Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στοιχεία Γραμμικού Προγραμματισμού και εφαρμογή της μεθόδου Simplex με τη χρήση λογισμικού Matlab

---

Σπουδαστές

Κάκκος Νικόλαος   Α.Μ : 0699

Ντζουμάνη Κων/να   Α.Μ: 2179

Επιβλέπων καθηγητής: Γεώργιος Ασημακόπουλος

Αντίρριο Μάιος 2018

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

Αντίρριο, Ημερομηνία

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1. Ονοματεπώνυμο, Υπογραφή
2. Ονοματεπώνυμο, Υπογραφή
3. Ονοματεπώνυμο, Υπογραφή

Ευχαριστίες

Αρχικά θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε όλους τους καθηγητές μας για τις πολύτιμη συμβολή τους στην ολοκλήρωση των προπτυχιακών σπουδών μας που ολοκληρώνονται με την παρούσα εργασία. Πολλές ευχαριστίες οφείλουμε στους γονείς μας που χωρίς την αμέριστη υλική και ηθική τους υποστήριξη θα ήταν αδύνατον να καταφέρουμε τον σκοπό μας. Επίσης θέλουμε να ευχαριστήσουμε τον καθηγητή μας κ. Γεώργιο Ασημακόπουλο για την καθοδήγηση και την επίβλεψη της παρούσας πτυχιακής εργασίας.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των βασικών αρχών του Γραμμικού Προγραμματισμού ,που είναι ένα τμήμα του ευρύτερου πεδίου της Επιχειρησιακής Έρευνας. Στο πλαίσιο αυτό επιχειρούμε μια εκτενή ανάλυση της μεθόδου επίλυσης π.γ.π με τη μέθοδο Simplex. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μια εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα με έμφαση στην ιστορική εμφάνιση του τομέα αυτού της επιστήμης που αναπτύχθηκε σε μεγάλο βαθμό κατά τη διάρκεια και με το τέλος του Β' Παγκοσμίου Πολέμου. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις μεθόδους που χρησιμοποιούνται και στις εφαρμογές του στους διάφορους τομείς της οικονομίας και της τεχνολογίας. Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τον Γραμμικό προγραμματισμό , με τη μέθοδο δηλαδή επίλυσης προβλημάτων που αφορούν την εύρεση της βέλτιστης λύσεις προβλημάτων απόφασης όπου οι διαθέσιμοι πόροι υπόκεινται σε φυσικούς περιορισμούς. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε την δημοφιλή μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού , Simplex. Παρουσιάζουμε το μαθηματικό πρότυπο της μεθόδου , τις βασικές αρχές του καθώς και την διαδικασία επίλυσης . Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο προσομειώνουμε τον αλγόριθμο της μεθόδου Simplex με τη χρήση του λογισμικού πακέτου Matlab , και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα .

Abstract

The purpose of this paper is to study the basic principles of Linear Programming, which is a part of the broader scope of Operational Research. In this context we attempt an extensive analysis of the method of solving the problem with the Simplex method. In the first chapter of the paper an introduction to Business Research is made, with an emphasis on the historical emergence of the field of this science that developed greatly during and with the end of the Second World War. Particular emphasis is given to the methods used in its applications in various sectors of the economy and technology. In the second chapter we deal with Linear Programming, the method of solving problems related to finding the optimal solution for problems where the available resources are subject to physical constraints. In the third chapter we study the popular method of solving linear programming problems, Simplex. We

present the mathematical model of the method, its basic principles as well as the resolution process. Finally, in the fourth chapter we simulate the Simplex algorithm using the Matlab package software, and we present the results.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα

1.1 Εισαγωγή

Κατά την διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου ζητήθηκε σε επιστήμονες και μηχανικούς να αναλύσουν διάφορα στρατιωτικού τύπου προβλήματα όπως για παράδειγμα να αναπτύξουν αποτελεσματικές μεθόδους ώστε να χρησιμοποιήσουν ραντάρ τα οποία είχαν ανακαλυφθεί εκείνη την εποχή, να διαχειριστούν καλύτερα τις νηοπομπές και τα υποβρύχια, να διαχειριστούν τις επιθέσεις με βόμβες και γενικά να βελτιστοποιήσουν τις στρατιωτικές επιχειρήσεις. Έτσι λοιπόν, οι εφαρμογές των μαθηματικών και των επιστημονικών μεθόδων στις στρατιωτικές επιχειρήσεις ονομάστηκαν **Επιχειρησιακή Έρευνα** (Operations Research, OR). Ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα, ή όπως συχνά πλέον αναφέρεται Διοικητική Επιστήμη (Management Science), περιλαμβάνει την επιστημονική προσέγγιση στην λήψη αποφάσεων η οποία επιδιώκει να καθορίσει τον καλύτερο δυνατό σχεδιασμό και να συντονίσει ένα σύστημα (συνήθως) υπό συνθήκες που απαιτούν την κατανομή σπάνιων παραγωγικών πόρων. Μάλιστα, μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο καθιερώθηκε ως νέο επιστημονικό πεδίο και αναπτύχθηκε ραγδαία κυρίως στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής ενώ κατά την διάρκεια των δεκαετιών των 1950 και 1960 αναπτύχθηκαν οι περισσότεροι αλγόριθμοι και μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα. Η μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας εφαρμόζεται σε προβλήματα που αφορούν το πώς να διεξάγεις και να συντονίσεις επιχειρήσεις (δηλαδή δραστηριότητες) εντός οργανισμών. Πιο συγκεκριμένα, οι μεταβολές στο οικονομικό και επιχειρησιακό περιβάλλον, η αύξηση της πολυπλοκότητας, της μεταβλητότητας καθώς και της αλληλεξάρτησης των διαφόρων φαινομένων σε συνδυασμό με την ανάγκη υποστήριξης και σφαιρικής προσέγγισης των προβλημάτων με σκοπό τη συστηματική ανάλυση και την αποτελεσματική λήψη αποφάσεων συνέβαλλαν στην καθιέρωση της φύση του εκάστοτε προβλήματος είναι ουσιαστικά αδιάφορη, Επιχειρησιακής Έρευνας ως ένα απαραίτητο εργαλείο. Η καθώς η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει εφαρμοστεί εκτενώς σε ποικίλους κλάδους όπως για παράδειγμα στη Μεταποίηση, στον κλάδο των Μεταφορών, στις Τηλεπικοινωνίες, στον Χρηματοοικονομικό σχεδιασμό, στις Δημόσιες Υπηρεσίες, στην Υγεία, στις Στρατιωτικές Επιχειρήσεις. Σχετικά με τον δεύτερο όρο του ονόματος Επιχειρησιακή Έρευνα, ήτοι τον όρο Έρευνα, σημαίνει πως, προκειμένου να διερευνηθεί το πρόβλημα για το οποίο χρειαζόμαστε λύση, χρησιμοποιούνται επιστημονικές μέθοδοι. Η διαδικασία ξεκινάει δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στο να παρατηρήσουμε και να σχηματίσουμε το πρόβλημα καθώς και να συλλέξουμε τα απαραίτητα δεδομένα. Το επόμενο βήμα είναι να σχηματίσουμε ένα επιστημονικό (συνήθως μαθηματικό) υπόδειγμα το οποίο σκοπό έχει να αφαιρέσει/περιορίσει την πολυπλοκότητα του πραγματικού κόσμου προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα που έχουμε σχηματίσει. Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι το πρόβλημα είναι μια επαρκώς ακριβής αναπαράσταση των ουσιωδών χαρακτηριστικών της κατάστασης, η οποία μας επιτρέπει να καταλήξουμε σε συμπεράσματα (λύσεις) από αυτό το υπόδειγμα τα οποία θα είναι έγκυρα και για το πρόβλημα του πραγματικού κόσμου. Έπειτα, διεξάγονται κατάλληλα πειράματα προκειμένου να ελέγξουμε αυτή την υπόθεση (περί αντιπροσωπευτικής αναπαράστασης του πραγματικού προβλήματος) και να την προσαρμόσουμε όπου χρειάζεται και τελικά να επιβεβαιώσουμε κάποιες από τις υποθέσεις του υποδείγματος (αυτό το βήμα συχνά αναφέρεται ως επικύρωση του υποδείγματος). Επιπρόσθετα, η Επιχειρησιακή Έρευνα ασχολείται και με την πρακτική εφαρμογή της διοίκησης του οργανισμού. Έτσι, για να επιτύχει τον σκοπό της η Επιχειρησιακή Έρευνα θα πρέπει να παρέχει θετικά και κατανοητά συμπεράσματα στον λήπτη αποφάσεων όποτε αυτά χρειάζονται. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό είναι πως συχνά η Επιχειρησιακή Έρευνα προσπαθεί να βρει την καλύτερη λύση (αναφέρεται και ως βέλτιστη λύση) για το πρόβλημα στο οποίο καλείται να προσφέρει λύση (ενδεχομένως να υπάρχουν πολλαπλές «καλύτερες» λύσεις, όπου σε μια τέτοια περίπτωση επιλέγουμε μία εξ αυτών). Ο σκοπός της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι κάτι παραπάνω από το να βελτιώσει την παρούσα κατάσταση και εντοπίζεται στο να αναγνωρίσει το καλύτερο δυνατό πλάνο δράσης. Η αναζήτηση του βέλτιστου κατέχει εξέχουσα θέση στα πλαίσια της Επιχειρησιακής Έρευνας. Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι αυτό που ονομάζεται «ομαδική προσέγγιση». Είναι προφανές πως δεν είναι δυνατό να υπάρξει μόνο ένα εξειδικευμένο άτομο το οποίο να είναι σε θέση να ανταπεξέλθει σε όλες τις πτυχές των εργασιών ή των προβλημάτων που πρόκειται να αναζητήσουν λύση μέσω των μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας. Κάτι τέτοιο απαιτεί μια ομάδα ανθρώπων που να έχουν διαφορετικές επιστημονικές καταβολές και δεξιότητες. Μια τέτοια λοιπόν ομάδα Επιχειρησιακής Έρευνας χρειάζεται να απαρτίζεται από ανθρώπους οι οποίοι συλλογικά να έχουν υψηλό επίπεδο εκπαίδευσης και κατάρτισης στα μαθηματικά, στην στατιστική και στην θεωρία πιθανοτήτων, στα οικονομικά, στην διοίκηση επιχειρήσεων, στην επιστήμη των υπολογιστών, στην μηχανική, στις συμπεριφοριστικές επιστήμες καθώς και σε εξειδικευμένες τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας. Υπάρχει μια πλειάδα τεχνικών προκειμένου να λύσουμε μαθηματικά προβλήματα που μπορεί να προκύψουν στην πράξη. Ο πιο διακεκριμένος τρόπος μεταξύ αυτών είναι ο Γραμμικός Προγραμματισμός. Εναλλακτικές τεχνικές περιλαμβάνουν τον Ακέραιο Προγραμματισμό, τον Δυναμικό Προγραμματισμό, τον Προγραμματισμό Δικτύων (κατά την τεχνική αυτή το πρόβλημα μπορεί να υποδειγματοποιηθεί ως ένα δίκτυο) και τον Μη Γραμμικό Προγραμματισμό. Μια άλλη κατηγορία συγκροτείται από τις Ουρές Αναμονής και τα Μοντέλα Προσομοίωσης. Πρακτικά, οι αλγόριθμοι (δηλαδή οι μέθοδοι λύσεων για κάθε κατηγορία υποδείγματος) εκτελούνται από εξειδικευμένα λογισμικά που είναι διαθέσιμα σε κάθε ενδιαφερόμενο. Η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει εντυπωσιακό αντίκτυπο στην βελτίωση της αποτελεσματικότητας πολλών οργανισμών, τόσο Δημοσίων όσο και Ιδιωτικών σε παγκόσμιο επίπεδο και έχει συμβάλλει σημαντικά στην αύξηση της παραγωγικότητας των οικονομιών πολλών χωρών. Σήμερα, υπάρχουν πολλές χώρες που συμμετέχουν στην Διεθνή Ομοσπονδία Κοινοτήτων Επιχειρησιακής Έρευνας (International Federation of Operational Research Societies, IFORS) με κάθε χώρα να έχει ιδρύσει και μια εθνική κοινότητα για την Επιχειρησιακή Έρευνα (παραδείγματος χάρη στην Ελλάδα υπάρχει η Ελληνική Εταιρία Επιχειρησιακών Ερευνών -Ε.Ε.Ε.Ε.-που ιδρύθηκε το 1963).

