Τ.Ε.Ι **Δυτικής Ελλάδας**

Σχολή Διοίκησης και Οικονομίας

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων Πάτρας

Πτυχιακή Εργασία

Έλεγχος υποθέσεων στη Στατιστική

Ευγενίδη Μάνθα

ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ: ΒΑΣΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ

ΠΑΤΡΑ 2019

Πρόλογος

Η παρούσα Πτυχιακή εργασία με τίτλο «Έλεγχοι υποθέσεων στη Στατιστική» εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των προϋποθέσεων, για τη λήψη του πτυχίου μου από το Α.Τ.Ε.Ι. Πάτρας τμήμα Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και Πληροφοριακών Συστημάτων, με έδρα την Πάτρα. Η ανάληψή της ορίστηκε με την υπεύθυνη καθηγήτρια την κ. Γεωργία Βάσιου. Σκοπός μου κατά τη διάρκεια της συγγραφής, δεν ήταν μόνο η ορθή και όσο το δυνατόν πληρέστερη ανάλυση του θέματος. Έγινε προσπάθεια, έτσι ώστε το περιεχόμενο της εργασίας να είναι κατανοητό και σαφές, γι'αυτό η ανάλυση του θέματος έγινε με χρήση διαγραμματικών αναπαραστάσεων, παραδειγμάτων, και συγκεντρωτικών πινάκων.

Ελπίζω το περιεχόμενο του να καλύπτει, όχι μόνο το εξεταζόμενο θέμα, αλλά να ανταποκρίνεται και στις απαιτήσεις της καθηγήτριας μου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπων καθηγήτρια κα. Βάσιου Γεωργία κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, και την υπομονή που έκανε κατά τη διάρκεια υλοποίησης της πτυχιακής εργασίας. Όπως επίσης και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση της, για την επίλυση διάφορων θεμάτων. Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να αποδώσω και στην Προϊσταμένη του Τμήματος, κα. Όλγα Ζαχαροπούλου που μου παρείχε απλόχερα την βοήθεια της σε ό,τι και αν χρειάστηκα. Ευχαριστώ τους καθηγητές της σχολής που συνέβαλαν στην απόκτηση των απαραίτητων γνώσεων για την επιτυχή φοίτησή μου και την εκπόνηση της πτυχιακής μου εργασίας

Περισσότερο από όλους, οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, διότι χωρίς εκείνους η απόκτηση ενός πτυχίου θα ήταν αδύνατη ή έστω, πολύ δύσκολο εγχείρημα. Τους ευχαριστώ που στάθηκαν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια και για την υπομονή που υπέδειξαν, μέχρι την επιστροφή μου στην οικογενειακή εστία.

Περίληψη

Οι έλεγχοι υποθέσεων μαζί με τα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι τα δύο σημαντικότερα εργαλεία της στατιστικής συμπερασματολογίας. Αντικείμενο του κλάδου αυτού της στατιστικής είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού από πληροφορίες που αναφέρονται σε ένα μόνο δείγμα. Σύμφωνα με την πρακτική των διαστημάτων εμπιστοσύνης, υπολογίζεται μια σημειακή εκτίμηση μιας παραμέτρου του πληθυσμού (π.χ. μέση τιμή) και στη συνέχεια σχηματίζεται ένα διάστημα εμπιστοσύνης γύρω από την εκτίμηση αυτή, για το οποίο υπάρχει βεβαιότητα (εμπιστοσύνη) κατά ένα ποσοστό ότι βρίσκεται η ζητούμενη παράμετρος του πληθυσμού. Αυτή η ανάλυση δε λαμβάνει υπόψη οποιαδήποτε πεποίθηση υπάρχει σχετικά με τον πληθυσμό. Στην άλλη πλευρά βρίσκονται οι έλεγχοι υποθέσεων (ή έλεγχοι σημαντικότητας ή κανόνες αποφάσεων).

Η πρακτική αυτή λαμβάνει υπόψη την πεποίθηση που υπάρχει σχετικά με την παράμετρο ενός πληθυσμού, η οποία οδηγεί στην πραγματοποίηση μιας υπόθεσης.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε ένα πρόβλημα της Στατιστικής που έχει κυρίως σχέση με τις παραμέτρους ενός πληθυσμού (τις παραμέτρους της κατανομής ενός πληθυσμού). Εδώ, θα ασχοληθούμε με τον έλεγχο υποθέσεων που αναφέρεται στις παραμέτρους. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε τρόπους για να αποφασίζουμε για το κατά πόσο μια προκαθορισμένη τιμή μιας παραμέτρου είναι αποδεκτή με βάση κάποιες παρατηρήσεις. Αν, για παράδειγμα, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την διαφορά μεταξύ των μέσων δύο κανονικών πληθυσμών, ο φυσικός προβληματισμός είναι να εξετάσουμε αν οι παρατηρήσεις δίνουν κάποια ένδειξη ότι υπάρχει κάποια πραγματική διαφορά ανάμεσα στους μέσους. Θα πρέπει με άλλα λόγια να συγκρίνουμε την παρατηρηθείσα διαφορά (όπως αυτή εκφράζεται από τους δειγματικούς μέσους) με την υπόθεση που θα μπορούσε να είχε κάνει κάποιος ότι δεν υπάρχει πραγματικά διαφορά μεταξύ των μέσων, αλλά η όποια παρατηρούμενη, ή παρατηρηθείσα, διαφορά οφείλεται σε αποκλίσεις της τυχαίας δειγματοληψίας. Το πλαίσιο λειτουργίας της Στατιστικής είναι το ακόλουθο: Μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε – μέσω κάποιας μεταβλητής (παραμέτρου) – ένα χαρακτηριστικό ενός «πληθυσμού». Παραδείγματος χάριν την διαφορά αποτελεσματικότητας δύο θεραπειών (χαρακτηριστικό), όπως αυτή μετράται από την μείωση του επιπέδου κάποιου αιματολογικού παράγοντα (μεταβλητή). Δεν είναι όμως δυνατόν να υπολογίσουμε τη διαφορά στο σύνολο του πληθυσμού. Στην προκείμενη περίπτωση απλά διότι το σύνολο του πληθυσμού αλλάζει μέσα στο χρόνο, αλλά γενικά διότι το σύνολο του πληθυσμού είναι συνήθως πολύ μεγάλο. Άρα αντί του πληθυσμού επιλέγουμε ένα απλό τυχαίο δείγμα (δηλαδή ένα δείγμα όπου όλες οι τιμές του πληθυσμού έχουν την ίδια πιθανότητα να συμπεριληφθούν σε αυτό), και υπολογίζουμε την τιμή της παραμέτρου στο δείγμα, μέσω μιας εκτιμήτριας (συνάρτησης). Η τιμή αυτή λέγεται εκτίμηση. Κατόπιν γενικεύουμε και ισχυριζόμαστε ότι η υπολογισθείσα τιμή αποτελεί μια καλή προσέγγιση της πραγματικής τιμής της παραμέτρου του πληθυσμού. Για να ευσταθεί ο ισχυρισμός μας πρέπει να ισχύουν μια σειρά από προϋποθέσεις. Ο έλεγχος των προϋποθέσεων, η επιλογή του δείγματος και η διαδικασία υπολογισμού αποτελεί το αντικείμενο της Στατιστικής.

Σκοπός της ανάλυσης είναι η αποδοχή ή η απόρριψη της υπόθεσης χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που παρέχει το δείγμα του πληθυσμού.

Κεφάλαιο πρώτο

Εισαγωγικές έννοιες ελέγχου υποθέσεων

1.1 Εισαγωγή

Αντικείμενο του συγκεκριμένου κεφαλαίου είναι να περιγραφεί η έννοια και η χρησιμότητα του ελέγχου στατιστικών υποθέσεων. Πιο συγκεκριμένα θα εξετάσουμε πως διεξάγεται ο έλεγχος υποθέσεων και σε ποιες περιπτώσεις ενδέχεται να οδηγηθούμε σε λανθασμένα συμπεράσματα.

Η περισσότερο συνηθισμένη στατιστική υπόθεση είναι η καλούμενη υπόθεση μηδέν, που τη συμβολίζουμε με H_0. Στην υπόθεση αυτή θεωρείται γνωστό από την αρχή (a priori) ότι η διαπιστωμένη διαφορά μεταξύ της παραμέτρου του δείγματος και του πληθυσμού είναι στατιστικά ασήμαντη, δηλαδή αν δεν υπήρχαν τα σφάλματα της δειγματοληψίας τότε οι δύο παράμετροι θα είχαν την ίδια τιμή και επομένως, η διαφορά τους θα ήταν μηδέν. Άλλη συνηθισμένη διατύπωση της μηδενικής υπόθεσης είναι ότι η άγνωστη παράμετρος θ του πληθυσμού είναι ίση με μια υποθετική τιμή θ_0 και συμβολίζεται ως εξής: $H_0{:}\theta=\theta_0$. Η ονομασία υπόθεση μηδέν οφείλεται στο γεγονός ότι συνήθως (όχι όμως πάντοτε) η υπόθεση μηδέν δηλώνει ότι η διαφορά μεταξύ θ και θ_0 είναι μηδενική.

Σε κάθε μηδενική υπόθεση αντιστοιχεί και μια άλλη υπόθεση, που ονομάζεται εναλλακτική υπόθεση και συμβολίζεται με H_1. Η απόρριψη της υπόθεσης H_0 συνεπάγεται την αποδοχή της H_1 και αντίστροφα. Στην υπόθεση H_0, συνήθως θέτουμε την πρόταση ότι η τιμή της παραμέτρου θ ισούται με μια ορισμένη τιμή θ_0, δηλαδή: H_0:θ=$θ_0$. Για παράδειγμα, ένα εργοστάσιο ισχυρίζεται ότι η μέση διάρκεια ζωής των ηλεκτρικών του λαμπτήρων είναι 1.200 ώρες, δηλαδή H_0:μ=1.2000 ώρες.

Στη συνέχεια θέτουμε την εναλλακτική υπόθεση H_1, που μπορεί να έχει τις εξής μορφές:

(α) H_1:θ≠$θ_0$, που σημαίνει ότι η τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού είναι διαφορετική από τη γνωστή τιμή $θ_0$, είτε μικρότερη, είτε μεγαλύτερη, και ο έλεγχος αυτός λέγεται δίπλευρος.

(β) H1:θ<$θ_0$ ή H_1:θ>$θ_0$. Ο έλεγχος στη περίπτωση αυτή ονομάζεται μονόπλευρος. Είναι δυνατόν η στατιστική υπόθεση H_0 να έχει και τη μορφή:

1) θ=$θ_0$.

2) θ≥$θ_0$.

3) θ≤$θ_0$.

Οι εναλλακτικές υποθέσεις H_1 που αντιστοιχούν αντίστοιχα στις τρείς παραπάνω μηδενικές υποθέσεις είναι:

1) θ≠$θ_0$.

2) θ<$θ_0$.

3) θ>$θ_0$.

Η εκάστοτε μορφή της κατάλληλης μηδενικής H_0 και της εναλλακτικής υπόθεσης H_1 εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος.[1]

---

[1] Κίντης Α. (2002) <<Σύγχρονη Στατιστική Ανάλυση, Συμβολή στην Επιστημονική Έρευνα και στη Λήψη Αποφάσεων. Τόμος Α'>> Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

1.2 **Διατύπωση των υποθέσεων H_0 και H_1**

Η μαθηματική διατύπωση του ελέγχου υποθέσεων έχει ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\chi,\theta)$.

Η άγνωστη παράμετρος θ του πληθυσμού έστω ότι έχει πεδίο ορισμού το Θ. Το σύνολο των δυνατών τιμών της παραμέτρου θ ονομάζεται συνήθως παραμετρικός χώρος. Για παράδειγμα, ο παραμετρικός χώρος του μέσου μ ενός κανονικού πληθυσμού είναι το διάστημα $(-\infty,+\infty)$, ενώ ο παραμετρικός χώρος της παραμέτρου p μιας διωνυμικής κατανομής θα είναι (0,1). Από τον παραπάνω πληθυσμό $\chi\sim f(\chi,\theta)$ παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1,X_2,\ldots,X_n$. Από το δείγμα αυτό παίρνουμε μια εκτίμηση $\bar{\theta}$ της παραμέτρου θ, δηλαδή $\theta=\theta(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n)$. Έπειτα με τη βοήθεια της τιμής $\bar{\theta}$ χρειάζεται να αποφασίσουμε αν η παράμετρος θ του πληθυσμού ανήκει στο υποσύνολο Θ_0 ή στο υποσύνολο Θ_1, όπου Θ_0 και Θ_1 είναι δύο υποσύνολα του Θ (παραμετρικού χώρου)και είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, δηλαδή: $\Theta_0\cap\Theta_1=\emptyset$ και $\Theta_0+\Theta_1=\Theta$, που σημαίνει ότι η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει τη πραγματοποίηση του άλλου. Για να αποφασίσουμε κατά πόσο η παράμετρος του πληθυσμού θ ανήκει στο υποσύνολο Θ_0 ή στο υποσύνολο Θ_1, κάνουμε μια υπόθεση και με τη βοήθεια ενός κριτηρίου συμπεραίνουμε αν πρέπει να γίνει δεκτή η υπόθεση αυτή η να απορριφθεί. Την υπόθεση που κάνουμε, ότι η παράμετρος θ ανήκει στο στο υποσύνολο Θ_0, την καλούμε υπόθεση μηδέν, όπως είπαμε, τη συμβολίζουμε με H_0, ενώ την αντίθετη την ονομάζουμε εναλλακτική υπόθεση και τη συμβολίζουμε με H_1. Επομένως, μια στατιστική υπόθεση μπορούμε να τη συμβολίζουμε ως εξής:

1)H_0:$\theta \in \Theta_0$

2)H_1:$\theta \in \Theta_1$

Αν το υποσύνολο Θ_0 ή Θ_1 αποτελείται από ένα μόνο σημείο τότε την H_0 ή H_1 την λέμε απλή, διαφορετικά την ονομάζουμε σύνθετη. Π.χ.

1)H_0:$\theta = \theta_0$ (απλή)

2)H_1:$\theta > \theta_0$ (σύνθετη)

3)H_0:$\theta \geq \theta_0$ (σύνθετη)

4)H_1:$\theta < \theta_0$ (σύνθετη)

Από την παραπάνω ανάλυση παρατηρούμε ότι ο έλεγχος μιας στατιστικής υπόθεσης είναι μια διαδικασία που διαιρεί τον δειγματικό χώρο Ω(όπου δειγματικός χώρος είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων μιας δειγματοληψίας) σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα Α και Κ και με τρόπο ώστε, αν συμβαίνει η εκτίμηση $\hat{\theta}$ που προκύπτει από το δείγμα να ανήκει στο Κ($\hat{\theta} \in A$), απορρίπτουμε την H_0, ενώ αν το $\hat{\theta}$ανήκει στο Α($\hat{\theta} \in A$), δεχόμαστε την υπόθεση H_0.Το υποσύνολο Κ το λέμε περιοχή απόρριψης ή κρίσιμη περιοχή, ενώ το υποσύνολο Α το λέμε περιοχή αποδοχής.[2]

---

[2] Κίοχος Πέτρος Α (1993). <<Στατιστική>>. Εκδόσεις Interbooks, Αθήνα.

