ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΓΕΩΠΟΝΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΡΟΦΙΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΤΡΟΦΗΣ

ΤΜΗΜΑ

ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΥΔΑΤΙΝΩΝ ΠΟΡΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

Μετασχηματισμός Laplace για την επίλυση προβλημάτων μηχανικών.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗ: **ΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣ ΦΑΝΟΥΡΓΑΚΗΣ**

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

c

ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΣ

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2018

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος αποτελεί την Πτυχιακή Εργασία που εκπονήθηκε στο Τμήμα **ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΥΔΑΤΙΝΩΝ ΠΟΡΩΝ** του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Δυτικής Ελλάδας και αναφέρεται στον **Μετασχηματισμό laplace για την επίλυση προβλημάτων μηχανικών**.

Ευχαριστώ θερμά τον Επιβλέποντα αναπληρωτή Καθηγητή μου κ. Τζιρτζιλάκη Ευστράτιο Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών ΤΕ της Σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου προσέφερε για την πραγματοποίηση της Εργασίας.

Υπεύθυνη Δήλωση Σπουδαστή: Ο κάτωθι υπογεγραμμένος σπουδαστής έχω επίγνωση των συνεπειών του Νόμου περί λογοκλοπής και δηλώνω υπεύθυνα ότι είμαι συγγραφέας αυτής της Πτυχιακής Εργασίας, έχω δε αναφέρει στην Βιβλιογραφία μου όλες τις πηγές τις οποίες χρησιμοποίησα και έλαβα ιδέες ή δεδομένα. Δηλώνω επίσης ότι, οποιοδήποτε στοιχείο ή κείμενο το οποίο έχω ενσωματώσει στην εργασία μου προερχόμενο από Βιβλία ή άλλες εργασίες ή το διαδίκτυο, γραμμένο ακριβώς ή παραφρασμένο, το έχω πλήρως αναγνωρίσει ως πνευματικό έργο άλλου συγγραφέα και έχω αναφέρει ανελλιπώς το όνομά του και την πηγή προέλευσης.

Ο σπουδαστής
(Ονοματεπώνυμο)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣ ΦΑΝΟΥΡΓΑΚΗΣ

(Υπογραφή)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός αυτής της πτυχιακής είναι μελέτη του **Μετασχηματισμού Laplace** στην εφαρμογή προβλημάτων μηχανικών. Μέσω του τελεστή Laplace προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε μία συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, συνήθως ως προς το χρόνο, σε μία συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής, ώστε να μπορέσουμε σε φυσικά μη προβλεπόμενα συστήματα να εξετάσουμε την απόκριση και να τα εφαρμόσουμε ευρέως στην πράξη. Με την μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου, στο πεδίο της μιγαδικής μεταβλητής και στην αλλαγή της χρονικής κλίμακας αναλύουμε ένα σύστημα, το συνθέτουμε και δημιουργούμε ένα σχέδιο ώστε να γνωρίζουμε πιο καλά ένα σύστημα και να το βελτιώνουμε. Ετσι μπορούμε και μελετάμε μεταβατικά φαινόμενα σε ηλεκτρικά κυκλώματα 2ης τάξης, τη συνέλιξη συναρτήσεων, τη συνάρτηση μεταφοράς, τον συντονισμό στο κύκλωμα RLC σειράς, τον συντονισμό στο παράλληλο κύκλωμα RLC, την απόκριση συχνότητας, τα διαγράμματα **Bode**, τις σειρές **Fourier,** τον μετασχηματισμό **Fourier** και τα τετράπολα. Ο μετασχηματισμός **Laplace** είναι επομένως ένα ιδανικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών όπως εκείνα που εμφανίζονται στην έρευνα για τα ηλεκτρικά κυκλώματα και τις μηχανικές δονήσεις. Οι μέθοδοι μετασχηματισμού **Laplace** παίζουν έναν βασικό ρόλο στην σύγχρονη προσέγγιση στην ανάλυση και το σχέδιο των συστημάτων εφαρμοσμένης μηχανικής.

Στην παρούσα Πτυχιακή εργασία δείχνουμε με παραδείγματα πως λαμβάνουμε τον μετασχηματισμό **Laplace** μερικών απλών συναρτήσεων, πως υπολογίζονται ο αντίστροφος μετασχηματισμός, πως υπολογίζονται ο μετασχηματισμός των ολοκληρωμάτων πως χρησιμοποιούμε τις μεθόδους του μετασχηματισμού **Laplace** για να λύσουμε τις συνήθεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, ποια η εφαρμογή στα Ηλεκτρικά κυκλώματα , ποια η εφαρμογή στις Μηχανικές δονήσεις, ποια η εφαρμογή στις συναρτήσεις βήματος και ώθησης, ποια η εφαρμογή Διαφορικές εξισώσεις, ποια η εφαρμογή στις Περιοδικές συναρτήσεις.

Έτσι το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο μηχανικός στον καθορισμό της εξόδου του συστήματος $x\ (t\ )$, όταν υποβάλλεται σε μια είσοδο $u\ (t)$ εφαρμοσμένη σε κάποια στιγμή του χρόνου, βρίσκει με τον μετασχηματισμό **Laplace** τη σχέση μεταξύ της εξόδου και της εισόδου και τους νόμους που διέπουν την συμπεριφορά του συστήματος. Εάν το σύστημα είναι γραμμικό και αμετάβλητο στο χρόνο τότε η έξοδος συσχετίζεται με την είσοδο με μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, και έχουμε ένα τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών, το οποίο υπόκειται στη λύση με χρήση του μετασχηματισμού **Laplace.** Ο μετασχηματισμός **Laplace** οδηγεί σε μια ενοποιημένη προσέγγιση και παρέχει στον μηχανικό μεγαλύτερη διορατικότητα στη συμπεριφορά του συστήματος.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μέθοδοι του μετασχηματισμού Laplace παίζουν έναν βασικό ρόλο στην σύγχρονη προσέγγιση στην ανάλυση και το σχέδιο των συστημάτων εφαρμοσμένης μηχανικής. Το ερέθισμα για την ανάπτυξη αυτών των μεθόδων ήταν η πρωτοποριακή εργασία του Άγγλου ηλεκτρολόγου μηχανικού Oliver Heaviside (1850- 1925) στην ανάπτυξη μιας μεθόδου για τη συστηματική λύση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.
Ο Heaviside ενδιαφέρθηκε για την επίλυση των πρακτικών προβλημάτων, και η μέθοδός του βασίστηκε κυρίως στη διαίσθηση, παρουσιάζοντας έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας: με αποτέλεσμα να αποδοκιμαστεί από τους θεωρητικούς εκείνης της εποχής. Εντούτοις, ο Heaviside ο ίδιος δεν ενδιαφέρονταν για τις αυστηρές αποδείξεις, και ήταν ικανοποιημένος που η δική του μέθοδος έδινε σωστά αποτελέσματα. Χρησιμοποιώντας τις ιδέες του, ήταν σε θέση να λύσει σημαντικά πρακτικά προβλήματα που δεν θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με χρήση των κλασσικών μεθόδων. Αυτό οδήγησε σε πολλά νέα αποτελέσματα στους τομείς όπως η διάδοση των ρευμάτων και των τάσεων κατά μήκος των γραμμών μετάδοσης.
Επειδή λειτούργησε στην πράξη, η μέθοδος του Heaviside έγινε αποδεκτή ευρέως από τους μηχανικούς. Καθώς η δύναμή της για την επίλυση των προβλημάτων γίνονταν όλο και περισσότερο εμφανής, η μέθοδος προσέλκυσε την προσοχή των μαθηματικών, οι οποίοι επιχείρησαν να την αιτιολογήσουν. Αυτό παρείχε το ερέθισμα για γρήγορες εξελίξεις σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών συμπεριλαμβανομένων των γενικευμένων ολοκληρωμάτων, των ασύμπτωτων σειρών και της θεωρίας των μετασχηματισμών. Η έρευνα για το πρόβλημα συνεχίστηκε για πολλά έτη προτού να αναγνωριστεί τελικά ως ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός που αναπτύχθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Pierre Simon de Laplace (1749-1827) έναν σχεδόν αιώνα πριν αποτέλεσε τη θεωρητική βάση για την εργασία του Heaviside. Επίσης αναγνωρίστηκε ότι η χρήση αυτής της ολοκληρωτικής μετασχηματισμένης παρείχε μια συστηματικότερη εναλλακτική λύση για την έρευνα των διαφορικών εξισώσεων από τη μέθοδο που προτείνεται από τον Heaviside. Είναι αυτή η εναλλακτική προσέγγιση που αποτελεί την βάση της **μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace**.
Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα παράδειγμα μιας κατηγορίας αποκαλούμενης **ολοκληρωτικών μετασχηματισμών**, και παίρνει μια συνάρτηση $f(t)$ μιας μεταβλητής t (που θα αναφέρουμε ως **χρόνο**) σε μια συνάρτηση $F(s)$ μιας άλλης μεταβλητής s (**σύνθετη συχνότητα**).
Η έλξη του μετασχηματισμού Laplace είναι ότι μετασχηματίζει τις διαφορικές εξισώσεις στην περιοχή t (χρόνος) σε αλγεβρικές εξισώσεις στην περιοχή s (συχνότητα). Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων στην περιοχή t επομένως περιορίζεται στην επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων στην περιοχή s. Έχοντας κάνει το τελευταίο για τους επιθυμητούς αγνώστους, οι τιμές τους ως συναρτήσεις του χρόνου μπορούν να βρεθούν με τη λήψη των αντίστροφων μετασχηματισμών. Ένα άλλο πλεονέκτημα της χρήσης του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων είναι ότι οι αρχικές συνθήκες διαδραματίζουν έναν ουσιαστικό ρόλο στη διαδικασία του μετασχηματισμού, έτσι αυτές ενσωματώνονται αυτόματα σχηματική αναπαράσταση ενός συστήματος

στη λύση. Ο μετασχηματισμός Laplace είναι επομένως ένα ιδανικό εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών όπως εκείνα που εμφανίζονται στην έρευνα για τα ηλεκτρικά

κυκλώματα και τις μηχανικές δονήσεις.
Ο μετασχηματισμός Laplace βρίσκει ιδιαίτερη εφαρμογή στον τομέα της ανάλυσης των σημάτων και των γραμμικών συστημάτων. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό γνώρισμα ενός συστήματος είναι ότι όταν υποβάλλεται σε μια διέγερση (είσοδος), αυτό παράγει μια απόκριση (έξοδος). Όταν η είσοδος u (t) και η έξοδος x (t) είναι συναρτήσεις μιας μονής μεταβλητής t, που αναπαριστά το χρόνο, είναι ορθό να αναφερθούμε σε αυτές ως **σήματα**. Σχηματικά, ένα σύστημα μπορεί να αναπαρίσταται όπως στο ανωτέρω σχήμα. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο μηχανικός είναι αυτό του καθορισμού της εξόδου του συστήματος x (t) όταν υποβάλλεται σε μια είσοδο u (t) εφαρμοσμένη σε κάποια στιγμή του χρόνου, την οποία μπορούμε να λάβουμε ως t=0. Η σχέση μεταξύ της εξόδου και της εισόδου καθορίζεται από τους νόμους που διέπουν την συμπεριφορά του συστήματος. Εάν το σύστημα είναι γραμμικό και αμετάβλητο στο χρόνο τότε η έξοδος συσχετίζεται με την είσοδο με μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, και έχουμε ένα τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών, το οποίο υπόκειται στη λύση με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.
Ενώ πολλά από τα προβλήματα που εξετάζονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν να λυθούν με την κλασσική προσέγγιση, ο μετασχηματισμός Laplace οδηγεί σε μια ενοποιημένη προσέγγιση και παρέχει στον μηχανικό μεγαλύτερη διορατικότητα στη συμπεριφορά του συστήματος. Στην πράξη, το σήμα εισόδου u (t) μπορεί να είναι μια ασυνεχής ή περιοδική συνάρτηση, ή ακόμα και ένας παλμός, και σε τέτοιες περιπτώσεις η χρήση του μετασχηματισμού Laplace έχει ευδιάκριτα πλεονεκτήματα έναντι της κλασσικής προσέγγισης. Επίσης, τις περισσότερες φορές, ένας μηχανικός δεν ενδιαφέρεται μόνο για την ανάλυση του συστήματος αλλά και για την σύνθεση ή το σχέδιο του συστήματος. Συνεπώς, ο στόχος ενός μηχανικού κατά την μελέτη της απόκρισης ενός συστήματος σε συγκεκριμένες εισόδους είναι συχνά να μάθει περισσότερα για το σύστημα με σκοπό να το βελτιώσει ή να το ελέγξει έτσι ώστε να ικανοποιεί ορισμένες προδιαγραφές. Είναι σε αυτή την περιοχή που η χρήση του μετασχηματισμού Laplace είναι ελκυστική, αφού εξετάζοντας την απόκριση του συστήματος σε συγκεκριμένες εισόδους, όπως ένα ημιτονοειδές, αυτή παρέχει στο μηχανικό ισχυρές γραφικές μεθόδους για το σχεδιασμό του συστήματος που είναι σχετικά εύκολο να εφαρμοστούν και να χρησιμοποιηθούν ευρέως στην πράξη.
Κατά την διαμόρφωση του συστήματος με μια διαφορική εξίσωση, έχει υποτεθεί ότι και τα σήματα εισόδου και εξόδου μπορούν να ποικίλουν σε οποιαδήποτε στιγμή του χρόνου δηλαδή είναι συναρτήσεις μιας συνεχής χρονικής μεταβλητής (σημειώστε ότι αυτό δεν σημαίνει ότι τα σήματα τα ίδια πρέπει να είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου). Τέτοια συστήματα καλούνται **συστήματα συνεχούς χρόνου**, και ο μετασχηματισμός Laplace είναι καταλληλότερη για την έρευνα αυτών.
Με την εισαγωγή του ελέγχου μέσω των υπολογιστών στο σχεδιασμό των συστημάτων, τα σήματα που συνδέονται με ένα σύστημα μπορούν να αλλάξουν μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Σε τέτοιες περιπτώσεις το σύστημα λέγεται ότι είναι ένα **χρονοδιακριτό σύστημα**, και διαμορφώνεται από μια εξίσωση διαφορών αντί για μια διαφορική εξίσωση.

Κεφάλαιο 1

1.1 Ο μετασχηματισμός Laplace

Καθορίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης f(t) από την έκφραση

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \quad \textbf{(1.1)}$$

όπου το s είναι μια σύνθετη μεταβλητή και το e^{-st} καλείται **πυρήνας** του μετασχηματισμού Laplace

Είναι συνηθισμένο να αναπαρίσταται ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης με το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα, έτσι ώστε γράφουμε

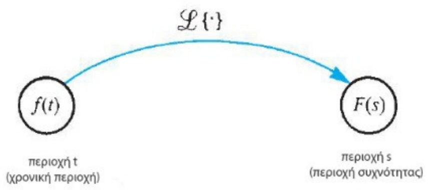
$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \quad \textbf{(1.2)}$$

Μια εναλλακτική σημειογραφία σε κοινή χρήση είναι να δηλώνουμε την $\mathcal{L}\{f(t)\}$ με $\bar{f}$ (s) ή απλά $\bar{f}$.

(α) Το σύμβολο $\mathcal{L}$ υποδηλώνει τον **τελεστή μετασχηματισμού Laplace˙** όταν αυτός λειτουργεί σε μια συνάρτηση f(t), την μετασχηματίζει σε μια συνάρτηση F(s) της σύνθετης μεταβλητής s. Λέμε ότι ο τελεστής μετασχηματίζει την συνάρτηση f (t) στην περιοχή t (συνήθως αποκαλούμενη **χρονική περιοχή**) στην συνάρτηση F(s) στην περιοχή s (συνήθως αποκαλούμενη **περιοχή σύνθετων συχνοτήτων**, ή απλά **περιοχή συχνότητας**). Αυτή η σχέση πεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 1.1, και είναι συνηθισμένο να αναφερόμαστε στην f (t) και F(s) ως ένα ζεύγος μετασχηματισμών Laplace, που γράφεται ως {f (t), F (s)}.

Σχήμα 1.1

Ο τελεστής μετασχηματισμός Laplace.



(β) Επειδή το ανώτερο όριο στο ολοκλήρωμα είναι άπειρο, η περιοχή της ολοκλήρωσης είναι άπειρη.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt$$

(γ) Επειδή το χαμηλότερο όριο στο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, συνεπάγεται ότι όταν λάβουμε τον μετασχηματισμό Laplace , η συμπεριφορά του f (t) για τις αρνητικές τιμές του t παραβλέπεται ή διώχνεται. Αυτό σημαίνει ότι η $F(s)$ περιέχει πληροφορίες για τη συμπεριφορά της $f(t)$ μόνο για $t \geq 0$, έτσι ώστε ο μετασχηματισμός Laplace δεν είναι ένα κατάλληλο εργαλείο για την έρευνα των προβλημάτων στα οποία οι τιμές της $f(t)$ για $t < 0$ είναι σχετικές. Στις περισσότερες εφαρμογές εφαρμοσμένης μηχανικής αυτό δεν προκαλεί οποιοδήποτε πρόβλημα, εφόσον τότε ασχολούμαστε με τα φυσικά συστήματα για τα οποία οι συναρτήσεις που εξετάζουμε ποικίλλουν με το χρόνο t. Μια ιδιότητα των φυσικά πραγματοποιήσιμων συστημάτων είναι ότι είναι **μη-προβλεπόμενα** υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει καμία έξοδος (ή απόκριση) μέχρι να εφαρμοστεί μια είσοδος (ή διέγερση).

Λόγω αυτής της αιτιώδους σχέσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, καθορίζουμε μια συνάρτηση $f(t)$ να είναι **αιτιώδης** εάν $f(t) = 0$ $(t < 0)$. Γενικά, εντούτοις, εκτός και αν η περιοχή διευκρινίζεται σαφώς, μια συνάρτηση $f(t)$ κανονικά μεταφράζεται σαν να είναι καθορισμένη για όλες τις πραγματικές τιμές, και θετικές και αρνητικές, του t. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση μοναδιαίου βήματος του Heaviside $H(t)$, όπου

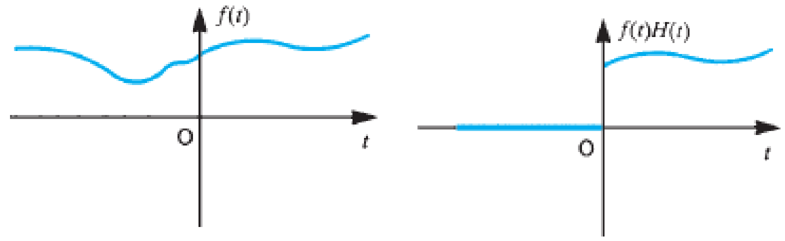
έχουμε

$$H(t) = \begin{Bmatrix} 0(t<0) \\ 1(t\geq 0) \end{Bmatrix} \qquad f = H(t) = \begin{Bmatrix} 0(t<0) \\ f(t)(t\geq 0) \end{Bmatrix}$$

Κατά συνέπεια η επίδραση του πολλαπλασιασμού της $f(t)$ με την $H(t)$ είναι να μετατραπεί αυτή σε μια αιτιώδη συνάρτηση.

Γραφικά, η σχέση μεταξύ της $f(t)$ και της $f(t)H(t)$ είναι όπως φαίνεται στο σχήμα

Γραφική παράσταση της $f(t)$ και η αιτιώδης ισοδύναμη συνάρτησή της.



Σχήμα 1.2

Συνεπάγεται ότι ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace $F(s)$ περιέχει το σύνολο των πληροφοριών για τη συμπεριφορά της $f(t)H(t)$. Συνεπώς, για να κυριολεκτήσουμε θα πρέπει να αναφερόμαστε στην $\{f(t)H(t), F(s)\}$ αντί για την $\{f(t), F(s)\}$ ως ένα ζευγάρι μετασχηματισμού Laplace. Εντούτοις, είναι κοινή πρακτική να διώχνουμε την $H(t)$ και να υποθέτουμε ότι εξετάζουμε αιτιώδεις συναρτήσεις.

(δ) Εάν η συμπεριφορά της $f(t)$ για $t < 0$ μας ενδιαφέρει τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον εναλλακτικό **δίπλευρο** ή **διμερή μετασχηματισμό Laplace** της συνάρτησης $f(t)$, που καθορίζεται από

1.3

$$L_R\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Ο μετασχηματισμός Laplace που καθορίζεται από το (1,2), με το χαμηλότερο όριο μηδέν, αναφέρεται μερικές φορές ως **μονόπλευρος** ή **μονομερής μετασχηματισμός Laplace** της συνάρτησης $f(t)$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με τον δεύτερο μετασχημασμό (μονόπλευρο ή μονομερή μετασχηματισμός Laplace), και θα αναφερόμαστε σε αυτόν απλά ως μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)$. Σημειώστε ότι όταν η $f(t)$ είναι μια αιτιώδης συνάρτηση,

$$L_B\{f(t)\} = L\{f(t)\}$$

(ε) Ένα άλλο ζήτημα σχετικά με το χαμηλότερο όριο μηδενός είναι η ερμηνεία της $f(0)$ όταν η $f(t)$ έχει μια ιδιαιτερότητα στην αρχή. Ένα ερώτημα προκύπτει τότε ως προς το εάν πρέπει να συμπεριλάβουμε την ιδιαιτερότητα και να πάρουμε το χαμηλότερο όριο ως 0^- ή να την αποκλείσουμε και να πάρουμε το χαμηλότερο όριο ως 0^+ (ως σύμβαση τα 0^- και 0^+ υποδηλώνουν τις τιμές της t ακριβώς στα αριστερά και δεξιά της αρχής αντίστοιχα). Υπό τον όρο ότι είμαστε συνεπείς, μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε, και με τις δύο ερμηνείες να υιοθετούνται στην πράξη. Προκειμένου να προσαρμόσουμε οποιεσδήποτε ιδιαιτερότητες που μπορούν να εμφανιστούν σε $t = 0$, όπως μια ώθηση που εφαρμόζεται σε $t = 0$, παίρνουμε το 0^- ως το χαμηλότερο όριο και ερμηνεύουμε την (1.2) ως

$$L_R\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad \textbf{(1.4)}$$

2.1 Μετασχηματισμός των απλών συναρτήσεων

Σε αυτό το τμήμα λαμβάνουμε τον μετασχηματισμό Laplace μερικών απλών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 2.1

Καθορίστε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

f(t)=c

όπου το c είναι μια σταθερά.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (1.2),

$$L\{(c)\} = \int_0^\infty e^{-st} c\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st} c\,dt = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{c}{s}e^{-st}\right]_0^T = \frac{c}{s}\left(1-\lim_{T\to\infty} e^{-sT}\right)$$

Λαμβάνοντας $s = \sigma + j\omega$, όπου τα σ και ω είναι πραγματικά,

Ένα πεπερασμένο όριο υπάρχει με την προϋπόθεση ότι $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$, όταν το όριο είναι μηδέν. Κατά συνέπεια, υπό τον όρο ότι $\mathrm{Re}(s) > 0$, ο μετασχηματισμός Laplace είναι

έτσι ώστε

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} = \lim_{T\to\infty}\left(e^{-(\sigma+j\omega)\mathrm{T}}\right) = \lim_{T\to\infty} e^{-\sigma\mathrm{T}}\left(\cos\omega T + j\sin\omega\mathrm{T}\right)$$

αποτελούν ένα παράδειγμα ενός ζεύγους

$$\left\{\begin{matrix} f(t)=c \\ F(s)=\frac{c}{s} \end{matrix}\right\} \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$L(s) = \frac{c}{s}, \mathrm{Re}(s) > 0 \qquad (2.1)$$

Παράδειγμα 2.2
Να καθοριστεί ο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης ράμπας f(t)=t

$$\lim_{T\to\infty}\frac{Te^{-sT}}{s} = \lim_{T\to\infty}\frac{e^{-st}}{s^2} = 0$$

Λύση

Από τον καθορισμό (1.2),

$$L\{(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t\, dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st} c\, dt =$$

$$\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^T = \frac{1}{s^2} - \lim_{T\to\infty}\frac{Te^{-st}}{s} - \lim_{T\to\infty}\frac{e^{-st}}{s^2}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στο παράδειγμα 1.1, τα όρια υπάρχουν υπό τον όρο ότι Re (s) > 0, όταν

Κατά συνέπεια, υπό τον όρο ότι Re (s) > 0,

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

δίνοντας μας το ζεύγος μετασχηματισμών Laplace

$$\left\{\begin{matrix} f(t)=c \\ F(s)=\frac{1}{s^2} \end{matrix}\right\} \mathrm{Re}(s) > 0 \qquad \mathbf{(2.2)}$$

Παράδειγμα 2.3

Καθορισμός στον μετασχηματισμό Laplace της μονόπλευρης εκθετικής συνάρτησης $f(t)=e^{kt}$

Λύση

Ο καθορισμός (1.2) δίνει

$$L\left\{e^{kt}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt}\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-(s-k)T}\, dt =$$
$$\lim_{T\to\infty} \frac{-1}{s-k}\left[e^{-(s-k)T}\right]_0^T = \frac{1}{s-k}\left(1 - \lim_{T\to\infty}{}^{-(s-k)T}\right)$$

Γράφοντας s = σ +jω του j , όπου τα σ και ω είναι πραγματικά, έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} e^{-(s-k)T} = \lim_{T\to\infty} e^{-(s-k)T} e^{j\omega T}$$

Εάν το k είναι πραγματικό, τότε, υπό τον όρο ότι σ = Re(s)> k , το όριο υπάρχει, και είναι μηδέν. Εάν το k είναι σύνθετο, για παράδειγμα $k = a + jb$, τότε το όριο θα υπάρξει επίσης, και θα είναι μηδέν, υπό τον όρο ότι σ > a (δηλαδή Re(s)> Re(k)). Υπό αυτούς τους όρους, έχουμε έπειτα $L\left\{e^{kt}\right\} = \dfrac{1}{s-k}$

δίνοντας μας το ζεύγος μετασχηματισμών Laplace

$$\left\{\begin{matrix} f(t)=e^{kt} \\ F(s)=\frac{1}{s^2} \end{matrix}\right\} \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(k) \quad \textbf{(2.3)}$$

Παράδειγμα 2.4

Καθορισμός του μετασχηματισμού Laplace των συναρτήσεων ημιτόνου και συνημίτονου

f(t)=sin at, g(t)= cos at

όπου a είναι μια πραγματική σταθερά.

Λύση

Αφού

$$e^{jat} = \cos at + j \sin at$$

μπορούμε να γράψουμε

$$f(t) = \sin at = lme^{jat}$$
$$g(t) = \cos at = \operatorname{Re} e^{jat}$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την διατύπωση, οι απαραίτητοι μετασχηματισμοί Laplace μπορούν να ληφθούν από το αποτέλεσμα

$$L\left\{e^{kt}\right\} = \frac{1}{s-k}, \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(k)$$

του παραδείγματος 2.3.