1.2 Επισκόπηση Μεθόδων Επιχειρησιακής Έρευνας

Όπως ήδη αναφέρθηκε παραπάνω, η Επιχειρησιακή Έρευνα δύναται να εφαρμοστεί σε προβλήματα που σχετίζονται με τρόπο διεξαγωγής και συντονισμού των δραστηριοτήτων εντός ενός οργανισμού. Μια τυπική μελέτη στα πλαίσια της Επιχειρησιακής Έρευνας, περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1. προσδιορισμός του προβλήματος και συλλογή των απαραίτητων δεδομένων.
2. σχηματισμός ενός μαθηματικού υποδείγματος που αναπαριστά το πρόβλημα.
3. ανάπτυξη μιας διαδικασίας (με την χρήση ηλεκτρονικού πληροφοριακού συστήματος) για την εξαγωγή λύσης για το πρόβλημα που περιγράφει το μοντέλο στο βήμα 2.
4. έλεγχος του μοντέλου και εκλέπτυνση όπου κρίνεται απαραίτητο.
5. προετοιμασία για την εκάστοτε εφαρμογή του υποδείγματος όπως ορίστηκε από την διοίκηση.
6. εφαρμογή.

Στην συνέχεια, θα περιγράψουμε τα παραπάνω βήματα με την σειρά που παρουσιάστηκαν, ξεκινώντας με την διαδικασία ορισμού του προβλήματος και συλλογής των δεδομένων η οποία περιλαμβάνει τα ακόλουθα:

- τους κατάλληλους στόχους.
- περιορισμούς στο τι μπορεί να συμβεί.
- σχέσεις μεταξύ του υπό μελέτη τμήματος και άλλων τμημάτων του οργανισμού-επιχείρησης.
- πιθανά εναλλακτικά σενάρια δράσης.
- τα χρονικά περιθώρια εντός των οποίων πρέπει να ληφθεί η απόφαση.

Η δεύτερη φάση είναι να σχηματίσουμε το μαθηματικό υπόδειγμα. Ένα μαθηματικό υπόδειγμα ορίζεται από ένα σύστημα εξισώσεων και σχετιζόμενων μαθηματικών εκφράσεων οι οποίες περιγράφουν την ουσία του προβλήματος.

Τα βασικά συστατικά ενός μαθηματικού υποδείγματος είναι τα ακόλουθα:

- **οι μεταβλητές απόφασης:** αν υπάρχουν n ποσοτικοποιήσιμες σχετιζόμενες αποφάσεις, τότε αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν ως μεταβλητές απόφασης δηλαδή, 1 2 , , ,n x x □ x , των οποίων οι τιμές θα πρέπει να προσδιοριστούν.

- **η αντικειμενική συνάρτηση:** αφορά στο κατάλληλο (συνολικό) μέτρο απόδοσης (π.χ. κέρδους ή κόστους) και εκφράζεται μέσω μια μαθηματικής συνάρτησης των μεταβλητών απόφασης.
- **οι περιορισμοί :** αναφερόμαστε σε οποιουσδήποτε περιορισμούς πάνω στις τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές απόφασης και εκφράζονται με μαθηματικό τρόπο την μορφή ανισοτήτων ή/και ισοτήτων.
- **οι παράμετροι του υποδείγματος :** αφορούν στους συντελεστές καθώς και στις τιμές των ποσοτήτων των στο δεξί μέλος των ανισοτήτων, στους περιορισμούς του προβλήματος και στην αντικειμενική συνάρτηση. Οι συντελεστές των περιορισμών αναφέρονται και ως συντελεστές μετατροπής ή τεχνολογικοί συντελεστές, οι ποσότητες στο δεξί μέλος καλούνται διαθέσιμες ποσότητες και οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης στην αντικειμενική συνάρτηση λέγονται συντελεστές κέρδους (ή τιμές πώλησης) αν το πρόβλημα αφορά στην μεγιστοποίηση κέρδους ή συντελεστές κόστους (ή αμοιβές συντελεστών) στην περίπτωση που αντικειμενικός σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής.

Η επόμενη φάση αφορά στην λύση του μαθηματικού υποδείγματος. Το ζητούμενο έγκειται στο να προσδιοριστούν οι τιμές των μεταβλητών απόφασης έτσι ώστε να βελτιστοποιήσουμε (είτε πρόκειται για μεγιστοποίηση ή για ελαχιστοποίηση) την αντικειμενική συνάρτηση υπό το σύνολο των αντίστοιχων περιορισμών. Ένα σημαντικό κομμάτι του καθορισμού του προβλήματος είναι να καθορίσουμε τις κατάλληλες τιμές που θα αντιστοιχίσουμε στις παραμέτρους του υποδείγματος. Κάτι τέτοιο απαιτεί την συλλογή δεδομένων. Ένα ακόμη σημαντικό κομμάτι της λύσης του υποδείγματος, είναι η Ανάλυση Ευαισθησίας που σκοπό έχει να καθορίσει το κατά πόσο ευαίσθητη είναι η βέλτιστη λύση για εύλογες μεταβολές των παραμέτρων του υποδείγματος. Οι κατηγορίες μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας που καταγράφονται στην βιβλιογραφία παρουσιάζονται παρακάτω:

I. **Μαθηματικός Προγραμματισμός** (Γραμμικός Προγραμματισμός, Ακέραιος Προγραμματισμός, Μη-γραμμικός προγραμματισμός)
II. **Δένδρα αποφάσεων** (Decision trees)
III. **Πολυκριτηριακή Ανάλυση** (Multiple Criteria Decision Analysis)
IV. **Ανάλυση δικτύων** (Network flows, PERT, CPM)