1.3 Στατιστική ελέγχου και περιοχή απόρριψης

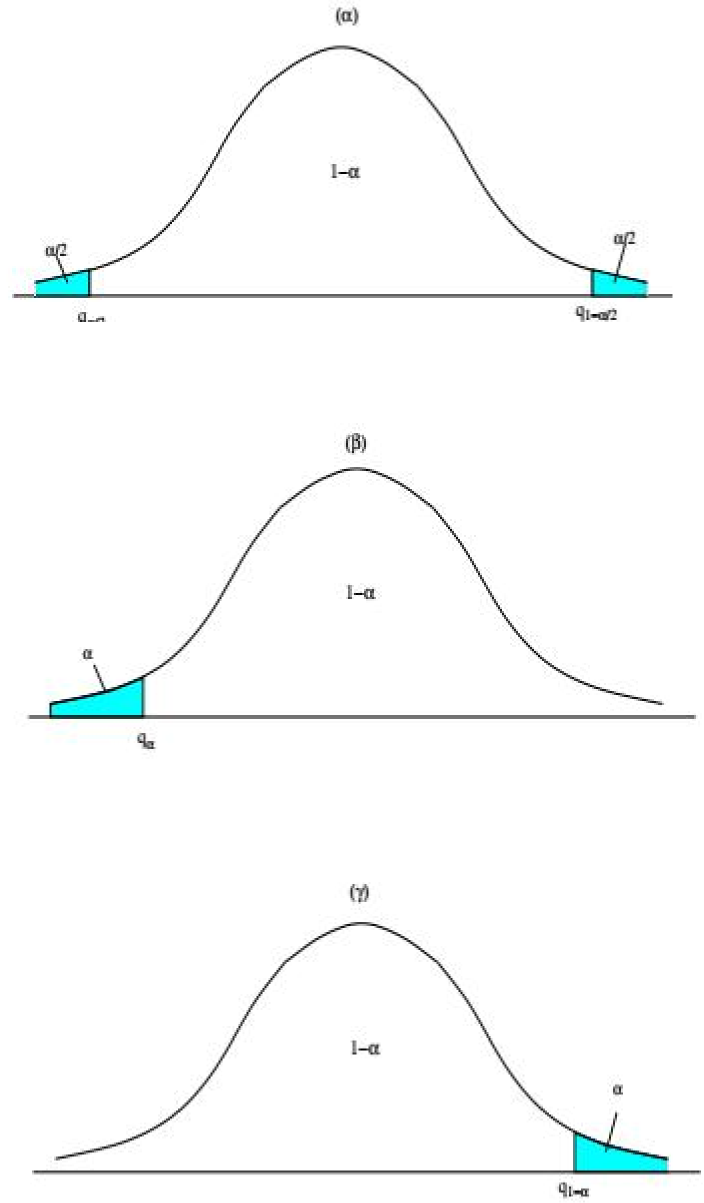
Η μηδενική υπόθεση $H_0 : \theta = \theta_0$ υποδηλώνει ότι η εκτίμηση θ_0 της θ είναι σωστή. Επίσης, τιμές της θ κοντά στη θ_0 υποστηρίζουν την ορθότητα της H_0 ενώ τιμές της θ 'μακριά' από τη θ_0 δεν την υποστηρίζουν. ΄Ετσι, χωρίζουμε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου θ σε αυτές για τις οποίες αποδεχόμαστε την H_0 που αποτελούν την περιοχή αποδοχής και σ΄ αυτές για τις οποίες την απορρίπτουμε που αποτελούν την **περιοχή απόρριψης** (rejection region) που συμβολίζουμε R.

Η απόφαση για την αποδοχή ή απόρριψη της H_0 γίνεται βάση πιθανοτήτων κι όπως για τα διαστήματα εμπιστοσύνης έτσι κι εδώ ορίζουμε επίπεδο εμπιστοσύνης (1- α) για την απόφαση ελέγχου. Το α λέγεται **επίπεδο σημαντικότητας** (significance level) και καθορίζει το κοντά και μακριά που αναφέραμε παραπάνω, δηλαδή καθορίζει το εύρος της περιοχής αποδοχής κι απόρριψης. ΄Οταν μικραίνει το α μικραίνει κι η περιοχή απόρριψης R και μεγαλώνει η περιοχή αποδοχής. Η σχέση α και περιοχής αποδοχής είναι ίδια με τη σχέση α και διαστήματος εμπιστοσύνης της θ.

Επειδή είναι συνήθως υπολογιστικά δύσκολο να καθορίσουμε από την κατανομή της εκτιμήτριας θ τα κρίσιμα σημεία που θα μας δώσουν την R καταφεύγουμε σε κάποια άλλη τ.μ. που την ονομάζουμε **στατιστική ελέγχου** (test statistic) q με γνωστή κατανομή και για την οποία μπορούμε να ορίσουμε την R. Στο στατιστικό έλεγχο κυρίων παραμέτρων, η q είναι μια από τις z, t και χ2 που ακολουθούν γνωστές κατανομές.

Ο έλεγχος ξεκινάει υποθέτοντας ότι η μηδενική υπόθεση H_0 είναι σωστή. Με βάση τη H_0 προσδιορίζουμε την στατιστική ελέγχου q και την κατανομή της. ΄Οταν ο έλεγχος είναι παραμετρικός υποθέτουμε κάποια κατανομή για την παράμετρο θ κι η q σχετίζεται άμεσα με τη θ (η q προκύπτει από μετασχηματισμό της θ). ΄Οταν ο έλεγχος είναι μη-παραμετρικός δε θεωρούμε κάποια κατανομή για τη θ κι η κατανομή της q βασίζεται σε άλλες ιδιότητες της θ.

Η κατανομή της στατιστικής ελέγχου q δίνει την πιθανότητα η q να πάρει κάποια τιμή q είναι διακριτή τ.μ.) ή να βρίσκεται σε ένα διάστημα τιμών (αν η q είναι συνεχής τ.μ.) όταν η H_0 είναι αληθής. Αντίστροφα μπορούμε να πούμε πως με βάση αυτή την κατανομή, αν παρατηρήσουμε τιμές της q που αντιστοιχούν σε μεγάλες πιθανότητες αυτό δείχνει πώς η H_0 είναι αληθής, ενώ αν παρατηρήσουμε τιμές της q που αντιστοιχούν σε μικρές πιθανότητες αυτό υποδηλώνει αμφιβολία για την ισχύ της H_0. Άρα μη πιθανές τιμές της q συνιστούν την απόρριψη της H_0. Η οριακή πιθανότητα για την αποδοχή ή απόρριψη της H_0 είναι το επίπεδο σημαντικότητας α κι αυτό καθορίζει την **κρίσιμη τιμή** (critical value), ή τις κρίσιμες τιμές, της q για τον προσδιορισμό της περιοχής αποδοχής και της περιοχής απόρριψης R της H_0. Κατά κανόνα η περιοχή απόρριψης σχηματίζεται από τα άκρα της κατανομής της στατιστικής ελέγχου q όπως αυτά ορίζονται από τις κρίσιμες τιμές. Αν ο έλεγχος είναι δίπλευρος τότε οι κρίσιμες τιμές $q_{\alpha/2}$ και $q_{1-\alpha/2}$ ορίζουν την περιοχή απόρριψης της H_0 ως $R=\{q | q < q_{\alpha/2} \vee q > q_{1-\alpha/2}\}$, δηλαδή σχηματίζεται από τις δύο ουρές της κατανομής της q με συνολική πιθανότητα α. Αν ο έλεγχος είναι μονόπλευρος τότε υπάρχει μόνο μία κρίσιμη τιμή, q_α ή $q_{1-\alpha}$, που ορίζει την περιοχή απόρριψης της H_0, $R = \{q | q < q_\alpha\}$ για την αριστερή πλευρά και $R=\{q | q > q_{1-\alpha}\}$για τη δεξιά πλευρά. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι περιοχές αποδοχής κι απόρριψης για δίπλευρο και μονόπλευρο έλεγχο.[3]



Σχηματικά παρουσιάζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της στατιστικής ελέγχου q, η περιοχή αποδοχής και η περιοχή απόρριψης (σκιασμένη), για δίπλευρο έλεγχο στο διάγραμμα (α) και μονόπλευρο έλεγχο στο (β) και (γ).[3]

[3] Χαλικιάς Ι. (2003) <<Στατιστική-Μέθοδοι Ανάλυσης για Επιχειρηματικές Αποφάσεις Β΄ Έκδοση>>. Εκδόσεις Rosili, Αθήνα.

1.4 Είδη σφαλμάτων

Κατά τον έλεγχο μιας στατιστικής υπόθεσης είναι δυνατόν να γίνουν δύο είδη σφαλμάτων.

Σφάλμα τύπου Ι. Ονομάζεται το σφάλμα που κάνουμε όταν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 στη περίπτωση που αυτή είναι αληθινή. Την πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα του πρώτου τύπου τη συμβολίζουμε ως εξής:

α=P{απορρίπτουμε την H_0 ενώ η H_0 είναι ορθή}

Την πιθανότητα α να απορρίψουμε εσφαλμένα μια υπόθεση H_0 την ονομάζουμε επίπεδο σημαντικότητας.

Σφάλμα τύπου ΙΙ. Ονομάζεται το σφάλμα που κάνουμε όταν δεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση H_0, στην περίπτωση που αυτή δεν είναι αληθινή.

Την πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα του δεύτερου τύπου τη συμβολίζουμε ως εξής:

β=P{δεχόμαστε την H_0, ενώ η H_1 είναι η ορθή}

Ή

β=P{αποδοχή της H_0/H_0 εσφαλμένη}

Δηλαδή η πιθανότητα β είναι ο κίνδυνος να κάνουμε αποδεκτή την εσφαλμένη υπόθεση H_0. Και στις δυο παραπάνω περιπτώσεις παίρνουμε λανθασμένη απόφαση.

Τα δυνατά αποτελέσματα ενός ελέγχου υποθέσεων μπορούμε να τα συνοψίσουμε στον παρακάτω πίνακα.[4]

Απόφαση	Υπόθεση	
	H_0 Αληθινή	H_0 Εσφαλμένη
Αποδοχή H_0	Ορθή Απόφαση	Σφάλμα δεύτερου τύπου Πιθανότητα β
Απόρριψη H_0	Σφάλμα πρώτου τύπου Πιθανότητα α	Ορθή Απόφαση

[4] Κίοχος Πέτρος Α (1993). <<Στατιστική>>. Εκδόσεις Interbooks, Αθήνα.

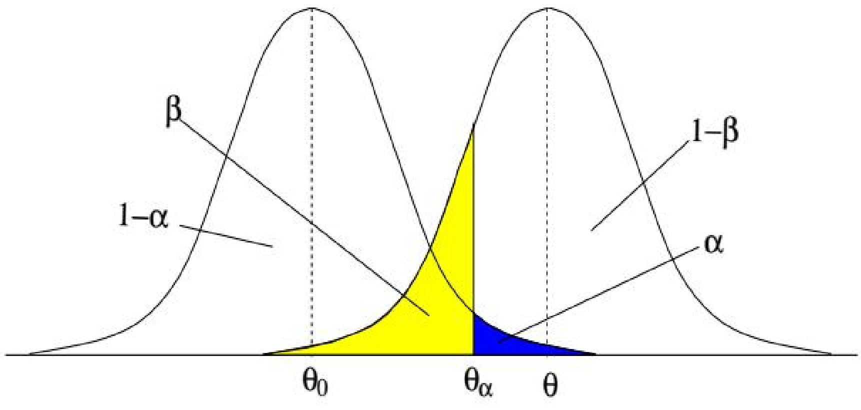
1.5 **Ισχύς του ελέγχου**

Εκτός από τις παραπάνω πιθανότητες α και β μπορούμε να υπολογίσουμε και την πιθανότητα να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση H_0, όταν αυτή είναι πραγματικά εσφαλμένη. Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται δύναμη η ισχύς του στατιστικού ελέγχου. Η δύναμη του στατιστικού ελέγχου συμβολίζεται ως εξής:

γ=1-β=P{Απορρίπτουμε την H_0, γιατί η H_1 είναι η ορθή}

=P{Απόρριψη της H_0/H_0 εσφαλμένη}

Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της ισχύος του ελέγχου, τόσο πιο σωστή θα είναι η απόφαση μας. Στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων επιδιώκεται η σχετική ελαχιστοποίηση του α και η σχετική μεγιστοποίηση της δύναμης γ.



Σχηματικά δίνονται οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της εκτιμήτριας της παραμέτρου θ όταν η H_0 είναι σωστή (με κέντρο $θ_0$) και λανθασμένη (με κέντρο κάποια άλλη τιμή θ) κι οι πιθανότητες για κάθε περιοχή ανάλογα με την απόφαση ελέγχου.

Οι πιθανότητες των παραπάνω περιπτώσεων για μονόπλευρο έλεγχο κάποιας παραμέτρου θα διαγράφονται στο παραπάνω σχήμα. Η μία κατανομή της εκτιμήτριας $\hat{\theta}$ της θ, αριστερά στο σχήμα, είναι σύμφωνη με τη μηδενική υπόθεση $H_0 : θ = θ_0$ και η άλλη κατανομή είναι σύμφωνη με την εναλλακτική υπόθεση. Η κρίσιμη τιμή της στατιστικής ελέγχου αντιστοιχεί στην κρίσιμη τιμή θα της θ. Θεωρώντας την πρώτη κατανομή της $\hat{\theta}$ (η H_0 είναι σωστή), αριστερά από τη θα είναι η περιοχή σωστής αποδοχής της H_0 με πιθανότητα 1 - α, ενώ δεξιά της θα (η βαθειά σκούρα περιοχή) είναι η περιοχή λανθασμένης απόρριψης της H_0 με πιθανότητα α (σφάλμα τύπου Ι). Θεωρώντας τη δεύτερη κατανομή της $\hat{\theta}$ (η H_0 είναι λανθασμένη), αριστερά από τη θα είναι η περιοχή λανθασμένης αποδοχής της H_0 (η ελαφρά σκούρα περιοχή) με πιθανότητα β (σφάλμα τύπου ΙΙ), ενώ δεξιά της θα είναι η περιοχή σωστής απόρριψης της H_0 με πιθανότητα 1 - β.

1.6 **Παρατηρούμενο Επίπεδο Σημαντικότητας** (Observed Level Of Significance Or P-value)

Από όσα έχουν προηγηθεί οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει γενικά αποδεκτός κανόνας που να οδηγεί στην επιλογή του επιπέδου σημαντικότητας στα προβλήματα του ελέγχου στατιστικών υποθέσεων. Οι δυσκολίες αυτές οδήγησαν τους επιστήμονες της Στατιστικής να ορίσουν ένα άλλο μέγεθος που να περιγράφει με καλύτερο τρόπο την κατάσταση που επικρατεί στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων. Η τιμή αυτή είναι το λεγόμενο παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας ή αλλιώς τιμή πιθανότητας ή p-τιμή (Observed Level Of Significance ή p-value).

Στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων καθοριστικό ρόλο παίζει η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου για το συγκεκριμένο δείγμα που έχει παρατηρηθεί. Η πιθανότητα που αντιστοιχεί στην παρατηρηθείσα τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου, ή κάποια άλλη τιμή πιθανότητας ακόμα πιο αντιφατική(αντίθετη) προς τη μηδενική υπόθεση μετρά, κατά κάποιο τρόπο, το βάρος των ενδείξεων που υποστηρίζουν την απόρριψη της H_0.