Λαμβάνοντας το $k = ja$ σε αυτό το αποτέλεσμα δίνει
$Re(s) > 0$

$$L\left\{e^{jat}\right\} = \frac{1}{s - ja}, \operatorname{Re}(s) > 0 \qquad ή$$

$$L\left\{e^{jat}\right\} = \frac{s + ja}{s^2 - a^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$$

Κατά συνέπεια, εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη και υποθέτοντας οτι το s είναι πραγματικό,

$$L\{\sin at\} = lmL\left\{e^{jat}\right\} = \frac{a}{s^2 - c}$$

$$L\{\cos at\} = \operatorname{Re} L\left\{e^{jat}\right\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Αυτά τα αποτελέσματα ισχύουν επίσης όταν το s είναι σύνθετο, δίνοντας μας τα ζεύγη μετασχηματισμό Laplace

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \operatorname{Re}(s) > 0 \quad \textbf{(2.4)}$$

$$L\{\cos at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \operatorname{Re}(s) > 0 \quad \textbf{(2.5)}$$

2.2 Ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace

Σαφώς, από τον καθορισμό (2.2), ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ υπάρχει εάν και μόνο εάν το γενικευμένο ολοκλήρωμα στον καθορισμό συγκλίνει για τουλάχιστον μας τιμές του s. Τα παραδείγματα μας παραγράφου 2.2 προτείνουν ότι αυτό αφορά το φραγμένο μας συνάρτησης, με τον παράγοντα e^{-st} στο ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού Laplace να ενεργεί ως μας παράγοντας σύγκλισης στο ότι οι τιμές του $\operatorname{Re}(s)$ είναι εκείνες για μας οποίες το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Προκειμένου να μπορούμε να δηλώσουμε μας ικανοποιητικές συνθήκες μας $f(t)$ για την ύπαρξη μας $\mathcal{L}\{f(t)\}$, πρώτα εισάγουμε τον καθορισμό μιας συνάρτησης εκθετικής τάξης.

Καθορισμός μας 2.1

Μια συνάρτηση $f\ (t\ )$ λέγεται ότι είναι **εκθετικής τάξης** ως $t \to\infty$ εάν υπάρχει μας πραγματικός αριθμός σ και θετικές σταθερές M και T έτσι ώστε

$$\left|f\left(t\right)\right| < Me^{\sigma t}$$

για όλα τα $t\ >\ T$.

Αυτό που μας ο καθορισμός μας λέει είναι ότι μια συνάρτηση $f\ (t\ )$ είναι εκθετικής τάξης εάν δεν αυξάνεται γρηγορότερα από κάποια εκθετική συνάρτηση του τύπου $M\ e^{\sigma t}$. Ευτυχώς οι περισσότερες συναρτήσεις πρακτικής σημασίας ικανοποιούν αυτήν την απαίτηση, και είναι επομένως εκθετικής τάξης. Υπάρχουν, εντούτοις, συναρτήσεις που δεν είναι εκθετικής τάξης, με ένα παράδειγμα να είναι η e^{t2} δεδομένου ότι αυτή αυξάνεται γρηγορότερα από την $M\ e^{\sigma t}$ καθώς $t \to \infty$ οποιεσδήποτε και άν είναι οι τιμές των M και σ.

Παράδειγμα 2.5

Η συνάρτηση $f\ (t\ )=\ e^{3t}$ είναι εκθετικής τάξης, με $\sigma \geq 3$.

Παράδειγμα 2.6

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f\ (t\ ) =\ t^3\ (t \geq 0)$ είναι εκθετικής τάξης.

Λύση

Αφού $e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{6}a^3t^3 + ...$

συνεπάγεται ότι για οποιαδήποτε α> 0

$$t^3 < \frac{6}{a^3}e^{at}$$

έτσι ώστε η $t^{\ 3}$ είναι εκθετικής τάξης, σ>0.

Προκύπτει από τα παραδείγματα 2.1 και 2.2 ότι η επιλογή του σ στον καθορισμό 2.1 δεν είναι μοναδική για μια συγκεκριμένη συνάρτηση. Για αυτόν τον λόγο, καθορίζουμε το μέγιστο χαμηλότερο πέρας σ_c του συνόλου των πιθανών τιμών του σ να είναι η **τετμημένη της σύγκλισης** της $f\ (t\ )$. Κατά συνέπεια, στην περίπτωση της συνάρτησης $f\ (t\ )=\ e^{3t}$, $\sigma_c =\ 3$, ενώ στην περίπτωση της συνάρτησης $f\ (t\ ) =\ t^{\ 3}$, $\sigma =\ 0$.
Επιστρέφοντας στον καθορισμό του μετασχηματισμού Laplace που δίνεται από το (1,2), συνεπάγεται οτι εάν η f (t) είναι μια συνεχής συνάρτηση και είναι επίσης εκθετικής τάξης με την τετμημένη της σύγκλισης της σ_c, έτσι ώστε

$\left|f\left(t\right)\right| < Me^{\sigma t}, \sigma > \sigma_c$ κατόπιν, παίρνοντας $T\ =\ 0$ στον καθορισμό 1.1,

$$\left|F(s)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-st}\right| \left|f(t)\right| dt$$

Γράφοντας $s = \sigma + j\omega$, όπου τα σ και ω είναι πραγματικά, εφόσον $|e^{-j\omega t}| = 1$, έχουμε

$$\left|e^{-st}\right| = \left|e^{-\sigma t}\right|\left|e^{-j\omega t}\right| = \left|e^{-\sigma t}\right| = e^{-\sigma t}$$

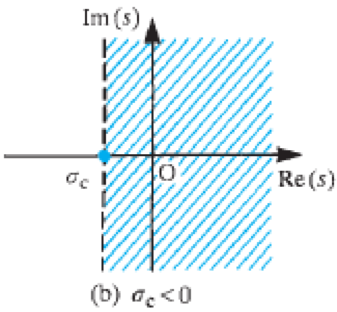
έτσι ώστε $\left|F(s)\right| \le \int_0^\infty e^{-\sigma t}\left|f(t)\right| dt \le M\int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{\sigma dt} dt, \sigma_d > \sigma_c$

$$= M\int_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_A)t} dt$$

Αυτό το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο όποτε $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \sigma_d$. Δεδομένου ότι το σ_d μπορεί να επιλεχτεί αυθαίρετα έτσι ώστε $\sigma_d > \sigma_c$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $F(s)$ υπάρχει για $\sigma > \sigma_c$. Κατά συνέπεια μια συνεχής συνάρτηση $f(t)$ εκθετικής τάξης, με την τετμημένη της σύγκλισης σ_c, έχει έναν μετασχηματισμό Laplace $L\{f(t)\} = F(s), \mathrm{Re}(s) > \sigma_c$

όπου η περιοχή της σύγκλισης είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.

Σχήμα 2.1 Περιοχή της σύγκλισης $\mathcal{L}\{f(t)\}$˙ το σ_c είναι η τετμημένη της σύγκλισης για $f(t)$.



Στην πραγματικότητα, η απαίτηση ότι η $f(t)$ πρέπει να είναι συνεχής δεν είναι ουσιαστική, και μπορεί να χαλαρωθεί στο η $f(t)$ να είναι τμηματικά συνεχής, δηλαδή η $f(t)$ πρέπει να έχει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων ασυνεχειών, με το να είναι αλλού συνεχής και φραγμένη.

Ολοκληρώνουμε αυτό το τμήμα με τη δήλωση ενός θεωρήματος που εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός μετασχηματισμού Laplace

Θεώρημα 1.1 Ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace

Εάν η αιτιώδης συνάρτηση $f\ (t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο [0,∞] και είναι εκθετικής τάξης, με την τετμημένη της σύγκλισης σ_c, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της υπάρχει, με την περιοχή της σύγκλισης Re(s) >σ_c στην περιοχή s ˙ δηλαδή

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt, \mathrm{Re}(s) > \sigma_c$$

τέλος του θεωρήματος

Οι όροι αυτού του θεωρήματος είναι *επαρκείς* για την εξασφάλιση της ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης. Εντούτοις, δεν αποτελούν *απαραίτητους* όρους για την ύπαρξη ενός τέτοιου μετασχηματισμού Laplace, και δεν έπεται ότι εάν οι όροι παραβιαστούν δεν θα υπάρξει ένας μετασχηματισμός. Στην πραγματικότητα, οι όροι είναι πιό περιοριστικοί από όσο είναι απαραίτητο, δεδομένου ότι υπάρχουν συναρτήσεις με άπειρες ασυνέχειες που έχουν μετασχηματισμό Laplace.

2.3 Ιδιότητες ενός μετασχηματισμού Laplace

Σε αυτό το τμήμα εξετάζουμε μερικές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace που θα μας επιτρέψουν να βρούμε περαιτέρω ζεύγη μετασχηματισμών $f\ (t\ ),\ F\ (s\ )\}$ χωρίς να πρέπει να τις υπολογίσουμε άμεσα χρησιμοποιώντας τον καθορισμό. Οι περαιτέρω ιδιότητες θα αναπτυχθούν στα απόμενα τμήματα όταν η ανάγκη προκύψει.

Ιδιότητα 1.1: Η γραμμική ιδιότητα

Μια θεμελιώδης ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace είναι η γραμμικότητά της, η οποία μπορεί να δηλωθεί ως εξής:

Εάν οι f(t) και g(t) είναι συναρτήσεις που έχουν μετασχηματισμό Laplace και εάν α και β είναι οποιεσδήποτε σταθερές τότε

$$L\{af(t) + \beta g(t)\} = aL\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\}$$

Συνεπεία αυτής της ιδιότητας, λέμε ότι ο τελεστής του μετασχηματισμού Laplace L είναι ένας γραμμικός τελεστής.
Μια απόδειξη της ιδιότητας προκύπτει εύκολα από τον καθορισμό (1,2), αφού

$$\begin{aligned} L\{af(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{\infty} \left| af(t) + \beta g(t) \right| e^{-st}\,dt \\ &= a\int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\,dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-st}\,dt = \\ & aL\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\} \end{aligned}$$

Όσον αφορά την περιοχή της σύγκλισης, εάν οι $f\ (t)$ και $g\ (t)$ έχουν τετμημένες της σύγκλισης σ

$$\left|f(t)\right| < M_1 e^{\sigma t},$$

$_f$ και σ_g αντίστοιχα, και $\sigma_1 > \sigma_f$, $\sigma_2 > \sigma_g$, τότε $\left|g(t)\right| < M_2 e^{\sigma 2t}, = \int_0^\infty af(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty \beta g(t)^{-st}\,dt$

Συνεπάγεται ότι

$$\left|af(t) + \beta g(t)\right| \le |a|\left|f(t)\right| + |\beta|\left|g(t) \le |a|\right|\left|M_1 e^{\sigma 1t} + |\beta|\right|\mathrm{M}_2 e^{\sigma 2t}$$
$$\le \left(|a| M_1 + |\beta| \mathrm{M}_2\right) e^{\sigma t}$$

όπου σ = max(σ1, σ2), έτσι ώστε η τετμημένη της σύγκλισης του γραμμικού αθροίσματος $\alpha f(t) + \beta g(t)$ είναι μικρότερη ή ίση προς το μέγιστο εκείνων για $f\ (t)$ και $g\ (t)$.
Αυτή η ιδιότητα γραμμικότητας μπορεί σαφώς να επεκταθεί σε έναν γραμμικό συνδυασμό οποιουδήποτε πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων.

Παράδειγμα 2.7

Καθορίστε $L\left\{3t + 2e^{3t}\right\}$

Λύση

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που δίνονται στα (2.2) και (2.3),

$$L\left(e^{3t}\right) = \frac{1}{s-3}, \mathrm{Re}(s) > 3 \qquad L(t) = \frac{1}{s^2}, \mathrm{Re}(s) > 0$$

έτσι, από την ιδιότητα γραμμικότητας, $L\left\{3t + 2e^{3t}\right\} = 3L\{t\} + 2L\left\{e^{3t}\right\}$

$$= \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s-3}, \mathrm{Re}(s) > \max\{0,3\}$$

$$= \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s-3}, \mathrm{Re}(s) > 3$$

Παράδειγμα 2.8

Καθορίστε την $\mathcal{L}\{ 5\text{-}3\,t\ +\ 4$ ημίτονο $2t\text{-}6e^{4t}\ \}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που δίνονται στα (1.5)-(1.8),

$$L\{5\}=\frac{5}{s},\operatorname{Re}(s)>0\ L(t)=\frac{1}{s^2},\operatorname{Re}>0$$

$L\{\sin 2t\}=\frac{2}{s^2},\operatorname{Re}(s)>0\,L\{e^{4t}\}=$

$\frac{1}{s-4},\operatorname{Re}(s)>4$

έτσι, από την ιδιότητα γραμμικότητας,

$$L\{5-3t+4\sin 2t-6e^{4t}\}=L\{5\}-3L\{t\}+4L\{\sin 2t\}-6L\{e^{4t}\}$$
$$=\frac{5}{s}-\frac{3}{s^2}+\frac{8}{s^2+4}-\frac{6}{s\ -4},\operatorname{Re}(s)>\max\{0,4\}$$
$$=\frac{5}{s}-\frac{3}{s^2}+\frac{8}{s^2+4}-\frac{6}{s\ -4},\operatorname{Re}(s)>4$$

Η ιδιότητα πρώτης μετατόπισης είναι μια άλλη ιδιότητα που μας επιτρέπει να προσθέσουμε περισσότερους συνδυασμούς στο ρεπερτόριό μας των ζεύγων μετασχηματισμού Laplace Όπως με την ιδιότητα γραμμικότητας, θα αποδειχθεί οτι είναι μεγάλης σπουδαιότητας στις επόμενες συζητήσεις μας ιδιαίτερα κατά την εξέταση της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα 1.2 Η ιδιότητα πρώτης μετατόπισης

Η ιδιότητα περιλαμβάνεται στο ακόλουθο θεώρημα, συνήθως καλούμενο ως **θεώρημα πρώτης μετατόπισης** ή μερικές φορές ως **θεώρημα εκθετικής διαμόρφωσης**.

Θεώρημα 1.2 Το θεώρημα πρώτης μετατόπισης

Εάν η $f\ (t)$ είναι μια συνάρτηση που έχει Μετασχηματισμό Laplace $F\ (s)$, με Re(s) $>\sigma_c$, έπειτα η συνάρτηση $e^{at} f\ (t)$ επίσης έχει Μετασχηματισμό Laplace, που δίνεται από

$$L\{e^{at} f(t)\}=F(s-a),\operatorname{Re}(s)>\sigma_c+\operatorname{Re}(a)$$

Απόδειξη

Μια απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει άμεσα από τον καθορισμό του μετασχηματισμού Laplace αφού

$$L\left\{e^{at}f\left(t\right)\right\}=\int_0^{\infty}e^{at}f\left(t\right)e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty}f\left(t\right)e^{-(s-a)t}\,dt$$

Κατόπιν, αφού

$$L\left\{f\left(t\right)\right\}=F\left(s\right)=\int_0^{\infty}f\left(t\right)e^{-st}\,dt,\operatorname{Re}\left(s\right)>\sigma_c$$

βλέπουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα ανωτέρω είναι στη δομή ακριβώς ο μετασχηματισμός Laplace της ίδιας της $f\ (t\ )$, εκτός από το ότι το s- a παίρνει τη θέση του s , έτσι ώστε

$$L\left\{e^{at}f\left(t\right)\right\}=F\left(s-a\right),\operatorname{Re}\left(s-a\right)>\sigma_c$$

ή

$$L\left\{e^{at}f\left(t\right)\right\}=F\left(s-a\right),\operatorname{Re}\left(s\right)>\sigma_c+\operatorname{Re}\left(a\right)$$

τέλος του θεωρήματος

Ένας εναλλακτικός τρόπος έκφρασης του αποτελέσματος του θεωρήματος 1,2, ο οποίος μπορεί να βρεθεί καταλληλότερος στην εφαρμογή, είναι $L\left\{e^{at}f\left(t\right)\right\}=\left[L\left\{f\left(t\right)\right\}\right]_{s\to s-a}=\left[F\left(s\right)\right]_{s\to s-a}$ Με άλλα λόγια, το θεώρημα λέει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της e^{at} φορές μια συνάρτηση $f\ (t\ )$ είναι ίση με την ίδια τον μετασχηματισμό Laplace $f\ (t\ )$ ο , με το s να αντικαθίσταται από το s-a.

Παράδειγμα 2.9

Να καθοριστεί ο $\mathcal{L}\{te^{-2t}\}$.

Λύση

Από το αποτέλεσμα που δίνεται στο (1,6),

$$L\left\{t\right\}=F\left(s\right)=\frac{1}{s^2},\operatorname{Re}\left(s\right)>0$$

έτσι, από το θεώρημα πρώτης μετατόπισης,

$$L\left\{te^{-2t}\right\}=F\left(s+2\right)=\left[F\left(s\right)\right]_{s\to s+2,}\operatorname{Re}\left(s\right)>0-2$$

δηλαδή

$$L\left\{te^{-2t}\right\}=\frac{1}{\left(s+2\right)},\operatorname{Re}\left(s\right)>2$$

Παράδειγμα 2.10
Να καθοριστεί ο $\mathcal{L}\{e^{-3t}$ ημίτονο $2t\}$.

Λύση

Από το αποτέλεσμα (1,8), $L\{\sin 2t\} = F(s) = \dfrac{2}{s^2+4}, \mathrm{Re}(s) > 0$

έτσι, από το θεώρημα πρώτης μετατόπισης, $L\{e^{-3t}\sin 2t\} = F(s+3) = [F(s)]_{s\to s+3,}\ \mathrm{Re}(s) > 0-3$

δηλαδή

$$L\{e^{-3t}\sin 2t\} = \frac{2}{(s+3)^2+4} = \frac{2}{s^2+6s+13}, \mathrm{Re}(s) > -3$$

Η συνάρτηση e^{-3t} ημίτονο $2t$ στο παράδειγμα 2.10 είναι μέλος μιας γενικής κατηγορίας συναρτήσεων αποκαλούμενης **ημιτονοειδείς με απόσβεση**. Αυτές διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στη μελέτη των συστημάτων εφαρμοσμένης μηχανικής, ιδιαίτερα στην ανάλυση των δονήσεων. Για αυτόν τον λόγο, προσθέτουμε τα ακόλουθα δύο γενικά μέλη της κατηγορίας στην τυποποιημένη βιβλιοθήκη μας των ζευγών μετασχηματισμών Laplace :

$$L\{e^{-kt}\sin at\} = \frac{a}{(s+k)^2+a^2}, \mathrm{Re}(s) > -k \quad (2.6)$$

$$L\{e^{-kt}\cos at\} = \frac{s+k}{(s+k)^2+a^2}, \mathrm{Re}(s) > -k \quad (2.7)$$

όπου και στις δύο περιπτώσεις τα k και a είναι πραγματικές σταθερές.

Ιδιότητα 1.3: Ιδιότητα παραγώγου του μετασχηματισμού

Αυτή η ιδιότητα συσχετίζει τις πράξεις στην χρονική περιοχή με εκείνες στην μετασχηματισμένη περιοχή s, αλλά αρχικά θα την θεωρήσουμε απλά ως μια μέθοδος αύξησης του ρεπερτορίου μας των ζεύγων μετασχηματισμού Laplace . Η ιδιότητα επίσης μερικές φορές αναφέρεται ως ιδιότητα **διαίρεσης με το *t***. Μια δήλωση της ιδιότητας περιλαμβάνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.3 Παράγωγο του μετασχηματισμού

Εάν η $f(t)$ είναι μια συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace
$F(s) = L\{f(t)\}, \mathrm{Re}(s > \sigma_c)$

κατόπιν οι συναρτήσεις $t^n f(t)$ (n = 1,2....) έχουν επίσης μετασχηματισμό Laplace

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \mathrm{Re}(s) > \sigma_c$$

Απόδειξη Εξ ορισμού,

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\,dt$$

έτσι ώστε

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Χάρη στις ιδιότητες σύγκλισης του γενικευμένου ολοκληρώματος που εξετάζεται, μπορούμε να ανταλλάξουμε τις πράξεις της διαφοροποίησης και της ολοκλήρωσης και να διαφοροποιήσουμε αναφορικά με το s κάτω από το ακέραιο πρόσημο. Κατά συνέπεια

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \int_0^\infty \frac{\vartheta^n}{\vartheta s^n}\left[e^{-st} f(t)\right]dt$$

το οποίο, κατά την εκτέλεση της επαναλαμβανόμενης διαφοροποίησης, δίνει

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)\int_0^\infty e^{-st} t^n f(t)\,dt = (-1)^n L\{t^n f(t)\}, \mathrm{Re}(s) > \sigma_c$$

την περιοχή της σύγκλισης που παραμένει αμετάβλητη.

τέλος του θεωρήματος

Με άλλα λόγια, το θεώρημα 1,3 λέει ότι η διαφοροποίηση του μετασχηματισμού μιας συνάρτησης αναφορικά με το s είναι ισοδύναμο με το να πολλαπλασιάσουμε την ίδια την συνάρτηση με το t . Όπως με τις προηγούμενες ιδιότητες, μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα για να προσθέσουμε στον κατάλογό μας των ζευγών μετασχηματισμού Laplace

Παράδειγμα 2.11
Να καθοριστεί ο $\mathcal{L}\{\ t$ ημίτονο $3t\}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (1,8), $L\{\sin 3t\} = F(s) = \dfrac{3}{(s^2+9)}, \mathrm{Re}(s) > 0$

έτσι, από το θεώρημα του παραγώγου, $L\{\mathrm{t}\sin 3t\} = \dfrac{dF(s)}{ds} = \dfrac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}, \mathrm{Re}(s) > 0$

Παράδειγμα 2.12
Να καθοριστεί ο $\mathcal{L}\{\mathrm{t}^2\ \mathrm{e}^{\mathrm{t}}\}$

Λύση

$L\{e^t\} = F(s) = \dfrac{1}{s-1}, \mathrm{Re}(s) > 1$

Από το αποτέλεσμα (1,7),

$$L\{t^2 e^t\} = (-1)^2 \frac{d^2 F(s)}{ds^2} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-1}\right) =$$

$$(-1)^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) = \frac{2}{(s-1)^3}, \mathrm{Re}(s) > 1$$

έτσι, από το θεώρημα του παραγώγου,

Παράδειγμα 2.13

Να καθοριστεί ο $\mathcal{L}\{t^n\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (1,5), $L\{1\} = \dfrac{1}{s}, \mathrm{Re}(s) > 0$

έτσι, από το θεώρημα παραγώγου, $L\{t^n\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\left(\dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \mathrm{Re}(s) > 0$

2.4. Πίνακας τού μετασχηματισμού Laplace

Είναι αρμόζον σε αυτή τη φάση να συγκεντρωθούν τα αποτελέσματα που αποδείχθηκαν μέχρι τώρα για εύκολη πρόσβαση. Αυτό γίνεται υπό μορφή δύο μικρών πινάκων. Το σχήμα 2.2 (α) παρουσιάζει κάποια ζεύγη μετασχηματισμών Laplace και το σχήμα 2.2 (β) τις ιδιότητες που εξετάστηκαν ήδη.

Σχήμα 2.2 (α) Πίνακας ζευγών μετασχηματισμού Laplace (β) μερικές ιδιότητες των μετασχηματισμού Laplace

(a)

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Περιοχή σύγκλισης
c, c μια σταθερά	$\frac{c}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
t^n, n ένας θετικός ακέραιος	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
e^{kt}, k μια σταθερά	$\frac{1}{s-k}$	$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(k)$
$\sin at$, a μια πραγματική σταθερά	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\cos at$, a μια πραγματική σταθερά	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-kt}\sin at$, k και a πραγματικές σταθερές	$\frac{a}{(s+k)^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -k$
$e^{-kt}\cos at$, k και a πραγματικές σταθερές	$\frac{s+k}{(s+k)^2+a^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -k$

(b)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_1 \quad \text{and} \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_2$$

Γραμμικότητα : $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \max(\sigma_1, \sigma_2)$

Θεώρημα πρώτης μετατόπισης: $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a), \quad \mathrm{Re}(s) > \sigma_1 + \mathrm{Re}(a)$

Παράγωγο της μετασχηματισμένης: $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad (n = 1, 2, \ldots), \mathrm{Re}(s) > \sigma_1$

Παράδειγμα 2.14

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{\cosh 2t\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

$$L\{\cosh 2t\} = L\left\{\frac{1}{2}\left(e^{2t} + e^{-2t}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2}\right] = \frac{s}{s^2-4}, \operatorname{Re}\left(s > 0\right)\right\}$$

Παράδειγμα 2.15

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{t^2\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

$$L\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}, \operatorname{Re}\left(s\right) > 0$$

Παράδειγμα 2.16

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{5\text{-}3t\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

$$L\{5-3t\} = \frac{5}{3} - \frac{3}{s^2} = \frac{5s-3}{s^2}, \operatorname{Re} > 0$$

Παράδειγμα 2.17

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{7t^3\text{-}2\sin 3t\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

$$L\left\{7t^3 - 2\sin 3t\right\} = 7\frac{6}{s^4} - 2\frac{3}{s^2+9} =$$

$$\frac{42}{s^4} - \frac{6}{s^2+9}, \operatorname{Re}\left(s\right) > 0$$

Παράδειγμα 2.18

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{3\text{-}2t\text{+}4\cos 2t\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

$$L\{3-2t+4\cos 2t\}=\frac{3}{s}-\frac{2}{s^2}+4\frac{s}{s^2+4}=$$
$$\frac{3s-2}{s^2+4}+\frac{4s}{s^2+4},\mathrm{Re}(s)>0$$

Παράδειγμα 2.19

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{5e^{-2t}+3-2\cos 2t\}$, όπου *n* είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

$$L\{5e^{-2t}+3-2\cos 2t\}=\frac{5}{s+2}+\frac{3}{s}-2\frac{s}{s^2+4},\mathrm{Re}(s)>0$$

Λύση

Παράδειγμα 2.20

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{6t^3-3t^2+4t-2\}$, όπου *n* είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

$$L\{6e^3+3t^2+4t-2\}=\frac{36}{s^4}+\frac{6}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}=$$
$$\frac{36-6s+4s^2-2s^3}{s^4},\mathrm{Re}(s)>0$$

Παράδειγμα 2.21

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{t\cos 2t\}$, όπου *n* είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

$$L\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+4}$$
$$L\{\cos 2t\}=\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]=\frac{s^2-4}{\left(s^2+4\right)^2},\mathrm{Re}(s)>0$$

Παράδειγμα 2.22

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{t^2-3\cos 4t\}$, όπου *n* είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

$$L\{t^2-3\cos 4t\}=\frac{2}{s^3}-\frac{3s}{s^2+16},\mathrm{Re}(s)>0$$

Παράδειγμα 2.23

Να υπολογιστεί ο $\mathcal{L}\{t^2e^{-2t} - e^{-t}\cos 2t+3\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός.