V. **Διαχείριση αποθεμάτων** (Inventory control, EOQ)
VI. **Γραμμές (ή Ουρές) αναμονής** (Queuing theory)
VII. **Στοχαστικές Διεργασίες** (Stochastic Processes)
VIII. **Θεωρία παιγνίων** (Game theory)
IX. **Προσομοίωση** (simulation)

Στην παρούσα εργασία δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στον Γραμμικό Προγραμματισμό (Linear Programming) που αποτελεί κομμάτι του μαθηματικού προγραμματισμού και χρησιμοποιείται από πολλούς λήπτες αποφάσεων ιδιωτικών και δημοσίων επιχειρήσεων αλλά και οργανισμών. Πιο συγκεκριμένα, ο Γραμμικός Προγραμματισμός χρησιμοποιείται ευρέως από τους επιχειρησιακούς ερευνητές για την προσέγγιση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων, τις περισσότερες φορές, πόρων σε εναλλακτικές δραστηριότητες με τον καλύτερο δυνατό τρόπο (Winston and Goldberg, 2004). Τέλος, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας πως σε οποιαδήποτε ανάλυση στα πλαίσια οποιασδήποτε μεθοδολογίας, η βέλτιστη λύση που έχουμε προσδιορίσει αφορά μόνο στο (μαθηματικό ή οικονομικό) υπόδειγμα που έχουμε εξειδικεύσει καθώς αυτό αποτελεί μια απλουστευμένη εκδοχή του πραγματικού κόσμου και όχι μια ακριβή αναπαράσταση του διότι κάτι τέτοιο αποδεικνύεται πρακτικά αδύνατο να συμβεί. Σύμφωνα με όσα έχουν λεχθεί μέχρι στιγμής, θα μπορούσαμε να πούμε πως η Επιχειρησιακή Έρευνα, γενικότερα, είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή συστημάτων και διαδικασιών με κύριο σκοπό την βελτιστοποίηση τους και τη λήψη αποφάσεων, ενώ επίσης θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ασχολείται με τη μελέτη συστημάτων ως μαθηματικά μοντέλα.

1.3 Επιχειρησιακή Έρευνα και Ψηφιακή εποχή

Η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει αποδείξει από νωρίς την θετική επίδραση που έχουν οι μέθοδοι της στην βελτίωση της αποτελεσματικότητας όλων των ειδών των οργανισμών αλλά και των οικονομιών στο σύνολο τους, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Σε συνδυασμό με την φρενήρη πρόοδο τόσο των ηλεκτρονικών υπολογιστών όσο και των αλγορίθμων που εφαρμόζουν, ο κλάδος της Επιχειρησιακής Έρευνας ήταν αδύνατο να μην επηρεαστεί και έτσι οι εξελίξεις στην επιστήμη των υπολογιστών και της Πληροφορικής επηρέασαν την ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας σε πολλά επίπεδα. Τα προβλήματα στα οποία καλείται να δώσει λύση ο κλάδος είναι πλέον τόσο μεγάλα σε πλήθος δεδομένων αλλά και απαιτήσεων, που καθιστά την επίλυση των προβλημάτων αυτών αλλά και την εκτέλεση των απαιτούμενων υπολογισμών με το χέρι τις περισσότερες φορές αδύνατη. Έτσι λοιπόν, η ανάπτυξη των υπολογιστών και των βελτιωμένων ικανοτήτων τους να εκτελούν σε ελάχιστο χρόνο αριθμητικούς υπολογισμούς τους οποίους ο άνθρωπος αδυνατεί να συναγωνιστεί, υπήρξε ένα τεράστιο όφελος για τον κλάδο της Επιχειρησιακής Έρευνας. Η επανάσταση στον χώρο ήρθε γύρω στο 1980 με την διείσδυση των προσωπικών υπολογιστών που συνοδεύονταν από εξειδικευμένους αλγορίθμους και πακέτα για την επίλυση των προβλημάτων που άπτοντα του αντικειμένου της Επιχειρησιακής Έρευνας. Το τελευταίο, έκανε ακόμη πιο γνωστή την Επιχειρησιακή Έρευνα σε ακόμη μεγαλύτερο κοινό. Στις μέρες μας, εκατομμύρια ενδιαφερόμενοι σε όλον τον κόσμο έχουν ήδη πρόσβαση σε λογισμικό Επιχειρησιακής Έρευνας. Σε αυτή την κατεύθυνση βρίσκεται και το πνεύμα του παρόντος συγγράμματος. Σε συνδυασμό με την θεωρία του Γραμμικού Προγραμματισμού που πρόκειται να παρουσιαστεί στα κατοπινά κεφάλαια, θα γίνει αναλυτική παρουσίαση και επεξήγηση του τρόπου με τον οποίο ο ενδιαφερόμενος σχετικά με την Επιχειρησιακή Έρευνα χρήστης μπορεί να χρησιμοποιήσει το ελεύθερο λογισμικό/λογισμικό ανοικτής πρόσβασης (ΕΛ/ΛΑΚ ή open source) **R** μαζί με τα εξειδικευμένα πακέτα και βιβλιοθήκες βελτιστοποίησης προκειμένου να ποσοτικοποιήσει και να επιλύσει μέσα σε λίγα λεπτά προβλήματα που με το χέρι απαιτούν επίπονους υπολογισμούς. Το λογισμικό **R** καθώς και όλα τα πακέτα και βιβλιοθήκες που μπορεί κάποιος να χρειαστεί για να εκτελέσει οποιουδήποτε είδους ανάλυση, παρέχονται δωρεάν στον κάθε χρήστη. Τα πλεονεκτήματα της ελεύθερης πρόσβασης στο λογισμικού είναι παραπάνω από εμφανή είτε πρόκειται για διδάσκοντες ή για φοιτητές. Αυτός είναι και ο βασικός λόγος που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε το **R**, το οποίο γίνεται δημοφιλέστερο με το πέρασμα του χρόνου καθώς περισσότεροι άνθρωποι επιλέγουν να το χρησιμοποιήσουν τόσο για λόγους διδασκαλίας όσο και εμπειρικής έρευνας. Επίσης, κάθε ενδιαφερόμενος μπορεί να το εγκαταστήσει σε όσους ηλεκτρονικούς υπολογιστές επιθυμεί χωρίς να χρειάζονται κλειδιά και κωδικοί ενεργοποίησης κάθε φορά.

1.4 Η επιχειρησιακή Έρευνα στον τομέα της Οικονομετρίας

Η μέχρι στιγμής συζήτηση, σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό, συνδέει την προσέγγιση της Επιχειρησιακής Έρευνας με τον κλάδο της Διοίκησης Επιχειρήσεων. Με την πάροδο του χρόνου, πολλά τμήματα Οικονομικών Επιστημών αναδιαμορφώνουν το πρόγραμμα σπουδών που προσφέρουν ώστε να συμπεριλάβουν μεταξύ των προσφερόμενων μαθημάτων την Επιχειρησιακή Έρευνα καθώς αυτό προσφέρει μια εναλλακτική προσέγγιση στον τρόπο που αντιλαμβάνονται τα υποδείγματα οι οικονομολόγοι. Τα υποδείγματα που κατά κύριο λόγο χρησιμοποιούν οι οικονομολόγοι προκειμένου να προσεγγίσουν και στην συνέχεια να ερμηνεύσουν τα οικονομικά φαινόμενα, είναι παραμετρικά. Δηλαδή, μεταξύ των ερμηνευτικών μεταβλητών συμπεριλαμβάνουν και έναν *διαταρακτικό όρο* (η παρουσία του οποίου συνοδεύεται και από συγκεκριμένες υποθέσεις για τον τρόπο που κατανέμεται) ο οποίος διαταράσσει την τέλεια προσαρμογή του υποδείγματος και αφορά σε όλες εκείνες τις μεταβλητές που ενδεχομένως να επηρεάζουν την μεταβλητή που προσπαθούν να εξηγήσουν (καλείται εξαρτημένη μεταβλητή), χρησιμοποιώντας μια δέσμη ερμηνευτικών μεταβλητών, οι οποίες για διαφόρους λόγους είναι τις περισσότερες φορές εκτός του ελέγχου του οικονομολόγου (π.χ. περιορισμένη πρόσβαση σε δεδομένα, αδυναμία μέτρησης κάποιων μεταβλητών κα.) και ως εκ τούτου, δεν έχουν συμπεριληφθεί στο υπόδειγμα. Ο κλάδος της Οικονομικής Επιστήμης που ασχολείται με την μέτρηση των οικονομικών φαινομένων καλείται **Οικονομετρία** και είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό κεφάλαιο στην βασική εκπαίδευση κάθε οικονομολόγου και για τον λόγο αυτό η μελέτη της Οικονομετρίας αποτελεί ένα αντικείμενο που τυγχάνει ιδιαίτερης μεταχείρισης από την πλευρά του προγράμματος σπουδών των τμημάτων Οικονομικών Επιστημών τόσο σε εθνικό όσο και σε παγκόσμιο επίπεδο. Έτσι λοιπόν, στα τμήματα Οικονομικών Επιστημών από την μια πλευρά υπάρχει η προσέγγιση της Οικονομετρίας η οποία προσφέρει μια παραμετρική (στοχαστική) προσέγγιση στην μελέτη των οικονομικών φαινομένων και από την άλλη πλευρά υπάρχει η προσέγγιση της Επιχειρησιακής Έρευνας (που βασίζεται στον Γραμμικό Προγραμματισμό όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω) η οποία είναι μη-παραμετρική καθώς δεν συμπεριλαμβάνει στο μαθηματικό υπόδειγμα κάποιον όρο διατάραξης και ως εκ τούτου, δεν γίνεται κάποια υπόθεση για τον τρόπο κατανομής του. Στο σημείο αυτό, αναδύεται μια βασική διαφορά μεταξύ των οικονομετρικών και των μαθηματικών υποδειγμάτων. Τα πρώτα, συμπεριλαμβάνουν έναν τυχαίο παράγοντα που αντιπροσωπεύει οτιδήποτε ενδεχομένως να έχει επίδραση στο υπόδειγμα αλλά δεν έχει συμπεριληφθεί, ενώ τα δεύτερα, χωρίς να συμπεριλαμβάνουν κάποιον τυχαίο παράγοντα και μόνο με την χρήση σχετικών μεταβλητών και ενός κανόνα συμπεριφοράς (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) προσπαθούν να βελτιστοποιήσουν μια αντικειμενική συνάρτηση. Τα μαθηματικά υποδείγματα συχνά καλούνται και ντετερμινιστικά (deterministic models). Χάρη σε αυτές τις δύο προσεγγίσεις, την παραμετρική και την μη-παραμετρική, οι υποψήφιοι οικονομολόγοι μπορούν να αποκτήσουν μια σφαιρικότερη αντίληψη για τις διαστάσεις της ποσοτικής έρευνας καθώς οι δύο προσεγγίσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω αν και εντελώς διαφορετικές στην βάση τους, μπορούν να προσφέρουν ιδιαίτερα χρήσιμες απαντήσεις στο πλαίσιο των εφαρμογών που μπορούν να εφαρμοστούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Αρχές Γραμμικού Προγραμματισμού

