότε έχουμε:

$$AREAS = RV(J) SEW(I)$$

αν θέσουμε:

$$\mu_s = VISS = 0.5(VIS(I,J) + VIS(I,J-1))$$

και:

$$DS = \frac{VISS \cdot AREAS}{DYPS(J)}$$

θα πάρουμε για το ολοκλήρωμα:

$$\text{Diffusion S} = DS (W(I,J) - W(I,J-1))$$

Για τον δεύτερο όρο διάχυσης:

$$\iint \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dr = \int_s^n \left( \eta \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_e^w dr =$$

$$= \int_s^n \left( \eta \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)_w dr - \int_s^n \left( \eta \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)_e dr$$

α) Οι όροι γίνονται:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)_w = \frac{w_P - w_W}{\Delta X_{PW}} = \frac{W(I, J) - W(I-1, J)}{DXPW(I)}$$

$$r_w = RCV(J)$$

$$dr_s^n = SNS(J)$$

$$AREAEW = RCV(J) SNS(J)$$

$$\mu_w = VISW = 0.5(VIS(I, J) + VIS(I-1, J))$$

Θέτουμε:

$$DW = \frac{VISW \cdot AREAEW}{DXPW(I)}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\text{Diffusion } W = DW (W(I, J) - W(I-1, J))$$

β) Όμοια και εδώ θα έχουμε:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)_e = \frac{w_E - w_P}{\Delta X_{PE}} = \frac{W(I+1, J) - W(I, J)}{DXEP(I)}$$

$$r_e = r_w = RCV(J)$$

και:

$$dr_s^n = SNS(J)$$

$$AREAEN = RCV(J) SNS(J)$$

$$\mu_e = VISE = 0.5(VIS(I, J) + VIS(I+1, J))$$

και θέτοντας:

$$DE = \frac{VISE \cdot AREAEW}{DXEP(I)}$$

το ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$\text{Diffusion } E = DE (W(I+1, J) - W(I, J))$$

Ο όρος πηγής για την εξίσωση αυτή είναι:

$$\text{Source} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu w) - \frac{\rho V w}{r}$$

Η μορφή αυτή μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
\text{Source} &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{r}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\mu w) - \frac{1}{r^2} \mu w - \frac{\rho V w}{r} = \\
&= \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu w) - \frac{\mu w}{r^2} - \frac{\rho V w}{r} = \\
&= \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \left( \frac{w \partial \mu}{r \partial r} + \frac{\mu \partial w}{r \partial r} \right) - \frac{\mu w}{r^2} - \frac{\rho V w}{r} = \\
&= \frac{w \partial \mu}{r \partial r} - \frac{\mu w}{r^2} - \frac{\rho V w}{r} = \\
&= -w \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} + \frac{\rho V}{r} \right]
\end{aligned}$$

Με όμοιο χειρισμό όπως και για τις u, v ταχύτητες θα έχουμε και εδώ:

$$w_p = W(I, J)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \Big|_P = \frac{1}{r_P} \frac{\mu|_n - \mu|_s}{\Delta r_{ns}} = \frac{VIS_N - VIS_S}{SNS(J)} \frac{1}{RCV(J)}$$

$$\frac{\mu}{r^2} \Big|_P = \frac{VIS(I, J)}{(RCV(J))^2}$$

Αυτός ο όρος δεν υπάρχει στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (INDCOS=1).

$$\frac{\rho V}{r} \Big|_P = \frac{DEM(I, J) V \Big|_P}{RCV(J)} = \frac{DEM(I, J) 0.5 (V(I, J) + V(I, J+1))}{RCV(J)}$$

και:

$$VOL = RCV(J) SNS(J) SEW(I)$$

Αθροίζοντας αυτούς τους όρους βρίσκουμε την πηγή. Μετά θέτουμε:

$$\text{Source} = (\text{Αθροισμα}) \times VOL$$

Έτσι τελικά για τον υπολογισμό της w-ταχύτητας θα έχουμε:

$$[\text{Convection N} - \text{Convection S}] + [\text{Convection E} - \text{Convection W}] -$$

$$- [\text{Diffusion N} - \text{Diffusion S}] - [\text{Diffusion E} - \text{Diffusion W}] = \text{Source}$$