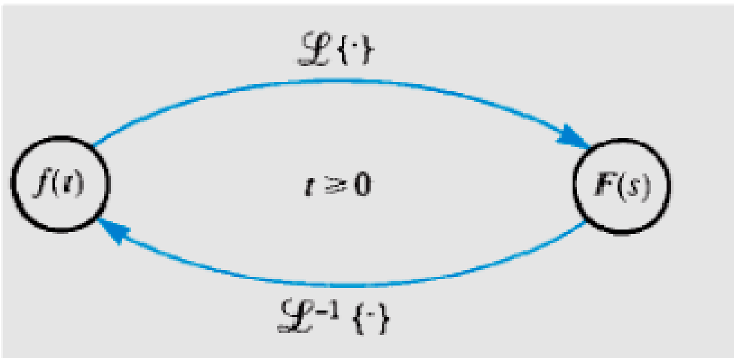
Λύση

$$L\left\{t^2e^{-2t} - e\cos 2t + 3\right\} = \frac{2}{(s+2)^3} + \frac{(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{3}{s} =$$
$$\frac{2}{(s+2)^3} + \frac{s+1}{s^2+2s+5} + \frac{3}{s}, \mathrm{Re}(s) > 0 \qquad 2.8$$

Το σύμβολο L^{-1} $F(s)$ δείχνει μια αιτιώδη συνάρτηση $f(t)$ της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace είναι $F(s)$˙ δηλαδή

$$\varepsilon\acute{\alpha}\nu \;\; L\left\{F(t)\right\} = Fs \quad \text{τότε} \;\; f(t) = L^{-1}\left\{F(s)\right\}$$

Αυτή η αντιστοιχία μεταξύ των συναρτήσεων $F(s)$ και $f(t)$ καλείται **αντίστροφος μετασχηματισμός**, με την $f(t)$ να είναι **αντίστροφου μετασχηματισμού** της $F(s)$, και την L^{-1} να αναφέρεται ως **τελεστής του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.** Αυτές οι σχέσεις απεικονίζονται στο σχήμα 5.6.



Σχήμα 2.3 Ο μετασχηματισμός Laplace και ο αντίστροφός του.

Ο μετασχηματισμός Laplace $F(s)$ καθορίζει μόνο τη συμπεριφορά της $f(t)$ για $t \geq 0$, Κατά συνέπεια L^{-1} $F(s) = f(t)$ μόνο για $t \geq 0$. Όταν γράφουμε L^{-1} $F(s) = f(t)$, υποτίθεται ότι $t \geq 0$ έτσι για να κυριολεκτήσουμε, πρέπει να γράψουμε

$$L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)H(t) \qquad \textbf{(2.9)}$$

Παράδειγμα 2.24 Αφού

$$L\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}$$

συνεπάγεται ότι

$$L^{-1} = \left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$$

Παράδειγμα 2.25 Αφού

συνεπάγεται ότι $L\left\{\sin \omega t\right\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$

Η ιδιότητα γραμμικότητας sin για τον μετασχηματισμό Laplace

$L^{-1} = \left\{\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}\right\} = \sin \omega t$ (ιδιότητα 1.1)

δηλώνει ότι εάν τα α και β είναι οποιεσδήποτε σταθερές τότε

$$L\left\{af\left(t\right) + \beta g\left(t\right)\right\} = aL\left\{f\left(t\right) + \beta L\left(t\right)\right\} =$$

$$aF\left(s\right) + \beta g\left(s\right)$$

Προκύπτει έπειτα από τον ανωτέρω καθορισμό ότι

$$L^{-1}\left\{aF\left(t\right) + \beta G\left(s\right)\right\} = af\left(t\right) + \beta g\left(t\right) =$$

$$aL^{-1}\left\{F\left(s\right)\right\} + \beta L^{-1}\left\{G\left(s\right)\right\}$$

έτσι ώστε ο τελεστής του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace είναι επίσης γραμμικός τελεστής.

2.5. Υπολογισμός των αντίστροφων μετασχηματισμών

Ο προφανέστερος τρόπος για να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης $F(s)$ είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα μετασχηματισμών όπως αυτός που δίνεται στο σχήμα 1.5. Μερικές φορές είναι δυνατό να καταγράψουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό άμεσα από τον πίνακα, αλλά τις περισσότερες φορές είναι απαραίτητο πρώτα να πραγματοποιηθεί κάποιος αλγεβρικός χειρισμός στην $F(s)$. Ειδικότερα, είναι συχνά ανάγκη να καθοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός μιας λογικής συνάρτησης της μορφής $p(s)/q(s)$, όπου τα $p(s)$ και $q(s)$ είναι πολυώνυμα μέσα στο s. Σε τέτοιες περιπτώσεις η διαδικασία είναι πρώτα να επιλύσουμε την συνάρτηση σε απλά κλάσματα και έπειτα να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα των μετασχηματισμών

Παράδειγμα 2.26

Να υπολογιστεί ο $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-2)}\right\}$

Λύση Πρώτα η $1/(s + 3)(s - 2)$ επιλύεται σε απλά κλάσματα,

δίνοντας $\frac{1}{(s+3)(s-2)} = \frac{-\frac{1}{5}}{s+3} + \frac{\frac{1}{5}}{s-2}$

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα $L^{-1}\{1/(s + a)\} = e^{-at}$ μαζί με την ιδιότητα γραμμικότητας, έχουμε

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s-2)}\right\} = \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{-2t}$$

Παράδειγμα 2.27

Να υπολογιστεί ο $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2\left(s^2+9\right)}\right\}$

Λύση

Η επίλυση της $(s + 1)/s^2 (s^2 + 9)$ σε απλά κλάσματα δίνει

$$\frac{s+1}{s^2\left(s^2+9\right)} = \frac{\frac{1}{9}}{s} + \frac{\frac{1}{9}}{s^2} - \frac{1}{9}\frac{s+1}{s^2+9} - \frac{1}{9}\frac{s}{s^2+3^2} - \frac{1}{27}\frac{3}{s^2+3^2}$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα στο σχήμα 2.3, μαζί με την ιδιότητα γραμμικότητας, έχουμε

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2\left(s^2+9\right)}\right\} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}t - \frac{1}{9}\cos 3t - \frac{1}{27}\sin 3t$$

2.6 Αντιστροφή με χρήση του θεωρήματος πρώτης μετατόπισης

Στο θεώρημα 1.2 είδαμε ότι εάν η $F(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ τότε για έναν βαθμωτό a, η $F(s - a)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $e^{at} f(t)$. Αυτό το θεώρημα προκαλεί κανονικά λίγη δυσκολία όταν χρησιμοποιείται για να ληφθούν οι μετασχηματισμοί Laplace ων συναρτήσεων, αλλά συχνά οδηγεί σε προβλήματα όταν χρησιμοποιείται για να ληφθούν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace. Εκφρασμένο στην αντίστροφη μορφή, το θεώρημα γίνεται

$$L^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = e^{at} f(t)$$

Η σημείωση

$$L^{-1}\left\{\left[F(s)\right]_{s\to s-a}\right\}=e^{at}\left[f(t)\right]$$

όπου οι $F(s)=$ L{ $f(t)$} και $[F(s)]_{s\to s-a}$ υποδηλώνουν ότι το s μέσα στην $F(s)$ αντικαθίσταται από το $s-a$, μπορεί να καταστήσει τη σχέση σαφέστερη.

Παράδειγμα 2.28

Να υπολογιστεί ο $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s+2)^2}\right\}$

Λύση

$$\frac{s+1}{(s+2)^2}=\left[\frac{1}{2^2}\right]_{s\to s+2}$$

και, αφού $1/s^2=$ L{ t }, το θεώρημα μετατόπισης δίνει $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s+2)^2}\right\}=te^{-2t}$

Παράδειγμα 2.29 Να βρεθεί

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{\left(s^2+6s+13\right)}\right\}$$

Λύση

$$\frac{2}{s^2+6s+13}=\frac{2}{(s+3)^2+4}=\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]_{s\to s+3}$$

και, αφο ύ $2/(s^2+2^2)=$ L{ ημίτονο $2t$}, το θεώρημα μετατόπισης δίνει

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{\left(s^2+6s+13\right)}\right\}=e^{-3t}\sin 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2s+5}\right\},\ L^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s+5}\right\}$$

Παράδειγμα 2.30 Να υπολογιστεί $\dfrac{(s+1)}{(s+1)^2+4}+3\dfrac{2}{(s+1)^2+4}$

Λύση

$$=\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]_{s\to s+1}+3\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]_{s\to s+1}$$

Αφού s / (s ^{2}+ 2^2)= L{συνημίτονο 2t} και 2/(s ^{2}+ 2^2)= L { ημίτονο 2t }, το θεώρημα μετατόπισης δίνει

Παράδειγμα 2.31 Να βρεθεί ότι $L^{-1}\left\{\dfrac{s+7}{s^2+2s+5}\right\}=e^{-t}\cos 2t+3e^{-t}\sin 2t$

Λύση

Η επίλυση της 1/(s + 1) ^{2} (s ^{2}+ 4) σε απλά κλάσματα δίνει

$$\frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}=\frac{\frac{2}{25}}{s+1}+\frac{\frac{1}{5}}{(s+1)}-\frac{1}{25}\frac{2s+3}{s^2+4}$$

$$\frac{\frac{2}{25}}{s+1}+\frac{1}{5}\left[\frac{1}{s^2}\right]_{s\to s+1}-\frac{2}{25}\frac{s}{s^2+2^2}-\frac{3}{50}\frac{2}{s^2+2^2}$$

Αφού 1/ s ^{2}= L{ t }, το θεώρημα μετατόπισης, μαζί με τα αποτελέσματα στο σχήμα 5.5, δίνει

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s^2+2)}\right\}=\frac{2}{25}e^{-t}+\frac{1}{5}e^{-t}t\frac{2}{25}\cos 2t-\frac{3}{50}\sin 2t$$

Παράδειγμα 2.32

Να βρεθεί η L $^{-1}$ { F (s) } όταν η F (s) δίνεται από

$$\frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

Λύση

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)(s+7)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s+3}-\frac{\frac{1}{4}}{s+7}\right\}=$$
$$\frac{1}{4}\left[e^{-3t}-e^{-7t}\right]$$

Παράδειγμα 2.33

Να βρεθεί η L $^{-1}$ { $F(s)$ } όταν η $F(s)$ δίνεται από

$$\frac{s+5}{(s+1)(s-3)}$$

Λύση

$$L^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+1)(s-3)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s-3}\right\}=$$
$$-e^{-t}+2e^{3t}$$

Παράδειγμα 2.34

Να βρεθεί η L $^{-1}$ { $F(s)$ } όταν η $F(s)$ δίνεται από

$$\frac{s-1}{s^2(s+3)}$$

Λύση

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2(+3)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{9}}{s}-\frac{\frac{1}{3}}{s^2}-\frac{\frac{4}{9}}{s+3}\right\}=$$
$$=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}t-\frac{4}{9}e^{-3t}$$

Παράδειγμα 2.35

Να βρεθεί ο L $^{-1}$ { $F(s)$ } όταν η $F(s)$ δίνεται από

$$\frac{s+8}{s^2+4s+5}$$

Λύση

$$L^{-1}\left\{\frac{s+8}{s^2+4s+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{(s+2)+6}{(s+2)^2+1}\right\}=$$
$$=e^{-2t}\left[\cos t+6\sin t\right]$$

Παράδειγμα 2.36

Να βρεθεί ο L $^{-1}$ { $F(s)$ } όταν η $F(s)$ δίνεται από

$$\frac{3s^2 7s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

Λύση

$$L^{-1}\left\{\frac{3s^2 7s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{(s-1)} - \frac{3}{(s-2)} + \frac{\frac{1}{2}}{s-3}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}e^{t} - 3e^{2t} + \frac{11}{2}e^{3t}$$

Παράδειγμα 2.37

Να βρεθεί ο L $^{-1}$ { $F(s)$ } όταν η $F(s)$ δίνεται από

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)(s-4)}$$

Λύση

$$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)(s-3)(s-4)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{(s-2)} - \frac{2}{(s-3)} + \frac{\frac{3}{2}}{(s-4)}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}e^{t} - 2e^{3t} + \frac{3}{2}e^{4t}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Λύση των διαφορικών εξισώσεων

Εξετάζουμε αρχικά το μετασχηματισμό Laplace των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων, και τις εφαρμόζουμε έπειτα στην λύση των διαφορικών εξισώσεων.

3.2 Μετασχηματισμοί των παραγώγων

να βρούμε τις κατάλληλες εκφράσεις για το μετασχηματισμό Laplace των παραγώγων όπως df / dt , d$^2 f$ / d t^2 ή, γενικά, d$^n f$ / dt^n.

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt}dt$$

Εξ ορισμού, $$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = -f(0) + sF(s)$$

Ενσωματώνοντας κατά μέλη, έχουμε

δηλαδή $$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) + f(0)$$

(3.1)

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace ενός παραγώγου έχουμε υποθέσει ότι η f (t) είναι συνεχής στο $t = 0$, έτσι ώστε $f(0^-) = f(0) = f(0^+)$. Το πλεονέκτημα της χρήσης του μετασχηματισμού Laplace κατά την εξέταση των διαφορικών εξισώσεων μπορεί εύκολα να φανεί, δεδομένου ότι μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε την πράξη της διαφοροποίησης στην χρονική περιοχή με μια απλή αλγεβρική πράξη στην περιοχή s.
Σημειώστε ότι για να συναγάγουμε το αποτέλεσμα (3,1), έχουμε υποθέσει ότι η f (t) είναι συνεχής, με ένα τμηματικά συνεχές παράγωγο d f / dt , για ≥ 0 και ότι είναι επίσης εκθετικής τάξης ως $t\to\infty$.
Παρομοίως, εάν και η f (t) και η d f / d t είναι συνεχείς στο $t \geq 0$ και είναι εκθετικής τάξης ως $t\to\infty$, και d$^2 f$ / d t^2 είναι τμηματικά συνεχείς για $t \geq 0$, τότε

$$L\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{d^2f}{dt^2}\left[e^{-st}\frac{df}{dt}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\frac{df}{dt} = -\left[\frac{df}{dt}\right]_{t\to 0} + sL\left\{\frac{df}{dt}\right\}$$

το οποίο, κατά την χρήση της (5,12), δίνει $$L\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = -\left[\frac{df}{dt}\right]_{t\to 0} + s\left[sF(s) - f(0)\right]$$

οδηγώντας στο αποτέλεσμα $L\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}\right\} = s^2 F\left(0\right) - sf\left(0\right) - \left[\frac{df}{dt}\right]_{t\to 0} = s^2 F\left(s\right) - sf\left(0\right) - f^{(1)}\left(0\right)$

(3.2)

Σαφώς, υπό τον όρο ότι η f (t) και τα παράγωγά της ικανοποιούν τους απαραίτητους όρους, αυτή η διαδικασία μπορεί να επεκταθεί για να ληφθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f^{(n)}$ (t) = d^n f / d t^n στη μορφή

$$L\left\{f^n\left(t\right)\right\} = s^n F\left(s\right) - s^{n-1} f\left(0\right) - s^{n-2} f^{(1)}\left(0\right) - .... - \frac{1}{2} f^{(n-1)}\left(0\right) =$$

$$s^n F\left(s\right) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-1} f^{(i-1)}\left(0\right) \qquad \textbf{(3.3)}$$

ένα αποτέλεσμα που μπορεί να αποδειχθεί εύκολα από την επαγωγή.
Πάλι διαπιστώνεται ότι στον καθορισμό του μετασχηματισμού Laplace της $f^{(n)}$ (t) έχουμε υποθέσει ότι η $f^{(n-1)}$ (t) είναι συνεχής.

3.3 Μετασχηματισμένες των ολοκληρωμάτων

Σε μερικές εφαρμογές η συμπεριφορά ενός συστήματος μπορεί να αναπαρασταθεί από μια **ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση**, η οποία είναι μια εξίσωση που περιέχει και παράγωγα και ολοκληρώματα άγνωστης μεταβλητής. Παραδείγματος χάριν, το ρεύμα *i* σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα σε σειρά που αποτελείται από μια αντίσταση *R*, μια αυτεπαγωγή *L* και μια χωρητικότητα *C*, και που υπάγεται σε μια εφαρμοσμένη τάση *E*, δίνεται από

$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C}\int_0^t i\left(\tau\right) d\tau = \mathrm{E}$$

Για να λυθούν τέτοιες εξισώσεις άμεσα, είναι βολικό να είμαστε σε θέση να λάβουμε τον μετασχηματισμό Laplace των ολοκληρωμάτων όπως $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$.

Γράφοντας $g\left(t\right) = \int_0^t f\left(\tau\right) d\tau$

έχουμε $\frac{dg}{dt} = f\left(t\right), \mathrm{g}\left(0\right) = 0 \frac{dg}{dt} = f\left(t\right), g\left(0\right) = 0$

Η λήψη του μετασχηματισμού Laplace, $L\left\{\frac{dg}{dt}\right\} = L\{f(t)\}$

το οποίο, κατά την χρήση της (3,1), δίνει

$$sG(s) = F(s) \qquad sG(s) = F(s)$$

ή $L\{g(t)\} = G(s) = \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}L\{f(t)\}$

οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}L\{f(\tau)\} = \frac{1}{s}F(s)$$

(3.4)

Παράδειγμα 3.1 Να λάβετε $L\left\{\int_0^t \left(\tau^3 + \sin 2\tau\right) d\tau\right\}$

Σε αυτήν την περίπτωση $f\ (t) =\ t^3 +$ ημίτονο $2t$, που δίνει

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\left\{t^3\right\} + L\{\sin 2t\} =$$

$$\frac{6}{4^4} + \frac{2}{s^2+4}$$

έτσι, από την (5,16),

$$L\left\{\int_0^t \left(\tau^3 + \sin 2\tau\right) dt\right\} = \frac{1}{s}F(s) = \frac{6}{s^5} + \frac{2}{s\left(s^2+4\right)}$$

3.4 Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Έχοντας λάβει τις εκφράσεις για το μετασχηματισμό Laplace των παραγώγων, είμαστε τώρα σε θέση να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους του μετασχηματισμού Laplace για να λύσουμε τις συνήθεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Για να απεικονισθεί αυτό, θεωρήστε την γενική δεύτερης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = u(t)\left(t \geq 0\right) \qquad \textbf{(3.5)}$$

που υπόκειται στις αρχικές συνθήκες x (0) = x_0, $\dot{x}(0) = v0$ όπου ως συνήθως μια τελεία υποδηλώνει τη διαφοροποίηση αναφορικά με το χρόνο *t*. Μια τέτοια διαφορική εξίσωση μπορεί να διαμορφώσει τη δυναμική κάποιων συστημάτων για τα οποία η μεταβλητή x (t) καθορίζει την απόκριση του συστήματος στον όρο **εξαναγκασμός** ή **διέγερση** u (t). Οι όροι **είσοδος συστήματος** και **έξοδος συστήματος** χρησιμοποιούνται επίσης συχνά για u (t) και $x(t)$ αντίστοιχα. Δεδομένου ότι η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και έχει σταθερούς συντελεστές, ένα σύστημα που χαρακτηρίζεται από ένα τέτοιο πρότυπο λέγεται ότι είναι ένα **γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα**.

Η λήψη του μετασχηματισμού Laplace κάθε όρου στο (3.5) δίνει

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+bL\left\{\frac{dx}{dt}\right\}+cL\{x\}=L\{u(t)\}$$

το οποίο χρησιμοποιώντας τα (1.13) και (1.14) οδηγεί στο

$$a\left[s^2X(s)-sx(0)-x(0)\right]+b\left[sX(s)-x(0)\right]+cX(s)=U(s)$$

Η εκ νέου διάταξη, και η ενσωμάτωση των δεδομένων αρχικών όρων,
δίνει $\left(as^2+bs+c\right)X(s)=U(s)+\left(as+b\right)x_0+a\upsilon_0$

$$\left[s^2X(s)-sx(0)-x(0)\right]+5\left[sX(s)-x(0)\right]+6X(s)=\frac{2}{s+1}$$

έτσι ώστε

$$X(s)=\frac{U(s)+\left(as+b\right)x_0+a\upsilon_0}{as^2+bs+c} \qquad \textbf{(3.6)}$$

Η εξίσωση (1.18) καθορίζει τον μετασχηματισμό Laplace X (s) της απόκρισης, από την οποία, παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό, η επιθυμητή χρονική απόκριση x (t) μπορεί να ληφθεί.
Πρίν εξετάσουμε συγκεκριμένα παραδείγματα, υπάρχουν μερικές παρατηρήσεις άξιες να αναφερθούν σε αυτό το στάδιο.
(α) Όπως έχουμε σημειώσει ήδη στην παράγραφο 3.1, ένα ευδιάκριτο πλεονέκτημα της χρήσης του μετασχηματισμού Laplace είναι ότι μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε την πράξη της διαφοροποίησης με μια αλγεβρική πράξη. Συνεπώς, με τη λήψη του μετασχηματισμού Laplace του κάθε όρου σε μια διαφορική εξίσωση, αυτή μετατρέπεται σε μια αλγεβρική εξίσωση στην μεταβλητή *s*. Αυτή μπορεί έπειτα να αναδιαταχθεί χρησιμοποιώντας τους αλγεβρικούς κανόνες για να ληφθεί μια έκφραση για τον μετασχηματισμό Laplace της απόκρισης˙ η επιθυμητή χρονική απόκριση αποκτάται έπειτα με τη λήψη του αντίστροφου μετασχηματισμού.

(β) Η μέθοδος μετασχηματισμού Laplace παράγει την πλήρη λύση στην γραμμική διαφορική εξίσωση, με τις αρχικές συνθήκες να συμπεριλαμβάνονται αυτόματα. Αυτό αντιπαραβάλλεται με την κλασσική προσέγγιση, στην οποία η γενική λύση αποτελείται από δύο συστατικά, την **συμπληρωματική συνάρτηση** και το **μερικό ολοκλήρωμα**, με τις αρχικές συνθήκες να καθορίζουν τις ακαθόριστες σταθερές που συνδέονται με τη συμπληρωματική συνάρτηση. Όταν η λύση εκφράζεται με τη γενική μορφή (3.6), καυτά την αντιστροφή ο όρος που περιλαμβάνει το $U(s)$ οδηγεί σε ένα μερικό ολοκλήρωμα εκείνη αυτός που περιλαμβάνει τα x_0 και v_0 δίνει μια συμπληρωματική συνάρτηση. Ένα χρήσιμο δευτερεύον ζήτημα είναι ότι λαμβάνεται μια ρητή λύση για τον μεταβατικό που απεικονίζει τις αρχικές συνθήκες.
(γ) Η μέθοδος μετασχηματισμού Laplace είναι ιδανικά κατάλληλη για την επίλυση των προβλημάτων αρχικών τιμών˙ δηλαδή γραμμικές διαφορικές εξισώσεις στις οποίες όλες οι αρχικές συνθήκες $x(0)$,$x(0)$, και τα λοιπά, στο χρόνο $t = 0$, καθορίζονται. Η μέθοδος είναι λιγότερο ελκυστική για προβλήματα συνοριακής τιμής, όταν οι συνθήκες στο $x(t)$ και τα παράγωγά του δεν καθορίζονται όλα στο $t=0$, αλλά μερικές καθορίζονται σε άλλες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Είναι ακόμα δυνατό, εντούτοις, να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος με την μετασχηματισμού Laplace ανάθεση αυθαίρετων σταθερών σε μια ή περισσότερες από τις αρχικές συνθήκες και έπειτα να καθοριστούν οι τιμές χρησιμοποιώντας τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες.
(δ) Πρέπει να σημειωθεί ότι ο παρονομαστής της δεξιάς πλευράς της (3.6) είναι η αριστερή πλευρά της (3.5) με τον τελεστή d/dt που έχει αντικατασταθεί από το s. Ο παρονομαστής που εξισώνεται σε μηδέν επίσης αντιστοιχεί στη βοηθητική εξίσωση ή τη χαρακτηριστική εξίσωση που χρησιμοποιείται στην κλασσική προσέγγιση. Με δεδομένο ένα συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών, η διαδικασία λήψης μιας λύσης χρησιμοποιώντας τις μεθόδους μετασχηματισμού Laplace είναι αρκετά απλή, και απεικονίζεται στο παράδειγμα 3.2.

Παράδειγμα 3.2 Να λύστε τη διαφορική εξίσωση $\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=2e^{-t}\left(t\geq 0\right)$

που υπόκειται στις αρχικές συνθήκες $x = 1$ και dx / dt = 0 t = σε 0,

Λύση

Η λήψη του μετασχηματισμού Laplace $L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\}+5L\left\{\frac{dx}{dt}\right\}+6L(x)=2L\left(e^{-t}\right)$

οδηγεί στη μετασχηματισμένη
εξίσωση$\left[sX(s)-sx(0)-x(0)\right]+5\left[sX(s)-x(0)\right]+6X(s)=\frac{2}{s+1}$

η οποία κατά την στην αναδιάταξη δίνει

Η ενσωμάτωση των δεδομένων αρχικών συνθηκών x (0) = 1 και x (0)= 0 οδηγεί

$$\left(s^2+5s+6\right)X\left(s\right)=\frac{2}{s+1}+\left(s+5\right)x\left(0\right)+x\left(0\right)$$

Δηλαδή

$$X\left(s\right)=\frac{2}{\left(s+1\right)\left(s+2\right)\left(s+3\right)}+\frac{s+5}{\left(s+3\right)\left(s+2\right)}$$

Η επίλυση των λογικών όρων σε απλά κλάσματα δίνει

$$X\left(s\right)=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+3}+\frac{3}{s+2}$$

$$-\frac{2}{s+3}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

Η λήψη των αντίστροφων μετασχηματισμών δίνει την επιθυμητή λύση

$$x\left(t\right)=e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}\left(t\geq 0\right)$$

Σε γενικές γραμμές η διαδικασία που υιοθετείται στο παράδειγμα 3.2 για την επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές μεταφέρεται εύκολα στις υψηλότερης τάξης διαφορικές εξισώσεις. Μια γενική γραμμική διαφορική εξίσωση *n-στής* τάξης μπορεί να γραφτεί ως

$$a_n\frac{d^n x}{dt}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+....+a_0x=u\left(t\right)\left(t\geq 0\right)\quad \mathbf{3.7}$$

όπου a_n , a_{n-1}, ...,a_0 είναι σταθερές, με $a_n\neq$ 0. Αυτό μπορεί να γραφτεί στην περισσότερο συνοπτική μορφή

$$\mathbf{3.8}\quad q\left(D\right)x\left(t\right)=u\left(t\right)$$

όπου το D υποδηλώνει τον τελεστή d/d t και το q (D) είναι το πολυώνυμο

$$q\left(D\right)=\sum_{r=0}^{n}a_rD^r$$

Ο στόχος είναι έπειτα να καθοριστεί η απόκριση x (t) για μια δεδομένη συνάρτηση εξαναγκασμού u (t) που υπόκειται στο δεδομένο σύνολο αρχικών συνθηκών

$$D'x\left(0\right)=\left[\frac{d'x}{dt'}\right]=c_r\left(r=0,1,..n-1\right)$$

Παίρνοντας τις μετασχηματισμένες Λαπλάς στο (3.8) και προχωρώντας όπως πριν οδηγούμαστε στο $X(s)=\dfrac{p(s)}{q(s)}$

όπου

$$p(s)=U(s)+\sum_{r=0}^{n-1}c_r\sum_{i=r+1}^{n}a_i s^{i-r-1}$$

Κατόπιν, σε γενικές γραμμές, με τη λήψη του αντίστροφου μετασχηματισμού, η επιθυμητή απόκριση $x\ (t\ )$ μπορεί να αποκτηθεί ως

$$x(t)=L^{-1}\left\{\frac{p(s)}{q(s)}\right\}$$

Για τις διαφορικές εξισώσεις υψηλής τάξης η διαδικασία εκτέλεσης αυτής της αντιστροφής μπορεί να αποδειχθεί μάλλον κουραστική, και οι μέθοδοι πινάκων μπορούν να χρησιμοποιηθούν όπως υποδεικνύονται στην παράγραφο 2.4.
Για να ολοκληρώσουμε αυτό το τμήμα, περαιτέρω επεξεργασμένα παραδείγματα αναπτύσσονται προκειμένου να βοηθηθούμε στην παγίωση της κατανόησης αυτής της μεθόδου για την επίλυση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Παράδειγμα 3.3 Η διαφορική εξίσωση $\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+9x=\sin t\ (t\geq 0)$

που υπόκειται στις αρχικές συνθήκες $x\ =\ 0$ και d x / d$t\ =\ 0$ σε $t\ = 0$.