Συνοψίζοντας, ως p-value ορίζουμε την πιθανότητα η στατιστική συνάρτηση ελέγχου να πάρει μια τιμή τόσο ακραία ή περισσότερο ακραία από αυτή που πήρε για το συγκεκριμένο δείγμα, κάτω από τη μηδενική υπόθεση. Αξίζει να σημειωθεί ότι η χρησιμοποίηση της p-value αντί του επιπέδου σημαντικότητας α στην αντιμετώπιση ενός προβλήματος στατιστικού ελέγχου υποθέσεων δεν μεταβάλλει την κλασσική στατιστική μεθοδολογία που ανακαλύφθηκε νωρίτερα. Απλά εκείνο που συμβαίνει είναι ότι ο ερευνητής αναφέρει στον ενδιαφερόμενο την p-τιμή(το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας) και αφήνει την επιλογή του κατά πόσο θα πρέπει να απορριφθεί η όχι η μηδενική υπόθεση στον ενδιαφερόμενο. Μεταφέρεται δηλαδή η ευθύνη επιλογής του α από τον ερευνητή στον ενδιαφερόμενο.[5]

---

[5] Κίντης Α. (2002) <<Σύγχρονη Στατιστική Ανάλυση, Συμβολή στην Επιστημονική Έρευνα και στη Λήψη Αποφάσεων. Τόμος Α'>> Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

1.7 Η Φιλοσοφική Προσέγγιση Των Ελέγχων Υποθέσεων

Όπως είναι γνωστό, στοιχεία από κάποιο δείγμα χρησιμοποιούνται συχνά για να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν κάποιες θεωρίες. Θα ήταν βέβαια ιδιαίτερα ευχάριστο αν ήταν δυνατόν με στοιχεία που συγκεντρώνονται σε ένα δείγμα να καταλήξει κανείς σε ένα συμπέρασμα, πέρα από κάθε αμφιβολία ότι μια θεωρία είναι η σωστή ή λανθασμένη. Ελάχιστες όμως είναι οι περιπτώσεις που μπορεί να είναι κανείς 100% σίγουρος για κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα. Τα στοιχεία, συνήθως, προέρχονται από μια δειγματοληψία και επομένως υπόκεινται σε λάθη δειγματοληψίας. Ένα διαφορετικό δείγμα είναι ενδεχόμενο να διαφέρει σημαντικά από το προηγούμενο και να οδηγεί σε διαφορετικά συμπεράσματα. Αν προσπαθούμε, για παράδειγμα, να προβλέψουμε το αποτέλεσμα μιας επερχόμενης εκλογικής αναμέτρησης, διαφορετικά δείγματα είναι ενδεχόμενο να οδηγήσουν σε διαφορετικά συμπεράσματα. Δεν είναι επομένως δυνατόν να είμαστε βέβαιοι για το αποτέλεσμα μέχρις ότου πραγματοποιηθεί αυτή κάθε αυτή εκλογική αναμέτρηση και καταμετρηθούν όλες οι ψήφοι. Υπάρχουν όμως και θεωρίες οι οποίες βρίσκονται σε μία συνεχή κατάσταση αβεβαιότητας επειδή δεν είναι δυνατό να γίνει κάτι ανάλογο με την εκλογική διαδικασία που κάποτε ολοκληρώνεται. Στις περιπτώσεις αυτές, νέα πειράματα και καινούργιες παρατηρήσεις του περιβάλλοντος οδηγούν σε νέα δεδομένα. Αυτό συμβαίνει αρκετά συχνά στις κοινωνικές επιστήμες. Για παράδειγμα, η συνάρτηση κατανάλωσης του Keynes (*consumption function*) “επιβεβαιώθηκε” την δεκαετία του 40 αλλά θεωρήθηκε ακατάλληλη την δεκαετία του50. Ακόμη και στις φυσικές επιστήμες, όπου υπάρχει πληθώρα στοιχείων που προέρχονται από εργαστηριακά πειράματα, πολλές θεωρίες παραμένουν σε αβεβαιότητα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι θεωρίες για την δημιουργία του Σύμπαντος. Όπως παρατηρεί ο καθηγητής Στατιστικής Edward Leamer (*American EconomicReview, March 1983, B.36*), *"Όλες οι γνώσεις είναι στην πραγματικότητα ανθρώπινες πεποιθήσεις ή καλύτερα ανθρώπινες γνώμες. Αυτό που συχνά συμβαίνει στις φυσικές επιστήμες είναι ότι υπάρχει ένας μεγάλος βαθμός σύγκλισης απόψεων. Όταν αυτό συμβεί, η άποψη την οποία συμμερίζεται η πλειοψηφία καταξιώνεται ως αντικειμενικό γεγονός και αυτοί οι οποίοι την αμφισβητούν θεωρούνται τρελλοί".* Η ιστορία όμως είναι γεμάτη με παραδείγματα από απόψεις που έχασαν το καθεστώς της "κρατούσας άποψης", με περιπτώσεις όπου "αντικειμενικές αλήθειες" συρρικνώθηκαν στις σκοτεινές γωνιές των κοινωνικών σχέσεων".

Επί πολλούς αιώνες πριν από τον Κοπέρνικο, οι άνθρωποι πίστευαν ότι ο ήλιος περιστρέφεται γύρω από την γη. Ειδικοί πίστευαν ότι τα βαριά αντικείμενα πέφτουν με μεγαλύτερη ταχύτητα από ό,τι τα ελαφρά μέχρις ότου ο Γαλιλαίος έκανε το γνωστό πείραμα από τον Πύργο της Πίζας. Η φυσική του Newton αντικαταστάθηκε
από τη θεωρία του Einstein. Οι επιστήμονες βρίσκουν διαρκώς νέους τρόπους για να ελέγξουν παλιές θεωρίες ή καινούργιους τρόπους για να εξηγήσουν παλιά δεδομένα και έτσι οι αδυναμίες παλαιών θεωριών είναι δυνατό να αποκαλυφθούν.

1.8 **Σχέση Διαστημάτων Εμπιστοσύνης Και Ελέγχου Υποθέσεων**

Στην πραγματικότητα, οι δύο αυτές έννοιες και μεθοδολογίες αποτελούν τις δύο όψεις του αυτού νομίσματος. Οι έλεγχοι υποθέσεων είναι ουσιαστικά μια διαφορετική ερμηνεία και προσέγγιση της εκτίμησης με διαστήματα εμπιστοσύνης. Η σχέση αυτή είναι ιδιαίτερα εμφανής στους αμφίπλευρους ελέγχους υποθέσεων. Όταν, για παράδειγμα, κατασκευάζουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή ενός πληθυσμού είναι σαν να θεωρούμε το διάστημα αυτό ως την περιοχή αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης. Στην πραγματικότητα, η λογική ισοδυναμία των ελέγχων υποθέσεων και των διαστημάτων εμπιστοσύνης είναι ότι μια υπόθεση απορρίπτεται εάν βρίσκεται έξω από το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης. Ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή μ ενός πληθυσμού, περιλαμβάνει όλες τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει το μ σε απόσταση δύο, περίπου, τυπικών αποκλίσεων από τον δειγματικό μέσο (στην περίπτωση του 95% διαστήματος εμπιστοσύνης).Αν ο δειγματικός μέσος απέχει περισσότερο από δύο τυπικές αποκλίσεις (για την ακρίβεια 1.96) από την τιμή η οποία καθορίζεται με την μηδενική υπόθεση, τότε η μηδενική υπόθεση βρίσκεται έξω από το διάστημα εμπιστοσύνης.

Επομένως, ένας έλεγχος υποθέσεων μπορεί να γίνει απλώς με την κατασκευή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης. Εξάλλου, όταν λέμε ότι έχουμε 95% εμπιστοσύνη (βεβαιότητα) ότι ένα διάστημα εμπιστοσύνης θα περιλαμβάνει την πραγματική τιμή μ, είναι σαν να λέμε ότι αν το μ ήταν ίσο με μια από τις τιμές που έχουν αποκλεισθεί (που βρίσκονται έξω από το διάστημα εμπιστοσύνης) δεν θα υπήρχε πιθανότητα μεγαλύτερη από 5% ότι ο δειγματικός μέσος θα βρισκόταν τόσο μακριά από την τιμή αυτή. Η μικρή πιθανότητα της αναντιστοιχίας αυτής είναι εκείνη που οδηγεί στον αποκλεισμό των τιμών που βρίσκονται έξω από το διάστημα εμπιστοσύνης.

Η προηγούμενη ανάλυση εξηγεί και τους λόγους για τους οποίους όταν δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση, στην περίπτωση που η υπόθεση αυτή είναι απλή, αποφεύγουμε να κάνουμε την δήλωση ότι δεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση και λέμε ότι δεν έχουμε αρκετές ενδείξεις να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση. Αυτό γιατί, από όσα είπαμε προηγουμένως, συνάγεται ότι η αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης σημαίνει ότι η τιμή της παραμέτρου την οποία υποθέτουμε με τη μηδενική υπόθεση βρίσκεται μέσα στο αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης (δηλαδή στην περιοχή αποδοχής). Επομένως, η τιμή αυτή της παραμέτρου (η τιμή της παραμέτρου κάτω από τη μηδενική υπόθεση) είναι μία από τις άπειρες τιμές που είναι αποδεκτές για την παράμετρο και που βρίσκονται μέσα στο διάστημα εμπιστοσύνης. Προκειμένου ο ερευνητής να συμπεράνει ότι μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης σημαίνει και αποδοχή της θα πρέπει να έχει υπολογίσει την πιθανότητα λάθους δευτέρου είδους, δηλαδή το β. (Την πιθανότητα να αποδεχθεί την H_0 παρότι η H_0 δεν είναι σωστή). Για τον λόγο αυτό, πριν προχωρήσει κανείς σε αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης, όταν η υπόθεση αυτή είναι απλή, θα πρέπει να έχει μελετήσει την ισχύ του ελέγχου. Αυτό δεν είναι πάντοτε εύκολο και αυτός είναι ο λόγος που αποφεύγουμε να αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση σε περίπτωση απλών υποθέσεων όταν δεν απορρίπτεται η H_0, αλλά λέμε ότι δεν έχουμε αρκετές ενδείξεις για απόρριψή της.

Από τη μορφή των διαστημάτων εμπιστοσύνης, προκύπτει ότι όσο αυξάνει το μέγεθος του δείγματος το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης συρρικνώνεται. Στην ακραία περίπτωση που το δείγμα είναι ολόκληρος ο πληθυσμός, ο δειγματικός μέσος θα συμπίπτει με την μέση τιμή του πληθυσμού και επομένως δεν θα υπάρχει καθόλου δειγματικό λάθος. Στην περίπτωση αυτή, οποιαδήποτε απλή μηδενική υπόθεση θα απορρίπτεται εκτός βέβαια από εκείνην που θα αναφέρεται στην ακριβή τιμή της μέσης τιμής του πληθυσμού. Όταν όμως το δείγμα υπολείπεται, έστω και λίγο, του πληθυσμού, η πιθανότητα να διαλέξει κανείς την ακριβή τιμή της παραμέτρου εκ των προτέρων είναι μηδενική. Από την σχέση διαστημάτων εμπιστοσύνης και ελέγχων υποθέσεων προκύπτει ότι όσο αυξάνει το μέγεθος του δείγματος, όσο δηλαδή συρρικνώνεται το διάστημα εμπιστοσύνης, τόσο πιθανότερη γίνεται η απόρριψη μιας απλής μηδενικής υπόθεσης. Επομένως, οποιαδήποτε μηδενική υπόθεση και αν χρησιμοποιήσουμε μπορούμε να την απορρίψουμε συγκεντρώνοντας απλώς αρκετά δεδομένα. Συμπερασματικά λοιπόν, θα μπορούσε κανείς να πει με μια ακραία θέση ότι απλές υποθέσεις που δεν απορρίπτονται είναι μόνο αυτές για τις οποίες δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να τις απορρίψουμε.[6]

[6] Κολύβα Μαχαίρα Φ., Μπόρα Σέντα Ε., (1998) <<Στατιστική Θεωρία και Εφαρμογές>>. Εκδόσεις Ζήτη , Θεσσαλονίκη

Κεφάλαιο Δεύτερο

Έλεγχος Στατιστικών υποθέσεων

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ανάλυση του ελέγχου στατιστικών υποθέσεων για διάφορες παραμέτρους, αναλυτικά θα πραγματοποιηθεί έλεγχος για τη μέση τιμή, τη διασπορά, την αναλογία, τη διαφορά των μέσων τιμών, των διασπορών και τέλος των αναλογιών.

2.2 Έλεγχος Παραμέτρων Για Ένα Πληθυσμό

2.2.1 Έλεγχος υποθέσεων για τη μέση τιμή

Γνωστή τυπική απόκλιση

Έχοντας περιγράψει τις βασικές έννοιες της μεθόδου του ελέγχου υποθέσεων μπορούμε τώρα να εξετάσουμε την περίπτωση του ελέγχου της υπόθεσης H_0 όπου ο μέσος του πληθυσμού έχει την τιμή μ_0. Δηλαδή θα ελέγξουμε την υπόθεση H_0:$\mu=\mu_0$ έναντι της εναλλακτικής H_1:$\mu\neq\mu_0$. Ο έλεγχος της υπόθεσης θα γίνει με βάση την εκτίμηση του μέσου $\bar{X}$ από τα δεδομένα ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους n. Εάν η τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού είναι γνωστή τότε το κριτήριο ελέγχου είναι το $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, που σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα ακολουθεί την κανονική κατανομή για μέγεθος δείγματος $n>30$. Όλη η διαδικασία βασίζεται στη κατανομή δειγματοληψίας του μέσου. Εφόσον ο μέσος του πληθυσμού είναι γνωστός, δηλαδή ισούται με μ_0 βάσει του ισχυρισμού της υπόθεσης μηδέν γνωρίζουμε και την ακριβή θέση της κατανομής δειγματοληψίας του μέσου $\bar{X}$. Αυτό που μένει είναι να χωρίσουμε το εμβαδόν της κατανομής δειγματοληψίας σε δυο περιοχές: στην περιοχή αποδοχής της H_0 και στη περιοχή απόρριψης. Εάν το επίπεδο σημαντικότητας είναι α, τότε η περιοχή απόρριψης έχει εμβαδόν(πιθανότητα) α, και η περιοχή αποδοχής 1-α.

Στη περίπτωση που απορριφθεί η υπόθεση μηδέν, θα γίνει δεκτή η H_1:$\mu \neq \mu_0$. Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος μ μπορεί να είναι μικρότερος η μεγαλύτερος του μ_0. Έτσι τα όρια της περιοχής απόρριψης τοποθετούνται και στις δύο άκρες της κατανομής δειγματοληψίας , διαιρώντας το επίπεδο σημαντικότητας α σε α/2 στο κάτω άκρο και α/2 στο άνω. Οι τιμές του κριτηρίου Z που αντιστοιχούν στα όρια της περιοχής απόρριψης ονομάζονται κριτικές η κρίσιμες τιμές (critical values) . Η κάτω τιμή συμβολίζεται με $Z_{\alpha/2}$, διότι με βάση τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής του παραρτήματος, μέχρι την τιμή αυτή βρίσκεται το α/2 του συνολικού εμβαδού. Αντίστοιχα η άνω κριτική τιμή συμβολίζεται με $Z_{1-\alpha/2}$, διότι μέχρι την τιμή αυτή βρίσκεται εμβαδόν ίσο με 1-α/2. Επομένως, η τελική απόφαση θα παρθεί από την εξής διαδικασία. Εάν Z είναι η τιμή του κριτηρίου που προκύπτει από τα δεδομένα του τυχαίου δείγματος τότε

Εάν $Z<Z_{\alpha/2}$ ή $Z>Z_{1-\alpha/2}$ απορρίπτουμε την H_0. Αλλιώς δεχόμαστε την H_0.