Αυτή η έκφραση τελικά γίνεται:

$$\begin{aligned}
& 0.5CN (W(I,J) + W(I,J+1)) - 0.5CS (W(I,J) + W(I,J-1)) + \\
& + 0.5CE (W(I,J) + W(I+1,J)) - 0.5CW (W(I,J) + W(I-1,J)) - \\
& - DN (W(I,J+1) - W(I,J)) + DS (W(I,J) - W(I,J-1)) + \\
& + DW (W(I,J) - W(I-1,J)) - DE (W(I+1,J) - W(I,J)) = \text{Source} \\
\Rightarrow & W(I,J) [0.5CN+0.5CE-0.5CS-0.5CW+DN+DS+DW+DE] = \\
& = W(I+1,J) [DE-0.5CE] + W(I-1,J) [DW+0.5CW] + \\
& + W(I,J+1) [DN-0.5CN] + W(I,J-1) [DS+0.5CS] + \text{Source}
\end{aligned}$$

Θέτουμε τέλος τους γνωστούς συντελεστές:

$$AE = DE - 0.5CE$$

$$AW = DW + 0.5CW$$

$$AN = DN - 0.5CN$$

$$AS = DS + 0.5CS$$

$$AP = 0.5 (CN + CE - CS - CW) + DN + DS + DW + DE$$

Μοντέλο τύρβης (CALCTE, CALCED)

Οι τυρβώδεις ροές είναι μη μόνιμες και μια πλήρης περιγραφή τους θα απαιτούσε την επίλυση των σχετικών εξισώσεων. Επειδή όμως η κλίμακα των δινών είναι της τάξης περίπου του  $10^{-3}$  sec, οι υπολογισμοί θα ήταν αντισυμβατικοί. Μία πρακτική λύση είναι η μετατροπή των διεπουσών εξισώσεων σε εξισώσεις μέσων χρονικών τιμών, η μοντελοποίηση των εμφανιζόμενων τυρβωδών όρων και η επίλυσή τους. Το μοντέλο που χρησιμοποιείται στον TEACH είναι αυτό των δύο εξισώσεων k-ε. k η τυρβώδης κινητική ενέργεια και ε ο ρυθμός σκέδασης (εκφυλισμού) της τυρβώδους κινητικής ενέργειας. Το ενεργό ιξώδες λαμβάνεται από την σχέση:

$$\mu_{eff} = \frac{C_{\mu} \rho k^2}{\varepsilon} \quad (5.2.23)$$

Οι εξισώσεις αυτών των δύο μεταβλητών είναι οι παρακάτω σε γενική μορφή:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r \Phi) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v \Phi) \right] - \frac{\partial}{\partial x} (r \Gamma_{eff, \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial r} (r \Gamma_{eff, \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r}) = S_{\Phi}$$

όπου το Φ γίνεται k και ε ενώ οι άλλοι συντελεστές είναι:

$$\Gamma_{eff, \Phi} = \mu_{eff} / \sigma_{eff, \Phi} = \mu / Pr$$

Ο όρος πηγής είναι αντίστοιχα:

$$S_k = G - C_D \rho \varepsilon$$

και:

$$S_\varepsilon = C_1 G \varepsilon / k - C_2 \rho \varepsilon^2 / k$$

όπου ο κοινός συντελεστής G είναι:

$$G = \mu \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right)^2 \right] + \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} + \mu \left( \frac{v}{r} \right)^2$$

Ο τελευταίος όρος υπάρχει μόνο στο πολικό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (όπου INDCOS=2). Οι τιμές των  $C_i$ ,  $\sigma_{\text{eff},\Phi}$  υπολογίζονται κατά βάση πειραματική και στο TEACH έχουν τις παρακάτω τιμές:

Μέγεθος	Σύμβολο
$C_\mu = 0.09$	CMU
$C_D = 1.0$	CD
$C_1 = 1.44$	C1
$C_2 = 1.92$	C2
$\sigma_{\text{eff},k} = 1.0$	PRTE
$\sigma_{\text{eff},\varepsilon} = 1.21$	PRED

Το k συμβολίζεται σαν TE(I,J) και το ε σαν ED(I,J). Το πλέγμα υπολογισμών είναι το P. Οι ολοκληρώσεις εκτελούνται ως προς τη γενική μεταβλητή Φ αφού οι εξισώσεις των k, ε είναι ίδιες.