Λύση

Η λήψη του μετασχηματισμού Laplace $L\left\{\dfrac{d^2x}{dt^2}\right\}+6L\left\{\dfrac{dx}{dt}\right\}+9L(x)=L\{\sin t\}$

οδηγεί στην εξίσωση $\left[s^2X(s)-sx(0)-x(0)\right]+6\left[sX(s)-x(0)\right]$

$$\left(s^2+6s+9\right)X(s)=\frac{1}{s^2+1}+(s+6)x(0)+x(0)$$

η οποία κατά την αναδιάταξη δίνει

Η ενσωμάτωση των δεδομένων αρχικών συνθηκών $x\ (0)=\ x\ (0)=\ 0$ οδηγεί στο

$$X(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s+3\right)^2}$$

Η επίλυση στα απλά κλάσματα δίνει

$$X(s)=\tfrac{3}{50}\frac{1}{s+3}+\tfrac{1}{10}\frac{1}{\left(s+3\right)^2}+\tfrac{2}{25}\frac{1}{s^2+1}-\tfrac{3}{50}\frac{s}{s^2+1}$$

$$X(s)=\tfrac{3}{50}\frac{1}{s+3}+\tfrac{1}{10}\left[\frac{1}{s^2}\right]_{s\to s+3}+\tfrac{2}{25}\frac{1}{s^2+1}-\tfrac{3}{50}\frac{s}{s^2+1}$$

Η λήψη των αντίστροφων μετασχηματισμών, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μετατόπισης, οδηγεί στην επιθυμητή λύση

$$x(t)=\tfrac{3}{50}e^{-3t}+\tfrac{1}{10}te^{-3t}+\tfrac{2}{25}\sin t-\tfrac{3}{50}\cos t\left(t\geq 0\right)$$

Παράδειγμα 3.4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{d^3x}{dt^3}+5\frac{d^2x}{dt^2}+17\frac{dx}{dt}13x=1\left(t\geq 0\right)$

που υπόκειται στις αρχικές συνθήκες x = d x / d t = 1 και d^2 x / d t^2= 0 σε t = 0,

Λύση

Η λήψη του μετασχηματισμού Laplace

$$L\left\{\frac{d^3x}{dt^3}\right\}+5L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\}+17L\left\{\frac{dx}{dt}\right\}+13L\{x\}=L\{1\}$$

οδηγεί στην εξίσωση

$$\begin{aligned}&s^3X(s)-s^2x(0)-sx(0)-x(0)\\&+5\left[s^2X(s)-sx(0)-x(0)\right]\\&+17\left[sX(s)-x(0)\pi\right]+13\pi X(s)=\frac{1}{s}\end{aligned}$$

η οποία με την αναδιάταξη δίνει

$$\left|\begin{aligned}&\left(s^3+5s^2+17s+13\right)X(s)\\&=\frac{1}{s}+\left(s^2+5s+17\right)x(0)+\left(s+5\right)x(0)+x(0)\end{aligned}\right|$$

Η ενσωμάτωση των δεδομένων αρχικών συνθηκών $x(0)=\dot{\chi}(0)=1$ και $\ddot{\chi}(0)=0$ οδηγεί στο

$$X(s)=\frac{s^3+6s^2+22s+1}{s\left(s^3+5s^2+17s+13\right)}$$

Σαφώς το $s + 1$ είναι ένας παράγοντας του $s^3 + 5s^2 + 17s + 13$, και με την αλγεβρική διαίρεση έχουμε

$$X(s)=\frac{s^3+6s^2+22s+1}{s(s+1)\left(s^2+4s+13\right)}$$

Επιλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$X(s)=\frac{\frac{1}{13}}{s}+\frac{\frac{8}{5}}{s+1}-\frac{1}{65}\frac{44s+7}{s^2+4s+13}=$$

$$=\frac{\frac{1}{13}}{s}+\frac{\frac{8}{5}}{s+1}-\frac{1}{65}\frac{44(s+2)-27(3)}{(s+2)^2+3^2}$$

Η λήψη των αντίστροφων μετασχηματισμών, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μετατόπισης, οδηγεί στη λύση

$$x(t)=\tfrac{1}{13}+\tfrac{8}{5}e^{-t}-\tfrac{1}{65}e^{-2t}\left(44\cos 3t-27\sin 3t\right)(t\geq 0)$$

3.5 Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Στην εφαρμοσμένη μηχανική αντιμετωπίζουμε συχνά συστήματα τα χαρακτηριστικά των οποίων διαμορφώνονται από ένα σύνολο ταυτόχρονων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Η μέθοδος επίλυσης είναι ουσιαστικά η ίδια με αυτήν που υιοθετείται στην παράγραφο 3.3 για την επίλυση μιας απλής διαφορικής εξίσωσης με ένα άγνωστο. Με την λήψη του μετασχηματισμού Laplace παντού, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες λύνονται έπειτα για τις μετασχηματισμένες μεταβλητές οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί δίνουν έπειτα τις επιθυμητές λύσεις.

Παράδειγμα 3.5

Να λυθεί για $t \geq 0$ τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+5x+3y=e^{-t} \quad \textbf{(3.9)}$$

$$2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+x+y=3 \quad \mathbf{(3.10)}$$

που υπόκεινται στις αρχικές συνθήκες $x = 2$ και $y = 1$ σε $t = 0$.

Λύση

Η λήψη του μετασχηματισμού Laplace (1.21) και (1.22) δίνει

$$sX(s)-x(0)+sY(s)-y(0)+5X(s)+3Y(s)=$$
$$=2\left[sX(s)-x(0)\right]+sY(s)-y(0)+X$$

Αναδιατάσσοντας και ενσωματώνοντας τις δεδομένες αρχικές συνθήκες x (0) = 2 και y (0) = 1 οδηγούμαστε στα

$$(s+5)X(s)+(s+3)Y(s)=3+\frac{1}{s+1}=\frac{3s+4}{s+1} \qquad \mathbf{(3.11)}$$

$$(2s+1)X(s)+(s+1)Y(s)=5+\frac{3}{s}=\frac{5s+3}{s} \qquad \mathbf{(3.12)}$$

Ως εκ τούτου, με τη λήψη του μετασχηματισμού Laplace, το ζεύγος των ταυτόχρονων διαφορικών εξισώσεων (3.9) και (3.10) στα x (t) και y (t) έχει μετασχηματιστεί σε ένα ζεύγος ταυτόχρονων αλγεβρικών εξισώσεων (3.11) και (3.12) στις μετασχηματισμένες μεταβλητές $X(s)$ και Y (s).

Αυτές οι αλγεβρικές εξισώσεις μπορούν τώρα να λυθούν ταυτόχρονα για X (s) και Y (s) χρησιμοποιώντας τις τυποποιημένες αλγεβρικές τεχνικές.

Λύνοντας πρώτα για X (s) δίνει

$$X(s)=\frac{2s^2+14s+9}{s(s+2)(s-1)}$$

Επιλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$X(s)=\frac{\frac{9}{2}}{s}-\frac{\frac{11}{6}}{s+2}+\frac{\frac{25}{3}}{s-1}$$

το οποίο στην αντιστροφή δίνει

$$X(t) = -\tfrac{9}{2} - \tfrac{11}{6}e^{-2t} + \tfrac{25}{3}e^{t} \ \left(t \geq 0\right) \qquad \textbf{(3.13)}$$

Επιπλέον, επιλύοντας για $Y(s)$ δίνει $Y(s) = \dfrac{s^3 - 22s^2 - 39s - 15}{s(s+1)(s+2)(s-1)}$

Επιλύοντας σε απλά κλάσματα, $Y(s) = \dfrac{\frac{15}{2}}{s} + \dfrac{\frac{1}{2}}{s+1} + \dfrac{\frac{11}{2}}{s+2} - \dfrac{\frac{25}{2}}{s-1}$

το οποίο στην αντιστροφή δίνει $y(t) = \tfrac{15}{2} + \tfrac{1}{2}e^{-t} + \tfrac{11}{2}e^{-2t} - \tfrac{25}{2}e^{t} \ \left(t \geq 0\right)$

Κατά συνέπεια η λύση στο δεδομένο ζεύγος των ταυτόχρονων διαφορικών εξισώσεων είναι

$$\left\{ \begin{array}{c} X(t) = -\frac{9}{2} - \frac{11}{2}e^{-2t} + \frac{25}{3}e^{t} \\ Y(t) = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{11}{2}e^{-2t} - \frac{25}{2}e^{t} \end{array} \right\} \left(t \geq 0\right)$$

Σημείωση: Κατά την επίλυση ενός ζεύγους των ταυτόχρονων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης όπως οι (3.9) και (3.10), μια εναλλακτική προσέγγιση για την απόκτηση της τιμής της $y(t)$ έχοντας αποκτήσει την $x(t)$ είναι να χρησιμοποιήσουμε τις (3.9) και (3.10) άμεσα.
Η εξάλειψη του dy / dt από την (3.9) και την (3.10) δίνει

$$2y = \frac{dx}{dt} - 4x - 3 + e^{-t}$$

Η αντικατάσταση της λύσης που λαμβάνεται στην (3.13) για την $x(t)$ δίνει

$$2y = \left(\tfrac{11}{3}e^{-2t} + \tfrac{25}{3}e^{t}\right) - 4\left(-\tfrac{9}{2} - \tfrac{11}{6}e^{-2t} + \tfrac{25}{3}\right)e^{t} - 3 + e^{-t}$$

οδηγώντας όπως πριν στη λύση

$$y = \tfrac{15}{2} + \tfrac{1}{2}e^{-t} + \tfrac{11}{2}e^{-2t} - \tfrac{25}{2}e^{t}$$

Μια περαιτέρω εναλλακτική λύση είναι να εκφράσει την (3.11) και την (3.12) με μορφή πίνακα και να λύσουμε για $X(s)$ και $Y(s)$ χρησιμοποιώντας την απαλοιφή κατά Gauss.

Παράδειγμα 3.6

Η χρήση των μεθόδων μετασχηματισμού Laplace λύνει για $t \geq 0$ τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις, που υπόκεινται στις καθορισμένες αρχικές συνθήκες:

$$\frac{dx}{dt} + 3x = e^{-2t} \text{ με συνθήκη } x = 2 \text{ για } t = 0$$

Λύση

α)

$$(s+3)X(s) = 2 + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+5}{s+2}$$

$$X(s) = \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = e^{-2t} + e^{-3t}$$

β)

$$3\frac{dx}{dt} - 4x = \sin 2t \text{ με συνθήκη } x = \tfrac{1}{3} \text{ για } t = 0$$

Λύση

γ)

$$(3s-4)X(s) = 1 + \frac{2}{s^2+4} = \frac{s^2+6}{s^2+4}$$

$$X(s) = \frac{s^2+6}{(3s-4)(s^2+4)} = \frac{\frac{35}{26}}{3s-4} - \frac{\frac{3}{26}s + \frac{4}{26}}{s^2+4}$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{35}{78}e^{\frac{4}{3}t} - \frac{3}{26}\left(\cos 2t + \frac{2}{3}\sin 2t\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 1 \text{ με συνθήκη } x = 0 \; \kappa\alpha\iota \; \frac{dx}{dt} = 0 \text{ για } t = 0$$

Λύση

$$X(s)=\frac{1}{s\left(s^2+2s+5\right)}=\frac{\frac{1}{5}}{s}-\frac{1}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5}=$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{s}-\frac{1}{5}\frac{(s+1)+\frac{1}{2}(2)}{(s+1)^2+2^2}$$

$$x(t)=L^{-1}\left\{X(s)\right\}=\frac{1}{5}\left(1-e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\right)$$

δ) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt+y}=4\cos 2t$ με συνθήκη $y=0\ \kappa\alpha\iota\ \frac{dy}{dt}=2$ για $t=0$

Λύση

$$\left(s^2+2s+1\right)X(s)=2+\frac{4s}{s^2+4}=\frac{2s^2+4s+8}{s^2+4}$$

$$X(s)=\frac{2s+4s+8}{(s+1)^2\left(s^2+2\right)}=$$

$$=\frac{\frac{12}{25}}{(s+1)}+\frac{\frac{6}{5}}{(s+4)}$$

ε)

$$\left(s^2+2s+1\right)X(s)=2+\frac{4s}{s+4}=\frac{2s^2+4s+8}{s^2+4}$$

$$X(s)=\frac{2s^2+4s+8}{(s+1)^2\left(s^2+2\right)}-\frac{1}{25}\left[\frac{12s-32}{s^2+4}\right]$$

$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=2e^{-4t}$ με συνθήκη $x=0\ \kappa\alpha\iota\ \frac{dx}{dt}=1\ \sigma\tau o\ t=0$

Λύση

$$\left(s^2-3s+2\right)X\left(s\right)=1+\frac{2}{s+4}=\frac{s+6}{s+4}$$

$$X\left(s\right)=\frac{s+6}{\left(s+4\right)\left(s-1\right)\left(s-2\right)}=\frac{\frac{1}{15}}{s+4}-\frac{\frac{7}{5}}{s-1}+\frac{\frac{4}{3}}{s-2}$$

$$x\left(t\right)=L^{-1}\left\{X\left(s\right)\right\}=\frac{1}{15}e^{-4t}-\frac{7}{5}e^{t}+\frac{4}{3}e^{2t}$$

Στ)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+3y=3t \text{ με συνθήκη } y=0\ \kappa\alpha\iota\ \frac{dy}{dt}=1\ \sigma\tau o\ t=0$$

Λύση

$$\left(s^2+2s+3\right)Y\left(s\right)=1+\frac{3}{s^2}$$

$$Y\left(s\right)=\frac{s^2+3}{s^2\left(s^2+2s+3\right)}=\frac{-\frac{2}{3}}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{\frac{2}{3}s+\frac{4}{3}}{s^2+2s+3}=$$

$$\frac{-\frac{2}{3}}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{3}\left[\frac{\left(s+1\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)}{s^2+2s+3}\right]$$

$$y\left(t\right)=L^{-1}\left\{Y\left(s\right)\right\}=\frac{2}{3}+t+\frac{2}{3}e^{t}\left(\cos\sqrt{2}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right)$$

ζ)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=t^2+e^{-2t} \text{ με συνθήκη } x=\frac{1}{2}\ \kappa\alpha\iota\ \frac{dx}{dt}=0\,\sigma\tau o\ t=0$$

Λύση

$$\left(s^2+4s+4\right)X\left(s\right)=\frac{1}{2}s+2+\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s+2}$$

$$X\left(s\right)=\frac{s^5+6s^4+10s^3+4s+8}{2s^3\left(s+2\right)^3}=\frac{-\frac{2}{3}}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{\frac{2}{3}s+\frac{4}{3}}{s^2+2s+3}$$

$$=\frac{\frac{3}{8}}{s}-\frac{\frac{1}{2}}{s^2}+\frac{\frac{1}{2}}{s^3}+\frac{\frac{1}{8}}{s+2}+\frac{\frac{3}{4}}{\left(s+2\right)^2}\frac{1}{\left(s+2\right)^3}$$

$$x\left(t\right)=L^{-1}\left\{X\left(s\right)\right\}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{8}e^{-2t}+\frac{3}{4}te^{-2t}+\frac{1}{2}t^2e^{-2t}$$

η) $9\frac{d^2x}{dt^2}+12\frac{dx}{dt}+5x=1$ με συνθήκη $x=0\ \kappa\alpha\iota\ \frac{dx}{dt}=0\ \sigma\tau o\ t=0$

Λύση

$$\left(9s+12s+5\right)X\left(s\right)=\frac{1}{s}$$

$$X\left(s\right)=\frac{1}{9s\left(s^2+\frac{4}{3}s+\frac{5}{9}\right)^3}=\frac{\frac{1}{5}}{s}-\frac{\frac{1}{5}s+\frac{4}{15}}{\left(s+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{s}-\frac{1}{5}\frac{\left[\left(s+\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\right]}{\left(s+\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$x\left(t\right)=L^{-1}\left\{X\left(s\right)\right\}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-\frac{2}{3}t}\left(\cos\frac{1}{3}t+2\sin\frac{1}{3}t\right)$$

θ) $\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=2e^{-4t}$με συνθήκη $x=0\ \kappa\alpha\iota\ \frac{dx}{dt}=1\ \sigma\tau o\ t=0$

Λύση

$$\left(s^3+s^2+s+1\right)=\left(s+1\right)+1+\frac{s}{s^2+9}$$

$$X\left(s\right)=\frac{s^3+2s^2+10s+18}{\left(s^2+9\right)\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{\frac{9}{20}}{s+1}-\frac{1}{16}\frac{7s-25}{s^2+1}-\frac{1}{80}\frac{s+9}{s^2+9}$$

$$x\left(t\right)=L^{-1}\left\{X\left(s\right)\right\}=\frac{9}{20}e^{-t}-\frac{7}{16}\cos t+\frac{25}{16}\sin t-\frac{1}{80}\cos 3t-\frac{3}{80}\sin 3t$$

Παράδειγμα 3.7 Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους μετασχηματισμού Laplace, να λυθούν για $t\ \geq 0$ τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων που υπόκεινται στις δεδομένες αρχικές συνθήκες:

α)
$$3\frac{dx}{dt}-3\frac{dy}{dt}-2x=2e^t$$
$\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}-y=1$ με συνθήκη $x=0\ \kappa\alpha\iota\ y=1\ \sigma\tau o\ t=0$

Λύση

$$\left(3s-2\right)X\left(s\right)+3sY\left(s\right)=6+\frac{1}{s-1}=\frac{6s-5}{s-1}$$

$$sX\left(s\right)+2\left(2s-1\right)Y\left(s\right)=3+\frac{1}{s}=\frac{3s+1}{s}$$

β)

$$x(t)=\frac{1}{2}\left[3-e-3+\frac{3}{2}e^{t}+\frac{9}{2}e^{t}-\frac{3}{2}e^{t}-\frac{3}{2}e^{t}\right]$$

$$=\frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}e^{t}$$

$$E\lim X\left(s\right)$$

$$sX\left(s\right)+\left(2s-1\right)Y\left(s\right)=3+\frac{1}{s}=\frac{3s+1}{s}$$

$$\left[3s^{2}-\left(3s-2\right)\left(2s-1\right)\right]Y\left(s\right)$$

$$=\frac{s\left(6s-5\right)}{s-1}-\frac{\left(3s-2\right)\left(3s+1\right)}{s}$$

$$=\frac{3}{2}e^{\frac{t}{3}}-\frac{1}{2}e^{t}$$

$$Y\left(s\right)=\frac{9s^{2}-3s-2}{s\left(3s-1\right)\left(s-2\right)}-\frac{6s^{2}-5s}{\left(s-1\right)\left(3s-1\right)\left(s-2\right)}$$

$$=\left[-\frac{1}{s}+\frac{\frac{16}{5}}{3s-1}+\frac{\frac{14}{5}}{s-2}\right]-\left[-\frac{-\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{9}{10}}{3s-1}+\frac{\frac{14}{5}}{s-2}\right]=$$

$$-\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{14}{5}}{3s-2}$$

$$y\left(t\right)=L^{-1}\left\{Y\left(s\right)\right\}=-1+\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{2}e^{t}$$

Λύση

$$3\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-2x=3\sin t+5\cos t$$

$$2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+y=\sin t+\cos t \text{ με συνθήκη } x=0\ \kappa\alpha\iota\ y=-1\ \sigma\tau o\ t=0$$

$$\left[(3s-2)(s+1)-2s^2\right]X(s)=\frac{1}{s^2+1}\left[\left(-s^2+5s+2\right)(s+1)-\left(-s^2+s\right)s\right]$$

$$X(s)=\frac{3s^2+7s+2}{(s+2)(s-1)\left(s^2+1\right)}=\frac{3s+1}{(s-1)\left(s^2+1\right)}$$

$$(3s-2)X(s)+sY(s)=-1+\frac{3}{s^2-1}+\frac{5s}{s^2+1}=\frac{-s^2+5s+2}{s^2+1}$$

$$2sX(s)+(s+1)Y(s)=-1+\frac{1}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}=\frac{-s^2+s}{s^2+1}$$

γ)
$$\begin{aligned}&3\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+y=t\\&\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}+x=1 \text{ με συνθήκη } x=1 \; \kappa\alpha\iota \; y=0 \; \sigma\tau o \; t=0\end{aligned}$$

Λύση

$$y(t)=-2\sin-4\cos t-2x+\frac{dx}{dt}$$
$$=-2\sin t-4\cos 4t-4e+4\cos\mathrm{t}-2\sin\mathrm{t}+2\sin$$

4.1 Ηλεκτρικά κυκλώματα

Τα παθητικά ηλεκτρικά κυκλώματα κατασκευάζονται με τρία βασικά στοιχεία: **αντιστάσεις** (που έχουν αντίσταση *R*, η οποία μετριέται σε ohms (Ω) **πυκνωτές**, (που έχουν χωρητικότητα *C*, η οποία μετριέται σε farads F) και **πηνία** (που έχουν αυτεπαγωγή *L*, η οποία μετριέται σε henries H), με

$$sX(s)+(s+1)Y(s)=1+\frac{1}{s^2}=\frac{s^2+1}{s^2}$$

$$(s+1)X(s)+4sY(s)=1+\frac{1}{s}=\frac{s+1}{s}$$

τις συσχετισμένες μεταβλητές να είναι το **ρεύμα** $i\,(t\,)$ (που μετριέται σε amperes A) και η **τάση** $v\,(t\,)$ (που μετριέται σε volts V). Η ροή του ρεύματος στο κύκλωμα

$$X(s)=\frac{3s^2-2s+3}{s(s-1)(3s+1)}=\frac{-3}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{9}{3s+1}$$

$$x(t)=L^{-1}\left\{X(s)\right\}=-3+e^t+3e^{\frac{t}{3}}$$

συσχετίζεται με το φορτίο $q\ (t\ )$ (που μετριέται σε coulombs C) από τη σχέση

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

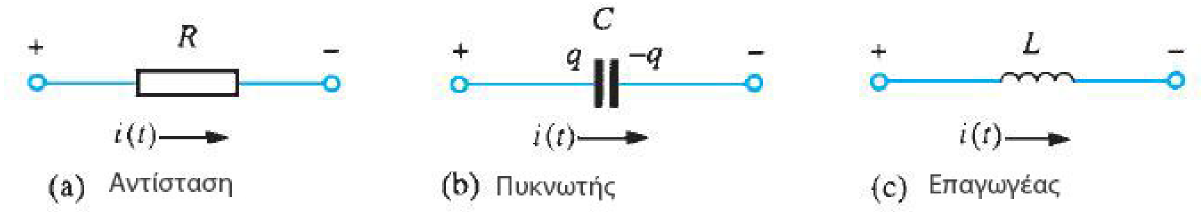
$$y = \frac{1}{4}\left[4t - 1 + x + 3\frac{dx}{dt}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4t - 1 - 3 + e^{t} + 3e^{-\frac{t}{3}} - 3e^{t} + 3e^{-\frac{t}{3}}\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = t - 1 - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{3^{-\frac{t}{3}}}{2}, x(t) = -3 + e^{t} + 3e^{-\frac{t}{3}}$$

Συμβατικά, τα βασικά στοιχεία αναπαρίστανται συμβολικά όπως στο σχήμα 4.1.

Σχήμα 4.1 Συστατικά στοιχεία ενός ηλεκτρικού κυκλώματος.



Η σχέση μεταξύ της ροής του ρεύματος $i\ (t\ )$ και των πτώσεων τάσης $v\ (t\ )$ σε αυτά τα στοιχεία στο χρόνο t είναι

πτώση τάσης στον αντιστάτη = Ri (νόμος του Ohm)

πτώση τάσης στον πυκνωτή = $\frac{1}{C}\int i\ \mathrm{d}\,t = \frac{q}{C}$

Η αλληλεπίδραση μεταξύ των μεμονωμένων στοιχείων που αποτελούν ένα ηλεκτρικό κύκλωμα καθορίζεται από τους **νόμους του Kirchhoff**:

Νόμος 1

Το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ρευμάτων που εισάγονται σε οποιαδήποτε επαφή (ή κόμβο) ενός κυκλώματος είναι μηδέν.

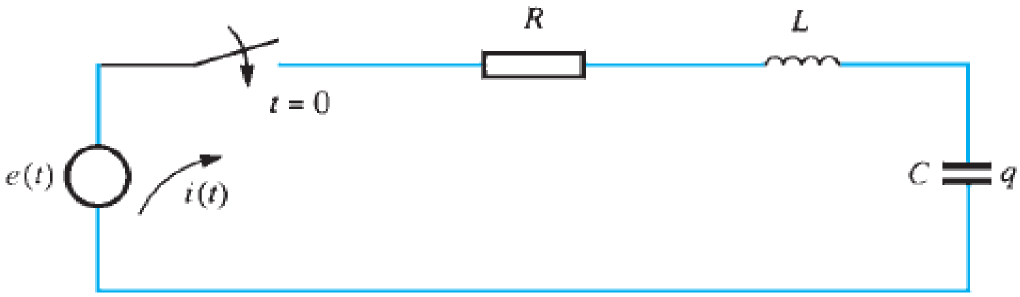
Νόμος 2

Το αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσης γύρω από οποιοδήποτε κλειστό βρόχο (ή διαδρομή) σε ένα κύκλωμα είναι μηδέν.