2.1 Εισαγωγή

Ο γραμμικός προγραμματισμός (linear programming) αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο μοντέλο στο χώρο της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και της διοικητικής επιστήμης (management science) γενικότερα. Η μεγάλη επιτυχία που είχαν σε εφαρμογές του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων των ιδιωτικών και δημόσιων επιχειρήσεων και οργανισμών αποδίδεται, από τη μια πλευρά στα επιτεύγματα της έρευνας μαθηματικών και οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και από την άλλη πλευρά στην επαναστατική ανέλιξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας. Κυριαρχεί σήμερα η αντίληψη ότι, τρεις στις τέσσερις εφαρμογές μοντέλων επιχειρησιακής έρευνας σε πραγματικά προβλήματα διοίκησης παραπέμπουν στο γραμμικό προγραμματισμό (Γ.Π.). Ο Γ.Π. χρησιμοποιείται από τους επιχειρησιακούς ερευνητές ή τους αναλυτές προβλημάτων απόφασης για τη προσέγγιση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων πόρων ή μέσων σε εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Πρόκειται για το γνωστό πρόβλημα κατανομής της ‘‘πίτας’’ (resource allocation problem). Προβλήματα απόφασης αυτής της μορφής είναι, για παράδειγμα, η κατανομή εργατικού δυναμικού, τεχνολογικού εξοπλισμού και πρώτων υλών σε διάφορες παραγωγικές διαδικασίες, η κατανομή κεφαλαίου σε διάφορα επενδυτικά προγράμματα, η ανάθεση σε περιορισμένο προσωπικό διαφόρων υπηρεσιών, η κατανομή καλλιεργήσιμης γης σε διάφορες αγροτικές δραστηριότητες, κ.λπ. Επιδιωκόμενο αποτέλεσμα αυτών τον αποφάσεων (κριτήρια απόφασης) μπορεί να αφορά τη μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους από πωλήσεις, την ελαχιστοποίηση του συνολικού κίστους παραγωγής, τη μεγιστοποίηση της απασχόλησης, την ελαχιστοποίηση των αρνητικών επιπτώσεων στο περιβάλλον, κ.λπ.

2.2 Ορισμός Γραμμικού προγραμματισμού

Ο όρος γραμμικός χρησιμοποιείται γιατί όλες οι μαθηματικές σχέσεις του προβλήματος είναι γραμμικές. Γραμμική είναι η σχέση κατά την οποία, αν πολλαπλασιάσουμε π.χ. τον αριθμό των υπαλλήλων (ή των μηχανών) μιας επιχείρησης με έναν αριθμό η παραγωγή των αγαθών της επιχείρησης θα πολλαπλασιασθεί με τον αριθμό αυτό. Αν θέλουμε να παραστήσουμε με γεωμετρικό τρόπο τις παραπάνω γραμμικές σχέσεις θα έχουμε την εμφάνιση ευθειών γραμμών. Ο όρος προγραμματισμός όπως χρησιμοποιείται στην Επιχειρησιακή Έρευνα δεν πρέπει να συγχέεται με τον προγραμματισμό ηλεκτρονικών υπολογιστών. Στην ποσοτική ανάλυση και στο επιστημονικό management ο όρος προγραμματισμός περιλαμβάνει την ανάπτυξη και την επίλυση μέσω μαθηματικών μοντέλων, διάφορων επιχειρησιακών προβλημάτων. Ο ρόλος του ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι πάντως πολύ σπουδαίος στην επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού αλλά και γενικότερα στην επίλυση προβλημάτων με χρήση των μεθοδολογιών της Επιχειρησιακής Έρευνας. Πολλά από τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτουν στην πράξη είναι τόσο πολύπλοκα που η επίλυσή τους είναι δυνατή μόνο μέσω ειδικών προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή.

2.3 Το πρόβλημα των περιορισμένων Πόρων

Κάθε επιχειρηματική δραστηριότητα, ανεξάρτητα από τον απαιτούμενο όγκο εργασίας ή από τη σπουδαιότητά της, απαιτεί για την υλοποίησή της λίγους ή περισσότερους πόρους. Αυτοί οι πόροι μπορούν να είναι πολλών ειδών ανάλογα με τη φύση και τις ιδιαιτερότητες των δραστηριοτήτων των οποίων την πραγματοποίηση εξυπηρετούν. Πολλές αποφάσεις που λαμβάνονται σε έναν οργανισμό ή σε μία επιχείρηση αφορούν την αποτελεσματική αξιοποίηση και χρήση των πόρων της επιχείρησης. Ως πόροι μιας επιχείρησης εννοούνται ο μηχανικός εξοπλισμός της επιχείρησης, οι εργαζόμενοι, τα επενδεδυμένα κεφάλαια και τα κεφάλαια κίνησης, οι διαθέσιμοι χώροι της επιχείρησης, οι πρώτες ύλες και άλλα. Οι πόροι της επιχείρησης είναι δυνατόν να διατεθούν για την παραγωγή των προϊόντων (όπως οι πρώτες ύλες και ο εξοπλισμός) ή υπηρεσιών (όπως ο χρόνος των εργαζομένων), τη διάθεση και διανομή των προϊόντων, τη διαφήμιση και διάφορες επενδυτικές αποφάσεις της επιχείρησης (π.χ. κεφάλαια). Οι σύγχρονες εξαιρετικά ανταγωνιστικές συνθήκες, η πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει τις περισσότερες επιχειρηματικές κινήσεις, οι συνεχώς αυξανόμενες ανάγκες και πάνω από όλα η πρόνοια της ίδιας της φύσης έχουν καταστήσει τους κάθε είδους πόρους περιορισμένους. Πριν καν υλοποιηθεί ένα επιχειρησιακό σχέδιο, διαπιστώνεται ότι πολλά από τα μέσα είναι διαθέσιμα σε περιορισμένο βαθμό. Το γεγονός αυτό καθιστά ουσιώδες το πρόβλημα της ορθολογικής διαχείρισής τους, προκειμένου να επιτευχθεί το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

2.4 Διατύπωση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Οι βασικές προϋποθέσεις που απαιτούνται για να παραστήσουμε ένα πρόβλημα με μαθηματικό μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού είναι οι εξής:

1. **Η γραμμικότητα**: τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί να είναι γραμμικής μορφής.

2. **Η προσθετικότητα**: οι ποσότητες ενός μέσου παραγωγής που καταναλώνονται στις επιμέρους δραστηριότητες να μπορούν να προστεθούν.

3. **Η διαιρετικότητα**: οι μεταβλητές των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού να μπορούν να πάρουν όλες τις τιμές του συνόλου R+0.

4. **Η ύπαρξη μίας μόνο αντικειμενικής συνάρτησης** για την αξιολόγηση μιας στρατηγικής.