Οι όροι συναγωγής της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r \Phi) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v \Phi) \right]$$

Αναλύουμε τον καθένα χωριστά:

$$\iiint_{V_P} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r \Phi) r d\varphi dx dy = \iint A_P \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r \Phi) dx dy =$$

$$\int_s^n (\rho u r \Phi) \Big|_w^e dr = \int_s^n (\rho u r \Phi)_e dr - \int_s^n (\rho u r \Phi)_w dr$$

(α)
(β)

α) Όρους τέτοιας μορφής έχουμε υπολογίσει και άλλη φορά οπότε προχωρούμε χωρίς αναλυτικές εξηγήσεις.

$$(\rho u)_e = (\rho_p + \rho_E) / 2 \quad U(I+1, J) = 0.5 (\text{DEN}(I, J) + \text{DEN}(I+1, J)) \quad U(I+1, J) = GE$$

$$\Phi_e = (\Phi_p + \Phi_E) / 2 = 0.5 (\Phi(I, J) + \Phi(I+1, J))$$

$$r_e = RCV(J)$$

και:

$$dr \Big|_w^e = SNS(J)$$



οπότε θέτουμε σαν επιφάνεια:

$$AREAEW = RCV(J) \text{ SNS}(J)$$

Έτσι το ολοκλήρωμα θέτοντας:

$$CE = GE \text{ AREAEW}$$

θα γραφτεί:

$$\text{Convection } E = CE \cdot 0.5(\Phi(I,J) + I + 1, J)$$

β) Όμοια και για αυτόν τον όρο θα έχουμε:

$$(\rho u)_w = (\rho_p + \rho_w)/2 \quad U(I,J) = 0.5(\text{DEN}(I,J) + \text{DEN}(I-1,J)) \quad U(I, J) = GW$$

$$r_w = r_e = RCV(J)$$

και:

$$dr \Big|_s^n = \text{SNS}(J)$$

οπότε έχουμε και πάλι AREAEW και ακόμα:

$$\Phi_w = (\Phi_p + \Phi_w)/2 = 0.5(\Phi(I,J) + \Phi(I-1,J))$$

Τότε CW = GW AREAEW και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\text{Convection } W = 0.5CW(\Phi(I,J) + \Phi(I-1,J))$$

2) Ο επόμενος όρος συναγωγής είναι:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v \Phi) \right]$$

που όταν ολοκληρωθεί θα δώσει:

$$\iint \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v \Phi) dr dx = \int_w^e (\rho r v \Phi) \Big|_s^n dx =$$

$$\int_w^e (\rho r v \Phi)_n dx - \int_w^e (\rho r v \Phi)_s dx$$

(α)
(β)

α) η ανάλυση αυτών των όρων είναι ίδια με πριν.

$$(\rho v)_n = (\rho_p + \rho_n)/2 \quad V(I,J) = 0.5(\text{DEN}(I,J) + \text{DEN}(I,J+1)) \quad V(I,J+1) = GN$$

$$r_n = RV(J+1)$$

και:

$$dx \Big|_w^e = SEW(I)$$

οπότε η επιφάνεια είναι:

$$AREAN = RV(J+1) \text{ SEW}(I)$$

Θέτουμε τέλος CN = GN AREAN και έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\Phi_n = (\Phi_p + \Phi_N) / 2 = 0.5(\Phi(I, J) + \Phi(I, J+1))$$

$$\text{Convection N} = 0.5CN(\Phi(I, J) + \Phi(I, J+1))$$

β) Όμοια και εδώ θα έχουμε:

$$(\rho v)_s = (\rho_p + \rho_s) / 2 \quad V(I, J) = 0.5(\text{DEN}(I, J) + \text{DEN}(I, J-1)) \quad V(I, J) = \text{GS}$$

$$r_s = RV(J)$$

και:

$$dr|_w^e = SEW(I)$$

οπότε η επιφάνεια είναι:

$$\text{AREAS} = RV(J) * SEW(I)$$

$$\Phi_s = (\Phi_p + \Phi_S) / 2 = 0.5(\Phi(I, J) + \Phi(I, J-1))$$

Θέτουμε CS=GS AREAS και έτσι το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\text{Convection S} = 0.5CS(\Phi(I, J) + \Phi(I, J+1))$$

Οι όροι διάχυσης είναι:

$$-\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial X} (r \Gamma_{\text{eff}, \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial X}) - \frac{\partial}{\partial r} (r \Gamma_{\text{eff}, \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r}) \right]$$

Το  $\Gamma_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} / \sigma_{\text{eff}, \Phi} = \mu / Pr$  όπου το PR γίνεται για  $\Phi = k \rightarrow \text{PRTE}$  και για  $\Phi = \varepsilon \rightarrow \text{PRED}$ .