Η χρήση αυτών των νόμων οδηγεί στις εξισώσεις κυκλώματος, οι οποίες μπορούν έπειτα να αναλυθούν χρησιμοποιώντας τις τεχνικές μετασχηματισμού Laplace.

Παράδειγμα 4.1
Το κύκλωμα *LCR* του σχήματος 1.8 αποτελείται από μια αντίσταση *R*, έναν πυκνωτή *C* και ένα πηνίο *L* συνδεμένα σε σειρά μαζί με μια πηγή τάσης $e(t)$. Πριν από το κλείσιμο του διακόπτη σε χρόνο $t = 0$, και το φορτίο στον πυκνωτή και το προκύπτον ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν. Καθορίστε το φορτίο $q(t)$ στον πυκνωτή και το προκύπτον ρεύμα $i(t)$ στο κύκλωμα στο χρόνο *t* δεδομένου ότι $R = 160f\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 10^{-4}$ F και $e(t) = 20$ V.

Σχήμα 4.2 Κύκλωμα LCR του παραδείγματος 4.1.



Λύση Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου Kirchhoff στο κύκλωμα του σχήματος 4.2 δίνει

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i\ dt = e(t) \tag{4.1}$$

ή, χρησιμοποιώντας το i = dq/dt, $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{c}q = e(t)$

Η αντικατάσταση των δεδομένων τιμών για τα L, R, C, και e (t) δίνει

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10^4 q = 20$$

Η λήψη του μετασχηματισμού Laplace παντού οδηγεί στην εξίσωση

$$\left(s^2 + 160s + 10^4\right)Q(s) = \left[sq(0) + q(0)\right] + 160q(0) + \frac{20}{s}$$

όπου το Q (s) είναι ο μετασχηματισμός του q (t). Μας δίνεται ότι το q (0) = 0 και το r (0) = i (0) = 0, έτσι ώστε αυτό μειώνεται σε

$$\left(s^2 + 160s + 10^4\right)Q(s) = \frac{20}{s}$$

δηλαδή

$$Q(s)=\frac{20}{\left(s^2+160s+10^4\right)}$$

Η επίλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$Q(s)=\frac{\frac{1}{500}}{s}-\frac{1}{500}\frac{s+160}{s^2+160s+10^4}$$

$$=\frac{1}{500}\left[\frac{1}{s}-\frac{(s+80)+\frac{4}{3}(60)}{(s+80)^2+(60)^2}\right]=\frac{1}{500}\left[\frac{1}{s}-\left[\frac{s+\frac{4}{3}}{s^2+60^2}\right]_{s\to s+80}\right]$$

Η λήψη των αντίστροφων μετασχηματισμών, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μετατόπισης (θεώρημα 1.2), δίνει $q(t)=\frac{1}{500}\left(1-e^{-80t}\cos 60t-\frac{4}{3}e^{-80t}\sin 60t\right)$

Το προκύπτον ρεύμα i(t) στο κύκλωμα δίνεται έπειτα από

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{1}{3}e^{-80t}\sin 60t$$

Σημειώστε ότι θα μπορούσαμε να έχουμε καθορίσει το ρεύμα λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace στο (1,26). Η αντικατάσταση των δεδομένων τιμών για L, R , C και e (t) και η χρήση της (1.26) οδηγούν στην μετασχηματισμένη εξίσωση

$$160I(s)+sI(s)+\frac{10^4}{s}I(s)=\frac{20}{s}$$

Δηλαδή

$$I(s)=\frac{20}{\left(s^2+80\right)^2+60s^2}$$

$$I(s)=\frac{20}{\left(s^2+80\right)^2+60s^2}\Leftarrow sQ(s)\sin\ ce\ q(0)=0$$

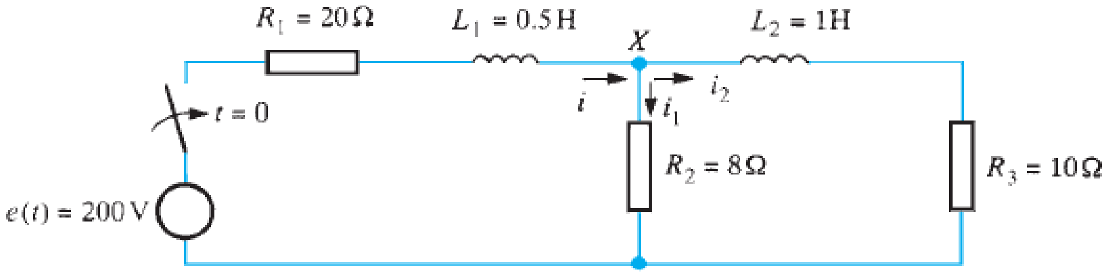
το οποίο, λαμβάνοντας τις αντίστροφες μετασχηματισμένες, δίνει όπως πριν

$$i(t)=\frac{1}{3}e^{-80t}\sin 60t$$

Παράδειγμα 4.2

Στο παράλληλο δίκτυο του σχήματος 4.3 δεν υπάρχει καμία ροή του ρεύματος σε κανέναν βρόχο πριν από το κλείσιμο του διακόπτη στο χρόνο $t = 0$. Συνάγετε τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ που ρέουν στους βρόχους στο χρόνο t.

Σχήμα 4.3 Παράλληλο κύκλωμα του Παραδείγματος 4.2.



Λύση Η εφαρμογή του πρώτου νόμου Kirchhoff στον κόμβο X δίνει

$$i = i_1 + i_2$$

Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου Kirchhoff σε κάθε έναν από τους δύο βρόχους δίνει στη συνέχεια

$$Ri\left(i_1 + i_2\right) + L_1 \frac{d}{dt}\left(i_1 + i_2\right) + R_2 i_1 = 200$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_2 - R_2 i_1 = 0$$

Η αντικατάσταση των δεδομένων τιμών για τις αντιστάσεις και τις αυτεπαγωγές δίνει

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{di_2}{dt} + 56_{i1} + 40_{i2} = 400 \\ \dfrac{di_2}{dt} - 8_{i1} + 10_{i2} = 0 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Η λήψη του μετασχηματισμού Laplace και η ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών $i_1(0) = i_2(0) = 0$ οδηγεί στις μετασχηματισμένες εξισώσεις

$$\left(s + 56\right) I_1\left(s\right) + \left(s + 40\right) I_2\left(s\right) = \frac{400}{s} \Rightarrow -8I_1\left(s\right) + \left(s + 10\right) I_2\left(s\right) = 0 \qquad \textbf{(4.3)}$$

Ως εκ τούτου

$$I\left(s\right) = \frac{3200}{s\left(s^2 + 74s + 880\right)} = \frac{3200}{s\left(s + 59.1\right)\left(s + 14.9\right)} \qquad \textbf{(4.4)}$$

Η επίλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$I_2(s) = \frac{3.64}{s} + \frac{1.22}{s+59.1} - \frac{4.86}{s+14.9}$$

το οποίο, κατά την λήψη των αντίστροφων μετασχηματισμών, οδηγεί στο

$$i_2(t) = 3.64 + 1.22e^{-59.1t} - 4.86e^{-14.9t}$$

Από την (1.27),

$$i_1(t) = \tfrac{1}{8}\left(10i_2 + \frac{di_2}{dt}\right)$$

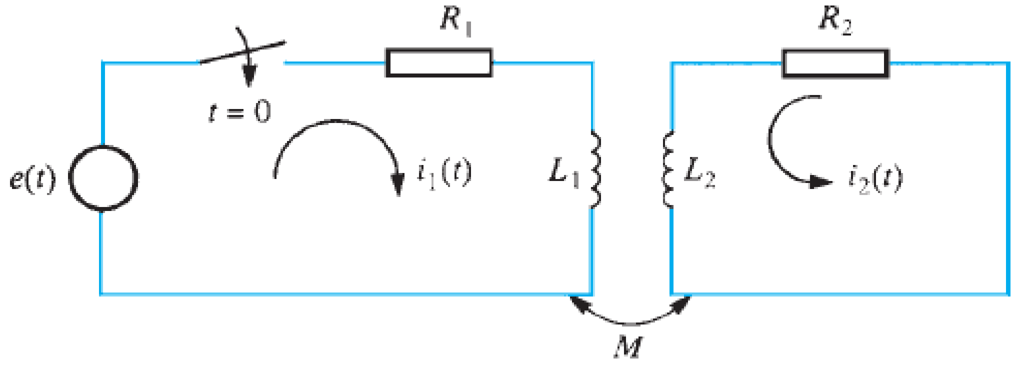
δηλαδή

$$i_1(t) = 4.55 - 7.49e^{-59.1t} + 2.98e^{-14.9t}$$

Σημειώστε ότι καθώς $t \to \infty$, τα ρεύματα $i_1(t)$ και $i_2(t)$ πλησιάζουν τις σταθερές τιμές 4,55 και 3,64 A αντίστοιχα. (Σημειώστε ότι $i(0) = i_1(0) + i_2(0) \neq 0$ λόγω των λαθών στρογγυλοποίησης στον υπολογισμό.)

Παράδειγμα 4.3 Μια τάση $e(t)$ εφαρμόζεται στο αρχικό κύκλωμα στο χρόνο $t = 0$, και η αμοιβαία επαγωγή M οδηγεί το ρεύμα $i_2(t)$ στο δευτεροβάθμιο κύκλωμα του σχήματος 1.10. Εάν, πριν από το κλείσιμο του διακόπτη, τα ρεύματα και στα δύο κυκλώματα είναι μηδέν, καθορίστε το επαγώμενο ρεύμα $i_2(t)$ στο δευτεροβάθμιο κύκλωμα στο χρόνο t όταν $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $L_1 = 2$ H, $L_2 = 8$ H, $M = 2$ H και $e(t) = 28$ ημίτονο $2t$ V.

Σχήμα 4.4 Κύκλωμα του Παραδείγματος 4.3.



Λύση

Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου Kirchhoff στα αρχικά και δευτεροβάθμια κυκλώματα δίνει αντίστοιχα

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = e(t)$$
$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

Η αντικατάσταση των δεδομένων τιμών για τις αντιστάσεις, τις αυτεπαγωγές και την εφαρμοσμένη τάση οδηγεί στο

$$2\frac{di_1}{dt} + 4i_1 \frac{di_2}{dt} = 28\sin 2t$$
$$2\frac{di_1}{dt} + 8\frac{di_2}{dt} + 10i_2 = 0$$

Η λήψη του μετασχηματισμού Laplace και σημειώνοντας ότι $i_1(0) = i_2(0) = 0$ οδηγεί στις εξισώσεις

$$(s+2)I_1(s) + sI_2(s) = \frac{28}{s^2+4} \qquad \textbf{(4.5)}$$

$$sI_1(s) + (4s+5)I_2(s) = 0 \qquad \textbf{(4.6)}$$

Η επίλυση για $I_2(s)$ παράγει

$$I(s) = -\frac{28s}{(3s+10)(s+1)(s^2+4)}$$

Η επίλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$I_2(s) = -\frac{\frac{45}{17}}{3s+10} + \frac{\frac{4}{5}}{s+1} - \frac{7}{85}\frac{s-26}{s^2+4}$$

Η λήψη των αντίστροφων μετασχηματισμού Laplace δίνει το ρεύμα στο δευτεροβάθμιο κύκλωμα όπως

$$i_2(t) = \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{15}{17}e^{-10t/3} + \frac{7}{85}\cos 2t - \frac{91}{85}\sin 2t$$

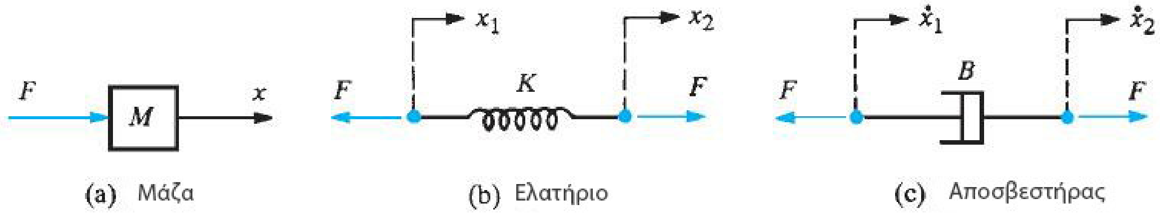
Καθώς $t \to \infty$, το ρεύμα θα πλησιάσει την ημιτονοειδή απόκριση

$$i_2(t) = \frac{7}{85}\cos 2t - \frac{91}{85}\sin 2t$$

4.2 Μηχανικές δονήσεις

Τα μηχανικά μεταφορικά συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να διαμορφώσουν πολλές καταστάσεις, και περιλαμβάνουν τρία βασικά στοιχεία: **μάζες** (που έχουν μάζα M μετρημένη σε kg), **ελατήρια** (που έχουν ακαμψία ελατηρίου K, που μετριέται σε Nm^{-1}) και **αποσβεστήρες** (που έχουν συντελεστή απόσβεσης B, που μετριέται σε Nsm^{-1}). Οι σχετικές μεταβλητές είναι **εκτόπισμα** $x(t)$ (που μετριέται σε m) και **δύναμη** $F(t)$ (που μετριέται σε N). Συμβατικά, τα βασικά στοιχεία αναπαρίσταται συμβολικά όπως στο σχήμα 4.5.

Σχήμα 4.5 Συστατικά στοιχεία ενός μεταφορικού μηχανικού συστήματος.



Υποθέτοντας οτι εξετάζουμε τα ιδανικά ελατήρια και τους αποσβεστήρες (δηλαδή υποθέτοντας οτι αυτά συμπεριφέρονται γραμμικά), οι σχέσεις μεταξύ των δυνάμεων και των εκτοπισμάτων στο χρόνο t είναι:

μάζα: $F = M\dfrac{d^2x}{dt^2} = M\ddot{x}$ (Νόμος Newton)

ελατήριο: $F = K\left(x_2 - x_1\right)$ (Νόμος Hooke)

αποσβεστήρας: $F = B\left(\dfrac{d\,x_2}{dt} - \dfrac{dx_1}{dt}\right) = B\left(x_2 - x_1\right)$

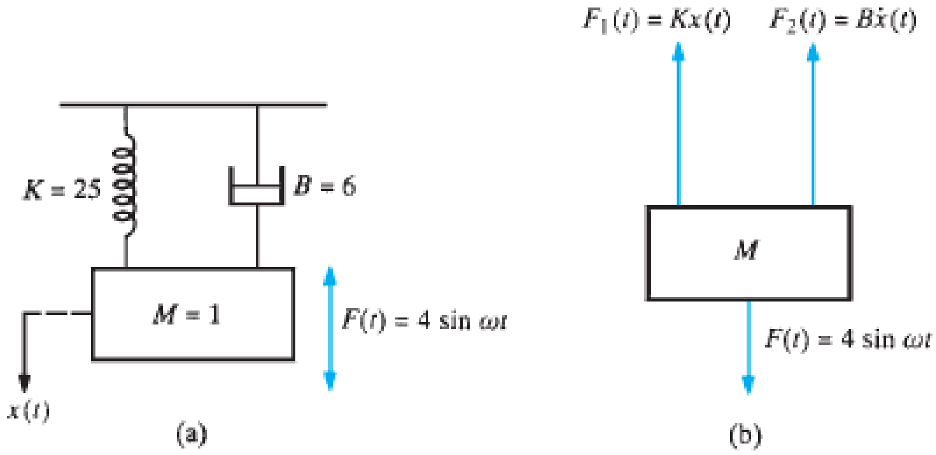
Η χρήση αυτών των σχέσεων οδηγεί στις εξισώσεις συστημάτων, οι οποίες μπορούν έπειτα να αναλυθούν χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του Μετασχηματισμού Laplace.

Παράδειγμα 4.4

Η μάζα του συστήματος μάζα-ελατήριο-αποσβεστήρας του σχήματος 4.5 (α) υποβάλλεται σε μια εξωτερικά εφαρμοσμένη περιοδική δύναμη $F(t) = 4$ ημωt στο χρόνο $t = 0$. Καθορίστε το προκύπτον εκτόπισμα $x(t)$ της μάζας στο χρόνο t, δεδομένου οτι $x(0) = x(0) = 0$, για τις δύο περιπτώσεις

(α) ω = 2 (β) ω = 5

Στην περίπτωση ω = 5, τι θα συνέβαινε στην απόκριση εάν ο αποσβεστήρας έλειπε;



Σχήμα 4.6 Το σύστημα μάζα-ελατήριο-αποσβεστήρας του Παραδείγματος 4.4.

Όπως υποδεικνύεται στο σχήμα 4.6 (β), οι δυνάμεις που ενεργούν στη μάζα M είναι η εφαρμοσμένη δύναμη $F(t)$ και οι δυνάμεις επαναφοράς F_1 και F_2 λόγω του ελατηρίου και του αποσβεστήρα αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, από το νόμο Newton,

Αφού $M = 1$, $F(t) = 4$ ημωt , $F_1(t) = Kx(t) = 25x(t)$ και $F_2(t) = B\dot{x}(t) = 6\dot{x}(t)$, αυτό δίνει

$$\ddot{x}(\mathrm{t}) + 6\dot{x}(\mathrm{t}) + 25x(\mathrm{t}) = 4\sin\omega t \qquad \textbf{(4.7)}$$

ως την διαφορική εξίσωση που αναπαριστά την κίνηση του συστήματος.

Η λήψη του Μετασχηματισμού Laplace παντού στην (1.32) δίνει

$$\left(s^2+6s+25\right)X(s) = \left[sx(0)+x(0)\right] + 6x(0) + \frac{4\omega}{s^2+\omega^2}$$

όπου $X(s)$ είναι η μετασχηματισμένη του $x(t)$. Η ενσωμάτωση των δεδομένων αρχικών συνθηκών $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ οδηγεί στο

$$\mathrm{I}_2(s) = -\frac{28s}{(3s+10)(s+1)\left(s^2+4\right)}$$

$$X(s) = -\frac{4\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s^2+6s+25\right)} \qquad \textbf{(4.8)}$$

Στην περίπτωση (α), με ω = 2, η (4.8) δίνει

$$\text{X(s)=}\; -\frac{8}{(s^2+4)(\mathrm{s}^2+6s+25)}$$

η οποία, κατά την επίλυση σε απλά κλάσματα, οδηγεί στο

$$X(s)=\frac{4}{195}\frac{-4s+14}{\mathrm{s}^2+4}+\frac{2}{195}\frac{8s+20}{s^2+6s+25}$$

$$=\frac{4}{195}\frac{-4s+14}{\mathrm{s}^2+4}+\frac{2}{195}\frac{8(s+3)-4}{(s+3)^2+16}$$

Η λήψη των αντίστροφων του Μετασχηματισμού Laplace δίνει την απαραίτητη απόκριση

$$X(s)=\frac{4}{195}(7\sin 2t-4\cos 2t)+\frac{2}{195}e^{-3t}(8\cos 4t-\sin 4t) \qquad \textbf{(4.9)}$$

Στην περίπτωση (β), με ω = 5, η (1.33) δίνει

$$\text{X(s)}=-\frac{20}{(s^2+25)(\mathrm{s}^2+6s+25)} \qquad \textbf{(4.10)}$$

δηλαδή

$$X(\mathrm{s})=\frac{-\frac{2}{15}s}{\mathrm{s}^2+25}+\frac{1}{15}\frac{2(s+3)+6}{(s+3)^2+16}$$

η οποία, κατά την λήψη των αντίστροφων του Μετασχηματισμού Laplace, δίνει την απαραίτητη απόκριση

$$X(s)=-\frac{2}{15}\cos 5t+\frac{1}{15}e^{-3t}(2\cos 4t+\frac{3}{2}\sin 4t) \qquad \textbf{(4.11)}$$

Εάν ο όρος απόσβεσης έλειπε έπειτα η (1.35) θα γινόταν

$$X(\mathrm{s})=-\frac{20}{(\mathrm{s}^2+25)^2} \qquad \textbf{(4.12)}$$

Από το θεώρημα 1.3,

$$L\{t\cos 5t\} = \frac{d}{ds}L\{t\cos 5t\} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+25}\right)$$

δηλαδή

$$L\{t\cos 5t\} = -\frac{1}{s^2+25} + \frac{2s^2}{\left(s^2+25\right)^2} = \frac{1}{s^2+25} - \frac{50}{\left(s^2+25\right)^2}$$

$$= \frac{1}{5}L\{\sin 5t\} - \frac{50}{\left(s^2+25\right)^2}$$

Κατά συνέπεια, από την ιδιότητα της γραμμικότητας (1,11),

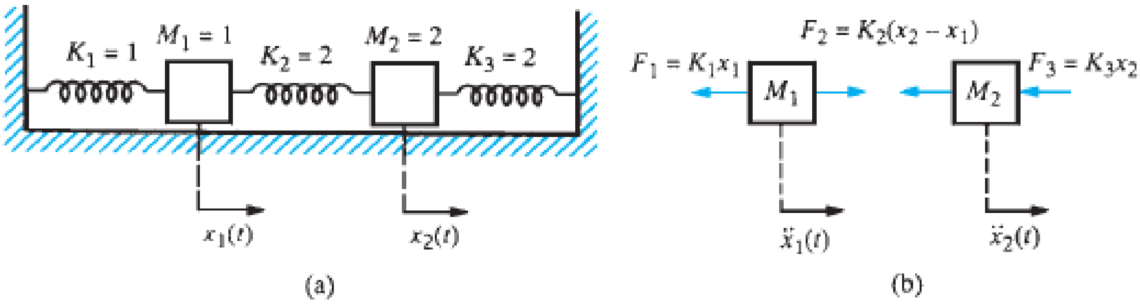
$$L\left\{\frac{1}{5}\sin 5t - t\cos 5t\right\} = \frac{50}{\left(s^2+25\right)^2}$$

έτσι ώστε η λήψη των αντίστροφων του Μετασχηματισμού Laplace στην (1.37) δίνει την απόκριση ως

$$X(s) = \frac{2}{25}(\sin 5t - 5t\cos 5t)$$

Λόγω του όρου t *συνημίτονο* 5 t, η απόκριση x (t) είναι μη φραγμένη καθώς $t \to \infty$. Αυτό προκύπτει επειδή σε αυτήν την περίπτωση η εφαρμοσμένη δύναμη $F(t)$ = 4 ημίτονο 5t είναι σε **συντονισμό** με το σύστημα (δηλαδή την παλλόμενη μάζα), η φυσική ταλαντευόμενη συχνότητα του οποίου είναι 5/2 πHz, ίση με αυτή της εφαρμοσμένης δύναμης. Ακόμη και παρουσία της απόσβεσης, το εύρος της απόκρισης του συστήματος μεγιστοποιείται όταν η εφαρμοσμένη δύναμη πλησιάζει τον συντονισμό με το σύστημα. (Αυτό αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.) Ελλείψει της απόσβεσης έχουμε την οριακή περίπτωση του **καθαρού συντονισμού**, που οδηγεί σε μια μη φραγμένη απόκριση. Όπως σημειώνεται στο τμήμα 10.10.3 του *Modern Engineering Mathematics*, ο συντονισμός είναι πρακτικής σπουδαιότητας, αφού, παραδείγματος χάριν, μπορεί να οδηγήσει στο να καταρρέουν μεγάλες και ισχυρές δομές κάτω από αυτή που φαίνεται να είναι μια σχετικά μικρή δύναμη.

Παράδειγμα 4.5 Εξετάστε το μηχανικό σύστημα του σχήματος 4.7 (α), το οποίο αποτελείται από δύο μάζες $M_1 = 1$ και $M_2 = 2$, κάθε μια συνδεδεμένη με μια σταθερή βάση με ένα ελατήριο, που έχει τις σταθερές $K_1 = 1$ και $K_3 = 2$ αντίστοιχα, και συνδεδεμένες η μια με την άλλη με ένα τρίτο ελατήριο που έχει τη σταθερά $K_2 = 2$. Το σύστημα απελευθερώνεται από ακινησία στο χρόνο t = 0 σε μια θέση στην οποία η M_1 μετατοπίζεται 1 μονάδα αριστερά της θέσης ισορροπίας της και η M_2 μετατοπίζεται 2 μονάδες δεξιά της θέσης ισορροπίας της. Αγνοώντας όλες τις επιδράσεις της τριβής, καθορίστε τις θέσεις των μαζών στο χρόνο t.



Σχήμα 4.7 Το σύστημα δύο μαζών του Παραδείγματος 4.5.

Λύση

Έστω οτι τα x_1 (t) και x_2 (t) υποδηλώνουν τις μετατοπίσεις των μαζών M_1 και M_2 αντίστοιχα από τις θέσεις ισορροπίας τους. Δεδομένου οι επιδράσεις της τριβής αγνοούνται, οι μόνες δυνάμεις που ενεργούν στις μάζες είναι οι δυνάμεις επαναφοράς λόγω των ελατηρίων, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.7 (β). Η εφαρμογή του νόμου Newton στις κινήσεις των M_1 και M_2 αντίστοιχα δίνει

$$M_1 \ddot{x}_1 = F_2 - F_1 = K_2(X_2 - X_1) - \mathrm{K}_1 X_1$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = -F_3 - F_2 = -\mathrm{K}_3 X_2 - K_2(X_2 - X_1)$$

το οποίο, με την αντικατάσταση των δεδομένων τιμών για M_1, M_2, K_1, K_2 και K_3, δίνει

$$\ddot{x}_1 + 3x_1 - 2x_2 = 0 \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$2\ddot{x}_2 + 4x_2 - 2x_1 = 0 \qquad \textbf{(4.14)}$$

Η λήψη του Μετασχηματισμού Laplace οδηγεί στις εξισώσεις

$$\left(s^2+3\right)X_1(s) - 2X_2(s) = -s\,X_1(0) + \dot{X}_1(0)$$

$$-X_1(s) + \left(s^2+2\right)X_2(s) = sX_2(0) + \dot{X}_2(0)$$

Αφού τα x_1 (t) και x_2 (t) υποδηλώνουν τις μετατοπίσεις στα δεξιά των θέσεων ισορροπίας, έχουμε $x_1(0) = -1$ και $x_2(0) = 2$. Επίσης, το σύστημα απελευθερώνεται από την ακινησία, έτσι $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Ενσωματώνοντας αυτές τις αρχικές συνθήκες, οι μετασχηματισμένες εξισώσεις γίνονται

$$(s^2+3)X_1(s)-2X_2(s)=-s \tag{4.15}$$

$$-X_1(s)+(s^2+2)X_2(s)=2s \tag{4.16}$$

Ως εκ τούτου

$$X_2(s)=\frac{2s^3+5s}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

Η επίλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$X_2(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+4}$$

το οποίο, με τη λήψη των αντίστροφων μετασχηματισμού Laplace, οδηγεί στην απόκριση

$$X_2(t) = \cos t + \cos 2t$$

Η αντικατάσταση για $x_2(t)$ στο (1.39) δίνει

$$X_1(t)=2X_2(t)+\ddot{X}_2(t)=2\cos t+2\cos 2t\ -\cos t-4\cos 2t$$

δηλαδή

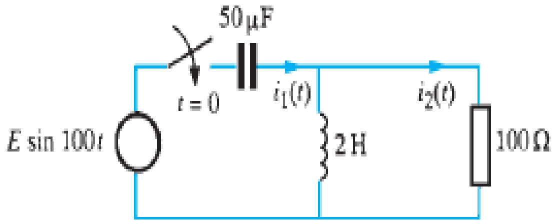
$X_1(t)=\cos t-2\cos 2t$

Κατά συνέπεια οι θέσεις των μαζών στο χρόνο t είναι

$$X_1(t)=\cos t-2\cos 2t,\ X_2(t)=\cos t+2\cos 2t$$

Παράδειγμα 4.6

Χρησιμοποιήστε την τεχνική του Μετασχηματισμού Laplace για να βρείτε τις μετασχηματισμένες $I_1(s)$ και $I_2(s)$ των αντίστοιχων ρευμάτων που ρέουν στο κύκλωμα του σχήματος 4.8, όπου $i_1(t)$ είναι αυτό που ρέει μέσω του πυκνωτή και $i_2(t)$ αυτό που ρέει μέσω της αντίστασης. Ως εκ τούτου, καθορίστε το $i_2(t)$.
(Αρχικά, $i_1(0) = i_2(0) = q_1(0) = 0$). Σχεδιάστε το $i_2(t)$ για μεγάλες τιμές του t.