Άγνωστη Τυπική Απόκλιση

Στις περισσότερες περιπτώσεις ελέγχου του μέσου μ, η τυπική απόκλιση του πληθυσμού σ είναι άγνωστη και ως εκ τούτου χρησιμοποιούμε την εκτίμηση s από τα δεδομένα του δείγματος. Ένα ο πληθυσμός είναι κανονικός, η κατανομή δειγματοληψίας, του μέσου $\bar{X}$ ακολουθεί την κατανομή t του student με n-1 βαθμούς ελευθερίας. Επίσης αν η κατανομή του πληθυσμού δεν είναι άκρως μη συμμετρική και το δείγμα είναι σχετικά μεγάλο (n>30), η κατανομή δειγματοληψίας του μέσου $\bar{X}$ ακολουθεί την κατανομή t όταν η σ είναι άγνωστη. Έτσι με άγνωστη την τυπική απόκλιση του πληθυσμού χρησιμοποιούμε το κριτήριο t student με v=n-1 βαθμούς ελευθερίας για τον έλεγχο της υπόθεσης μηδέν H_0:μ=μ_0:

$$t_v = \frac{\bar{X} - \mu 0}{s/\sqrt{n}}$$

Παρακάτω θα εξετάσουμε μια εφαρμογή του κριτηρίου. Η ΜΟΔΑ ΧΡΩΜΑ ΑΕ κάνει δοκιμαστική παραγωγή για ένα νέο υλικό που θα χρησιμοποιηθεί για κάλυμμα μικρών σκαφών. Το πάχος του νέου υλικού έχει καθοριστεί σε 5 χιλιοστά. Ο υπεύθυνος παραγωγής προκειμένου να κάνει τις τελικές ρυθμίσεις στη μηχανή παραγωγής, θέλει να ελέγξει εάν ο μέσος της δοκιμαστικής παραγωγής ισούται με 5 χιλιοστά (H_0:μ=5)

Οι παρατηρήσεις από δείγμα 30 μετρήσεων είναι οι εξής (σε χιλιοστά):

4.7 4.5 4.8 5.0 5.1 5.4 4.9 5.0 5.1 4.3 5.1 5.6 5.6 4.6 5.2

4.5 4.3 4.9 5.2 5.3 5.5 5.2 5.6 4.8 4.5 5.3 5.5 4.9 5.0 5.2

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι για τις n τιμές μιας μεταβλητής X, άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών της X από το μέσο $\bar{X}$ ισούται με:

$$\Sigma(X-\bar{X}^2)= \Sigma X^2-n\times\bar{X}^2=\Sigma X^2-(\Sigma X)^2/n$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να εκτιμήσουμε με την βοήθεια ενός υπολογιστή χεριού την τυπική απόκλιση s με τον τύπο :

$$s=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\Sigma X^2-n\times\bar{X}^2}{n-1}}$$

Από τα δεδομένα του δείγματος έχουμε

$$\Sigma X^2=760{,}2 \qquad \Sigma X=150{,}6 \qquad n=30$$

Έτσι

$$\bar{X}=\Sigma X/n=150{,}6/30=5{,}02$$

$$S=\sqrt{\frac{\Sigma X^2-n\times\bar{X}^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{760{,}2-30\times5{,}02^2}{30-1}}=0{,}38$$

Και το κριτήριο t του student ισούται με:

$$t_{29}=\frac{\bar{X}-\mu_0}{s_{\bar{X}}}=\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{5{,}02-5}{0{,}38/\sqrt{30}}=0{,}29$$

2.2.2 Έλεγχος παραμέτρων για τη διασπορά

(α) Ο πληθυσμός ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή διασπορά σ^2

Η στατιστική υπόθεση για τη διασπορά σ^2 είναι όπως και για τη μέση τιμή, δηλαδή $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$. με κατάλληλη εναλλακτική υπόθεση H_1 ανάλογα αν ο έλεγχος είναι δίπλευρος ή μονόπλευρος. Η στατιστική q του παραμετρικού ελέγχου

$$q = \chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma_o^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

διασπορά	*κατανομή της X*	n	*κατανομή στατιστικής q*
γνωστή	κανονική		$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$
γνωστή	μη κανονική	μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$
γνωστή	μη κανονική	μικρό	—
άγνωστη		μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$
άγνωστη	κανονική	μικρό	$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$
άγνωστη	μη κανονική	μικρό	—

Πίνακας : Στατιστική ελέγχου υπόθεσης $H_0: \mu = \mu_0$ ανάλογα με τη γνώση της διασποράς και κατανομής της τ.μ. X καθώς και με το μέγεθος n του δείγματος όπου s^2 είναι η εκτιμήτρια συνάρτηση της διασποράς. Από την κατανομή X^2 με $n - 1$ βαθμούς ελευθερίας και για επίπεδο σημαντικότητας α βρίσκουμε τις κρίσιμες τιμές και η περιοχή απόρριψης είναι ανάλογα με τον τύπο ελέγχου (αυτή η κατανομή δεν είναι συμμετρική)

1. $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, $R = \{\chi^2 | \chi^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2} \vee \chi^2 > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\}$.

2. $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$, $R = \{\chi^2 | \chi^2 < \chi^2_{n-1,\alpha}\}$

3. $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $R = \{\chi^2 | \chi^2 > \chi^2_{n-1,1-\alpha}\}$

Αν η δειγματική στατιστική ελέγχου $\tilde{\chi}^2$ (υπολογίζεται θέτοντας στη σχέση ……την εκτίμηση S^2 από το δείγμα ανήκει στην R η H_0 απορρίπτεται. Η p-τιμή για τα τρία είδη ελέγχου είναι

1.H_1 :$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, $p = P(\chi^2 < \bar{\chi}^2 \vee \chi^2 > \bar{\chi}^2$ }.

2. H_1 : $\sigma^2 < \sigma_0^2$, $p = P(\chi^2 < \bar{\chi}^2$ }.

3. H_1 : $\sigma^2 > \sigma_0^2$, $p = P(\chi^2 > \bar{\chi}^2$}.

2.2.3 Έλεγχος υποθέσεων για την αναλογία

Για ελέγχους υποθέσεων που αναφέρονται σε αναλογίες πληθυσμών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής δεδομένου ότι, λόγω της προσέγγισης της διωνυμικής κατανομής από την κανονική κατανομή, ισχύει ότι

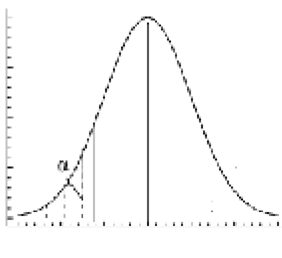
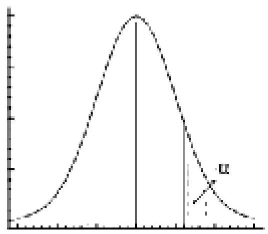
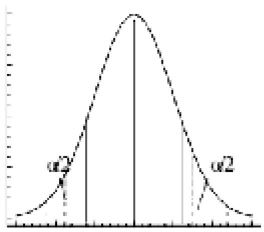
$$X \sim N(np, npq)$$

όπου X ο αριθμός των επιτυχιών σε μία ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και επομένως,

$$Z = \frac{X - \mathbf{np}}{\sqrt{npq}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Δηλαδή, η εκτιμήτρια $\bar{p} = \frac{X}{n}$ του ποσοστού επιτυχιών στον πληθυσμό που προσδιορίζεται από το ποσοστό επιτυχιών στο δείγμα μπορεί να προσεγγισθεί από την τυπική κανονική κατανομή.
Επομένως, όπως και στους ελέγχους υποθέσεων της κανονικής κατανομής, μπορούμε κατά προσέγγιση να χρησιμοποιήσουμε στους

ελέγχους υποθέσεων για αναλογίες τους κανόνες που συνοψίζονται
στον πίνακα που ακολουθεί.

$\mathbf{H_0 : p = p_0}$		
$\mathbf{H_1 : p > p_0}$	$\mathbf{H_1 : p < p_0}$	$\mathbf{H_1 : p \neq p_0}$
Απορρίπτω την H_0 αν $Z_0 = \dfrac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} > Z_{1-\alpha}$ ή ισοδύναμα, αν $\frac{X}{n} > p_0 + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0q_0/n}{n}}$  $-Z_{1-\alpha}$	Απορρίπτω την H_0 αν $Z_0 = \dfrac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} < Z_{1-\alpha}$ ή ισοδύναμα, αν $\frac{X}{n} < p_0 + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0q_0/n}{n}}$  $Z_{1-\alpha}$	Απορρίπτω την H_0 αν $Z_0 > Z_{1-\alpha/2}$ ή αν $Z_0 < Z_{1-\alpha/2}$ ή ισοδύναμα, αν $\frac{X}{n} < p_0 + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0q_0/n}{n}}$ ή αν $\frac{X}{n} > p_0 + Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0q_0/n}{n}}$  $-Z_{1-\alpha/2}$ $Z_{1-\alpha/2}$

Σημείωση: Η p-τιμή (το παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας)
υπολογίζεται στην περίπτωση ελέγχου υποθέσεων αναλογιών με τον ίδιο τρόπο που
υπολογίζεται στον έλεγχο υποθέσεων για την μέση
τιμή πληθυσμού που ακολουθεί την κανονική κατανομή με γνωστή
διακύμανση.

Παράδειγμα:

Σε μία πόλη ένας υποψήφιος δήμαρχος είχε στις τελευταίες δημοτικές εκλογές ποσοστό ψήφων 20%. Για να ελεγχθεί η ένδειξη ότι ο υποψήφιος δήμαρχος αρχίζει να χάνει ψηφοφόρους παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα 100 ψηφοφόρων και βρίσκουμε ότι το 15% θα ξαναψηφίσουν τον παραπάνω υποψήφιο. Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% να ελεγχθεί η υπόθεση:

$$H_0: P=0,20$$

$$H_1: P=0,20$$

Λύση:

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο (n=100), θα χρησιμοποιήσουμε ως κριτήριο την τιμή:

$$Z=\frac{\bar{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_{0(1-P_0)}}{n}}}=\frac{0,15-0,20}{\sqrt{\frac{0,20\times 0,80}{100}}}=-1,25$$

Από τους πίνακες της κανονικής κατανομής, για επίπεδο σημαντικότητας α=5% και μονόπλευρο έλεγχο, θα έχουμε $-z_\alpha = -1,645$

Επειδή $-z_\alpha < Z$, αφού -1,645<-1,25, η υπόθεση γίνεται δεκτή, δηλαδή το ποσοστό των ψηφοφόρων δεν έχει αλλάξει.[7]

---

[7] Χαλικιάς Ι. (2003) <<Στατιστική-Μέθοδοι Ανάλυσης για Επιχειρηματικές Αποφάσεις. Β΄ Έκδοση>> Εκδόσεις Rosili , Αθήνα.

2.3 Έλεγχος υποθέσεων για δυο πληθυσμούς

2.3.1 Έλεγχος για τη διαφορά μέσων τιμών $\mu_1 - \mu_2$

Μέχρι τώρα περιγράψαμε τις αρχές του ελέγχου των υποθέσεων που βασίζονται σε ένα δείγμα παρατηρήσεων. Στις επόμενες παραγράφους θα επεκτείνουμε τις βασικές αρχές του ελέγχου υποθέσεων για δύο δείγματα.

Αν από δύο κανονικούς πληθυσμούς που έχουν μέσους μ_1 και μ_2 και διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2, πάρουμε δύο τυχαία και ανεξάρτητα μεταξύ τους δείγματα μεγέθους n_1 και n_2 αντίστοιχα και υπολογίσουμε τους μέσους αριθμητικούς των δειγμάτων αυτών $\bar{X}_1$ και $\bar{X}_2$ αντίστοιχα, τότε μπορούμε να ελέγξουμε την υπόθεση H_0: μ1 - μ2 με τους παρακάτω συνδυασμούς.

1) $H_0: \mu_1-\mu_2=0$ ή $H_0: \mu_1=\mu_2$

   $H_1: \mu_1-\mu_2>0$ ή $H_0: \mu_1>\mu_2$

2) $H_0: \mu_1-\mu_2=0$ ή $H_0: \mu_1=\mu_2$

   $H_1: \mu_1-\mu_2<0$ ή $H_0: \mu_1<\mu_2$

3) $H_0: \mu_1-\mu_2=0$ ή $H_0: \mu_1=\mu_2$

   $H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0$ ή $H_0: \mu_1\neq\mu_2$

Ανάλογα με το αν οι διακυμάνσεις του πληθυσμού $\sigma_1{}^2$ και $\sigma_2{}^2$ είναι γνωστές η άγνωστες, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Οι διακυμάνσεις $\sigma_1{}^2$ και $\sigma_2{}^2$ να είναι γνωστές

Εφόσον $\bar{X}_1$ και $\bar{X}_2$ είναι οι μέσοι αριθμητικοί των δύο τυχαίων και ανεξάρτητων δειγμάτων, τότε η κατανομή δειγματοληψίας της διαφοράς $\bar{X}_1$ - $\bar{X}_2$ έχει μέσο $\mu_1-\mu_2$, διακύμανση $\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}$ και τυπική απόκλιση $\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}$, και επομένως η τυχαία μεταβλητή:

$$Z = \frac{(\bar{X}1 - \bar{X}2)-(\mu1-\mu2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}$$

θα ακολουθεί την τυπική κατανομή N(0,1), και με την προϋπόθεση ότι ισχύει η βασική υπόθεση:

H_0: $\mu_1=\mu_2$ ή $H_0: \mu_1-\mu_2=0$ θα έχουμε:

$$Z = \frac{\bar{X}1 - \bar{X}2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί το κριτήριο ελέγχου των παραπάνω υποθέσεων (1) ,(2), (3)

1) Η υπόθεση H_0 του πρώτου συνδυασμού γίνεται δεκτή όταν:

$$Z<z_a$$

Την τιμή z_a τη βρίσκουμε στους πίνακες της κανονικής κατανομής, σε επίπεδο σημαντικότητας α.

2)Η υπόθεση H_0 του δεύτερου συνδυασμού γίνεται δεκτή όταν:

$$-z_a<Z$$

3)Η υπόθεση H_0 του τρίτου συνδυασμού γίνεται δεκτή όταν :

$$-z_{a/2}<Z< z_{a/2}$$

β) Οι διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 να είναι άγνωστες και άνισες και το μέγεθος του δείγματος μικρό.

Τότε η υπόθεση H_0 των τριών παραπάνω συνδυασμών ελέγχεται με το κριτήριο:

$$t = \frac{\bar{X}1 - \bar{X}2}{\sqrt{\frac{S1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

γ) Οι διακυμάνσεις σ_1^2 και σ_2^2 να είναι άγνωστες και ίσες και το μέγεθος του δείγματος μικρό.

Τότε η υπόθεση H_0 των τριών παραπάνω συνδυασμών ελέγχεται με το κριτήριο:

$$t = \frac{\bar{X}1 - \bar{X}2}{\sqrt{S^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} \quad \text{όπου}$$

$$S^2=\frac{(n_{1-1})S_1^2 +(n_{2-1})S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Και $n_1 + n_2 - 2$ οι βαθμοί ελευθερίας.

Η τιμή t στην (β) και στην (γ) περίπτωση συγκρίνεται με την τιμή που παίρνουμε από τους πίνακες της κατανομής t Student με v=$n_1 + n_2 - 2$ βαθμούς ελευθερίας. ‘Ετσι:

1) Η υπόθεση H_0 του πρώτου συνδυασμού γίνεται δεκτή όταν :

$$t<t_{v,2\alpha}$$

2) Η υπόθεση H_0 του δεύτερου συνδυασμού γίνεται δεκτή όταν :

$$-t_{v,2\alpha}<t$$

3) Η υπόθεση H_0 του τρίτου συνδυασμού γίνεται δεκτή όταν

$$-t_{v,\alpha}<t<t_{v,\alpha}$$

2.3.2 'Ελεγχος για τη διαφορά δύο αναλογιών $\hat{p}_1$- $\hat{p}_2$

΄Οταν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο πληθυσμούς ως προς μια ιδιότητα κάνουμε έλεγχο για την μηδενική υπόθεση ότι οι δύο αναλογίες p_1 και p_2 είναι ίσες, ή αντίστοιχα H_0 : p_1- p_2=0, όπου η κάθε αναλογία εκφράζει το ποσοστό των στοιχείων που πληρούν την συγκεκριμένη ιδιότητα στον αντίστοιχο πληθυσμό. Αν $\hat{p}_1$ είναι η αναλογία που μετρήσαμε σε τυχαίο δείγμα μεγέθους n1 από τον πρώτο πληθυσμό και $\hat{p}_2$ είναι η αναλογία σε τυχαίο δείγμα μεγέθους n2 από το δεύτερο πληθυσμό και τα δείγματα είναι μεγάλα τότε

$$z \equiv \frac{(\widehat{p}_1 - \hat{p}_2) - (\mathrm{p1} - \mathrm{p2})}{\sqrt{\frac{\mathrm{p1}(1-\mathrm{p1})}{n_1}} + \sqrt{\frac{\mathrm{p2}(1-\mathrm{p2})}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

Σύμφωνα με τη μηδενική υπόθεση είναι p1 = p2 = p και η στατιστική ελέγχου είναι

$$q = z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} \sim N(0, 1).$$

Για να βρούμε τη στατιστική ελέγχου από το δείγμα εκτιμούμε την κοινή αναλογία p από τα δύο δείγματα

$$\hat{p} = \frac{\mathrm{n1}\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_{1+}n_2} \qquad \text{και βρίσκουμε}$$

$$\tilde{Z} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$$

Οι κρίσιμες τιμές κι οι περιοχές απόρριψης για δίπλευρο και μονόπλευρο έλεγχο είναι όπως και στις άλλες περιπτώσεις που η στατιστική ελέγχου ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή.