Αναλύουμε τον κάθε όρο χωριστά:

$$\iint_{A_p} \frac{\partial}{\partial X} \left( r \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) dx dr = \int_s^n r \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_w^e dr =$$

$$= \int_s^n \underbrace{\left( r \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_e}_{(a)} dr - \int_s^n \underbrace{\left( r \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_w}_{(b)} dr$$

Ο όρος  $\mu / Pr$  είναι σύνθετος αφού περιέχει το  $\mu$  που μεταβάλλεται στα άκρα του όγκου ελέγχου και το  $Pr$  που είναι σταθερό σε όλο το χώρο υπολογισμών. Έτσι θα γίνει:

$$(\mu / Pr)_e = (\mu_p + \mu_\varepsilon) / (2Pr) = 0.5(\text{VIS}(I, J) + \text{VIS}(I+1, J)) / PR$$

$$r_e = RCV(J)$$

και:

$$dr|_s^n = SNS(J)$$

έτσι η επιφάνεια είναι:

$$\text{AREA}_{EW} = \text{RCV}(J) \text{ SNS}(J)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_e = (\Phi_E - \Phi_P) / \Delta x_{EP} = (\Phi(I+1, J) - \Phi(I, J)) / \text{DXEP}(I)$$

Θέτουμε:

$$\text{GAME} = (\mu / \text{Pr})_e$$

και:

$$\text{DE} = \text{GAME} \text{ AREA}_{EW} / \text{DXEP}(I)$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\text{Diffusion E} = \text{DE} (\Phi(I+1, J) - \Phi(I, J))$$

β) Όμοια και για αυτόν τον όρο θα έχουμε:

$$(\mu / \text{Pr})_w = \text{GAMW} = (\mu_w + \mu_p) / (2\text{Pr}) = 0.5(\text{VIS}(I, J) + \text{VIS}(I-1, J)) / \text{PR}$$

$$r_w = r_e = \text{RCV}(J)$$

και:

$$dr \Big|_s^n = \text{SNS}(J)$$

οπότε η επιφάνεια γίνεται  $\text{AREA}_{EW} = \text{RCV}(J) \text{ SNS}(J)$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_w = (\Phi_P - \Phi_W) / \Delta x_{PW} = (\Phi(I, J) - \Phi(I-1, J)) / \text{DXPW}(I)$$

Έτσι θέτουμε:

$$\text{DW} = \text{GAMW} \text{ AREA}_{EW} / \text{DXPW}(I)$$

οπότε το ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$\text{Diffusion W} = \text{DW} (\Phi(I, J) - \Phi(I-1, J))$$

$$\iint_{A_P} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) dx dr = \int_w^e \left( r \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \Big|_s^n dx =$$

$$\int_w^e \left( r \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_n dx - \int_w^e \left( r \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_s dx$$

α) Όμοια και με τον πρώτο όρο θα έχουμε:

$$(\mu / \text{Pr})_n = (\mu_p + \mu_N) / (2\text{Pr}) = 0.5(\text{VIS}(I, J) + \text{VIS}(I, J+1)) / \text{PR} = \text{GAMN}$$

$$r_n = \text{RV}(J+1)$$

και:

$$dx \Big|_w^e = \text{SEW}(I)$$

οπότε έχουμε την επιφάνεια  $\text{AREAN} = \text{RV}(J+1) \text{ SEW}(I)$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_n=(\Phi_N-\Phi_P)/\Delta r_{PN}=(\Phi(I,J+1)-\Phi(I,J))/DYNP(J)$$

Θέτουμε:

$$DN=GAMN \text{ AREAN}/DYNP(I)$$

οπότε το ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$\text{Diffusion N}=DN (\Phi(I,J+1)-\Phi(I,J))$$

β) Όμοια και εδώ θα έχουμε:

$$(\mu/Pr)_s=(\mu_p+\mu_s)/(2Pr)=GAMS=0.5(VIS(I,J)+VIS(I,J-1))/PR$$

$$r_s dx_w^e=AREAS=RV(I) \text{ SEW}(I)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_s=(\Phi_P-\Phi_S)/\Delta r_{PS}=(\Phi(I,J)-\Phi(I,J-1))/DYPS(I)$$

Θέτουμε:

$$DS=GAMS \text{ AREAS}/DYPS(J)$$

οπότε το ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$\text{Diffusion S}=DS (\Phi(I,J)-\Phi(I,J-1))$$

Όροι πηγών:

Στους όρους αυτούς βασική παράμετρος είναι το G. Θα υπολογίσουμε κάθε όρο χωριστά:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_P=(w_e-w_w)/\Delta x_{ew}=[0.5(W_P+W_E)-0.5(W_P+W_N)]/SEW(I)\rightarrow$$

$$DWDX=[0.5(W(I,J)+W(I+1,J))-0.5(W(I,J)+W(I-1,J))]/SEW(I)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)=(w_n-w_s)/\Delta r_{ns}=[0.5(W_N+W_P)-0.5(W_P+W_S)]/SNS(J)\rightarrow$$

$$DWDY=[0.5(W(I,J+1)+W(I,J))-0.5(W(I,J)+W(I,J-1))]/SNS(J)$$

$$(w/r)_P = WDR = W(I,J)/RCV(J)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)_P = DUDX = [U(I+1,J) - U(I,J)]/SEW(I)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_P = DVDY = [V(I,J+1) - V(I,J)]/SNS(J)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_P = (U_n - U_s)/\Delta r_{ns} = DUDY$$

$$\Delta r_{ns} = SNS(J)$$

Ο όρος  $U_n$  θα υπολογισθεί σαν η μέση τιμή των τιμών που έχει στα 4 γειτονικά σημεία 1, 2, w, e (βλ. σχ. 5.2.3) ενώ ο  $U_s$  στα 4 γειτονικά w, e, 3, 4. Έτσι θα έχουμε:

$$U_n = 1/4 (U(I,J) + U(I,J+1) + U(I+1,J) + U(I+1,J+1))$$

$$U_s = 1/4 (U(I,J) + U(I+1,J) + U(I,J-1) + U(I+1,J-1))$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)_P = (V_e - V_w)/\Delta x_{ew} = DVDX$$

$$\Delta x_{ew} = SEW(I)$$

Όμοια με προηγούμενα ο όρος  $V_e$  θα υπολογισθεί σαν η μέση τιμή των ταχυτήτων στα γειτονικά 4 σημεία n, 3', 4', s. Το  $V_w$  θα υπολογιστεί με τη βοήθεια των γειτονικών σημείων 1', 2', s, n. Έτσι έχουμε:

$$V_e = 1/4 (V(I,J) + V(I,J+1) + V(I+1,J) + V(I+1,J+1))$$

$$V_w = 1/4 (V(I,J) + V(I,J+1) + V(I-1,J) + V(I-1,J+1))$$

$$(v/r)_P = 0.5((v/r)_n + (v/r)_s) = 0.5[V(I,J)/RV(J+1) + V(I,J)/RV(J)]$$

Ο όρος  $V(I,J)/RV(J)$  τίθεται ως VDR οπότε ο όρος αυτός γράφεται:

$$0.5 [VDR + V(I,J+1)/RV(J+1)]$$

$\mu_P \rightarrow$  ο όρος αυτός επειδή αποθηκεύεται στο P, παντού παίρνει την τιμή  $VIS(I,J)$ . Τέλος όλοι αυτοί οι όροι προστίθενται και πολλαπλασιάζονται με τον όγκο:

$$VOL = RCV(J) SEW(I) SNS(J)$$



για να μας δώσουν τον όρο G που στο πρόγραμμα υπολογίζεται μία φορά στην CALCTE με το όνομα GEN(I,J). Όλοι οι όροι συνθέτονται ως εξής:

$$[\text{Convection N-Convection S}]+[\text{Convection E-Convection W}]+$$

$$+[\text{Diffusion N-Diffusion S}]-[\text{Diffusion E-Diffusion W}]=\text{Source}$$

Αυτή η έκφραση γράφεται:

$$0.5CE(\Phi(I,J)+\Phi(I+1,J))-0.5CN(\Phi(I,J)+\Phi(I-1,J))+0.5CN(\Phi(I,J)+\Phi(I,J+1))-$$

$$-0.5CS(\Phi(I,J)+\Phi(I,J-1))-DE(\Phi(I+1,J)-\Phi(I,J))+DW(\Phi(I,J)-\Phi(I-1,J))-DN(\Phi(I,J+1)-$$

$$-\Phi(I,J))+DS(\Phi(I,J)-\Phi(I,J-1))=\text{Source} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Phi(I,J)[0.5CE-0.5CW+0.5CN-0.5CS+DE+DW+DS+DN]=$$

$$=\Phi(I+1,J)[DE-0.5CE]+\Phi(I-1,J)[DW+0.5CW]+\Phi(I,J+1)[DN-0.5CN]+$$

$$+\Phi(I,J-1)[DS+0.5CS]+\text{Source}.$$

Θέτουμε τέλος τους όρους:

$$AE=DE-0.5CE$$

$$AW=DW+0.5CW$$

$$AN=DN-0.5CN$$

$$AS=DS+0.5CS$$

$$AP=0.5(CE-CW+CN-CS)+DE+DW+DS+DN$$

Η LISOLV καλείται στη συνέχεια για να υπολογίσει τα TE(I,J) στην CALCTE και τα ED(I,J) στην CALCED. Μένει τελικά η διόρθωση του μ μέσω των ε, k σύμφωνα με την σχέση (5.2.23). Αυτό γίνεται στην υπορουτίνα PROPS η οποία όταν ο λογικός δείκτης INPRO είναι αληθής σε κάθε σάρωση καλείται για να τροποποιήσει τις τιμές της πυκνότητας, του ιξώδους και των χαρακτηριστικών της ροής. Κάτω από την επικεφαλίδα VISCOSITY γίνονται τα εξής: Η παλιά τιμή του ιξώδους αποθηκεύεται στην μεταβλητή VISOLD.

Αν η υπολογισθείσα τιμή του ED(I,J) γίνει μηδέν θα προκαλέσει σφάλμα (run time error) αφού αυτή στην σχέση (5.2.23) βρίσκεται στον παρονομαστή. Γίνεται λοιπόν ένας έλεγχος για την τιμή της. Αν αυτή είναι μηδέν το ιξώδες παίρνει την προκαθορισμένη αρχική τιμή VISCOS=1.9x10<sup>-5</sup>.

Γίνεται η τροποποίηση του ιξώδους:

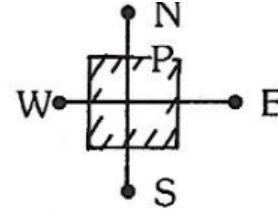
$$\text{VIS}(I,J)=\underbrace{\text{DEN}(I,J) \text{ TE}(I,J)^2 \text{ CMU}}_{\text{Τυρβώδες ιξώδες}}/\underbrace{\text{ED}(I,J)}_{\text{ιξώδες στρωτής ροής}}+\text{VISCOS}$$

Με τον συντελεστή υποχαλάρωσης URFVIS η τιμή του ιξώδους τελικά γίνεται:

$$\text{VIS}(I,J)=\text{URFVIS VIS}(I,J)+(1-\text{URFVIS}) \text{VISOLD}$$

Όπως είδαμε στην ανάλυσή μας όλες οι διαφορικές εξισώσεις καταλήγουν τελικά σε μία μορφή όπως η παρακάτω:

$$\alpha_p^\Phi \Phi_p = \sum_j \alpha_j^\Phi \Phi_j + S_u^\Phi$$



όπου ο όρος  $\sum_j$  δηλώνει άθροισμα στους κόμβους N, S, E, W του πλέγματος που αντιστοιχεί στον όγκο ελέγχου μέσα στον οποίο κάνουμε την ολοκλήρωση. Σε όλες τις διαφορικές εξισώσεις παρουσιάζονται ένας όρος πηγών που συμβολίζαμε με  $S_\Phi$  και τον οποίο ολοκληρώναμε στον όγκο ελέγχου με έναν διαφορετικό τρόπο από τις άλλες παραμέτρους. Στην ουσία κάναμε γραμμικοποίηση της πηγής στην γενική μορφή:

$$S_\Phi = S_p^\Phi \Phi_p + S_u^\Phi$$

Στις υπορουτίνες CALCx οι όροι  $S_p$  και  $S_u$  συμβολίζονται σαν SP(I,J) και SU(I,J) αντίστοιχα. Η ολοκλήρωση τώρα γίνεται:

$$\int_V S_\Phi dV = (S_p^\Phi \Phi_p + S_u^\Phi) V$$

Συχνά δεν εμφανίζεται ο όρος  $S_p$  και υπάρχει μόνο  $S_u$  ενώ σε άλλες περιπτώσεις εμφανίζονται και οι δύο.

Ο όρος  $S_p$  περιέχεται στο  $\alpha_p^\Phi$  το οποίο είναι:

$$\alpha_p^\Phi = \sum_j \alpha_j - S_p^\Phi V = \alpha_N^\Phi + \alpha_E^\Phi + \alpha_W^\Phi + \alpha_S^\Phi - S_p^\Phi V$$

Στο πρόγραμμα οι όροι  $\alpha_j$  είναι οι όροι AN, AS κ.λ.π. που ορίζαμε στο τέλος κάθε ολοκλήρωσης.