5. **Προσδιορισμένοι συντελεστές**: όλοι οι συντελεστές ενός μοντέλου Γραμμικού Προγραμματισμού θεωρούνται ως γνωστές σταθερές.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι ένα χρήσιμο βοήθημα για την αντιμετώπιση πολλών περίπλοκων προβλημάτων αποφάσεων. Η <<ποιότητα>> των αποφάσεων αυτών, όμως, εξαρτάται απόλυτα από την ακρίβεια της περιγραφής της κατάστασης που μελετάτε και από την καταλληλότητα των προϋποθέσεων ή απλουστεύσεων που επιβάλλει ο μελετητής, δηλαδή από την ακρίβεια της διατύπωσης του προβλήματος. Όπως κάθε άλλο μαθηματικό πρότυπο, έτσι και ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μια αφαίρεση μέσα από την οποία εντοπίζονται και απομονώνονται οι παράγοντες εκείνοι που θεωρούνται πιο σημαντικοί και που θα μας βοηθήσουν στην απόκτηση μιας λύσης. Έτσι, η διατύπωση ενός προβλήματος απαιτεί μια πλήρη κατανόηση της πραγματικής κατάστασης που μελετάται, τον εντοπισμό των σημαντικών μεταβλητών και σχέσεων του προβλήματος και την επακριβή μαθηματική τους έκφραση μέσα από την αντικειμενική συνάρτηση σκοπού και τους περιορισμούς. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής συνήθως πρέπει να γίνουν διάφορες απλουστεύσεις ή προσεγγίσεις της πραγματικότητας είτε γιατί η πραγματικότητα δεν είναι απόλυτα κατανοητή ή γνωστή, είτε γιατί η επακριβής μαθηματική τους απεικόνιση περιπλέκει ιδιαίτερα την περιγραφή, και περιορίζει τη δυνατότητα εφικτής λύσης. Οι απλουστεύσεις αυτές επόμενο είναι να απομακρύνουν τη λύση που θα αποκτήσουμε από την πραγματική λύση του προβλήματος. Ο εντοπισμός, λοιπόν, των κατάλληλων προσεγγίσεων για την απόκτηση μιας λύσης, αλλά, και η μετέπειτα εκτίμηση των επιδράσεων αυτών των προσεγγίσεων στα αποτελέσματα είναι ουσιώδους σημασίας στη χρήση του Γραμμικού Προγραμματισμού. Η ευρύτητα των εφαρμογών του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι στην κυριολεξία τεράστια. Η διαδικασία αντιμετώπισης προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να συνοψισθεί στα ακόλουθα βασικά βήματα:

- Διαμόρφωση του προβλήματος.
- Κατάστρωση στη μορφή του πρότυπου μοντέλου.
- Διαδικασία επίλυσης.

- Ερμηνεία και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων

Η πρώτη, και ίσως και η πιο δύσκολη διαδικασία για την ορθή αντιμετώπιση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι η διαμόρφωσή του. Αυτή αποτελεί την αρχική ‘ εκ των ων ουκ άνευ’ διαδικασία και περιλαμβάνει μια σειρά από επιμέρους ενέργειες όπως:

1. Η αναγνώριση των βασικών χαρακτηριστικών του συγκεκριμένου προβλήματος και η διαπίστωση (εφόσον βέβαια πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις) ότι είναι δυνατό να αντιμετωπιστεί με εργαλείο το Γραμμικό Πρόβλημα.

2. Η πλήρης και σε βάθος κατανόηση του προβλήματος τόσο όσον αφορά στα υπάρχοντα δεδομένα, όσο και στον τελικό αντικειμενικό στόχο (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση κάποιου συγκεκριμένου κριτηρίου αποτελεσματικότητας).

3. Ο λεπτομερής καθορισμός των μεταβλητών απόφασης.

4. Η πιστή αναπαράσταση της πραγματικής κατάστασης με τη σύνταξη των περιορισμών δομής και της αντικειμενικής συνάρτησης.

Δυστυχώς δεν υπάρχει η παραμικρή τυποποίηση στον τρόπο διαμόρφωσης των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Κάθε πρόβλημα παρουσιάζει τις δικές του ιδιαιτερότητες σε σημείο που να καθίσταται σχεδόν μοναδικό και ως εκ τούτου απαιτεί για την επίλυσή του μία ξεχωριστή διαμόρφωση. Εδώ όμως έγκειται το μεγάλο ενδιαφέρον που παρουσιάζει η διαμόρφωση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού όχι μόνο ως το πρώτο και σπουδαιότερο βήμα για την εφαρμογή της μεθοδολογίας επίλυσης, αλλά κυρίως ως μία διαδικασία που βασίζεται αποκλειστικά στη λογική και στην εμπειρία. Οι γνώσεις που χρησιμεύουν για την εμπεριστατωμένη αντιμετώπιση των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού προέρχονται από όλους σχεδόν τους κλάδους των θετικών επιστημών. Το μεγαλύτερο όμως «όπλο» αποτελεί η εμπειρία στη διαδικασία διαμόρφωσης που μπορεί να αποκτηθεί μόνο με την επίλυση όσο το δυνατόν περισσότερων προβλημάτων. Το Γραμμικό Πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης (βελτιστοποίησης) μιας γραμμικής συνάρτησης , οι άγνωστες μεταβλητές της οποίας υπόκεινται σε γραμμικούς περιορισμούς. Η γενική μορφή του Γραμμικού Προβλήματος μπορεί να διατυπωθεί όπως παρακάτω:

Min (ή max) z = c1x1 + c2x2 + ……. + cNxN

Με τους περιορισμούς:

a11x1 + a12x2 + …..+ a1NxN ≤ b1

a21x1 + a22x2 + …...+ a2NxN ≤ b2

. . . .

. . . .

. . . .

aM1x1 + aM2x2 +……+ amNxN ≤ bM

xj ≥ 0, (j = 1,2,….., n)

όπου: cJ, aIJ, bI E R (I = 1,2,….., M και J = 1,2,……, N)

και xJ είναι οι άγνωστες μεταβλητές του προβλήματος που πρέπει να υπολογιστούν ώστε η συνάρτηση z να λάβει την ελάχιστη ή την μέγιστη τιμή της αντίστοιχα και να ικανοποιούνται οι περιορισμοί του προβλήματος. Οι μεταβλητές xj ονομάζονται μεταβλητές απόφασης και η μεταβλητή z ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση. Οι περιορισμοί xj > 0 ονομάζονται φυσικοί περιορισμοί ή περιορισμοί μη αρνητικότητας αφού οι μεταβλητές απόφασης εκφράζουν στην πράξη φυσικές ποσότητες. Οι υπόλοιποι περιορισμοί ονομάζονται τεχνολογικοί επειδή προκύπτουν από το ίδιο το πρόβλημα. Οι πιο γνωστές μορφές του Γραμμικού Προβλήματος είναι:

- Κανονική ή ανισοτική μορφή, όπου όλοι οι τεχνολογικοί περιορισμοί είναι ανισοτικοί, δηλαδή < ή >.

- Τυποποιημένη ή ισοτική μορφή, όπου όλοι οι τεχνολογικοί περιορισμοί είναι ισοτικοί.

2.5 Χαρακτηριστικά Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Όλα τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού αποβλέπουν στη μεγιστοποίηση του κέρδους ή ελαχιστοποίηση του κόστους αντίστοιχα. Το κέρδος ή το κόστος δίνεται από μια γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών του προβλήματος η οποία αποκαλείται αντικειμενική συνάρτηση. Κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού περιλαμβάνει μια σειρά μεταβλητών που αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που πρέπει να προσδιορισθούν μέσω της επίλυσης του προβλήματος ώστε να επιτευχθεί η μεγιστοποίηση ή η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Σε όλα τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού υπάρχουν περιορισμοί οι οποίοι περιορίζουν τη δυνατότητα της απεριόριστης αύξησης της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης (δηλαδή του κέρδους). Όταν πρόκειται για ελαχιστοποίηση του κόστους οι περιορισμοί του προβλήματος περιορίζουν το βαθμό στον οποίο η ελάττωση του κόστους είναι εφικτή. Σε όλα τα προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις, εκ των οποίων θα επιλεγεί η βέλτιστη. Για παράδειγμα αν μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα θα μπορούσε να αφιερώσει όλο της το δυναμικό στην παραγωγή ενός προϊόντος ή να το μοιράσει μεταξύ δύο προϊόντων ή μεταξύ όλων. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με διαφορετικές αναλογίες. Βασικός σκοπός του Γραμμικού Προγραμματισμού είναι η επιλογή της βέλτιστης λύσης. Επίσης, για την εφαρμογή της μεθοδολογίας του Γραμμικού Προγραμματισμού απαιτούνται ορισμένες παραδοχές. Κατ'αρχήν υποθέτουμε ότι οι συντελεστές των περιορισμών καθώς και οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι σταθεροί και δεν υπόκεινται σε τυχαίες διακυμάνσεις. Υποθέτουμε επίσης ότι η παραγωγή είναι συνεχής. Δηλαδή είναι δυνατή η παραγωγή οποιασδήποτε ποσότητας ακέραιας ή κλασματικής. Επίσης υποθέτουμε πως οι παραπάνω συντελεστές ισχύουν αναλογικά και όχι αθροιστικά. Π.χ. αν για την παραγωγή μιας μονάδος απαιτούνται 3 ώρες οι 20 μονάδες απαιτούν 60 ώρες. Επίσης, αν για μια μονάδα προϊόντος απαιτούνται 4 ώρες εργασίας και μια μονάδα ενός άλλου προϊόντος απαιτούνται 3 ώρες, τότε για να παράγουμε μια μονάδα από κάθε προιόν θα χρειασθούμε 7 ώρες. Δηλαδή, οι περιορισμοί του προβλήματος είναι γραμμικοί.