Σχήμα 4.8

Λύση

1μF=10^{-6}F so 50μ=5.10^{5}F

Εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Kirchhoff στον αριστερό βρόχο

$$\frac{1}{5.10^5}\int i_1 dt + 2(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}) = E.\sin 100t$$

Λαμβάνοντας το Laplace μετασχηματίζεται

$$\frac{2.10^4}{s} I_1(s) + 2s[I_1(s) - I_2(s)] = E.\frac{100}{s^2+10^4}$$

$$(10^4 + s^2)I_1(s) - s^2 I_2(s) = E.\frac{50s}{s^2+10^4} \qquad \text{(i)}$$

Εφαρμογή του νόμου του Kirchhoff στον δεξιό βρόχο

$$100 i_2(t) - 2(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}) = 0$$

Όπου η λήψη του μετασχηματισμού Laplace δίνει

$$sI_1(s)=(50+s)I_2(s) \qquad \text{(ii)}$$

Αντικατάσταση στο (i)

$$\left(10^4+s^2\right)\left(50+s\right)I_2\left(s\right) - s^2 I_2\left(s\right) = \mathrm{E}.\frac{50s}{s^2+10^4}$$

$$\left(s^2+200s+10^4\right) I_2\left(s\right) = \frac{\mathrm{E}\,s^4}{s^2+10^4}$$

$$I_2\left(s\right) = E.[\frac{s^2}{(s^2+10^4)(s+100)^2}]$$

Από τότε (ii) $\quad I_1\left(s\right) = E.[\frac{s\ (50+s)}{(s^2+10^4)(s+100)^2}]$

Επέκταση σε μερικές λειτουργίες

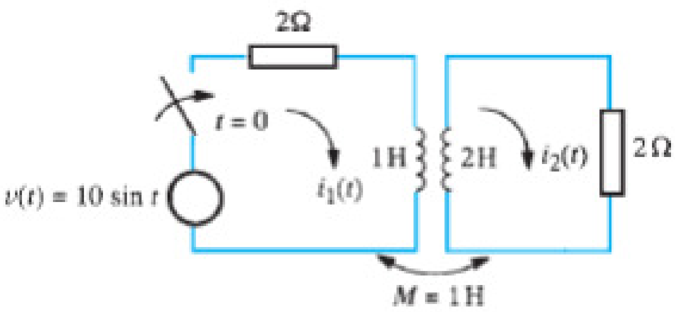
$$I_2(s) = E.[\frac{-\frac{1}{200}}{s+100} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+100)^2} + \frac{\frac{1}{200}s}{s^2+10^4}]$$

$$i_2(t) = L^{-1}\{I_2(s)\} = E[-\frac{1}{200}e^{-100t} + \frac{1}{2}te^{-100t} + \frac{1}{200}\cos 100t]$$

Παράδειγμα 4.7 Στο χρόνο $t = 0$, χωρίς να ρέει κανένα ρεύμα, μια τάση $v(t) = 10$ ημίτονο t εφαρμόζεται στο αρχικό κύκλωμα ένας μετασχηματιστής που έχει μια αμοιβαία αυτεπαγωγή 1 H, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.9. Υποδηλώνοντας το ρεύμα που ρέει στο χρόνο t στο δευτεροβάθμιο κύκλωμα με $i_2(t)$, δείξτε ότι

$$L\{i_2(t)\} = \frac{10s}{(s^2+7s+6)(s^2+1)}$$

Σχήμα 4.9



και συνάγετε ότι

$$i_2(t) = -e^{-t} + \frac{12}{37}.\ e^{-6t} + \frac{25}{37}\ cost + \frac{35}{37}sint$$

Λύση

Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο της Kirchhoff στο κύριο και δευτερεύον κύκλωμα δίνει αντίστοιχα

$$2i_1 + \frac{di_1}{dt} + 1\frac{di_1}{dt} = 10\sin t$$

$$2i_2 + 2\frac{di_2}{dt} + \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$2i_2 + 2\frac{di_2}{dt} + \frac{di_1}{dt} = 0$$

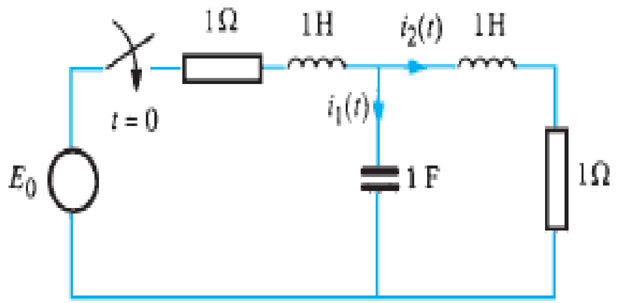
Λαμβάνοντας το Laplace μεταμορφώνεται

$$(s+2)I_1(s)+sI_2(s)=\frac{10}{s^2+1}$$
$$sI_1(s)+2(s+1)I_2(s)=0$$

εξαλείφοντας $I_1(s)$

$$\left[s^2-2(s+1)(s+2)\right]I_2(s)=\frac{10s}{s^2+1}$$
$$I_2(s)=-\frac{10s}{(s^2+1)(s^2+7s+6)}=-\frac{10s}{(s^2+1)(s+6)(s+1)}$$
$$=-[\frac{-1}{s+1}+\frac{\frac{12}{37}}{s+6}+\frac{\frac{25}{37}s+\frac{35}{37}}{s^2+1}]$$
$$i_2(t)=L^{-1}\{I_2(s)\}=e^{-t}-\frac{12}{37}e^{-6t}-\frac{25}{37}\cos t-\frac{35}{37}\text{sint}$$

Παράδειγμα 4.8 Στο κύκλωμα του σχήματος 4.10 δεν υπάρχει καμία ενέργεια αποθηκευμένη (δηλαδή δεν υπάρχει καμία φόριση στους πυκνωτές και δεν ρέει ρεύμα στις αυτεπαγωγές) πριν από το κλείσιμο του διακόπτη στο χρόνο t = 0. Καθορίστε το $i_1(t)$ για t > 0 για μια σταθερά εφαρμοσμένη τάση E_0 = 10 V.



Σχήμα 4.10

Λύση

Εφαρμόζοντας το νόμο του Kirchhoff στους αριστερούς και δεξιούς βρόχους δίνει

$$(i_1+i_2)+\frac{di_1}{dt}(i_1+i_2)+1\int i_1dt=E_0=10$$

$$i_2 + \frac{di_2}{dt} - 1\int i_1 dt = 0$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace

$$\left(s+1\right)I_1\left(s\right)+\left(s+1\right)I_2\left(s\right)+\frac{1}{s}I_1\left(s\right)=\frac{10}{s}$$

$$\left(s+1\right)I_2\left(s\right)-\frac{1}{s}I_1\left(s\right)=0 \Rightarrow I_1\left(s\right)=s\left(s+1\right)I_2\left(s\right) \quad \text{(i)}$$

Αντικατάσταση πίσω στην πρώτη εξίσωση

$$s(s+1)^2 I_2(s)+(s+1)I_2(s)=\frac{10}{s}$$

$$\left(s^2+s+2\right)I_2\left(s\right)=\frac{10}{s(s+1)}$$

$$I_2\left(s\right)=\frac{10}{s(s+1)(s^2+s+2)}$$

Από τότε (i)

$$I_1(s)=\frac{10}{s^2+s+2}=\frac{10}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}$$

$$i_1(t)=L^{-1}\{I_1(s)\}=\frac{20}{\sqrt{7}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}t$$

Παράδειγμα 4.9 Να καθορίστε τις μετατοπίσεις των μαζών M_1 και M_2 στο σχήμα 4.7 στο χρόνο t > 0 όταν

M_1=M_2=1
K_1=1, K_2=3 και K_3=9

Ποιές είναι οι φυσικές συχνότητες του συστήματος;

Λύση

Εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα στην κίνηση κάθε μάζας

$$\ddot{x}_1 = 3(x_2 - x_1) - x_1 = 3x_2 - 4x_1$$

$$\ddot{x}_2 = -9x_2 - 3(x_2 - x_1) = -12x_2 + 3x_1$$

δίνει

$$\ddot{x}_1 + 4x_1 - 3x_2 = 0, x_1(0) = -1, x_2(0) = 2$$

$$\ddot{x}_2 + 12x_2 - 3x_1 = 0$$

Λαμβάνοντας το Laplace μεταμορφώνεται

$$(s^2+4)X_1(s)-3X_2(s)=-s$$
$$-3X_1(s)+(s^2+12)X_2(s)=2s$$

εξαλείφοντας $X_2(s)$

$$[(s^2+4)(s^2+12)-9]\,X_1(s)=-s(s^2+12)+6s$$

$$(s^2+13)(s^2+3)\,X_1(s)=-s^3-6s$$

$$_1(s) = \frac{-s^3-6s}{(s^2+13)(s^2+3)} = \frac{-\frac{3}{10}s}{s^2+3} - \frac{\frac{7}{10}s}{s^2+13}$$

$$x_1(t) = L^{-1}\{X_1(s)\} = -\frac{3}{10}\cos\sqrt{3}t - \frac{7}{10}\cos\sqrt{13}t$$

Από την πρώτη διαφορική εξίσωση

$$3x_2 = 4x_1 + \ddot{x}_1$$

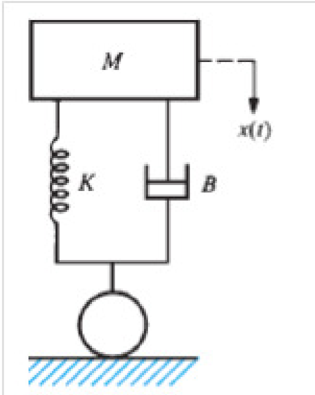
$$= -\frac{6}{5}\cos\sqrt{3}t - \frac{14}{5}\cos\sqrt{13}t + \frac{9}{10}\cos\sqrt{3}t + \frac{91}{10}\cos\sqrt{13}t$$

$$x_2(t) = \frac{1}{10}[21\cos\sqrt{3}t - \cos\sqrt{13}t]$$

Έτσι , $x_1(t) = -\frac{1}{10}(3\cos\sqrt{3}t + 7\cos\sqrt{13}t]$, $x_2(t) = \frac{1}{10}[21\cos\sqrt{3}t - \cos\sqrt{13}t]$

Οι φυσικές συχνότητες είναι $\sqrt{13}$ και $\sqrt{3}$

Παράδειγμα 4.10 Κατά τη δοκιμή της μονάδας εξοπλισμού προσγείωσης ενός διαστημικού οχήματος, πραγματοποιούνται δοκιμές πτώσης. Το σχήμα 4.11 είναι ένα σχηματικό μοντέλο της μονάδας τη στιγμή που αυτή αγγίζει το έδαφος. Σε αυτήν την στιγμή το ελατήριο επεκτείνεται πλήρως και η ταχύτητα της μάζας είναι $\sqrt{(2gh)}$, όπου το h είναι το ύψος από το οποίο η μονάδα έχει πέσει. Λάβετε την εξίσωση που αντιπροσωπεύει την μετατόπιση της μάζας σε χρόνο t > 0 όταν M = 50 kg, B = 180 N sm^{-1} και K = 474,5 Nm^{-1}, και ερευνείστε τα αποτελέσματα των διαφορετικών υψών πτώσης h. (g είναι η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας, και μπορεί να ληφθεί ως 9,8 m s^{-2}.)



Σχήμα 4.11 Ο εξοπλισμός προσγείωσης

K=474,5Nm^{-1}, και να ερευνήσουν τα αποτελέσματα των διαφορετικών υψών πτώσης h. (g είναι η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας, και μπορεί να ληφθεί σαν 9,8m/s^2.)

Λύση

Η εξίσωση της κίνησης είναι

$$\mathrm{M}\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = Mg; x(0) = 0, \dot{x}(0) = \sqrt{2gh}$$

Το πρόβλημα είναι έπειτα ερευνητικό, όπου οι μαθητές καλούνται να ερευνήσουν για διαφορετικές τιμές h είτε αναλυτικά είτε με προσομοίωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Συναρτήσεις βήματος και ώθησης

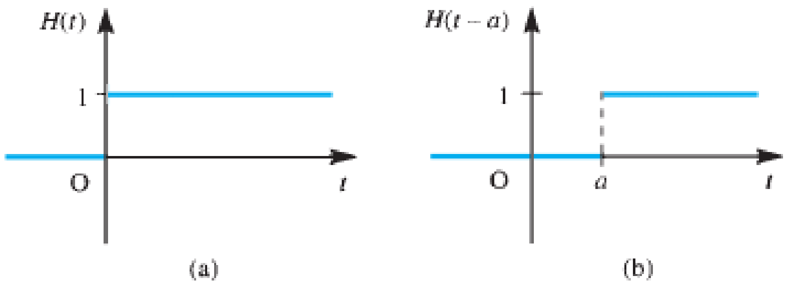
5.1 Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος του Heaviside

Στις παραγράφους 2.1 και 2.2 εξετάσαμε τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις στις οποίες οι συναρτήσεις εξαναγκασμού ήταν συνεχείς. Σε πολλές εφαρμογές της εφαρμοσμένης μηχανικής η συνάρτηση εξαναγκσμού μπορεί συχνά να είναι ασυνεχής, παραδείγματος χάριν ένα τετραγωνικό κύμα που απορρέει από έναν διακόπτη έναυσης/σβέσης. Προκειμένου να προσαρμοστούν τέτοιες ασυνεχείς συναρτήσεις, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση μοναδιαίου βήματος του Heaviside $H(t)$, η οποία, όπως είδαμε στην παράγραφο 2.1, καθορίζεται από

$$\mathrm{H}(\chi) = \begin{Bmatrix} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{Bmatrix}$$

και παρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 5.1 (α). Η συνάρτηση του Heaviside επίσης συχνά αναφέρεται απλά ως **συνάρτηση μοναδιαίου βήματος**. Μια συνάρτηση που ανταπαριστά ένα μοναδιαίο βήμα σε $t = a$ μπορεί να ληφθεί από μια οριζόντια παράλληλη μετατόπιση διάρκειας a. Αυτό απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 5.1 (β), και καθορίζεται από

$$\mathrm{H}(\mathrm{t}-\alpha) = \begin{Bmatrix} 0, t < \alpha \\ 1, t \geq \alpha \end{Bmatrix}$$

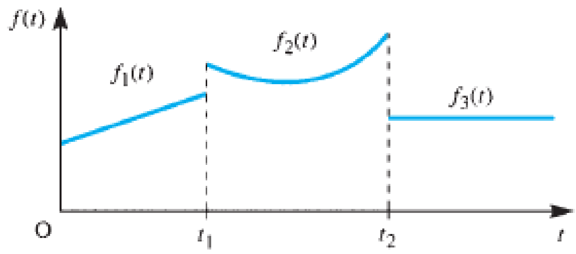


Σχήμα 5.1 Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος του Heaviside.

Η συνάρτηση γινομένου $f(t)H(t-a)$ παίρνει τις τιμές

$$f(t)\mathrm{H}(\mathrm{t}-\alpha) = \begin{Bmatrix} 0, t < \alpha \\ \mathrm{f(t)}, t \geq \alpha \end{Bmatrix}$$

έτσι η συνάρτηση $H(t - a)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως μια συσκευή για την «έναυση» της συνάρτησης $f(t)t = a$. Κατ' αυτό τον τρόπο η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να γραφεί μια συνοπτική διατύπωση των τμηματικά συνεχείς συναρτήσεων. Για να απεικονιστεί αυτό, εξετάστε την τμηματικά συνεχή συνάρτηση $f(t)$ που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.20 και καθορίζεται από



Σχήμα 5.2 Τμηματικά συνεχής συνάρτηση.

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t), (0\le t<t_1) \\ f_2(t), (t_1\le t<t_2) \\ f_3(t), (t\ge t_2) \end{cases}$$

Για να κατασκευάσουμε αυτήν την συνάρτηση $f(t)$, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες πράξεις "μετατροπής":
(α) ανάβουμε την συνάρτηση $f_1(t)$ σε $t = 0$
(β) ανάβουμε την συνάρτηση $f_2(t)$ σε $t = t_1$ και σβήνουμε συγχρόνως την συνάρτηση $f_1(t)$
(γ) ανάβουμε την συνάρτηση $f_3(t)$ σε $t = t_2$ και σβήνουμε συγχρόνως την συνάρτηση $f_2(t)$.
Από την άποψη της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος, η συνάρτηση $f(t)$ μπορεί έτσι να εκφραστεί ως

$$f(t)=f_1(t)H(t)+[f_2(t)-f_1(t)]H(t-t_1)+[f_3(t)-f_2(t)]H(t-t_2)$$

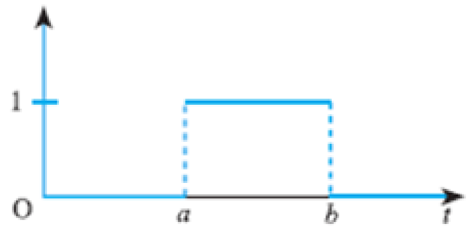
Εναλλακτικά, η $f(t)$ μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας την **ορθογώνια συνάρτηση** $H(t-a)-H(t-b)$.
Σαφώς,

$$H(t-\alpha)-H(t-b)=\begin{cases} 1, \alpha\le t<b \\ 0, \ \textit{διαφορετικά} \end{cases} \qquad \textbf{(5.1)}$$

το οποίο, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 1.21, δίνει

$$f(t)\,H(t-\alpha)-H(t-b)=\begin{cases} f(t), \alpha\le t<b \\ 0, \ \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

H(t-a)-H(t-b)



Σχήμα 5.3 Ορθογώνια συνάρτηση.

Χρησιμοποιώντας αυτήν την προσέγγιση, η συνάρτηση $f\ (t)$ του σχήματος 5.2 μπορεί να εκφραστεί ως

$$f(t)=f_1(t)[H(t)-H(t-t_1)+f_2(t)\,[H(t-t_1)-H(t-t_2)]+f_3(t)\,H(t-t_2)$$

δίνοντας, όπως πριν,

$$f(t)=f_1(t)H(t)+[f_2(t)-f_1(t)]H(t-t_1)+[f_3(t)-f_2(t)]H(t-t_2)$$

Εύκολα ελέγχεται ότι αυτό αντιστοιχεί στη δεδομένη διατύπωση, αφού για $0 \leq t < t_1$ δίνοντας

$$H(t)=1, \quad H(t-t_1)=H(t-t_2)=0$$

δίνοντας

$f(t)=f_1(t) \quad (0 \leq t < t_1)$

ενώ για $t_1 \leq t < t_2$

$H(t)=H(t-t_1)=1, \; H(t-t_2)=0$

δίνοντας

$$f(t)=f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]=f_2(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

και τελικά για $t \geq t_2$

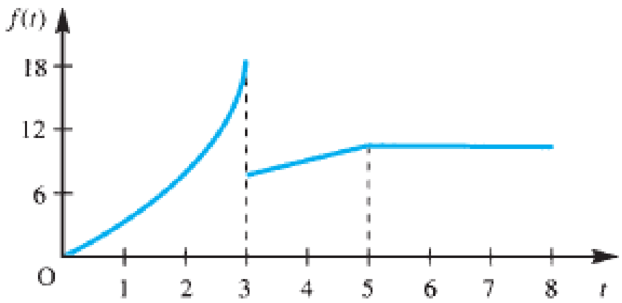
$H(t)=H(t-t_1)=H(t-t_2)=1$

δίνοντας

$$f(t)=f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]+[f_3(t)-f_2(t)]=f_3(t) \quad (t \geq t_2)$$

Παράδειγμα 5.1 Να εκφράστε από την άποψη των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος την τμηματικά συνεχή αιτιώδη συνάρτηση

$$\mathrm{f(t)} = \begin{Bmatrix} 2t^2, (0 \le \mathrm{t} < 3) \\ t+4, (3 \le t < 5 \\ 9, (\mathrm{t} \ge 5) \end{Bmatrix}$$



Σχήμα 5.4 Η τμηματικά συνεχής συνάρτηση του παραδείγματος 5.1.

Λύση

Η $f\,(t)$ απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 5.4, και από την άποψη των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος μπορεί να εκφραστεί ως

$f(t)=2t^2H(t)+(t+4-2t^2)H(t-3)+(9-t-4)H(t-5)$

Δηλαδή

$f(t)=2t^2H(t)+(4+t-2t^2)H(t-3)+(5-t)H(t-5)$

Παράδειγμα 5.2 Να εκφράστε από την άποψη των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος την τμηματικά συνεχή αιτιώδη συνάρτηση

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0, t < 1 \\ 1, 1 \le t < 3 \\ 3, 3 \le t < 5 \\ 2, 5 \le t < 6 \\ 0, t \ge 6 \end{Bmatrix}$$

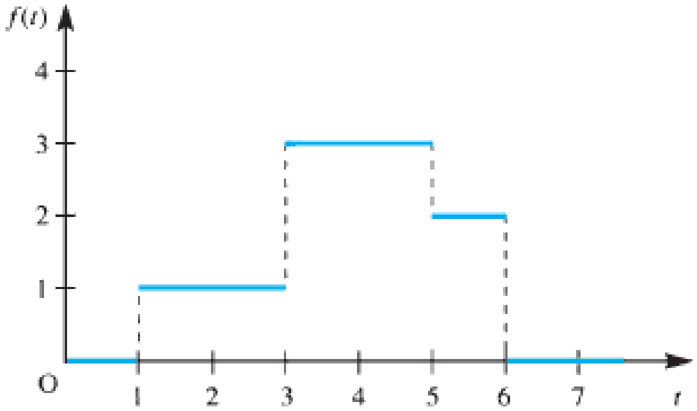
Λύση

Η $f\,(t\,)$ απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 5.5, και από την άποψη των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος μπορεί να εκφραστεί ως

$f(t)=1H(t-1)+(3-1)H(t-3)+(2-3)H(t-5)+(0-2)H(t-6)$

Δηλαδή

f(t)=1H(t-1)+2H(t-3)-1H(t-5)-2H(t-6)



Σχήμα 5.5 Η τμηματικά συνεχής συνάρτηση του παραδείγματος 1.33.

5.2 Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος

Από τον ορισμό του Μετασχηματισμού Laplace, η μετασχηματισμένη της H(t - α), α ≥ 0, δίνεται από

$$L\{H(t-a)\} = \int_0^\infty \mathrm{H}(t-a)e^{-st}dt = \int_0^a 0e^{-st}dt + \int_a^\infty 1e^{-st}dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

Δηλαδή

$$L\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \; (\alpha \geq 0) \qquad \textbf{(5.2)}$$

και στην συγκεκριμένη περίπτωση α = 0

$$L\{H(t)\} = \frac{1}{s} \qquad \textbf{(5.3)}$$

Παράδειγμα 5.3
Να καθορίστε τον Μετασχηματισμό Laplace του ορθογώνιου παλμού

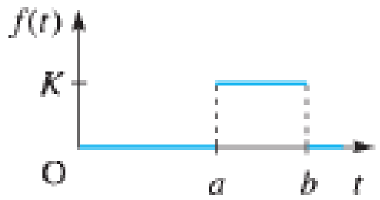
$$\mathrm{f(t)} = \begin{Bmatrix} 0, (\mathrm{t} < a) \\ \mathrm{K}, (\alpha \leq t < b \\ 0, (\mathrm{t} \geq b) \end{Bmatrix} \mathrm{K} \quad cons\tan t, b > a > 0$$

<u>*(σημείωση: το **constant** στην συνάρτηση σημαίνει **σταθερά**)*</u>

Λύση

Ο παλμός απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 5.6. Από την άποψη των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος, μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας την ορθογώνια συνάρτηση, ως

f(t)=K[H(t-α)-Ht-b)]



Σχήμα 5.6 Ορθογώνιος παλμός.

Κατόπιν, παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace,

$\mathcal{L}\{ f(t)\}$ =K$\mathcal{L}\{ H(t\text{-}\alpha)\}$ -K$\mathcal{L}\{\mathrm{H}(t\text{-}b)\}$

το οποίο, με τη χρήση του αποτελέσματος (5.6), δίνει

$$L\{f(t)\} = K\frac{e^{-as}}{s} - K\frac{e^{-bs}}{s}$$

Δηλαδή

$$L\{f(t)\} = \frac{K}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$$

Παράδειγμα 5.4 Καθορίστε τον μετασχηματισμό Laplace της τμηματικά σταθερής συνάρτησης $f(t)$ που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.5.

Λύση

Από το παράδειγμα 1.33 η $f(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως

f(t)=1H(t-1)+2H(t-3)-1H(t-5)-2H(t-6)

Λαμβάνοντας τον Μετασχηματισμό Laplace,

$\mathcal{L}\{ f\ (t)\}$ =1 $\mathcal{L}\{ H\ (t\text{-}1)\}$ +2$\mathcal{L}\{ H\ (t\text{-}3)\}$- 1 $\mathcal{L}\{ H\ (t\text{-}5)\}$ -2 $\mathcal{L}\{ H\ (t\text{-}6)\}$

το οποίο, με χρήση του αποτελέσματος (1,43), δίνει

$$L\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s} - 2\frac{e^{-6s}}{s}$$

Δηλαδή

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s}\left(e^{-s} + 2e^{-3s} - e^{-5s} - 2e^{-6s}\right)$$

5.3 Το θεώρημα δεύτερης μετατόπισης

Αυτό το θεώρημα είναι διπλό στο θεώρημα πρώτης μετατόπισης που δίνεται ως θεώρημα 1.2, και μερικές φορές αναφέρεται ως **θεώρημα Heaviside** ή **θεώρημα υστέρησης**.