Για να υπάρχει ομοιομορφία στη γραφή των υπορουτίνων CALCx στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει όρος  $S_p^\Phi$  το πρόγραμμα θέτει ως  $S_p^\Phi$  τον όρο:

$$S_p^\Phi = -(CW - CS + CE - CW)$$

ενώ ταυτόχρονα θέτει σαν όρο πηγής τύπου  $S_u^\Phi$  και τον όρο:

$$S_u^\Phi = (CN - CS + CE - CW) \Phi(I,J)$$

Με τον τρόπο αυτό οι δύο όροι αναιρούνται αλγεβρικά και έτσι μένουν οι πραγματικοί όροι πηγών. Σε κάθε όμως περίπτωση επειδή ο όρος  $S_p^\Phi$  αφαιρείται από το άθροισμα των  $\alpha_j$  είναι δυνατόν να έχουμε  $\alpha_p < 0$ . Αυτό δεν θα πρέπει να συμβαίνει σε καμιά περίπτωση γιατί οι περισσότερες φυσικές διαδικασίες δεν παρουσιάζουν όρο πηγής εξαρτώμενο από το μέγεθος  $\Phi$  με θετική κλίση. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε αστάθεια αφού μία αύξηση του  $\Phi_p$  θα οδηγούσε σε αύξηση του όρου της πηγής  $S_p^\Phi$ , το οποίο φυσικά οδηγεί σε αύξηση του  $\Phi_p$  με αποτέλεσμα αν δεν υπάρχει κάποιος μηχανισμός που να απάγει το  $\Phi_p$  να έχουμε εξωπραγματικές διεργασίες.

Για τον λόγο αυτό σε κάθε CALCx γίνεται έλεγχος για το  $S_p$  έτσι ώστε αν έχει θετική τιμή να μηδενίζεται. Η γραμμικοποίηση των όρων πηγής προϋποθέτει την ύπαρξη μιας επαναληπτικής διαδικασίας για την διόρθωση των τιμών. Μια καλύτερη προσέγγιση επιτυγχάνεται με την υποχαλάρωση των όρων  $S_u^\Phi$  με την βοήθεια ενός συντελεστή υποχαλάρωσης. Για τον λόγο αυτό στις CALCx τίθεται το  $S_u^\Phi$  ως εξής:

$$\alpha_p^\Phi = \alpha_p^\Phi / \text{URFx}$$

$$S_u^\Phi = S_u^\Phi + (1 - \text{URFx}) \alpha_p^\Phi \Phi_p$$

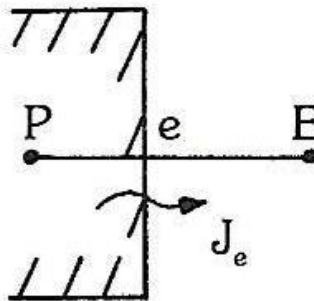


όπου ο URFx είναι ο συντελεστής υποχαλάρωσης ο οποίος παίρνει διάφορες τιμές ανάλογα με την περίπτωση (URFU, URFV κ.λ.π.). Σε κάθε διαδικασία υπολογισμού υπάρχουν αποκλίσεις οι οποίες όταν μικρύνουν αρκετά μας δίνουν τα σωστά αποτελέσματα. Στις υπορουτίνες CALCx οι αποκλίσεις ορίζονται με το χαρακτηριστικό RESORx και είναι:

$$RESORx = \sum_j \alpha_j^\Phi \Phi_j + S_u^\Phi - \alpha_P^\Phi \Phi_P$$

Η μεταβλητή αυτή ονομάζεται υπόλοιπο και αθροίζεται για όλα τα σημεία του πλέγματος. Η μείωσή του μας δείχνει και την σύγκλιση της επαναληπτικής διαδικασίας υπολογισμού.

Σε κάθε πλευρά του όγκου ελέγχου έχουμε ένα άθροισμα ποσοτήτων  $\Phi$  λόγω διάχυσης και λόγω συναγωγής. Ας πάρουμε για παράδειγμα το άκρο e κάποιου όγκου ελέγχου.



Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων στο e μας δίνει πάντοτε έναν όρο της μορφής:

$$J_e = 0.5CE(\Phi(I+1,J) + \Phi(I,J)) - DE(\Phi(I+1,J) - \Phi(I,J))$$

Αυτός ο όρος εκφράζει τον καθαρό ανηγμένο ρυθμό ροής μέσω του τοιχώματος e λόγω διάχυσης και συναγωγής. Μπορούμε να τον γράψουμε ως εξής:

$$J_e = (0.5 (CE+DE) \Phi(I,J) - \Phi(I+1,J)[DE-0.5CE])$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 $\Phi_P$                        $\Phi_E$

Αν θέσουμε:

$$A = DE + 0.5CE$$

$$B = DE - 0.5CE$$

μπορούμε να γράψουμε πιο απλά:

$$J_e = A\Phi_P - B\Phi_E$$

Αν τα A και B είναι αρνητικά τότε όταν το  $\Phi_P$  αυξάνει, το  $J_e$  μειώνεται και όταν μειώνεται το  $\Phi_E$  το  $J_e$  μειώνεται. Αυτό το αποτέλεσμα είναι λανθασμένο και συμβαίνει γιατί αγνοήσαμε την επίδραση του  $u_e$  στο  $\Phi_E$ . Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει:

$$A \geq 0$$

$$B \geq 0$$

που σημαίνει:

$$DE + 0.5CE \geq 0$$

$$DE - 0.5CE \geq 0$$

Εάν υποθέσουμε ότι το 0.5CE είναι θετικό. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$DE + |0.5CE| \geq 0 \quad (5.2.24)$$

$$DE - |0.5CE| \geq 0$$

Για να ισχύει η (5.2.24) αρκεί να θέσουμε στην θέση του DE το μέγιστο των DE,  $|0.5CE|$ . Αν θέσουμε το DE έχουμε την βασική μας σχέση ενώ αν βάλουμε  $|0.5CE|$  έχουμε θετικό το (α) και μηδέν το (β). Αν πάλι το  $0.5CE$  είναι αρνητικό τότε θα έχουμε:

$$DE - |0.5CE| \geq 0 \quad (5.2.25)$$

$$DE + |0.5CE| \geq 0$$

που είναι το ίδιο με το επάνω. Αυτό κάνουν και οι υπορουτίνες CALCx του TEACH όπου με εντολές του τύπου:

(CALCU) ↴

$$AE(I,J) = \text{AMAX1}(\text{ABS}(0.5CE), DE) - 0.5CE$$

εξασφαλίζουν ότι θα ισχύουν σχέσεις σαν και αυτή της (5.2.25). Σε άλλες περιπτώσεις η σύγκριση είναι περισσότερο πολύπλοκη. Από τους υπολογισμούς που κάναμε στην CALCU έχουμε για παράδειγμα:

$$J_e = CE(U(I,J)WFE(I) + U(I+1,J)(1-WFE(I)) - DE(U(I+1,J) - U(I,J))) \rightarrow$$

$$\rightarrow J_e = U(I,J)(DE + CE WFE(I)) - U(I+1,J)(DE - CE(1 - WFE(I)))$$

όπου θα πρέπει σύμφωνα με τα όσα είπαμε να ισχύει:

$$DE + CE WFE(I) \geq 0 \quad (5.2.26)$$

$$DE - CE(1 - WFE(I)) \geq 0$$

Η σχέση (5.2.26) ικανοποιείται με τον παρακάτω τρόπο:

$$DE = \text{AMAX1}(DE, -WFE(I) CE, CE(1 - WFE(I)))$$

$$AE(I,J) = DE - (1 - WFE(I)) CE$$

και τελικά απαιτούμε:

$$AE=DE-0.5CE$$

$$AW=DW+0.5CW$$

$$AN=DN-CN(1-WFN(J))$$

$$AS=DS+CS(1-WFS(J))$$

$$AP=CN WFN(J)-CS WFS(J)+DE+DW+DN+DS-0.5CE-0.5CW$$

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Σημειώσεις εργαστηρίου «Εξομοίωσης Ενεργειακών συστημάτων», ΤΕΙ Πάτρας, 2015.
2. K.K. Kuo, "Principles of combustion", Wiley, 1986
3. S. Turns, "Introduction to combustion", McGraw-Hill, 1996
4. R.A. Strehlow, "Fundamentals of Combustion ", Int. Textbook Company, 1968
5. D.B. Spalding, " Combustion and Mass Transfer", Pergamon, New York, 1965
6. J.O. Hinze, "Turbulence", McGraw-Hill Book Company, New York, 1975
7. Pope, S.B., "Turbulent Flows", Cup, 2006.