2.6 Επίλυση Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού

Στη συνέχεια δίνονται μερικές πολύ βασικές έννοιες που αφορούν την επίλυση των γραμμικών προβλημάτων.

1. Εφικτά σημεία ή εφικτές λύσεις ονομάζονται τα σημεία (ή οι λύσεις) που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς του γραμμικού προβλήματος.

2. Εφικτή περιοχή είναι το σύνολο (F) των εφικτών σημείων (ή λύσεων).

3. Βέλτιστο σημείο ή βέλτιστη λύση είναι το εφικτό σημείο (λύση) του γραμμικού προβλήματος (x ε F) για το οποίο ισχύει

cT x ≤ cT y για κάθε y ε F για min γραμμικό πρόβλημα

cT x ≥ cT y για κάθε y ε F για max γραμμικό πρόβλημα.

4. Βέλτιστη τιμή είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του γραμμικού προβλήματος.

5. Απεριόριστο είναι ένα εφικτό πρόβλημα για το οποίο υπάρχει ακολουθία χ1ο, χ2ο,… εφικτών σημείων για τα οποία οι αντίστοιχες αντικειμενικές τιμές τείνουν στο –∞ (+∞) για προβλήματα min (max).

Σύμφωνα με *το **Θεμελιώδες Θεώρημα*** του Γραμμικού Προγραμματισμού ένα γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο ή εφικτό. Αν είναι εφικτό τότε είναι βέλτιστο ή απεριόριστο. Επομένως για κάθε γραμμικό πρόβλημα μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατηγορία του με κριτήριο ‘τη δυνατότητα επίλυσής του’, σε μορφή ψευδοκώδικα, όπως φαίνεται παρακάτω :

Αν (F = Ø) τότε
το γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο
αλλιώς
το γραμμικό πρόβλημα είναι εφικτό
αν (∃ βέλτιστη τιμή) τότε
το γραμμικό πρόβλημα είναι βέλτιστο
αλλιώς
το γραμμικό πρόβλημα είναι απεριόριστο

Λύση ενός γραμμικού προβλήματος είναι ο προσδιορισμός της κατηγορίας του, δηλαδή αν είναι αδύνατο, βέλτιστο ή απεριόριστο. Επιπλέον αν είναι βέλτιστο πρέπει να προσδιοριστεί τουλάχιστον ένα βέλτιστο σημείο του. Επομένως ο Γραμμικός Προγραμματισμός κατασκευάζει μεθόδους επίλυσης (αλγόριθμους) που υπολογίζουν τουλάχιστον ένα βέλτιστο σημείο.

2.7 Μορφές Π.Γ.Π

Για την επίλυση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού θα πρέπει αυτό να είναι σε τυποποιημένη μορφή. Αυτό σημαίνει ότι : όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος να είναι σε μορφή ισότητας, όλες οι μεταβλητές να είναι θετικές και το πρόβλημα να είναι του τύπου max z. Ο μετασχηματισμός των τεχνολογικών περιορισμών από ανισότητες σε ισότητες γίνεται με την πρόσθεση ή αφαίρεση μεταβλητών που ονομάζονται χαλαρές μεταβλητές στο αριστερό μέλος των ανισοτήτων. Σε περίπτωση που ένας περιορισμός είναι ανισότητα της μορφής $\leq$ (μικρότερο ή ίσο), τότε προστίθεται στο αριστερό μέλος του περιορισμού μια μη αρνητική μεταβλητή η οποία ονομάζεται ελλειμματική χαλαρή μεταβλητή. Για παράδειγμα αν δίνεται ο παρακάτω ανισοτικός περιορισμός :

$$x1 - 2x2 + x3 + 3x4 \leq 8$$

τότε μετά την προσθήκη της χαλαρής μεταβλητής $x5 \geq 0$ προκύπτει ο αντίστοιχος ισοτικός περιορισμός:

$$x1 - 2x2 + x3 + 3x4 + x5 = 8$$

Σε περίπτωση που ένας περιορισμός είναι ανισοτικός της μορφής $\geq$ (μεγαλύτερο ή ίσο), τότε αφαιρείται από το αριστερό μέλος του περιορισμού μια μη αρνητική μεταβλητή η οποία ονομάζεται πλεονασματική χαλαρή μεταβλητή. Για παράδειγμα αν δίνεται ο παρακάτω ανισοτικός περιορισμός :

$$2x1 + x2 - x3 + x4 \geq 4$$

τότε μετά την αφαίρεση της χαλαρής μεταβλητής $x6 \geq 0$ προκύπτει ο αντίστοιχος ισοτικός περιορισμός :

$$2x1 + x2 - x3 + 2x4 - x6 = 4$$

Και τις πλεονάζουσες αλλά και τις ελλειμματικές χαλαρές μεταβλητές θα τις καλούμε από δω και στο εξής χαλαρές μεταβλητές.

Ο μετασχηματισμός των τεχνολογικών περιορισμών από ισότητες σε ανισότητες γίνεται με τη μετατροπή κάθε ισοτικού περιορισμού με δύο ανισοτικούς περιορισμούς, δηλαδή αν δίνεται ο παρακάτω ισοτικός περιορισμός :

$$x1 + x2 - x3 + 2x4 - x5 = 4$$

τότε προκύπτουν οι επόμενοι δύο ανισοτικοί περιορισμοί

$$x1 + x2 - x3 + 2x4 - x5 \geq 4$$
$$x1 + x2 - x3 + 2x4 - x5 \leq 4.$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός όμως έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του πλήθους των περιορισμών του προβλήματος με συνέπεια να προκύπτει ένα σημαντικό υπολογιστικό μειονέκτημα από αυτή την μετατροπή. Γι’αυτό καταφεύγουμε στην εξής λύση. Επειδή $x1 \geq 0$ λύνουμε ένα ισοτικό περιορισμό ως προς x1 και αφαιρούμε τη μεταβλητή x1 από την αντικειμενική συνάρτηση και από όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. Η ενέργεια αυτή πραγματοποιείται για κάθε ισοτικό περιορισμό του γραμμικού προβλήματος. Για παράδειγμα ο παρακάτω ισοτικός περιορισμός :

$$x1 - x2 + x3 - 2x4 = 5,$$

αν λυθεί ως προς x1 γίνεται :

$$x1 = x2 - x3 + 2x4 + 5$$

και επειδή $x1 \geq 0$ έχουμε :

$$x2 - x3 + 2x4 \geq -5.$$

Έτσι προκύπτει ένα γραμμικό πρόβλημα με περιορισμούς σε ανισοτική μορφή και με λιγότερες μεταβλητές απόφασης. Επίσης πρέπει να τονισθεί και είναι γνωστό από τα μαθηματικά ότι οποιοσδήποτε ανισοτικός περιορισμός $\leq$ ή $\geq$ μπόρει να μετασχηματιστεί σε $\geq$ ή $\leq$ αντίστοιχα αν πολλαπλασιάσουμε με -1 και τα δύο μέλη του περιορισμού. Συμπερασματικά είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι γνωστοί ως μετασχηματισμοί ισοδυναμίας και ως εκ’ τούτου αν το αρχικό γραμμικό πρόβλημα είναι αδύνατο ή βέλτιστο ή απεριόριστο τότε και το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα που προκύπτει από το μετασχηματισμό θα είναι αντίστοιχα αδύνατο ή βέλτιστο ή απεριόριστο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : Η Μέθοδος SIMPLEX

3.1 Εισαγωγή

Η επίλυση ενός προβλήματος με μόνο δύο μεταβλητές γίνεται με τη βοήθεια της γραφικής μεθόδου όπου αφού ορίσουμε την περιοχή των εφικτών λύσεων, προσπαθούμε να βρούμε ποιο από τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων δίνει το μεγαλύτερο κέρδος. Η γραφική προσέγγιση μας δίνει την ευκαιρία να κατανοήσουμε τις βασικές αρχές των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Σε πραγματικές όμως εφαρμογές του Γραμμικού Προγραμματισμού ο αριθμός των μεταβλητών είναι πολύ μεγαλύτερος από δύο μεταβλητές και επομένως η γραφική προσέγγιση επίλυσης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί. Σε πραγματικές εφαρμογές ο αριθμός των μεταβλητών και των περιορισμών των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού ανέρχεται σε δεκάδες, εκατοντάδες και μερικές φορές ακόμα και σε χιλιάδες. Χρειαζόμαστε επομένως μια συστηματική μέθοδο επίλυσης των προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού η οποία να είναι δυνατόν να υλοποιηθεί μέσω καταλλήλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού οποιουδήποτε μεγέθους. Η συστηματική αυτή μέθοδος ονομάζεται ***μέθοδος Simplex***. Ποια είναι η προσέγγιση που ακολουθεί η μέθοδος Simplex; Σε βασικές γραμμές είναι ανάλογη με την προσέγγιση που ακολουθούμε στη γραφική μέθοδο όπου εκεί εξετάζουμε όλα τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων. Η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι δυνατόν να επιτευχθεί μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων. Η μέθοδος