Παράδειγμα:

Μια υφαντουργική βιομηχανία προκειμένου να προγραμματίσει μαζική παραγωγή ενός είδους υφάσματος, έστειλε δείγματα από το ίδιο ύφασμα, αλλά με διαφορετικά χρώματα σε διάφορους εμπόρους. Συγκεκριμένα έστειλε 200 δείγματα κόκκινου και 200 δείγματα πράσινου χρώματος σε εμπόρους της Αθήνας και της Θεσσαλονίκης. Αποτέλεσμα αυτού ήταν να πάρει 130 παραγγελίες από εκείνους που πήραν κόκκινα δείγματα και 100 παραγγελίες από άλλους που πήραν πράσινα δείγματα. Να ελεγχθεί κατά πόσον υπάρχει ένδειξη ότι τα συγκεκριμένα χρώματα επηρεάζουν τις πωλήσεις.

Απάντηση :

Η υπόθεση που πρέπει να ελέγξουμε εδώ είναι η εξής:

H_0: $p_κ = p_π$

H_1: $p_κ \neq p_π$

Δηλαδή τα χρώματα δεν επηρεάζουν τις πωλήσεις του συγκεκριμένου προϊόντος. Εφόσον υποθέτουμε ότι $p_κ=p_π$, το ίδιο ισχύει και για τις αναλογίες $\widehat{p_κ}$ και $\widehat{p_π}$. Η εκτίμηση του p από τα $\widehat{p_κ}$ και $\widehat{p_π}$ δίνεται από τη σχέση :

$$\hat{p}=\frac{nκ\hat{p}_κ+n_π\hat{p}_π}{n_{κ+}n_π}=\frac{200(0{,}5+0{,}65)}{400}=\frac{1{,}15}{2}=0{,}575$$

Συνεπώς

$$Z=\frac{\hat{p}_κ-\hat{p}_π}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_κ}+\frac{1}{n_π})}}=\frac{0{,}65-50}{\sqrt{0{,}57*0{,}43*\frac{2}{200}}}=3{,}02.$$

Εφόσον η τιμή του Z είναι μεγαλύτερη $Z_{-α/2}=Z_{0,975}=1{,}96$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι υφίσταται διαφορά στις πωλήσεις εξαιτίας του χρώματος και επομένως απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση για επίπεδο σημαντικότητας 5%.[8]

---

[8] Ρούσσας Γ. (1994) <<Στατιστική Συμπερασματολογία Τ. ΙΙ, Έλεγχος Υποθέσεων >> Εκδόσεις Ζήτη , Αθήνα.

Κεφάλαιο Τρίτο

Εφαρμογές Του Ελέγχου Υποθέσεων Με Τη Βοήθεια Του SPSS

Εισαγωγή

Έχοντας ασχοληθεί στα προηγούμενα κεφάλαια αναλυτικά με το θεωρητικό κομμάτι του ελέγχου υποθέσεων, στο παρόν κεφάλαιο θα παραθέσουμε παραδείγματα καθώς και εφαρμογές επάνω στον έλεγχο υποθέσεων, για να γίνουν περισσότερο κατανοητά όσα προαναφέρθηκαν.

3.1 **Έλεγχος για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού**

Παράδειγμα 1

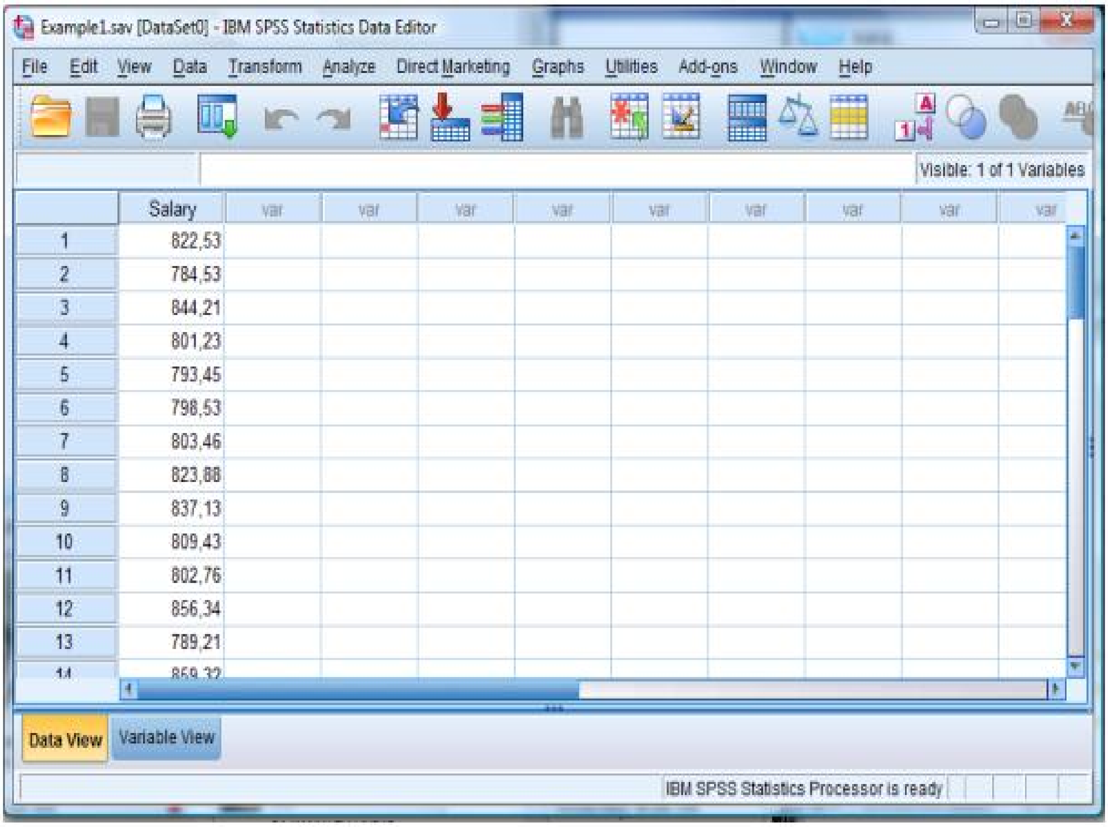
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι μισθοί (σε χρηματικές μονάδες) 40 τυχαία επιλεγμένων υπαλλήλων που εργάζονται στον ιδιωτικό τομέα.

822,53	784,53	844,21	801,23	793,45	798,53	803,46	823,88	837,13	809,43
802,76	856,34	789,21	859,32	807,67	798,12	800,56	840,43	787,13	815,43
819,32	806,24	784,12	844,44	825,53	779,23	824,12	813,56	817,43	825,51
802,22	816,34	803,72	804,12	835,37	849,43	834,29	826,21	827,10	828,78

Να ελέγξετε, με επίπεδο σημαντικότητας 5%, αν ο μέσος μισθός μ του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται το παραπάνω δείγμα είναι ίσος με μ_o = 817 χρηματικές μονάδες.

Λύση

Αρχικά περνάμε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τα παραπάνω δεδομένα στο SPSS σε μια στήλη (μεταβλητή Salary) στην οποία έχουμε 40 περιπτώσεις (cases).



Καθορίζουμε επίσης και στο πεδίο Variable View και τα χαρακτηριστικά της ποσοτικής μεταβλητής (Salary). Στην συνέχεια ελέγχουμε αν ισχύουν οι προυποθέσεις που θα αναφερθούν .

1. Το δείγμα μας να είναι τυχαίο

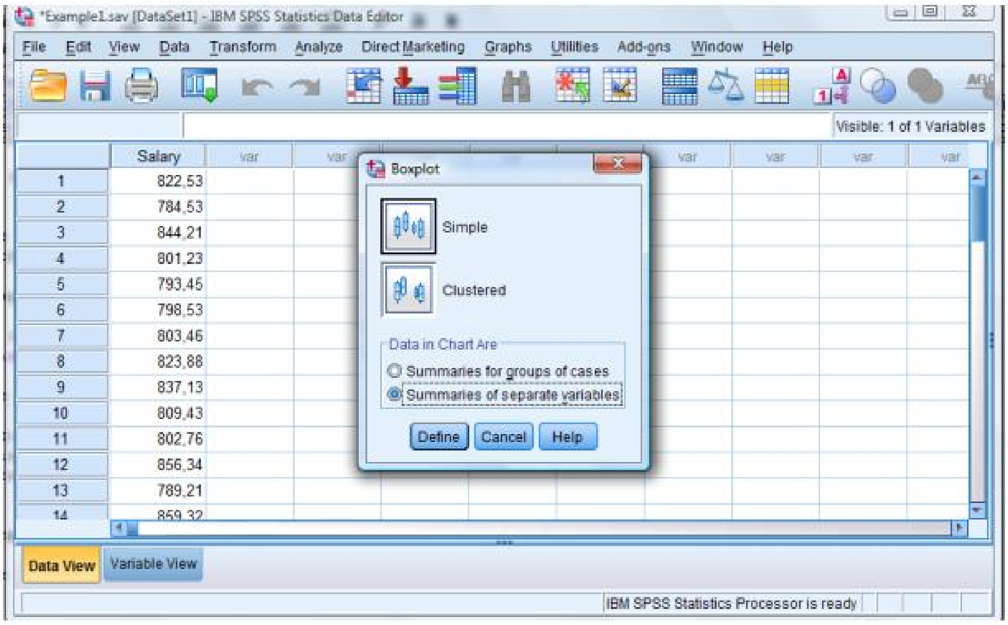
Αυτό προκύπτει από την εκφώνηση του παραδείγματος καθώς αναφέρεται ότι <<...40 τυχαία επιλεγμένων υπαλλήλων...>>.

2.**Δεν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις**

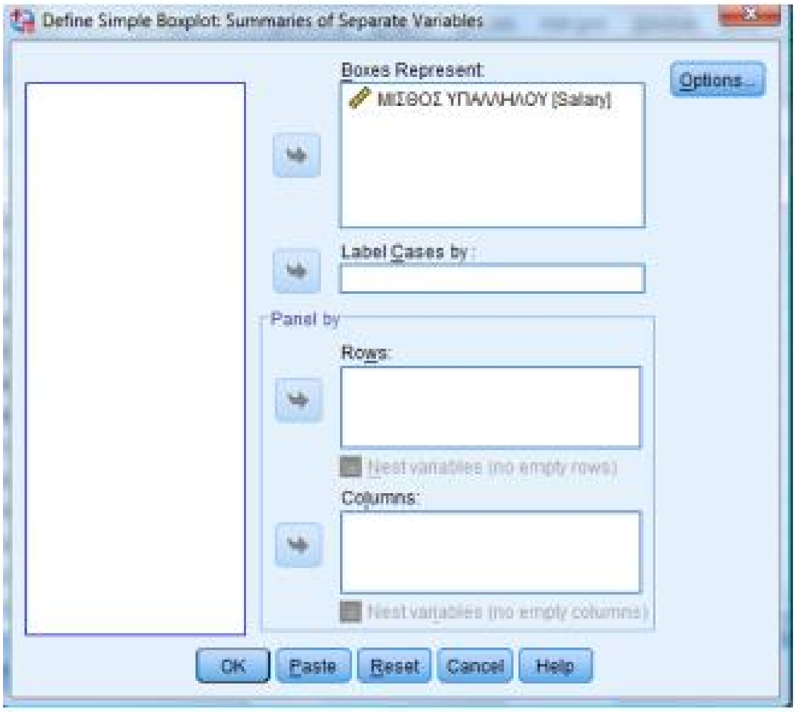
Στη συνέχεια ελέγχουμε αν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις. Ο έλεγχος θα γίνει γραφικά με τη βοήθεια θηκογράμματος boxplot. Για να κατασκευάσουμε το θηκόγραμμα ακολουθούμε τη παρακάτω διαδρομή.

Graphs/Legacy Dialogs/Boxplot

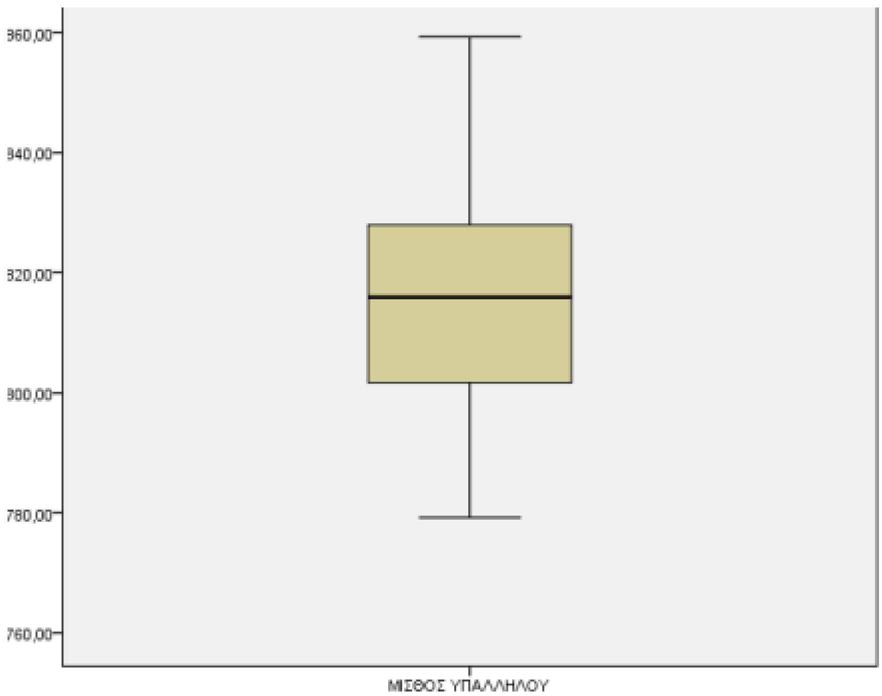
Στη συνέχεια στο παράθυρο που ακολουθεί επιλέγουμε Simple και Summaries of seperate variables όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



Τοποθετούμε την μεταβλητή Salary στο πλαίσιο Boxes Represented, όπως φαίνεται παρακάτω :

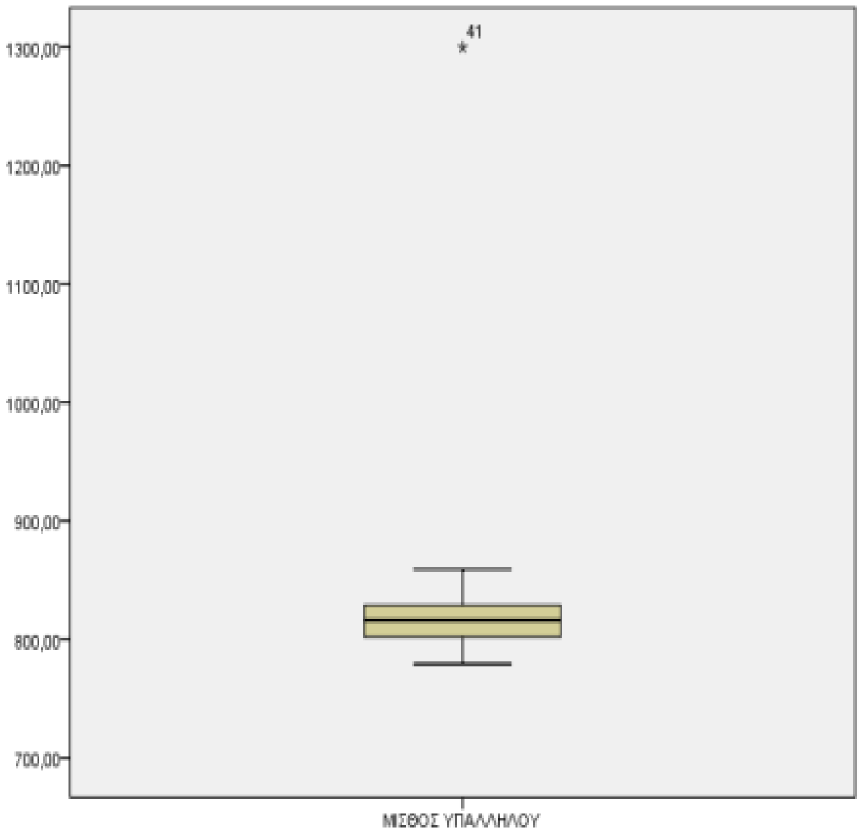


Μετά επιλέγουμε ΟΚ και προκύπτει το παρακάτω θηκόγραμμα (boxplot).



Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις.

Σε περίπτωση που είχαμε ακραίες παρατηρήσεις αυτές θα σημειώνονταν με * και τον αύξοντα αριθμό της παρατήρησης δίπλα στο αστεράκι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



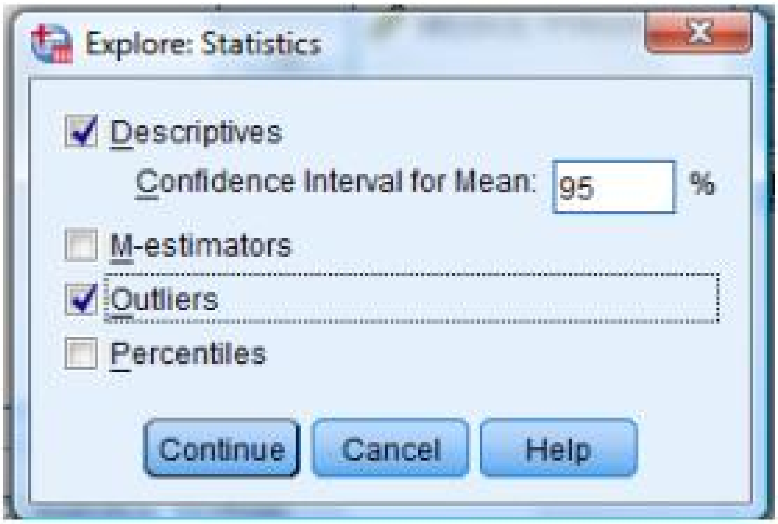
3) Η **κατανομή πληθυσμού από τον οποίο προήλθε το τυχαίο δείγμα είναι η κανονική κατανομή.**

΄Οπως προαναφέρθηκε ο έλεγχος κανονικότητας του δείγματος μπορεί να γίνει γραφικά αλλά και στατιστικά κριτήρια. Θα αναλύσουμε παρακάτω και τους δυο τρόπους. Ο έλεγχος με τα στατιστικά τεστ των Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk γίνεται με τον παρακάτω τρόπο. Ακολουθούμε την διαδρομή:

Analyze/Descriptive Statistics/Explore

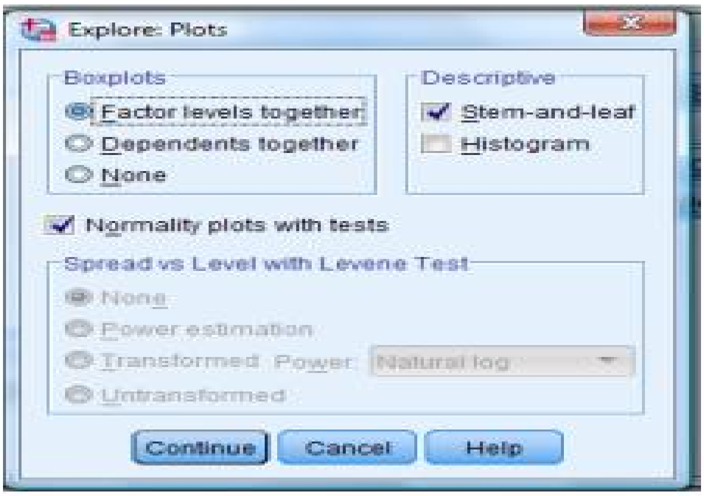
Το παράθυρο που προκύπτει είναι το εξής :

Σε αυτό το παράθυρο ελέγχουμε να έχει επιλεχθεί να η ένδειξη Both, κάτω αριστερά, που σημαίνει ότι το SPSS θα παραθέσει και στατιστικούς δείκτες και γραφήματα που μας βοηθούν στον έλεγχο της κανονικότητας. Αφού μετακινήσουμε τη μεταβλητή Salary δεξιά στο πλαίσιο Dependent List, προχωρούμε στις αναγκαίες ρυθμίσεις στα πλαίσια Statistics, Plots, Options. Στο πλαίσιο Statistics όπως φαίνεται στο επόμενο παράθυρο επιλέγουμε αν θέλουμε να δούμε τους περιγραφικούς δείκτες (τσεκάρουμε την ένδειξη Descriptives, αν θέλουμε διαφορετικό διάστημα εμπιστοσύνης, την ένδειξη Outliers αν θέλουμε να δούμε ακραίες τιμές).



Στη συνέχεια επιλέγουμε CONTINUE και επιστρέφουμε στο προηγούμενο παράθυρο.

Επιλέγοντας το πλαίσιο Plots προκύπτει το παρακάτω παράθυρο.



Στο παραπάνω παράθυρο επιλέγουμε οπωσδήποτε την ένδειξη Normality plot with tests, για να προκύψουν οι πίνακες και τα γραφήματα που σχετίζονται με τα στατιστικά κριτήρια για τον έλεγχο της κανονικότητας.

Στο πλαίσιο Options το SPSS μας δίνει την δυνατότητα να καθορίσουμε την πολιτική διαχείρισης των ελλειπουσών τιμών (missing values). Στη περίπτωση μας δεν έχει σημασία τι θα επιλέξουμε καθώς δεν έχουμε ελλειπούσες τιμές.

Στη συνέχεια επιλέγουμε ΟΚ και προκύπτουν στο SPSS τα γραφήματα και οι πίνακες που μας χρειάζονται για τον έλεγχο της κανονικότητας.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τον παρακάτω πίνακα

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
ΜΙΣΘΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΟΥ	,096	40	,200*	,978	40	,623

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

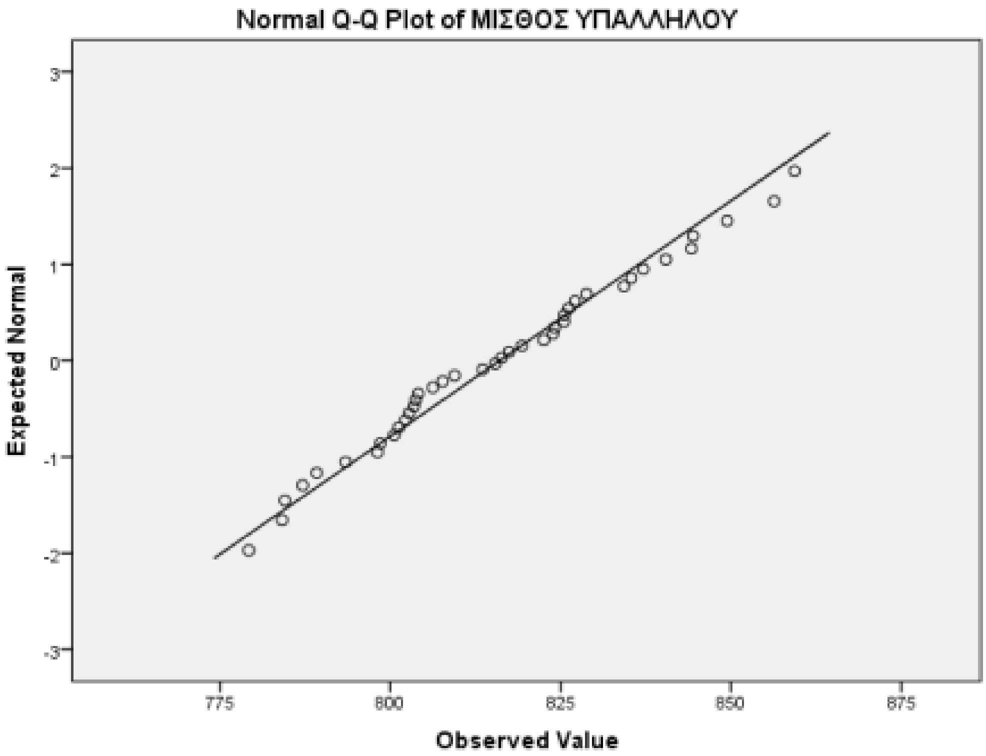
Παρατηρούμε ότι το Sign.=0,20=20% (p-value) για το στατιστικό κριτήριο Kolmogorov-Smirnov και το Sign.=0,623=62,3% (p-value) για το στατιστικό κριτήριο των Shapiro-Wilk. Αφού λοιπόν για το στατιστικό τεστ των Shapiro-Wilk Sign.=62,3%> 5% (το όριο που θέσαμε για να κρίνουμε τη μηδενική μας υπόθεση), συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική μας υπόθεση. Δηλαδή η κατανομή του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται το δείγμα μας είναι προσεγγιστικά κανονική.

Ο έλεγχος της κανονικότητας του δείγματος μπορεί να γίνει και γραφικά με τα διαγράμματα Normal Q-Q plot και Detrended Normal Q-Q Plot.

Τα διαγράμματα που αφορούν την κανονικότητα προκύπτουν με την ίδια διαδικασία όπως προκύπτουν και οι πίνακες που αφορούν τα στατιστικά τεστ των Kolmogorov-Smirmov και Shapiro-Wilk.

Το διάγραμμα Normal Q-Q Plot

Το διάγραμμα Normal Q-Q Plot που προκύπτει για το παράδειγμα μας είναι το παρακάτω.

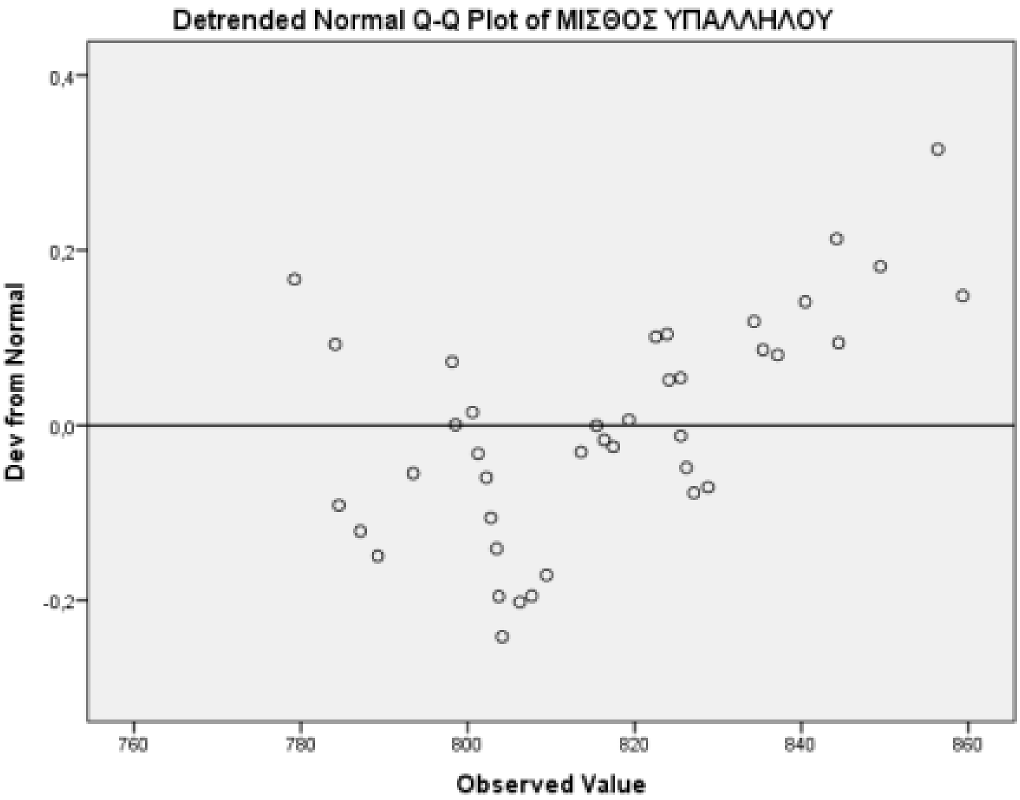


Για μέγεθος δείγματος μικρότερο του 50 ($n \leq 50$) επιλέγουμε το κριτήριο των Shapiro-Wilk, ενώ για μέγεθος δείγματος μεγαλύτερου του 50 ($n > 50$) επιλέγουμε το κριτήριο των Kolmogorov-Smirnov.

Στον άξονα των χ στο παραπάνω διάγραμμα βρίσκονται οι παρατηρούμενες τιμές του μισθού των υπαλλήλων και στον άξονα των y βρίσκονται οι αναμενόμενες τιμές αυτού. Σε μια ιδανική κατάσταση για την κανονικότητα, όλα τα κυκλάκια θα βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο των αξόνων. Αυτό όμως είναι σχεδόν απίθανο, οπότε μας ενδιαφέρει τα κυκλάκια να βρίσκονται πολύ κοντά στη διχοτόμο των αξόνων. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι το δείγμα ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή. Στο συγκεκριμένο διάγραμμα δεν έχουμε μεγάλες αποκλίσεις οπότε μπορούμε να πούμε ότι το δείγμα προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Το διάγραμμα Detrended Normal Q-Q Plot

Το διάγραμμα Detrended Normal Q-Q Plot που προκύπτει για το παράδειγμα μας είναι το παρακάτω.



Σε αυτό το διάγραμμα στον άξονα των χ βρίσκονται πάλι οι παρατηρούμενες τιμές για τη μεταβλητή Salary. Στον άξονα των *y* βρίσκονται όμως τα αντίστοιχα ποσοστιαία σημεία μιας τυπικής κανονικής κατανομής, η οποία κατασκευάζεται με βάση το μέγεθος του δείγματος.

Αυτό που κοιτάμε σε ένα τέτοιο διάγραμμα είναι τα κυκλάκια να είναι τυχαία κατανεμημένα, μέσα σε μια οριζόντια λωρίδα που σχηματίζεται με άξονα την ευθεία που διέρχεται από το μηδέν του κατακόρυφου άξονα, και διάμετρο αρκετά μεγάλη ώστε να περιλαμβάνει τα περισσότερα κυκλάκια. Αν ισχύει κάτι τέτοιο δεν έχουμε πρόβλημα κανονικότητας.