Θεώρημα 1.4 Εάν $\mathcal{L}\{ f\ (t)\} = F\ (s)$ έπειτα για μια θετική σταθερά a

$$\mathcal{L}\{ f\ (t-a)H(t-\alpha)\}=e^{-\alpha s}\ F(s)$$

Απόδειξη Εξ ορισμού,

$$L\{f\ (t-a)H(t-\alpha)\} = \int_0^\infty \mathrm{f}(\mathrm{t}-\alpha)\,\mathrm{H}(t-a)e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{f}(\mathrm{t}-\alpha)e^{-st}dt =$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $T = t - a$,

$$L\{f\ (t-a)H(t-\alpha)\} = \int_0^\infty \mathrm{f}(\mathrm{T})e^{-s(T+a)}dT =$$

$$= e^{-sa}\int_0^\infty \mathrm{f}(\mathrm{T})e^{-sT}dT =$$

Αφού $F(s) = \mathcal{L}\{ f\ (t)\} = \int_0^\infty f\ (T)\ e^{-sT}$ συνεπάγεται ότι

$\mathcal{L}\{ f\ (t-a)H(t-\alpha)\}=e^{-\alpha s}F(s)$

Τέλος θεωρήματος

Είναι σημαντικό να γίνει διάκριση μεταξύ των δύο συναρτήσεων $f(t)H(t-a)$ και $f(t-a)H(t-a)$.

Όπως είδαμε νωρίτερα, η $f(t)H(t-a)$ απλά δείχνει ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι «αναμμένη» στο χρόνο $t = a$, έτσι ώστε

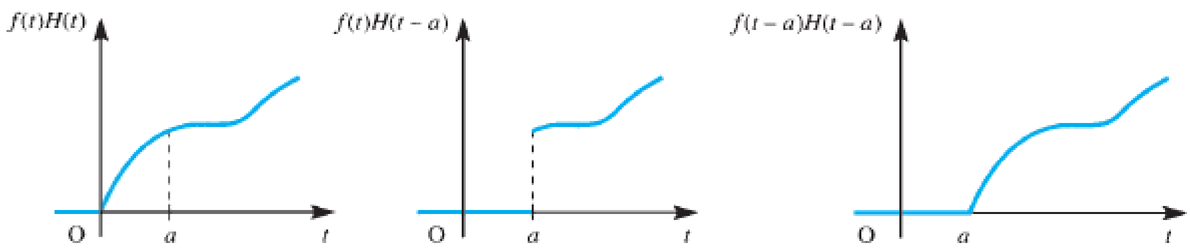
$$f(t)\mathrm{H}(\mathrm{t}-\alpha)=\begin{Bmatrix} 0, t<a \\ \mathrm{f(t)}, t\geq\alpha \end{Bmatrix}$$

Αφ' ετέρου, η $f(t-a)H(t-a)$ αναπαριστά μια μεταφορά της συνάρτησης $f(t)$ κατά μονάδες a

στα δεξιά (στα δεξιά, αφού $a > 0$), έτσι ώστε

$$f(t-\alpha)\mathrm{H}(\mathrm{t}-\alpha)=\begin{Bmatrix} 0, t<\alpha \\ \mathrm{f}(\mathrm{t}-\alpha), t\geq\alpha \end{Bmatrix}$$

Η διαφορά μεταξύ των δύο οαρουσιάζεται γραφικά στο σχήμα 1.25. Η $f(t-a)H(t-a)$ μπορεί να ερμηνευθεί ότι αναπαριστά την συνάρτηση $f(t)$ που καθυστερεί στο χρόνο κατά μονάδες a. Κατά συνέπεια, όταν εξετάζουμε τον Μετασχηματισμό Laplace της, $e^{-as}F(s)$, όπου η $F(s)$ υποδηλώνει τον Μετασχηματισμό Laplace της $f(t)$, το συστατικό e^{-as} μπορεί να ερμηνευθεί ως τελεστής υστέρησης στον μετασχηματισμό $F(s)$, δείχνοντας ότι η απόκριση του συστήματος που χαρακτηρίζεται από την $F(s)$ θα καθυστερήσει στο χρόνο κατά μονάδες a. Δεδομένου ότι πολλά σχεδόν σημαντικά συστήματα έχουν κάποια μορφή υστέρησης έμφυτη στη συμπεριφορά τους, είναι σαφές ότι το αποτέλεσμα αυτού του θεωρήματος είναι πολύ χρήσιμο.



Σχήμα 5.7 Απεικόνιση της $f(t-a)H(t-a)$.

Παράδειγμα 5.5 Να καθοριστεί ο Μετασχηματισμός Laplace της αιτιώδους συναρτήσεως $f(t)$ που καθορίζεται από

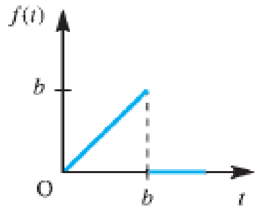
$$f(t)=\begin{cases} t, 0 \le t < b \\ 0, t \ge b \end{cases}$$

Λύση

Η $f\ (t\ )$ απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα 5.8, και φαίνεται οτι χαρακτηρίζει έναν πριονωτό παλμό διάρκειας b. Από την άποψη των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος,

f(t)=tH(t)-tH(t-b)

Προκειμένου να εφαρμοστεί το θεώρημα δεύτερης μετατόπισης, κάθε όρος πρέπει να επαναδιαταχθεί για να είναι της μορφής $f\ (t - a\ )\ H\ (t - a\ )$· δηλαδή το χρονικό όρισμα $t - a$ της συνάρτησης πρέπει να είναι το ίδιο με αυτό της συσχετιζόμενης συνάρτησης βήματος. Σε αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα αυτό δίνει



Σχήμα 5.8 Πριονωτός παλμός.

f(t)=tH(t)-(t-b)H(t-b)-bH(t-b)

Η λήψη του Μετασχηματισμού Laplace,

$\mathcal{L}$\{f(t)\}=$\mathcal{L}$\{tH(t)\}-$\mathcal{L}$\{(t-b)H(t-b)-b$\mathcal{L}$\{H(t-b)\}

το οποίο, με χρήση του θεωρήματος 1.4, οδηγεί στο

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}-e^{-bs}L\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}-e^{-bs}L(t)-b\frac{e^{-bs}}{s}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-bs}}{s}-b\frac{e^{-bs}}{s}$$

που δίνει

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-bs}\right)-\frac{b}{s}e^{-bs}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτό το αποτέλεσμα θα μπορούσε να έχει επιτευχθεί χωρίς τη χρήση του θεωρήματος δεύτερης μετατόπισης, αφού, άμεσα από τον καθορισμό του Μετασχηματισμού Laplace ,

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^b te^{-st}dt + \int_b^\infty 0e^{-st}dt =$$

$$= [-\frac{te^{-st}}{s}]_0^b + \int_0^b \frac{e^{-st}}{s}dt = [-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}]_0^b$$

t

$$= (-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2}) - \left(-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}\left(1-e^{-bs}\right) - \frac{b}{s}e^{-bs}$$

όπως πριν.

Παράδειγμα 5.6
Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace της τμηματικά συνεχούς αιτιώδους συνάρτησης

$$\mathrm{f(t)} = \left\{ \begin{matrix} 2t^2, (0 \le \mathrm{t} < 3) \\ t+4, (3 \le t < 5 \\ 9, (\mathrm{t} \ge 5) \end{matrix} \right\}$$

που εξετάζεται στο παράδειγμα 5.1.

Λύση

Στο παράδειγμα 5.1 είδαμε ότι η $f\ (t)$ μπορεί να εκφραστεί από την άποψη των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος ως

$f(t)=2t^2\ H(t)-(2t^2\ -t-4)H(t-3)-(t-5)H(t-5)$

Προτού να μπορέσουμε να βρούμε την $\mathcal{L}\{ f\ (t)\}$, η συνάρτηση $2t^2 - t - 4$ πρέπει να εκφραστεί ως συνάρτηση της t - 3. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εύκολα ως εξής.
Έστω $z = t - 3$. Κατόπιν

$2t^2$ -t-4=
=$2(z+3)^2$-(z+3)-4=
=$2z^2$+11z+11=
=$2(t-3)^2$+11(t-3)+11

Ως εκ τούτου

$f(t)=2t^2\ H(t)-[2(t-3)^2\ +11(t-3)+11]H(t-3)-(t-5)H(t-5)$

Η λήψη του Μετασχηματισμού Laplace,

$\mathcal{L}\{f(t)\}=2\mathcal{L}\{t^2 H(t)\}-\mathcal{L}\{[2(t-3)^2+11(t-3)+11]\, H(t-3)\}-\mathcal{L}\{(t-5)H(t-5)\}$

το οποίο, με χρήση του θεωρήματος 1,4, οδηγεί στο

$$L\{f(t)\}=2\frac{2}{s^3}-e^{-3s}L\{2t^2+11t+11\}-e^{-5s}L\{t\}$$

$$=\frac{4}{s^3}-e^{-3s}(\frac{4}{s^3}+\frac{11}{s^2}+\frac{11}{s})-\frac{-e^{5s}}{s^2}$$

Πάλι αυτό το αποτέλεσμα θα μπορούσε να έχει επιτευχθεί άμεσα από τον ορισμό του Μετασχηματισμού Laplace ς, αλλά σε αυτήν την περίπτωση η απαραίτητη ολοκλήρωση κατά μέλη είναι λίγο πιό κουραστική.

5.4 Αντιστροφή με χρήση του θεωρήματος δεύτερης μετατόπισης

Έχουμε δει στα παραδείγματα 1.34 και 1.35 ότι, για να λάβουμε τον Μετασχηματισμό Laplace των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων, η χρήση του θεωρήματος δεύτερης μετατόπισης θα μπορούσε να αποφευχθεί, δεδομένου ότι είναι δυνατό να ληφθούν τέτοιους μετασχηματισμούς άμεσα από τον καθορισμό του Μετασχηματισμού Laplace.
Στην πράξη, η σημασία του θεωρήματος βρίσκεται στον καθορισμό των *αντίστροφων* μετασχηματισμών, αφού, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι υστερήσεις είναι έμφυτες στα περισσότερα συστήματα και οι μηχανικοί ενδιαφέρονται να μάθουν πώς αυτές επηρεάζουν την απόκριση των συστημάτων. Συνεπώς, μακράν η πιό χρήσιμη μορφή του θεωρήματος δεύτερης μετατόπισης είναι

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\alpha s} F(s)\}=f(t-\alpha)H(t-\alpha) \qquad \textbf{(5.4)}$$

Συγκρίνοντας την (5.4) με το αποτέλεσμα (2.9), δηλαδή

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)H(t)$

βλέπουμε ότι

$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\alpha s} F(s)\}=[f(t)H(t)]$ with t replaced by t-a

υποδεικνύοντας ότι η απόκριση $f\ (t)$ έχει καθυστέρηση στο χρόνο κατά μονάδες a. Γι'αυτό το λόγο το θεώρημα καλείται μερικές φορές θεώρημα υστέρησης.

Παράδειγμα 5.7

Να υπολογιστεί ο $L^{-1}\{\frac{4e^{-4s}}{s(s+2)}\}$

Λύση

Αυτή μπορεί να γραφτεί ως $\mathcal{L}^{-1}$ $\{e^{-4s} F(s)\}$, όπου

$$F(s)=\frac{4}{s(s+2)}$$

Πρώτα λαμβάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $f(t)$ της $F(s)$. Επιλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$F(s)=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+2}$$

το οποίο, κατά την αντιστροφή, δίνει

$f(t)=2-2e^{-2t}$

μια γραφική παράσταση της οποίας παρουσιάζεται στο σχήμα 5.9 (α) Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την (5.4), έχουμε

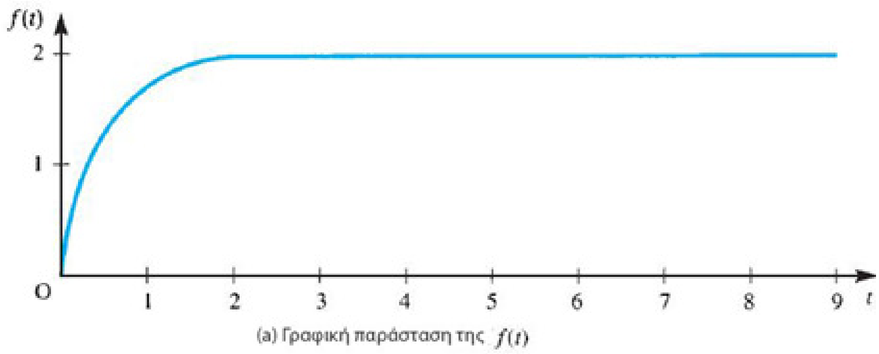
$$\begin{aligned} L^{-1}\{e^{-4s}\frac{4}{s(s+2)}\} &= L^{-1}\{e^{-4s}F(s)\} = f(t-4)H(t-4) \\ &= (2-2e^{-2(t-4)})H(t-4) \end{aligned}$$

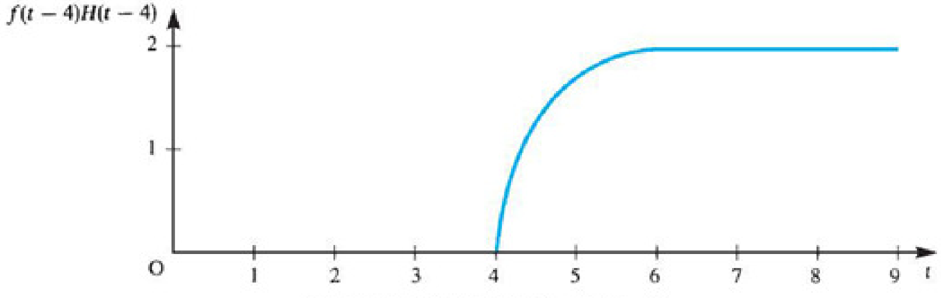
που δίνει

$$L^{-1}\left\{\frac{4e^{-4s}}{s(s+2)}\right\}=\left\{\begin{matrix} 0, t<4 \\ 2\left(1-e^{-2(t-4)}\right), \geq 4 \end{matrix}\right\}$$

το οποίο σχεδιάζεται γραφικά στο σχήμα 1.27 (β).

Σχήμα 5.9 Αντίστροφος μετασχηματισμός του παραδείγματος 5.7.





(b) Γραφική παράσταση της $f(t-4)H(t-4)$

Παράδειγμα 5.8 Να υπολογιστεί ο $L^{-1}\{\frac{e^{-s\pi}(s+3)}{s(s^2+1)}\}$

Αυτή μπορεί να γραφτεί ως $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s\pi}F(s)\}$, όπου

$$F(s)=\frac{s+3}{s(s^2+1)}$$

Επιλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$F(s)=\frac{3}{s}-\frac{3s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}$$

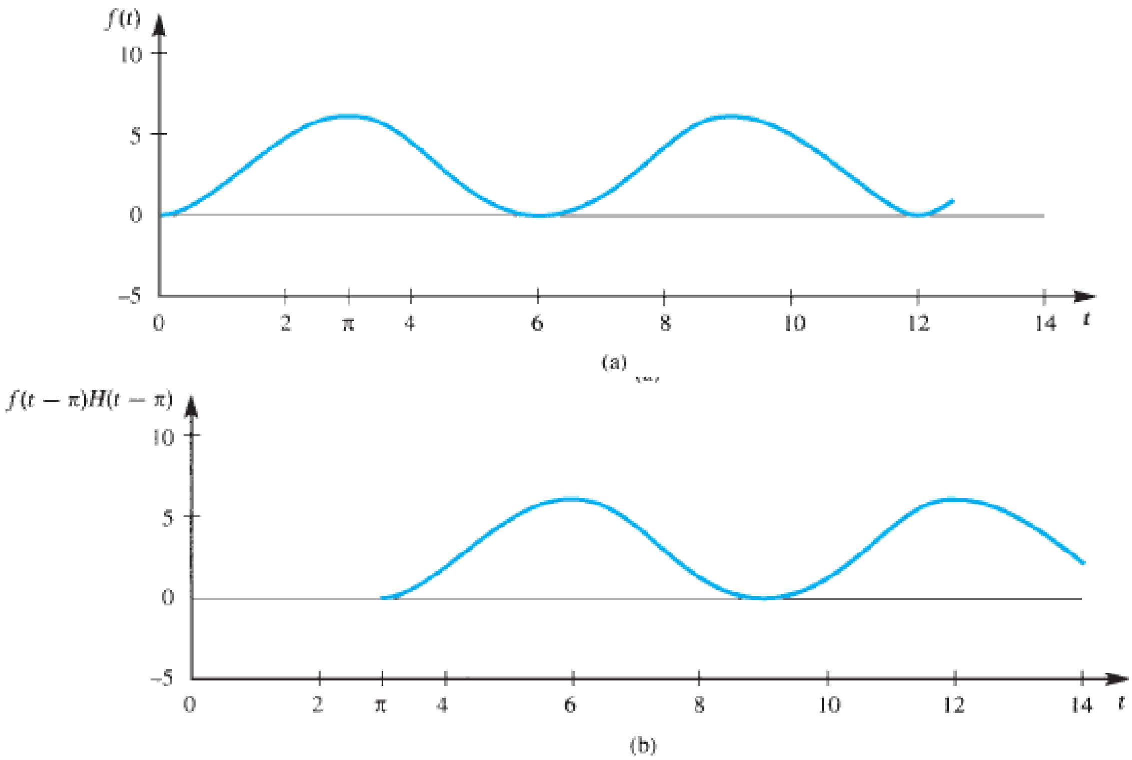
το οποίο, κατά την αντιστροφή, δίνει

f(t)=3-3cost+sint

μια γραφική παράσταση της οποίας παρουσιάζεται στο σχήμα 5.10 (α) Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την (5.4), έχουμε

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s\pi}(s+3)}{s(s^2+1)}\right\}=L^{-1}\left\{e^{-s\pi}F(s)\right\}=f(t-\pi)H(t-\pi)$$
$$=\left[3-3\cos(t-\pi)+\sin(t-\pi)H(t-\pi)\right]$$
$$=(3-3\cos t-\sin t)H(t-\pi)$$

Παράδειγμα 5.9 Αντίστροφοι μετασχηματισμοί του παραδείγματος 5.8.



Σχήμα 5.10 Αντίστροφοι μετασχηματισμοί

που δίνει

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-s\pi}(s+3)}{s\left(s^2+1\right)}\right\}=\left\{\begin{matrix}0, t<\pi \\ 3+3\cos t-\sin t, t\geq\pi\end{matrix}\right\}$$

η οποία σχεδιάζεται γραφικά στο σχήμα 5.10 (β)

5.5 Διαφορικές εξισώσεις

Επιστρέφουμε τώρα στη λύση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων για τις οποίες η συνάρτηση εξαναγκασμού $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής, όπως αυτήν που απεικονίζεται στο σχήμα 5.2. Μια προσέγγιση στην επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης που έχει μια τέτοια συνάρτηση εξαναγκασμού είναι να λυθεί αυτή ξεχωριστά για κάθε ένα από τα συνεχή συστατικά $f_1(t)$, $f_2(t)$, και ούτω καθ' εξής, συμπεριλαμβάνοντας την $f(t)$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι σε αυτήν την εξίσωση όλα τα παράγωγα, εκτός από το υψηλότερο, πρέπει να παραμείνουν συνεχή έτσι ώστε οι τιμές στό σημείο της ασυνέχειας να παρέχουν τις αρχικές συνθήκες για το επόμενο τμήμα. Αυτή η προσέγγιση είναι προφανώς μάλλον κουραστική, και μια πολύ αμεσότερη είναι να χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις βήματος του Heaviside για να καθοριστεί η $f\ (t)$. Κατόπιν η μέθοδος λύσης ακολουθεί αυτήν που χρησιμοποιείται στην παράγραφο 2.1, και θα την απεικονίσουμε απλά με παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.10 Να λάβετε τη λύση $x\ (t\ ), t \geq 0$, της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{d\ x}{dt} + 6x = f\,(t) \qquad (5.5)$$

όπου η $f\ (t)$ είναι η συνάρτηση παλμού

$$\text{f(t)} = \begin{Bmatrix} 3, 0 \leq t < 6 \\ 0, t \geq 6 \end{Bmatrix}$$

και υπόκειται στις αρχικές συνθήκες $x\ (0)$=0 και $x\ (0)$ =2.

Λύση

Για να απεικονιστεί το πλεονέκτημα της χρήσης μιας διατύπωση συναρτήσεων βήματος της συνάρτησης εξαναγκασμού $f\ (t)$, θα λύσουμε αρχικά ξεχωριστά για κάθε μια από τις χρονικές κλίμακες.

Μέθοδος 1 Για $0 \leq t\ < 6$, η (5.5) γίνεται

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{d\ x}{dt} + 6x = 3$$

με $x\ (0)$= 0 και $x\ (0)$ = 2.

Η λήψη του Μετασχηματισμού Laplace δίνει

$$\left(s^2 + 5s + 6\right) X\left(s\right) = sx\left(0\right) + \dot{x}\left(0\right) + 5x\left(0\right) + \frac{3}{s} = 2 + \frac{3}{s}$$

Δηλαδή

$$X\,(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

το οποίο, κατά την αντιστροφή, δίνει

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\,(0 \le t < 6)$$

Καθορίζουμε τώρα τις τιμές των $x(6)$ και $x(6)$ προκειμένου να παρασχεθούν οι αρχικές συνθήκες για το επόμενο στάδιο:

$$x(6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-12} - e^{-18} = a, \dot{x}(6) = -e^{-12} + 3e^{-18} = \beta$$

Για $t \geq 6$ κάνουμε την αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής $T = t - 6$, από όπου η (5.5) γίνεται

$$\frac{d^2x}{d\mathrm{T}^2} + 5\frac{d\ x}{d\mathrm{T}} + 6x = 0$$

που υπόκειται σε x $(T = 0) = \alpha$ και $\dot{x}$ $(T = 0) = \beta$.

Η λήψη του Μετασχηματισμού Laplace δίνει

$$\left(s^2 + 5s\right) + 6\left(s^2 + 5s + 6\right)X(s) = sx(T = 0) + \dot{x}(T = 0) + 5x(T = 0) = as + 5a + \beta$$

Δηλαδή

$$X(s) = \frac{as + 5a + \beta}{(s+2)(s+3)} = \frac{\beta + 3\alpha}{s+2} - \frac{\beta + 2\alpha}{s+3}$$

το οποίο, κατά τη λήψη των αντίστροφων μετασχηματισμών, δίνει

$X(T)=(\beta+3\alpha)e^{-2T}-(\beta+2\alpha)e^{-3T}$

Η αντικατάσταση των τιμών των α και β και η επιστροφή στην ανεξάρτητη μεταβλητή t δίνει

$$x(t) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-12}\right)e^{-2(t-6)} - \left(1 + e^{-18}\right)e^{-3(t-6)}\,(t \ge 6)$$

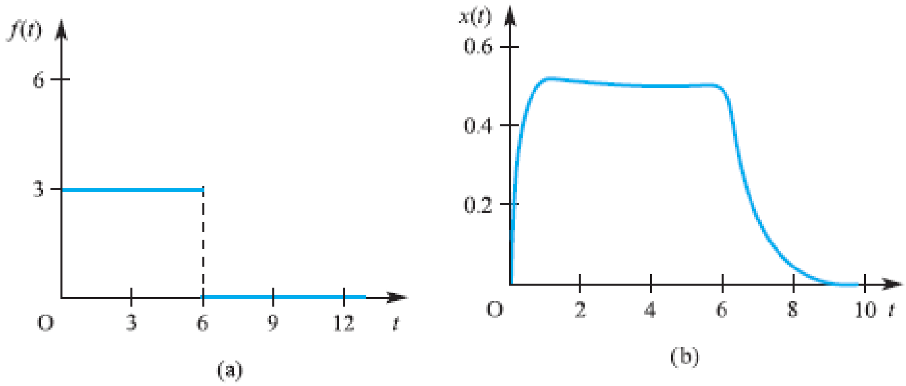
Δηλαδή

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right) + \left(\frac{3}{2}e^{-2(t-6)} - e^{-3(t-6)}\right)(t \ge 6)$$

Κατά συνέπεια η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t}, 0\le t<6\\ (\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t})+(\frac{3}{2}e^{-2(t-6)}-e^{-3(t-6)}), t\ge 6\end{cases}$$

Η συνάρτηση εξαναγκασμού $f\ (t\ )$ και η απόκριση $x\ (t\ )$ παρουσιάζονται στα σχήματα 5.11 (α) και (β) αντίστοιχα.



Σχήμα 5.11 Η συνάρτηση εξαναγκασμού και η απόκριση του παραδείγματος 5.10.

Μέθοδος 2 Από την άποψη των συναρτήσεων βήματος του Heaviside,

f(t)=3H(t)-3H(t-6)

έτσι ώστε, χρησιμοποιώντας την (5.2),

$$L\{f(t)\}=\frac{3}{s}-\frac{3}{s}e^{-6s}$$

Η λήψη του Μετασχηματισμού Laplace στην (5.4) έπειτα δίνει

$$\left(s^2+5s+6\right)\dot{X}(s)=sx(0)+\chi(0)+5\chi(0)+L\{f(t)\}=2+\frac{3}{s}-\frac{3}{s}e^{-6s}$$

Δηλαδή

$$X(s)=\frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}-e^{-6s}\frac{3}{s(s+2)(s+3)}=$$
$$=(\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}-\frac{1}{s+3})-e^{-6s}(\frac{\frac{1}{2}}{s}-\frac{\frac{3}{2}}{s+2}-+\frac{1}{s+3})$$

Η λήψη των αντίστροφων του Μετασχηματισμού Laplace και η χρησιμοποίηση του αποτελέσματος (5.4) δίνει

$$x(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-2(t-6)}+e^{-3(t-6)}H(t-6)\right)$$

το οποίο είναι η απαραίτητη λύση. Αυτό αντιστοιχεί σε αυτό που λαμβάνεται με την μέθοδο 1, αφού, χρησιμοποιώντας τον καθορισμό της H (t - 6), αυτό μπορεί να γραφτεί ως

$$x(t)=\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t}, 0\le t<6\\ (\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t})+(\frac{3}{2}e^{-2(t-6)}-e^{-3(t-6)}), t\ge 6\end{array}$$

Αυτή η προσέγγιση είναι σαφώς λιγότερο κουραστική, αφού οι αρχικές συνθήκες στις ασυνέχειες λαμβάνονται υπόψη αυτόματα στη λύση.

Παράδειγμα 5.11 Να καθορίστε τη λύση $x(t), t\ge 0$, της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=f(t) \qquad \textbf{(5.6)}$$

όπου

$$\text{f(t)}=\left\{\begin{array}{c}\text{t}, 0\le t\le\pi\\ 0, t\ge\pi\end{array}\right\}$$

και που υπάγεται στις αρχικές συνθήκες x (0)= 0 και $\dot{x}$ (0) = 3.