Simplex εξετάζει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μόνο στα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων, με ένα συστηματικό αλγεβρικό τρόπο.Η διαδοχική εξέταση των ακραίων σημείων γίνεται με έναν επαναληπτικό τρόπο, δηλαδή, με το να επαναλαμβάνεται το ίδιο σύνολο των διαδικασιών και αλγεβρικών πράξεων σε διαδοχικά βήματα έως ότου επιτύχουμε να εντοπίσουμε τη βέλτιστη λύση. Κάθε βήμα της μεθόδου Simplex αντιστοιχεί στην επιλογή ενό ςακραίου σημείου της περιοχής των εφικτών λύσεων. Σε κάθε νέο βήμα το επόμενο ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να αυξάνεται (ή αντίστοιχα μειώνεται αν η αντικειμενική συνάρτηση αφορά την ελαχιστοποίηση του κόστους) και επομένως σταδιακά πλησιάζουμε προς τη βέλτιστη λύση. Η μέθοδος Simplex εκτός από τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης, δηλαδή τις τιμές των μεταβλητών και το αντίστοιχο βέλτιστο κέρδος ή κόστος, μας παρέχει επίσης πλήθος άλλων πληροφοριών οικονομικής φύσεως τις οποίες δεν είναι δυνατόν να παράγουμε με άλλο τρόπο.

3.2 Μαθηματικό πρότυπο της Μεθόδου Simplex

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου Simplex – πέρα από το μικρό αριθμό επαναληπτικών βημάτων που απαιτούνται – είναι η δυνατότητα πλήρους τυποποίησής της σε τέτοιο βαθμό, ώστε να καθίσταται εύκολη τόσο η απομνημόνευσή της για την εκτέλεσή της με χαρτί και μολύβι, όσο και η σύνταξη ενός προγράμματος Η/Υ , ο οποίος αποτελεί πλέον το συνηθέστερο μέσο επίλυσης προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού. Πριν ωστόσο την εκτέλεση αυτής καθαυτής της κυρίως μεθοδολογίας της Simplex είναι απαραίτητη η διεξαγωγή ορισμένων προκαταρκτικών ενεργειών, οι οποίες ουσιαστικά μετατρέπουν τη γραφική μέθοδο σε μια εύχρηστη καθαρά υπολογιστική διαδικασία. Η προπαρασκευαστική αυτή οργάνωση του μαθηματικού προτύπου του Γραμμικού Προγραμματισμού μπορεί να συνοψισθεί στα ακόλουθα στάδια:

1. Μετατροπή της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών δομής και μη αρνητικότητας στη μορφή που υπαγορεύει το μέλλον του Γραμμικού Προγραμματισμού.

2. Αλλαγή της φοράς της ανισότητας όσων περιορισμών δομής απαιτείται, έτσι ώστε τα δεξιά μέλη όλων των περιορισμών να είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Επομένως αν το δεξιό μέλος ενός περιορισμού είναι αρνητικό χρειάζεται η αλλαγή των πρόσημων και της φοράς της αντίστοιχης ανισότητας (πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με -1).
3. Μετατροπή των περιορισμών δομής που αποτελούν ανισότητες ή ανισοησότητες σε ισοδύναμες ισότητες. Αυτό επιτυγχάνεται με τη προσθήκη (πρόσθεση αν η φορά της ανισότητας είναι $<$ ή $\leq$ ή αφαίρεση αν η φορά είναι της μορφής $>$ ή $\geq$) νέων μη αρνητικών μεταβλητών, οι οποίες λέγονται ψευδομεταβλητές. Για παράδειγμα στο περιορισμό δομής :

$$3x1 - 5x2 + 2x3 \leq 13$$

χρειάζεται η πρόσθεση της ψευδομεταβλητής x4, επομένως αυτός να μετατραπεί στην ισότητα :

$$3x1 - 5x2 + 2x3+x4 = 13$$

Με τον ίδιο τρόπο ο περιορισμός :

$$4x1 + x2 - 7x3 > 8$$

αφαιρώντας τη ψευδομεταβλητή x5 μετατρέπεται στην ισότητα :

$$4x1 + x2 - 7x3 - x5 = 8.$$

Εξυπακούεται ότι και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις οι μεταβλητές x4 και x5 δεν περιλαμβάνονται στις αρχικές μεταβλητές απόφασης του αντίστοιχου προτύπου.

4. Δημιουργία στο αριστερό τμήμα του πίνακα των περιορισμών δομής ενός μοναδιαίου πίνακα με τη πρόσθεση κατάλληλου αριθμού νέων μη αρνητικών μεταβλητών, οι οποίες ονομάζονται τεχνητές μεταβλητές. Μοναδιαίος πίνακας είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ισούνται με τη μονάδα ενώ όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του ισούνται με μηδέν. Για την ορθή εφαρμογή της μεθόδου Simplex απαιτείται η δημιουργία στο αριστερό μέλος του συνόλου των περιορισμών δομής ενός πλήρους μοναδιαίου πίνακα. Οι στήλες του επιτρέπουν να είναι διατεταγμένες σε οποιαδήποτε σειρά μεταξύ τους. Όπως είναι φανερό, υπάρχει πιθανότητα μία ή περισσότερες από τις στήλες του επιθυμητού μοναδιαίου πίνακα να προϋπάρχουν προερχόμενες είτε από τις αρχικές μεταβλητές απόφασης είτε

από τις ψευδομεταβλητές που προστέθηκαν στους περιορισμούς στο προηγούμενο στάδιο της οργάνωσης του μαθηματικού προτύπου. Επομένως ο αριθμός των τεχνητών μεταβλητών που πρέπει να προστεθούν ποικίλλει ανάλογα με τη φορά και τη φύση των περιορισμών, πάντως είναι σχεδόν πάντα σημαντικά μικρότερος από το πλήθος των γραμμών του απαιτούμενου μοναδιαίου πίνακα.

Ο τρόπος δημιουργίας του μοναδιαίου πίνακα γίνεται περισσότερο σαφής και κατανοητός από το ακόλουθο παράδειγμα:

$$\max Z = 2x1 - 3x2$$

με τους περιορισμούς δομής

$$\begin{aligned} &7x1 \qquad < 80 \ (1) \\ &2x1\text{-}3x2 < 20 \ (2) \\ &6x1+5x2 = 45 \ (3) \end{aligned}$$

και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας $x1,x2 \geq 0$

Στους περιορισμούς (1) και (2) προστίθενται οι ψευδομεταβλητές x3 και x4 αντίστοιχα, οπότε το σύστημα των περιορισμών καθίσταται:

$$\begin{aligned} &7x1 &&+ x3 && &&= 80 \\ &2x1 - 3x2 && &&+ x4 &&= 20 \\ &6x1 - 5x2 && && &&= 45 \end{aligned}$$

και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας $x1,x2,x3,x4,x5 \geq 0$ όπου x1,x2 οι μεταβλητές απόφασης x3,x4 οι ψευδομεταβλητές και x5 η τεχνητή μεταβλητή. Ο μοναδιαίος πίνακας έχει σχηματισθεί στις τρεις τελευταίες στήλες του πίνακα των περιορισμών δομής.

3.3 Μαθηματικές αρχές της μεθόδου Simplex

Η μέθοδος Simplex είναι μια κλασική αλγεβρική επαναληπτική διαδικασία, κατά την εφαρμογή της οποίας δεν απαιτούνται από το χρήστη ιδιαίτερες θεωρητικές γνώσεις. Ωστόσο η γνώση των βασικών αρχών από τις οποίες διέπεται είναι απαραίτητη, τόσο σε αυτή καθαυτή την ερμηνεία και κατανόησή της, όσο και στην κριτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της καθώς και στην κατανόηση της έννοιας και της σημασίας της ανάλυσης ευαισθησίας των προβλημάτων του Γραμμικού Προγραμματισμού. Οι σπουδαιότεροι ορισμοί και αρχές, από τις οποίες διέπεται η μέθοδος Simplex είναι οι ακόλουθοι:

- **Επαυξημένη λύση** είναι μια λύση του προβλήματος με τους περιορισμούς στη μορφή των αρχικών ανισοτήτων, η οποία έχει προσαυξηθεί με τις αντίστοιχες τιμές των ψευδομεταβλητών έτσι ώστε οι περιορισμοί να πάρουν τη μορφή εξισώσεων. Η επαυξημένη λύση περιέχει n + m μεταβλητές.