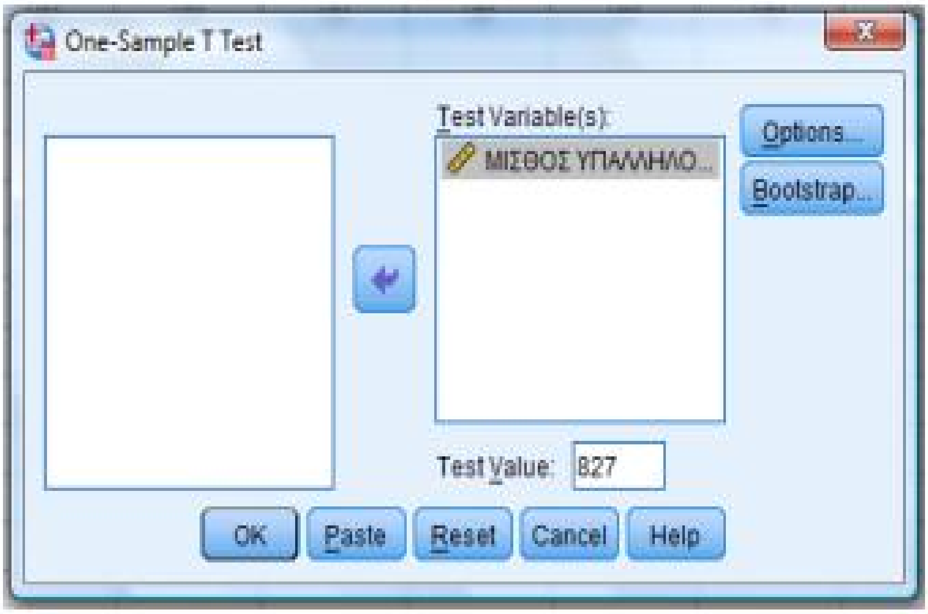
Αντίθετα, αν τα κυκλάκια δεν είναι τυχαία κατανεμημένα (π.χ. $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$) ή συσσωρεύσεις (δηλαδή σε μερικά σημεία υπάρχει μεγάλη πυκνότητα και σε άλλα όχι) τότε υπάρχει πρόβλημα με τη κανονικότητα του δείγματος.

Στο παράδειγμα μας στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι τα κυκλάκια είναι τυχαία κατανεμημένα γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το μηδέν στο κατακόρυφο άξονα και επομένως δεν έχουμε πρόβλημα κανονικότητας.

Για να παράγουμε χρήσιμες ποσότητες για το t-test στο SPSS ακολουθούμε την εξής διαδρομή :

Analyze/Compare Means/One-Sample T test

στο πλαίσιο Test Variable(s) τοποθετούμε τη μεταβλητή Salary και στο πλαίσιο Test Value εισάγουμε την τιμή 817 όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Και προκύπτουν οι παρακάτω δυο πίνακες

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
ΜΙΣΘΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΟΥ	40	816,0607	20,42072	3,22880

One-Sample Test

	Test Value = 817					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
ΜΙΣΘΟΣ ΥΠΑΛΛΗΛΟΥ	-,291	39	,773	-,93925	-7,4701	5,5916

Όπου βλέπουμε ότι στο πρώτο πίνακα έχουμε $n = 40$, $\bar{X} = 816$, $S = 20, 42$. Στο δεύτερο πίνακα έχουμε ότι *p_value*, = 0.773 > 0.05 επομένως δε μπορούμε να απορρίψουμε την $H_0 : \mu = \mu_0 = 817$ σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Εάν είχαμε ως εναλλακτική υπόθεση $H_a : \mu > \mu_0$ θα έπρεπε να πάρουμε *p - value*> = *p_value*,/ 2 αν $T(x) \geq 0$ και *p-value*> = 1-*p_value*,/ 2 αν $T(x) < 0$, ενώ αν είχαμε $H_a : \mu < \mu_0$ θα έπρεπε να πάρουμε *p - value*< = *p_value*,/ 2 αν $T(x) < 0$ και *p - value*< = 1 - *p_value*,/ 2$T(x) \geq 0$. Το *p - value*, είναι το *p - value* και $T(x)$ η τιμή του στατιστικού.

3.2 Έλεγχος για την ισότητα των μέσων τιμών δυο πληθυσμών (Ανεξάρτητα Δείγματα)

Παράδειγμα 2

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές της αμόλυβδης βενζίνης (σε χρηματικές μονάδες) 20 τυχαία επιλεγμένων πρατηρίων υγρών καυσίμων δυο διαφορετικών εταιρειών (Εταιρεία 1 και Εταιρεία 2).

Εταιρεία	Τιμή/ανά λίτρο βενζίνης
1	1,82
2	1,85
1	1,81
1	1,83
2	1,86
2	1,82
1	1,84
2	1,80
1	1,83
2	1,82
1	1,85
1	1,83
2	1,82
1	1,86
2	1,82
1	1,85
2	1,83
1	1,80
2	1,85
1	1,83

Επιθυμούμε να ελέγξουμε με επίπεδο σημαντικότητας 5% αν η μέση τιμή μ_1 του πληθυσμού των πρατηρίων υγρών καυσίμων της εταιρείας 1 είναι ίση με τη μέση τιμή μ_2 του πληθυσμού των πρατηρίων υγρών καυσίμων της εταιρείας 2.

Λύση :

Αρχικά θα ελέγξουμε αν ισχύουν οι παρακάτω προυποθέσεις :

1) **Το κάθε δείγμα μας να είναι τυχαίο**. Από τα δεδομένα του παραδείγματος αυτή η συνθήκη ικανοποιείται.

2) **Τα δυο δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους**.

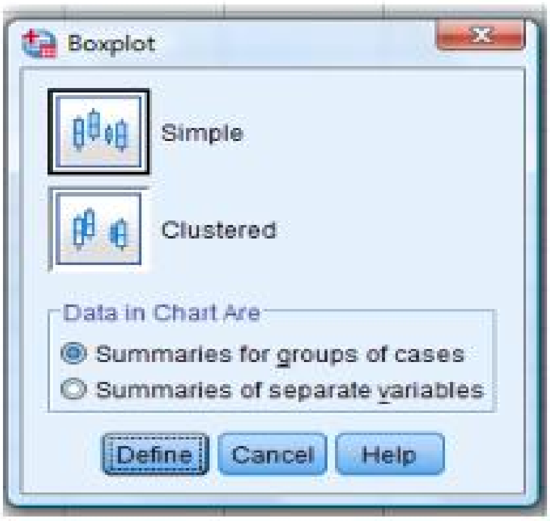
Προφανώς τα δυο δείγματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

3) **Δεν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις.** Για κάθε δείγμα ξεχωριστά θα ελέγξουμε την ύπαρξη ακραίων παρατηρήσεων με τη βοήθεια θηκογράμματος (boxplot).

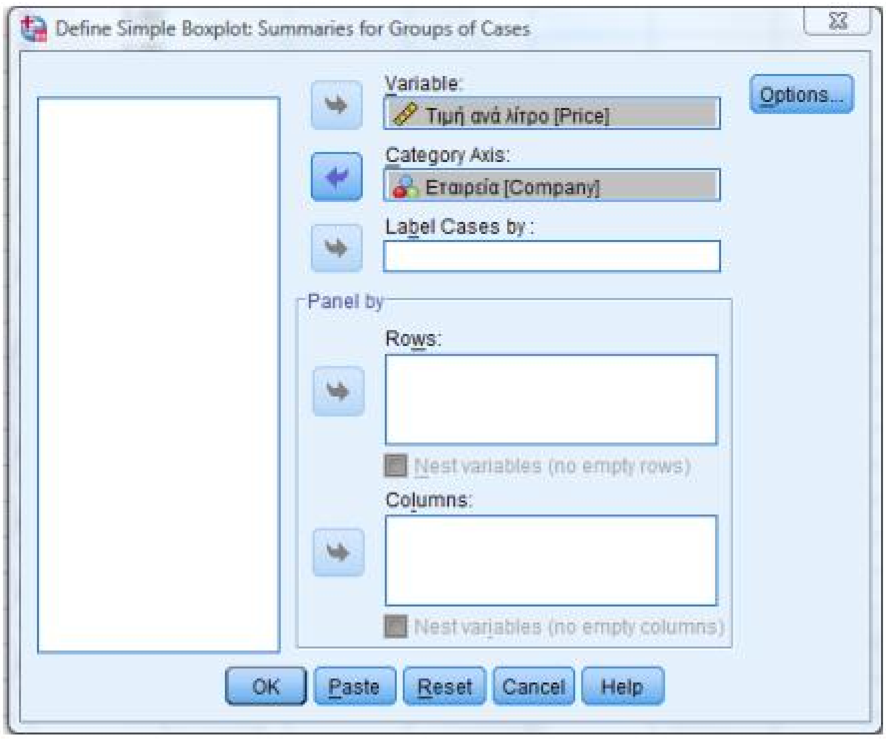
Για να κατασκευάσουμε τα θηκογράμματα για κάθε δείγμα ξεχωριστά ακολουθούμε τη παρακάτω διαδρομή :

Graphs/Legacy Dialogs/Boxplot

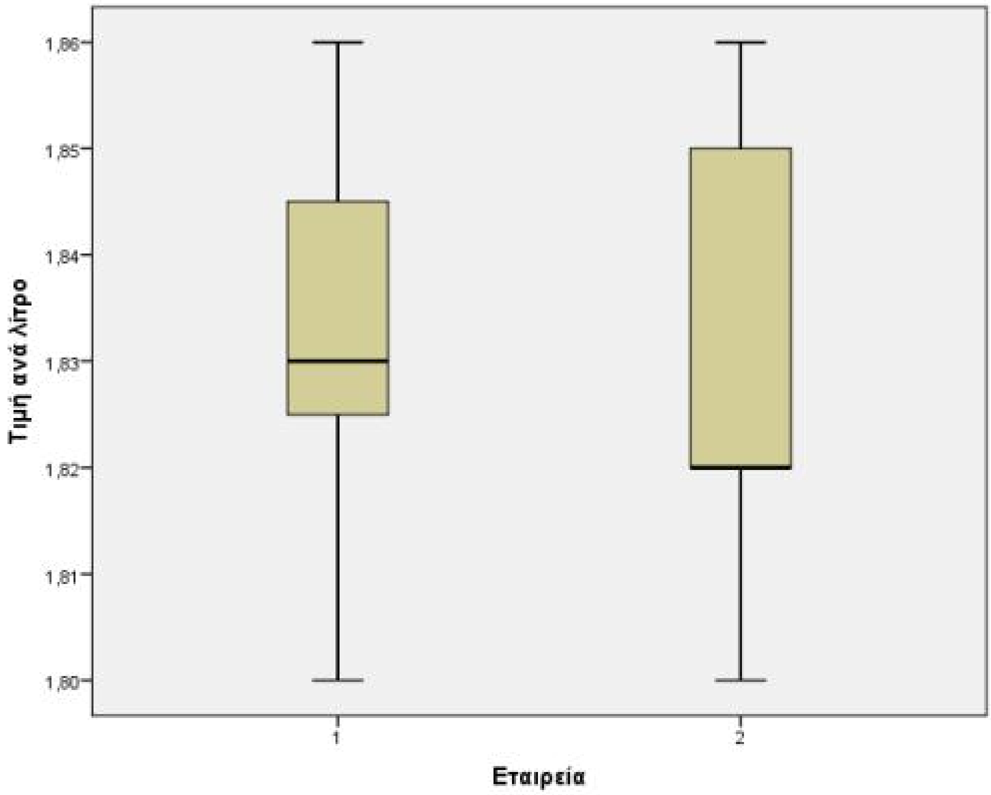
Στη συνέχεια επιλέγουμε Simple και Summaries for groups of cases όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Στη συνέχεια στο πλαίσιο που εμφανίζεται τοποθετούμε τη μεταβλητή Price στο πλαίσιο Variable και την μεταβλητή Company στο πλαίσιο Category Axis όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Αφού τέλος επιλέξουμε OK, προκύπτουν τα θηκογράμματα.



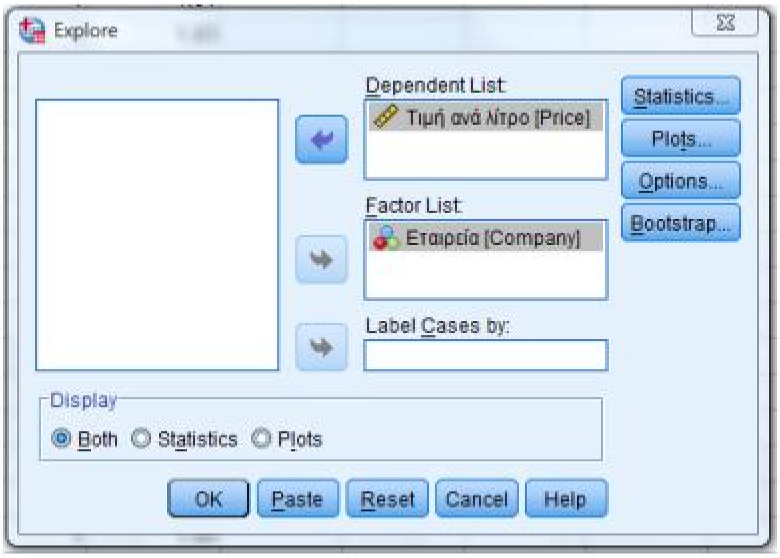
Παρατηρούμε λοιπόν ότι δεν έχουμε ακραίες παρατηρήσεις.

4) **Η κατανομή του πληθυσμού από τον οποίο προήλθε το κάθε δείγμα** , **είναι η κανονική κατανομή**.

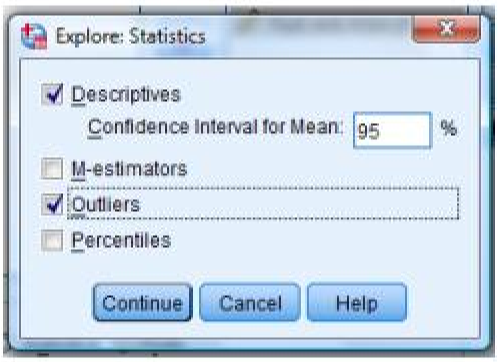
Για να ελέγξουμε τη κανονικότητα δυο δειγμάτων τρέχουμε τη διαδικασία Explore.

Analyze/Decriptive Statistics/Explore

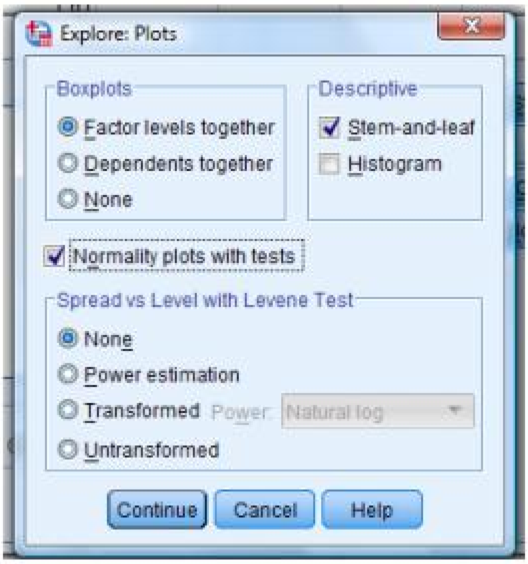
Στο παράθυρο που ακολουθεί τοποθετούμε τη τιμή Price στο πεδίο Dependent List και την μεταβλητή Company στο πεδίο Factor List.



Στο πλαίσιο Statistics εκτελούμε τις ενέργειες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Στη συνέχεια στο πλαίσιο Plots προσέχουμε να έχουμε επιλέξει τη ρύθμιση Normality plots with tests.