Λύση

Ακολουθώντας τις διαδικασίες του παραδείγματος 5.3, έχουμε

f(t)=tH(t)-tH(t-π)
=tH(t)-(t-π)H(t-π)-πH(t-π)

έτσι ώστε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.4,

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2}-\frac{\pi e^{-\pi s}}{s}=\frac{1}{s^2}-e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s}\right)$$

Η λήψη του Μετασχηματισμού Laplace στην (5.6) έπειτα δίνει

$$\left(s^2+2s+5\right)X\left(s\right)=sx\left(0\right)+\dot{x}\left(0\right)+2x\left(0\right)+L\left\{f\left(t\right)\right\}$$
$$=3+\frac{1}{2^2}-e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s}\right)$$

χρησιμοποιώντας τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.
Κατά συνέπεια

$$X(s)=\frac{3s^2+1}{s^2(s^2+2s+5)}-e^{-\pi s}\frac{1+s\pi}{s^2(s^2+2s+5)}$$

το οποίο, κατά την επίλυση σε απλά κλάσματα, οδηγεί σε

$$x(t)=\frac{1}{25}[-\frac{2}{s}+\frac{5}{s^2}+\frac{2s+74}{(s+1)^2+4}]$$
$$\frac{e^{-\pi s}}{25}[\frac{5\pi-2}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{5\pi-2+(10\pi+1)}{(s+1)^2+4}]$$

$$=\frac{1}{25}[-\frac{2}{s}+\frac{5}{s^2}+\frac{2(s+1)+72}{(s+1)^2+4}]$$
$$-\frac{e^{-\pi s}}{25}[\frac{5\pi-2}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{(5\pi-2)(s+1)+(5\pi+3)}{(s+1)^2+4}]$$

Η λήψη των αντίστροφων του Μετασχηματισμού Laplace και η χρησιμοποίηση της (5.4) δίνει την επιθυμητή λύση:

$$x\left(t\right)=\frac{1}{25}(-2+5t+2e^{-t}\cos 2t+36e^{-t}\sin 2t)$$
$$=\frac{1}{25}[(5\pi-2)+5(t-\pi)-(5\pi-2)e^{-(t-\pi)}\cos 2(t-\pi)$$
$$-\frac{1}{2}(5\pi+3)e^{-(t-\pi)}\sin 2(t-\pi)]\mathrm{H}(t-\pi)$$

Δηλαδή

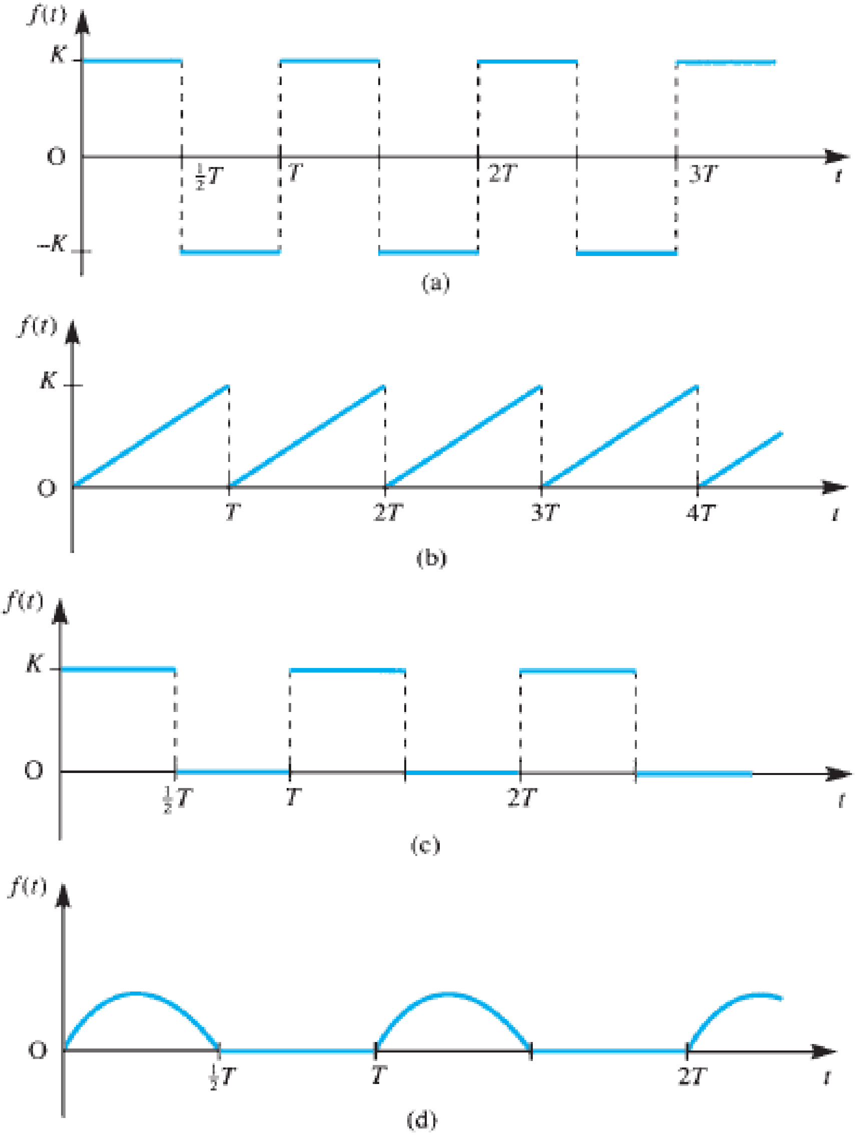
$$x(t)=\frac{1}{25}[5t-2+2e^{-t}(\cos 2t+18\sin 2t)]$$
$$\frac{1}{25}\{5t-2-e^{\pi}e^{-t})[(5\pi-2)\cos 2t+\frac{1}{2}(5\pi+3)\sin 2t]\}\mathrm{H}(t-\pi)$$

ή, σε εναλλακτική μορφή,

$$x(t)=\{\begin{array}{l}\frac{1}{25}[5t-2+2e^{-t}(\cos 2t+18\sin 2t)],0\le t<\pi\\ \frac{1}{25}e^{-t}\{(2+(5\pi-2)e^{\pi})\cos 2t+[36+\frac{1}{2}(5\pi+3)e^{\pi})\sin 2t\},t\ge\pi\end{array}$$

5.6 Περιοδικές συναρτήσεις

Έχουμε καθορίσει ήδη τον Μετασχηματισμό Laplace των περιοδικών συναρτήσεων, όπως ημίτονο ωt και συνημίτονο ωt, οι οποίες είναι λείες (παραγωγίσιμες) συνεχείς συναρτήσεις. Σε πολλές εφαρμογές της εφαρμοσμένης μηχανικής, εντούτοις, συχνά αντιμετωπίζονται οι περιοδικές συναρτήσεις που παρουσιάζουν ασυνεχή συμπεριφορά. Παραδείγματα των χαρακτηριστικών περιοδικών συναρτήσεων με πρακτική σημασία παρουσιάζονται στο σχήμα 5.12. Τέτοιες περιοδικές συναρτήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν ως άπειρη σειρά όρων που περιλαμβάνουν συναρτήσεις βήματος˙ μόλις εκφραστεί με μια τέτοια μορφή, το αποτέλεσμα (5.2) μπορεί έπειτα να χρησιμοποιηθεί για να ληφθεί ο Μετασχηματισμός Laplace .



Σχήμα 5.12 Χαρακτηριστικές πρακτικά σημαντικές περιοδικές συναρτήσεις:

(α) τετράγωνο κύμα (β) πριονοειδές κύμα (γ) κύμα επαναλαμβανόμενου παλμού (δ) ανορθωτής ημικυμάτων.

Παράδειγμα 5.12 Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του τετραγωνικού κύματος που απεικονίζεται στο σχήμα 5.12 (α).

$$f(t) = KH(t) - 2KH\left(t - \frac{1}{2}T\right) + 2KH(t-T) - 2KH\left(t - \frac{3}{2}T\right) - 2KH(t-2T) + ...$$

$$= K\left[H(t) - 2H\left(t - \frac{1}{2}T\right) + 2H(t-T) - 2H\left(t - \frac{3}{2}T\right) - 2KH(t-2T) + ...\right]$$

Από την άποψη των συναρτήσεων βήματος, το τετραγωνικό κύμα μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή

Η λήψη του Μετασχηματισμού Laplace και η χρησιμοποίηση του αποτελέσματος (5.2) δίνει

$$L\{f(t)\} = F(s) = K\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-sT/2} + \frac{2}{s}e^{-sT} - \frac{2}{s}e^{-3sT/2} + ...\right)$$

$$= \frac{2K}{s}\left[1 - e^{-sT/2} + \left(e^{-sT/2}\right)^2 - \left(e^{-sT/2}\right)^3 + \left(e^{-sT/2}\right)^4 - ....\right] - \frac{K}{s}$$

Η σειρά μέσα στις αγκύλες είναι μια άπειρη γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο 1 και η κοινό λόγο $-e^{-sT/2}$, και επομένως έχει άθροισμα $(1 + e^{-sT/2})^{-1}$. Κατά συνέπεια,

$$F(s) = \frac{2K}{s}\frac{1}{e^{-sT/2}} - \frac{K}{s}\frac{1-e^{-sT/2}}{1+e^{-sT/2}}$$

Δηλαδή

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{K}{s}\tanh\frac{1}{4}sT$$

Η προσέγγιση που χρησιμοποιείται στο παράδειγμα 5.12 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο παρέχει μια ρητή έκφραση για τον μετασχηματισμό Laplace μιας περιοδικής συνάρτησης.

Θεώρημα 1.5 Εάν η $f(t)$, καθορισμένη για όλα τα θετικά t, είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, δηλαδή $f(t + nT) = f(t)$ για όλους τους ακέραιους αριθμούς n, έπειτα

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sT} f(t)dt$$

Απόδειξη

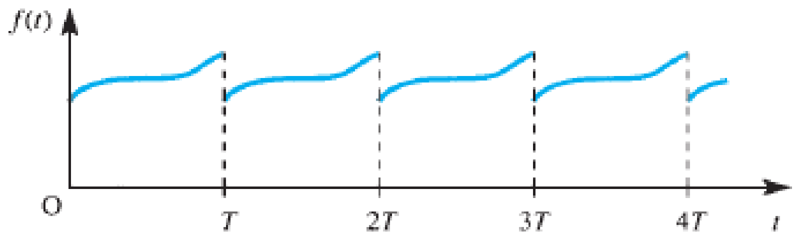
Εάν, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 5.13, η περιοδική συνάρτηση $f\ (t)$ είναι τμηματικά συνεχής σε ένα διάστημα μήκους T, έπειτα ο Μετασχηματισμός Laplace της υπάρχει και μπορεί να εκφραστεί ως μια σειρά ολοκληρωμάτων σε διαδοχικές περιόδους δηλαδή

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$
$$= \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-st}dt + \int_T^{3T} f(t)e^{-st}dt + ... + \int_{(n-1)T}^{nT} f(t)e^{-st}dt + ...$$

Εάν στα διαδοχικά ολοκληρώματα κάνουμε τις αντικαταστάσεις

t=τα+nT (n=0,1,2,3,…)

τότε



$$L\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(\tau + nT)e^{-s(\tau+nT)}dt$$

Σχήμα 5.13 Περιοδική συνάρτηση που έχει περίοδο T.

Δεδομένου ότι η $f\ (t)$ είναι περιοδική με περίοδο T,

f(τ+nT)=f(t) (n=0,1,2.3,….)

έτσι ώστε

$$L\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(\tau)e^{-sT}e^{-snT}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-snT})\int_0^T f(\tau)e^{-sT}dt$$

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}=1+e^{-sT}+e^{-2sT}+e^{-3sT}+$ .... είναι μια άπειρη γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο 1 και κοινό λόγο e^{-sT}. Το άθροισμά της δίνεται από το $(1 - e^{-sT})^{-1}$, έτσι ώστε

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(\tau)e^{-sT}d\tau$$

Δεδομένου ότι, μέσα στο ολοκλήρωμα, η τ είναι μια βουβή μεταβλητή, μπορεί να αντικατασταθεί από την t για να δώσει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

τέλος του θεωρήματος

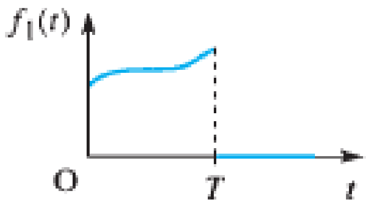
Σημειώνουμε ότι, από την άποψη της συνάρτησης βήματος του Heaviside, το θεώρημα 1.5 μπορεί να δηλωθεί ως εξής:

Εάν η $f(t)$, καθορισμένη για όλα τα θετικά t, είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο T και

$f_1(t)=f(t)(H(t)-H(t-T))$

κατόπιν

$$L\{f(t)\}=\left(1-e^{-sT}\right)^{-1}L\{f_1(t)\}$$



Σχήμα 5.14 Γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης εντός μιας περιόδου.

Αυτή η διατύπωση ακολουθεί δεδομένου ότι η $f(t)$ είναι περιοδική και $f_1(t)=0$ για $t>T$. Για την περιοδική συνάρτηση $f(t)$ που παρουσιάζεται στο σχήμα 5.13 η αντίστοιχη συνάρτηση $f_1(t)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.14. Θα δούμε από τα ακόλουθα παραδείγματα οτι αυτή η διατύπωση απλοποιεί την διαδικασία απόκτησης του μετασχηματισμού Laplace των περιοδικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 5.13 Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα που επιτυγχάνεται στο παράδειγμα 5.12 χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.5.

Λύση

Για το τετραγωνικό κύμα $f(t)$ που απεικονίζεται στο σχήμα 5.12 (α), η $f(t)$ καθορίζεται σε μια περίοδο $0<t<T$ από

$$\mathrm{f(t)}=\begin{Bmatrix} \mathrm{K}, 0<t<\frac{1}{2}\mathrm{T} \\ -\mathrm{K}, \frac{1}{2}\mathrm{T}<t<\mathrm{T} \end{Bmatrix}$$

Ως εκ τούτου μπορούμε να γράψουμε $f_1(t)=K[H(t)-2H(t-\frac{1}{2}T)+H(t-T)]$, και έτσι

$$L\{f_1(t)\} = K\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-sT/2} + \frac{1}{s}e^{-sT}\right) = \frac{K}{s}\left(1 - e^{-sT/2}\right)^2$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του θεωρήματος 1.5,

$$L\{f_1(t)\} = \frac{K\left(1 - e^{-sT/2}\right)^2}{s\left(1 - e^{-sT/2}\right)} = \frac{K\left(1 - e^{-sT/2}\right)^2}{s\left(1 - e^{-sT/2}\right)\left(1 + e^{-sT/2}\right)}$$

$$= \frac{K\left(1 - e^{-sT/2}\right)^2}{s\left(1 - e^{-sT/2}\right)} = \frac{K}{s}\tanh\frac{1}{4}sT$$

που επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα που επιτυγχάνεται στο παράδειγμα 5.12.

Παράδειγμα 5.14 Να υπολογιστεί ο Μετασχηματισμός Laplace του ανορθωμένου ημικύματος που καθορίζεται από

$$\mathrm{f(t)} = \begin{Bmatrix} \sin\omega \mathrm{t}, 0 < t < \pi/\omega \\ 0, \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{Bmatrix}$$

$f\ (t\ +\ 2\,n\,\pi\,/\omega) = f\ (t\,)$ για όλους τους ακέραιους αριθμούς n

Λύση

Η $f(t)$ απεικονίζεται στο σχήμα 1.30 (δ), με $T = 2\pi/\omega$. Μπορούμε να εκφράσουμε την $f_1(t)$ ως

$$f_1(t)=\sin\omega t[H(t)-H(t-\pi/\omega)]$$
$$=\sin\omega t H(t)+\sin\omega(t-\pi/\omega)H(t-\pi/\omega)]$$

Έτσι

$$L\{f_1(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} + e^{-s\pi/\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(1 + e^{-s\pi/\omega}\right)$$

Κατόπιν, από το αποτέλεσμα του θεωρήματος 1,5,

$$L\{f(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{1+e^{-s\pi/\omega}}{1-e^{-s\pi/\omega}} = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)(1-e^{-s\pi/\omega})}$$

Παράδειγμα 5.15

Μια συνάρτηση $f\ (t\,)$ καθορίζεται από

$$\mathrm{f(t)} = \begin{cases} \mathrm{t}, 0 \le t \le 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$$

Να εκφραστεί η $f\ (t\ )$ από την άποψη των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος του Heaviside και να δειχθεί ότι

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}\right) - \frac{1}{s}e^{-s}$$

Λύση

f(t)=tH(t)-tH(t-1)
= tH(t)-(t-1)H(t-1)-1H(t-1)

Με χρήση του θεωρήματος

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s} = \frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}\right) - \frac{1}{s} - e^{-s}$$

Παράδειγμα 5.16 Εκφράστε από την άποψη των συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος του Heaviside τις ακόλουθες τμηματικά συνεχείς αιτιώδεις συναρτήσεις. Σε κάθε μια περίπτωση λάβετε τον Μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης.

$$\alpha)\ \mathrm{f(t)} = \begin{cases} 3t^2, (0 \le \mathrm{t} \le 4) \\ 2t-3, (4 < t < 6 \\ 5, (\mathrm{t} > 6) \end{cases}$$

$$\beta)\ \mathrm{g(t)} = \begin{cases} t, (0 \le \mathrm{t} \le 1) \\ 2-t, (1 < t < 2 \\ 0, (\mathrm{t} > 2) \end{cases}$$

Λύση

α)

f(t)=3t^2 H(t)-(3t^2 -2t+3)H(t-4)-(2t-8)H(t-6)=
=3t^2 H(t)-[3(t-4)^2 +22(t-4)+43]H(t-4)-[2(t-6)+4]H(t-6)

οπότε,

$$L\{f(t)\} = \frac{6}{s^3} - e^{-4s}L\left[3t^2+22t+43\right]e^{-6s}L\left[2t+4\right]$$

$$= \frac{6}{s^3} - \left[\frac{6}{s^3} + \frac{22}{s^3} + \frac{43}{s^3}\right]e^{-4s} - \left[\frac{2}{s^2}\frac{4}{s}\right]e^{-6s}$$

β)

f(t)=tH(t)+(2-2t)H(t-1)-(2-t)H(t-2)=
= tH(t)-2(t-1)H(t-1)-(t-2)H(t-2)=

οπότε,

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}L\{t\} + e^{-2s}L\{t\} =$$
$$= \frac{1}{s^2}\left[1 - 2e^{-s} + e^{-2s}\right]$$

Παράδειγμα 5.17 θα υπολογίσουμε τους αντίστροφους του Μετασχηματισμού Laplace των επόμενων:

(a) $\dfrac{e^{-5s}}{(s-2)^4}$ **(b)** $\dfrac{3e^{-2s}}{(s+3)(s+1)}$

Λύση

α)

$L^{-1}\ \{\dfrac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\} = \mathcal{L}^{-1}\ \{e^{-5s}F(s)\}$ όπου $F(s) = \dfrac{1}{(s-2)^4}$

Μετακινήστε το θεώρημα $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\ \{F(s)\}= \dfrac{1}{6}t^3e^{2t}$

Έτσι, από το θεώρημα δεύτερης μετατόπισης

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = f(t-5)H(t-5) =$$
$$= \frac{1}{6}(t-5)^3 e^{2(t-5)}H(t-5)$$

β)

$$L^{-1}\left\{\frac{3e^{-2s}}{(s+3)(s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{e^{-2s}F(s)\right\} = \quad \text{όπου}$$

$$F(s) = \frac{3}{(s+3)(s+1)} = \frac{-\frac{3}{2}}{s+3} + \frac{\frac{3}{2}}{s+1}$$

$$f(t) = L^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t}$$

$L^{-1}\ \{\dfrac{3e^{-2s}}{(s+3)(s+1)}\}$=f(t-2)H(t-2)

$$= \frac{3}{2}\left[e^{-(t-2)} - e^{-3(t-2)}\right]H(t-2)$$

Παράδειγμα 5.18 Δεδομένου ότι $x = 0$ όταν $t = 0$, να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt}+x=f(t)(t\geq 0)$$

όπου η $f(t)$ είναι η συνάρτηση που καθορίζεται στην άσκηση 1,
Σχεδιάστε σε μια γραφική παράσταση τη λύση.

Λύση

$$\frac{dx}{dt}+x=f(t), L\{f(t)\}=\frac{1}{s^2}\left[1-e^{-s}-se^{-s}\right]$$

Παίρνοντας υπόψη τον μετασχηματισμό του Laplace μετασχηματίζεται με x(0)=0

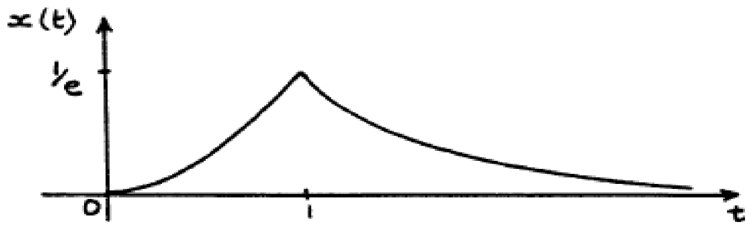
$$(x+1)X(s)=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\frac{(1+s)}{s^2}$$

$$X(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}-e^{-s}\frac{1}{s^2}$$

$$=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}-e^{-s}L\{t\}$$

Λαμβάνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς

$x(t)=-1+e^{-t}+t-(t-1)H(t-1)$
$\quad =e^{-t}+(t-1)[1-H(t-1)]$
Ή $x(t)= e^{-t}+(t-1)$ για $t \leq 1$
$\quad x(t)= e^{-t}$ για $t \geq 1$
Σκίτσο απόκρισης είναι:



Παράδειγμα 5.19 Η είσοδος θ_i (t) και η έξοδος θ_o (t) ενός σερβομηχανισμού συσχετίζονται από τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{\theta}_0 + 8\dot{\theta}_0 + 16\theta_0 = \theta_i \quad (t \geq 0)$$

και αρχικά $\theta_o(0) = \theta_o(0) = 0$. Για $\theta_i = f(t)$, όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, 0 < t < 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$L\{\theta_1(t)\} = \frac{s-1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-s}$$

και ως εκ τούτου λάβετε μια έκφραση για την απόκριση του συστήματος στο χρόνο t .

Λύση

$\theta_i(t)$=f(t)=(1-t)H(t)-(1-t)H(t-1)

=(1-t)H(t)+(t-1)H(t-1)

Ή

$$L\{\theta_1(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + e^{-s}L\{t\} =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-s} = \frac{s-1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-s}$$

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace τροποποιείται χρησιμοποιώντας $\theta_0(0) = \dot{\theta}_0(0) = 0$

$$(s^2 + 8s + 16)\Phi_0(s) = \frac{s-1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-s}$$

$$\Phi_0(s) = \frac{s-1}{s^2(s+4)^2} + e^{-s}[\frac{s-1}{s^2(s+4)^2}]$$

$$= \frac{1}{s^2}[\frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s+4}\frac{10}{(s+4)^2}] + \frac{e^{-s}}{32}[\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+4} + \frac{2}{(s+4)^2}]$$

όπου είναι η λήψη μετασχηματισμών

$$\theta_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi_0(s)\} = \frac{1}{32}[3-2t-3e^{-4t}-10te^{-4t}] + \frac{1}{32}[-1+2(t-1)+e^{-4(t-1)}+2(t-1)te^{-4(t-1)}]H(t-1)$$

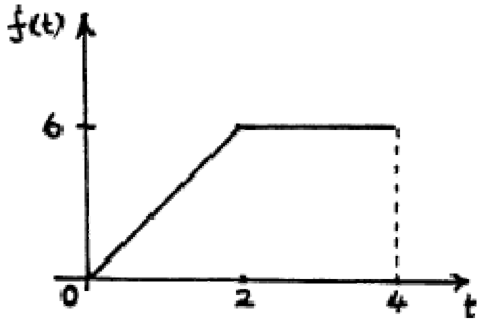
$$= \frac{1}{32}[3-2t-3e^{-4t}-10te^{-4t}] + \frac{1}{32}[2t-3+(2t-1)e^{-4(t-1)}]H(t-1)$$

Παράδειγμα 5.20 Μια περιοδική συνάρτηση $f(t)$, με περίοδο 4 μονάδες, καθορίζεται μέσα στο διάστημα $0 \le t < 4$ από

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 3t, 0 \le t < 2 \\ 6, 2 \le t < 4 \end{Bmatrix}$$

Σχεδιάστε σε μια γραφική παράσταση την συνάρτηση για $0 \le t < 12$ και λάβετε τον Μετασχηματισμό Laplace.

Λύση



Σκίτσο σε μια περίοδο όπως φαίνεται και επεκτάθηκε εύκολα $0 \le t < 12$

$$f_1(t)=3tH(t)-(3t-6)H(t-2)-6H(t-4)$$
$$=3tH(t)-3(t-2)H(t-2)-6H(t-4)$$

$$L\{f_1(t)\} = F_1(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{3}{s^2}e^{-2s} - \frac{6}{s}e^{-4s}$$

Τότε από το θεώρημα έχουμε:

$$L\{f(t)\} = F(s) = 1 - \frac{1}{e^{-4s}} F_1(s)$$

$$= \frac{1}{s^2\left(1-e^{-4s}\right)}\left(3 - 3e^{-2s} - 6se^{-4s}\right)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο **Μετασχηματισμός laplace** χρησιμοποιείται στην επίλυση προβλημάτων μηχανικών. Με τον **μετασχηματισμό Laplace** λαμβάνουμε τον μετασχηματισμό **Laplace** μερικών απλών συναρτήσεων, υπολογίζομε τον αντίστροφο μετασχηματισμό των ολοκληρωμάτων. Με την χρήση του μετασχηματισμού επιλύουμε τις συνήθεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Αυτές οι διαφορικές εξισώσεις διέπουν προβλήματα στα Ηλεκτρικά κυκλώματα, στις Μηχανικές δονήσεις, και ταλαντώσεις που περιγράφονται με επιπλέον χρήση περιοδικών συναρτήσεων. Η χρήση του μετασχηματισμού **Laplace** οδηγεί σε μια ενοποιημένη προσέγγιση και παρέχει στον μηχανικό μεγαλύτερη διορατικότητα στη συμπεριφορά του συστήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Advanced Modern Engineering Mathematics

(Εκδότης: Addison-Wesley; Μεταγενέστερη έκδοση (1η Δεκεμβρίου 2000)

[2] Μετασχηματισμός LAPLACE (Laplace Tranform) Αναστασία Βελώνη Τμήμα Η.Υ.Σ

(Εκδότης: Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά).

[3] Μετασχηματισμός LAPLACE

(Εκδότης: Αθανασιάδη 1993)

[4] Μπράτσος, Α. (2002) Ανώτερα μαθηματικά

(Εκδότης: Σταμούλη)