Στη συνέχεια επιλέγουμε Continue και στη μετά OK, οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Tests of Normality

		Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Εταιρεία	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Τιμή ανά λίτρο	1	,187	11	,200*	,959	11	,756
	2	,253	9	,101	,899	9	,249

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

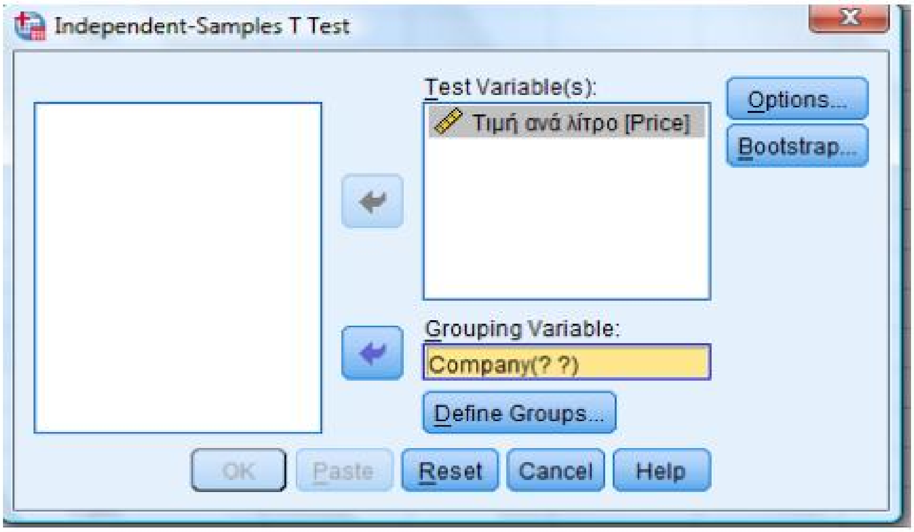
Επειδή τα δείγματα μας είναι μεγέθους < 50 μπορούμε να ασχοληθούμε μόνο με το στατιστικό τεστ των Shapiro-Wilk. Παρατηρούμε ότι για τα πρατήρια υγρών καυσίμων της εταιρείας 1 η $p\text{-}value_1 = 0,756 = 75,6\% > 5\%$ και για τα πρατήρια υγρών καυσίμων της εταιρείας 2 η $p\text{-}value_2 = 0,249 = 24,9\% > 5\%$. Επομένως και για τις δύο εταιρείες (επίπεδα της μεταβλητής Company) δεν έχουμε πρόβλημα κανονικότητας.

<u>Η εκτέλεση του t-test για δύο ανεξάρτητα δείγματα.</u>

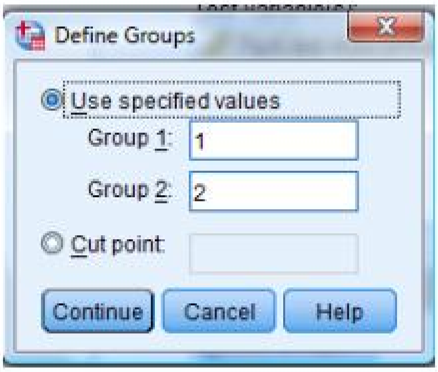
Εφόσον οι προϋποθέσεις για την εκτέλεση του t-test ικανοποιούνται, μπορούμε να προχωρήσουμε στην εκτέλεση του t-test ακολουθώντας την εξής διαδρομή:

Analyze/Compare Means/Independent-Samples T-test

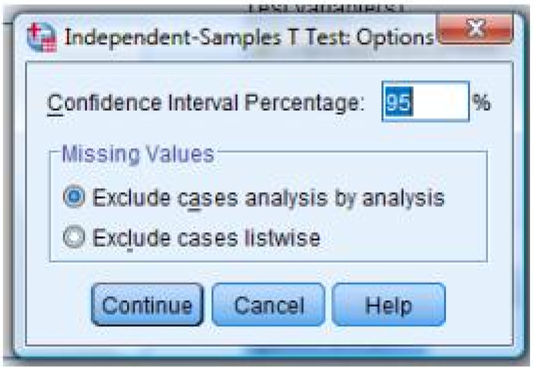
Στο παράθυρο που προκύπτει τοποθετούμε τη μεταβλητή Price στο πεδίο Test Variables και την μεταβλητή Company στο πεδίο Grouping Variable για να προσδιορίσουμε σε ποια μεταβλητή θα κάνουμε έλεγχο μέσων τιμών και ως προς ποια μεταβλητή θα κάνουμε το διαχωρισμό των περιπτώσεων.



Έπειτα επιλέγουμε Define Groups και θέτουμε τις τιμές για να διαχωρίσουμε τα δύο groups της μεταβλητής Price



Εν συνεχεία επιλέγουμε Continue και στο πεδίο Options καθορίζουμε το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας και διαχειριζόμαστε τις ελλείπουσες τιμές.



Επιλέγουμε Continue και ΟΚ και εμφανίζονται οι παρακάτω πίνακες

Group Statistics

	Εταιρεία	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Τιμή ανά λίτρο	1	11	1,8318	,01779	,00536
	2	9	1,8300	,01936	,00645

Στο παραπάνω πίνακα μας δίνονται κάποιοι δείκτες περιγραφικής στατιστικής για τα δύο δείγματα. Έτσι έχουμε ότι το μέγεθος του πρώτου δείγματος είναι 11 και του δευτέρου 9. Επίσης, έχουμε ότι η μέση τιμή της αμόλυβδης ανά λίτρο για τα πρατήρια της εταιρείας 1 είναι 1, 8318 ενώ για τα πρατήρια της εταιρείας 2 η μέση τιμή της αμόλυβδης ανά λίτρο είναι 1, 83.Επίσης μας δίνονται οι τυπικές αποκλίσεις

(Standard deviation) και το τυπικό σφάλμα μέσου όρου (Standard error of mean) για κάθε δείγμα.

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
Τιμή ανά λίτρο	Equal variances assumed	,235	,634	,219	18	,829	,00182	,00832	-,01566	,01929
	Equal variances not assumed			,217	16,548	,831	,00182	,00839	-,01592	,01956

Στον παραπάνω πίνακα βλέπουμε δύο T-test και θα επιλέξουμε το κατάλληλο αφού εξετάσουμε το τεστ του Levene, που βρίσκεται στο αριστερό μέρος του πίνακα και μας πληροφορεί για την ισότητα των πληθυσμιακών διασπορών.

Παρατηρούμε ότι για το τεστ Levene ισχύει 63, 4% > 5% (ή p-value= 0.634 > 0.05) και επομένως δεχόμαστε ότι οι διακυμάνσεις (διασπορές) είναι ίσες.

Επομένως, θα κοιτάξουμε στην πρώτη γραμμή του πίνακα (Equal variances assumed) όπου έχουμε *p - value* = 0, 829 > 0, 05 και επομένως αποδεχόμαστε την υπόθεση ότι οι μέσες τιμές στα πρατήρια υγρών καυσίμων των δυο εταιρειών είναι ίσες. Αν στο τεστ Levene βρίσκαμε *p - value* < 0, 05 (όταν έχουμε ε.ς. 5%) τότε θα κοιτάζαμε τη δεύτερη γραμμή του παραπάνω πίνακα.[9]

Δημητριάδης Ε. (2016) <<Στατιστική Επιχειρήσεων με εφαρμογές SPSS και LISPEL>>. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

3.3 **Ολοκληρωμένη εφαρμογή του ελέγχου υποθέσεων**

Με μια νέα μέθοδο προσδιορισμού του σημείου τήξης (σ.τ.) μετάλλων προέκυψαν οι παρακάτω μετρήσεις για το μαγγάνιο:

1267, 1262, 1267, 1263, 1258, 1263, 1268.

Να εξεταστεί αν η νέα μέθοδος σφάλει με ε.σ. 0.05, δεδομένου ότι το σ.τ. του μαγγανίου είναι 1260°C.

Λύση:

Έχουμε έναν αμφίπλευρο έλεγχο μέσου με άγνωστη διασπορά σε μικρό δείγμα (n=7):

Ho: $\mu = \mu_0$

H1: $\mu \neq \mu_0$, όπου $\mu_0 = 1260$

Εύκολα υπολογίζουμε το δειγματικό μέσο των παρατηρήσεων μας

$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 1264$ καθώς και τη δειγματική διασπορά $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{\mathrm{X}})^2 = 12{,}67$

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή (περιοχή απόρριψης της H0) είναι:

$$K: |t| = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S\sqrt{n}} > t_{\alpha/2,n-1}, \text{ με } \alpha = 0.05.$$

Έτσι $|t| = 2.98$, ενώ από τους πίνακες της κατανομής t προκύπτει ότι $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,6} = 2{,}447$, οπότε απορρίπτουμε την H_0, δηλαδή η νέα μέθοδος σφάλει.

2) Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν τα φορτία θραύσης (σε tn/cm^2) συνθετικών νημάτων δύο τύπων:

Τύπος Ι	1.2	0.3	0.8	0.5	0.4	0.9	1.0		
Τύπος ΙΙ	1.4	1.5	1.1	1.0	0.8	1.7	0.9	0.7	0.6

Υποθέτοντας ισότητα διασπορών να εξεταστεί αν οι δύο τύποι νημάτων έχουν την ίδια μέση αντοχή σε ε.σ. 0.05.

Λύση:

Έχουμε έναν αμφίπλευρο έλεγχο ισότητας μέσων με άγνωστες αλλά κοινές διασπορές:

Ho: $\mu_1 = \mu_2$

H1: $\mu_1 \neq \mu_2$, με $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

Εύκολα προκύπτει ότι $\bar{X}_1$=0.73, S_1^2 = 0.11, n_1=7 και $\bar{X}_2$=1.08, S_2^2 = 0.14, n_2=9.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |t| = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1}}} > t_{\alpha/2,v}$$

με $S_p^2 = \frac{(\mathbf{n_1}-\mathbf{1})\boldsymbol{S_1^2} + (\mathbf{n_2}-\mathbf{1})\boldsymbol{S_2^2}}{v}$, $v = n_1+n_2-2$ και α = 0.05.

Έτσι $|t|$ = 1.91, ενώ από τους πίνακες της κατανομής t προκύπτει ότι 2.145, οπότε αποδεχόμαστε την $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,\,14}$ = 2,145, δηλαδή οι δύο τύποι νημάτων έχουν την ίδια μέση αντοχή.

3) Έξη συνθετικά νήματα κόπηκαν στη μέση. Στο ένα τμήμα από κάθε ζεύγος εφαρμόστηκε μία ειδική χημική επεξεργασία για την αύξηση της αντοχής του, ενώ το άλλο αφέθηκε όπως είχε. Με βάση τα παρακάτω δεδομένα, όπου x_1 εκφράζει το

δείκτη αντοχής του τμήματος με χημική επεξεργασία και x_2 το δείκτη αντοχής του τμήματος χωρίς χημική επεξεργασία, να εξεταστεί αν αυξάνει κατά 2.0 τουλάχιστον μονάδες ο δείκτης αντοχής των τμημάτων με χημική επεξεργασία (α=0.10).

x_1	15.2	13.4	14.6	15.1	13.1	15.3
x_2	12.7	10.8	12.8	12.9	11.0	13.0

Λύση:

Έχουμε έναν έλεγχο διαφοράς μέσων εξαρτημένων δειγμάτων.

x_1	15.2	13.4	14.6	15.1	13.1	15.3
x_2	12.7	10.8	12.8	12.9	11.0	13.0
Διαφορές D_i	2.5	2.6	1.8	2.2	2.1	2.3

Ho: $\mu_1 - \mu_2 \leq 2 = \mu_D$

H1: $\mu_1 - \mu_2 > 2 = \mu_D$.

Εύκολα προκύπτει ότι $\overline{D}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$=2,25 και $S_D^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2$=0,083 με n=6.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |t| = \frac{|\overline{D}-\overline{\mu}_D|}{S_D\sqrt{n}} > t_{\alpha,n-1}, \text{ με } \alpha = 0.10.$$

Έτσι $|t|$ = 2.13, ενώ από τους πίνακες της κατανομής t προκύπτει ότι $t_{\alpha,n-1}$ = $t_{0.10,5}$=1,476

οπότε αποδεχόμαστε την H_0, δηλαδή πράγματι αυξάνει κατά 2.0 τουλάχιστον μονάδες ο δείκτης αντοχής των τμημάτων με χημική επεξεργασία.

4) Σε προβλήματα ελέγχου ποιότητας εκτός από τη διατήρηση ενός σταθερού μέσου μας ενδιαφέρει και η διατήρηση της διασποράς σε χαμηλά επίπεδα, διότι διαφορετικά

αυξάνει ο κίνδυνος απόρριψης του προϊόντος. Από την παραγωγή τυχαίο δείγμα μεγέθους n=16 έδωσε δειγματική απόκλιση S = 5.5. Αν η μεγαλύτερη επιτρεπόμενη τυπική απόκλιση είναι σ_0 = 4 να εξεταστεί αν η παραπάνω υπέρβαση είναι στατιστικά

σημαντική ή όχι (α=0.05).

Λύση:

Έχουμε έναν έλεγχο διασποράς της μορφής

Ho: $\sigma \leq 4 = \sigma_0$

H_1: $\sigma > 4 = \sigma_0$.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

$$K: |X^2| = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > X^2_{n-1,\alpha} \text{ με } S^2 = 5.5^2, n=16 \text{ και } \alpha = 0.05.$$

Έτσι | X^2| =28.36, ενώ από τους πίνακες της κατανομής χ^2 προκύπτει ότι

$X^2_{n-1,\alpha} = X^2_{15, 0.0\ 5}$ = 25.00, οπότε απορρίπτουμε την H_0 και άρα η υπέρβαση είναι στατιστικά σημαντική.

5) Δυο αναλυτές Α και Β έκαναν 6 μικροαναλυτικούς προσδιορισμούς της περιεκτικότητας σε άνθρακα ενός χημικού προϊόντος και πήραν τις ακόλουθες τιμές:

Αναλυτής Α	59.09	59.17	59.27	59.13	59.10	59.14
Αναλυτής Β	59.06	59.40	59.00	59.12	59.01	59.25

Να ελεγχθεί η υπόθεση Ho: $\sigma_1 = \sigma_2$ με εναλλακτική την H_1: $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (α=0.02)

Λύση:

Εύκολα προκύπτει ότι S^2_A 4,28·10^{-3} , n_A=6 και $S^2_B = {}_{2\,B}$ 24,59·10^{-3} , n_B=6.

Από τους πίνακες προκύπτει ότι η κρίσιμη περιοχή είναι:

Κ: F = $\frac{S_A^2}{S_B^2}$ > $F_{nA-1,nB-1,\ \alpha/2}$ ή F=$\frac{S_A^2}{S_B^2}$ < $F_{nA-1,nB-1,\ 1-\alpha/2}$

Αλλά F = 5.75 και από τους πίνακες της κατανομής F έχουμε ότι $Fn_{A-1,}n_{B-1,\ \alpha/2}$ = F = 5,5,0.01

=10,97, ενώ $Fn_{1-1,}n_{2-1,\ 1-\alpha/2}$ =$\frac{1}{F_{n2-1,n1-1,\alpha/2}}$ = $\frac{1}{F_{5,5,0.01}}$ =$\frac{1}{10,97}$ = 0.09 οπότε αποδεχόμαστε την H_0[10].

---

[10] Κολύβα Μαχαίρα Φ., Μπόρα Σέντα Ε., (1998) <<Στατιστική Θεωρία και Εφαρμογές>>. Εκδόσεις Ζήτη , Θεσσαλονίκη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δημητριάδης Ε. (2016) <<Στατιστική Επιχειρήσεων με εφαρμογές SPSS και LISPEL>>. Εκδόσεις Κριτική, Αθήνα.

Κολύβα Μαχαίρα Φ., Μπόρα Σέντα Ε., (1998) <<Στατιστική Θεωρία και Εφαρμογές>>. Εκδόσεις Ζήτη , Θεσσαλονίκη

Κίντης Α. (2002) <<Σύγχρονη Στατιστική Ανάλυση, Συμβολή στην Επιστημονική Έρευνα και στη Λήψη Αποφάσεων. Τόμος Α'>> Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.

Κίοχος Π. (1993) <<Στατιστική>> Εκδόσεις Interbooks, Αθήνα.

Ρούσσας Γ. (1994) <<Στατιστική Συμπερασματολογία Τ. ΙΙ, Έλεγχος Υποθέσεων >> Εκδόσεις Ζήτη , Αθήνα.

Χαλικιάς Ι. (2003) <<Στατιστική-Μέθοδοι Ανάλυσης για Επιχειρηματικές Αποφάσεις. Β΄ Έκδοση>> Εκδόσεις Rosili , Αθήνα.