- **Βασική λύση** είναι μια ‘επαυξημένη’ ακραία λύση. Κάθε βασική λύση περιέχει συνολικά m + n μεταβλητές. Από αυτές οι n μεταβλητές ονομάζονται μη βασικές μεταβλητές και είναι ίσες με μηδέν. Οι τιμές των υπολοίπων m μεταβλητών, οι οποίες ονομάζονται βασικές μεταβλητές, αποτελούν τη συμβιβαστή λύση του συστήματος των m εξισώσεων του προβλήματος με όλους τους περιορισμούς σε μορφή εξισώσεων, αφού τεθούν οι μη βασικές μεταβλητές ίσες με μηδέν. Αυτή η βασική λύση είναι η επαυξημένη ακραία λύση. Οι n εξισώσεις που την προσδιορίζουν είναι αυτές που καθορίζονται από τις αντίστοιχες μεταβλητές.

- **Βασική δυνατή λύση** είναι μια επαυξημένη ακραία δυνατή λύση. Βασική δυνατή λύση είναι μια βασική λύση, η οποία ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων που σχηματίζουν οι περιορισμοί (όταν αυτοί μετατραπούν σε ισότητες) και ταυτόχρονα όλες της οι m βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές. Μια βασική δυνατή λύση ονομάζεται εκφυλισμένη, όταν έστω και μια από αυτές τις m μεταβλητές είναι ίση με μηδέν.

3.4 Παράδειγμα Γραμμικού Προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex

Πρόβλημα

Μια επιχείρηση παράγει έπιπλα τραπέζια και καρέκλες.. Για την δημιουργία ενός τραπεζιού χρειάζεται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο ενώ για την παρασκευή μίας καρέκλας απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 2 ώρες στο βαφείο. Τα μηνιαία κέρδη της επιχείρησης από τα τραπέζια είναι 14.000 ευρώ ενώ για τις καρέκλες είναι 10.000 ευρώ. Η επιχείρηση μπορεί και διαθέτει 960 ώρες ξυλουργείο και 400 ώρες βαφείου.

Λύση

Έχουμε:

X1 = ο αριθμός τραπεζιών που θα παραχθούν

X2 = ο αριθμός καρεκλών που θα παραχθούν

Μεγιστοποίηση συνολικού κέρδους : $14000X1 + 10000X2$

Με περιορισμούς : $8X1 + 8X2 \leq 960$ περιορισμός στο ξυλουργείο

$4X1 + 2X2 \leq 400$ περιορισμός στο βαφείο

$X1, X2 \geq 0$

3.4.1 Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες

Το πρώτο βήμα της μεθόδου Simplex επιβάλει τη μετατροπή όλων των περιορισμών που διατυπώνονται με ανισότητες σε ισότητες. Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται με τη χρήση μεταβλητών περιθωρίου. Οι μεταβλητές περιθωρίου αντιπροσωπεύουν αχρησιμοποίητους πόρους στη διαδικασία μεγιστοποίησης του κέρδους. Στην περίπτωση του παραδείγματος που εξετάζουμε ορίζουμε δύο μεταβλητές περιθωρίου, μία για κάθε περιορισμό, ως εξής :

S1 = Ώρες ξυλουργείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή τραπεζιών και καρεκλών

S2 = Ώρες βαφείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν.

Για παράδειγμα αν παράγουμε 70 τραπέζια και 40 καρέκλες, οι ώρες ξυλουργείου που απαιτούνται είναι 8*70+8*40=880. Σε αυτή τη περίπτωση η τιμή της μεταβλητής S1 είναι 80 ώρες, δηλαδή 960 διαθέσιμες ώρες – 880 που θα χρησιμοποιηθούν. Ο όρος μεταβλητές περιθωρίου έχει την έννοια ότι οι τιμές αυτών των μεταβλητών συμβολίζουν τη διαφορά μεταξύ της αριστερής πλευρά στης ανισότητας (απαιτούμενη ποσότητα) και της αντίστοιχης δεξιάς πλευράς (διαθέσιμη ποσότητα). Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται όλοι οι διαθέσιμοι πόροι ενός περιορισμού τότε η αντίστοιχη μεταβλητή περιθωρίου έχει τη τιμή μηδέν.

Οι περιορισμοί του προβλήματος με την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου γράφονται ως εξής :

$8X1 + 8\chi2 + S1 = 960$ Περιορισμός στο ξυλουργείο

$4X1 + 2X2 + S2 = 400$ Περιορισμός στο βαφείο

ή αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς έχουμε :

$8X1 + 8X2 + 1S1 + 0S2 = 960$ Περιορισμός στο ξυλουργείο

$4X1 + 2X2 + 0S1 + 1S2 = 400$ Περιορισμός στο βαφείο

Οι μεταβλητές περιθωρίου δεν συνεισφέρουν στο κέρδος της επιχείρησης, επομένως μπορούμε να τις συμπεριλάβουμε στην αντικειμενική συνάρτηση με αντίστοιχους συντελεστές κέρδους μηδέν. Επομένως, η αντικειμενική συνάρτηση μετά την προσθήκη και των μεταβλητών περιθωρίου γράφεται ως εξής :

Μεγιστοποίηση $14.000\ X1 + 10.000\ X2 + 0S1 + 1S2$

Οι πραγματικές μεταβλητές Χ1, Χ2 αντιπροσωπεύουν ποσότητες παραγωγής των δύο προϊόντων, ενώ οι μεταβλητές περιθωρίου S1, S2 ώρες παραγωγής που δεν απορροφούνται στη παραγωγή των ποσοτήτων Χ1 και Χ2.

3.4.2 Αλγεβρικός Προσδιορισμός Λύσεων Γραμμικού Προγραμματισμού

Ας εξετάσουμε τους περιορισμούς του προβλήματος όπως διαμορφώθηκε μετά την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου. Έχουμε λοιπόν, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με τέσσερις μεταβλητές. Εφ' όσον ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων, υπάρχουν πολλές λύσεις του συστήματος. Ένας απλός τρόπος εύρεσης λύσεων είναι να θέσουμε 2 από τις μεταβλητές ίσες με μηδέν και να λύσουμε το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει των 2 άλλων μεταβλητών με 2 εξισώσεις για να προσδιορίσουμε τις τιμές τους. Μια εύκολη λύση είναι να θέσουμε τις μεταβλητές X1=0 και X2=0. Η λύση που προκύπτει σα αυτήν την περίπτωση είναι S1=960 και S2=400. Είναι ευνόητο ότι η λύση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστική διότι αντιπροσωπεύει την παραγωγή 0 τεμαχίων από τραπέζια και καρέκλες. Με μηδενική παραγωγή κανένα από τις διαθέσιμες ώρες παραγωγής δεν χρησιμοποιούνται. Γι' αυτό επομένως οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου είναι S1=960 ώρες και S2=400ώρες ίσες δηλαδή με τις αρχικές διαθέσιμες ώρες παραγωγής. Η μέθοδος Simplex όπως προαναφέρανε είναι μια επαναληπτική μέθοδος η οποία επαναλαμβάνει τα ίδια βήματα έως ότου προσδιορίσουμε τη βέλτιστη λύση. Σε κάθε βήμα της μεθόδου Simplex παίρνουμε μια νέα εφικτή λύση που είναι καλύτερη από την προηγούμενη. Σαν αρχική λύση της μεθόδου Simplex χρησιμοποιούμε την X1=0 και X2=0, S1=960 και S2=400. Η συγκεκριμένη λύση είναι η λύση που μπορούμε να παράγουμε εύκολα για οποιοδήποτε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή λύση είναι προφανώς 0. Αν τοποθετήσουμε τους συντελεστές των μεταβλητών των 2 περιορισμών και της αντικειμενικής συνάρτησης σε ένα πίνακα θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Αρχικός Πίνακας Simplex

Συντ .Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1	8	8	1	0	960

0	S2	4	2	0	1	400
	Zj	0	0	0	0	0
	Cj - Zj	14.000	10.000	0	0	

Κάθε πίνακας Simplex αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος. Ο αρχικός πίνακας Simplex αντιστοιχεί στη λύση S1=960 και S2=400 και επομένως X1=0 και X2=0. Όπως παρατηρούμε ο πίνακας Simplex εκτός των συντελεστών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς του προβλήματος, περιλαμβάνει και κάποιες άλλες πληροφορίες, όπως η στήλη που γράφει “ βασικές μεταβλητές’’ και οι σειρές Zj και Cj-Zj. Οι επιπλέον αυτές πληροφορίες είναι απαραίτητες για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex.

3.4.3 Βασικές μεταβλητές και μη βασικές

Σ’ ένα πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού οι μεταβλητές που έχουν μη μηδενικές τιμές ονομάζονται βασικές μεταβλητές, ενώ οι υπόλοιπες μη βασικές. Ο αριθμός των βασικών μεταβλητών σε κάθε πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος. Η πρώτη στήλη του πίνακα Simplex περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές. Στη δεύτερη στήλη τοποθετούμε τις βασικές μεταβλητές S1, S2. Οι επόμενες στήλες αποτελούν το κυρίως κομμάτι του πίνακα Simplex και τα στοιχεία του αντιστοιχούν στους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος, ενώ τα στοιχεία της τελευταίας στήλης αντιστοιχούν στις τιμές των περιορισμών. Οι τιμές των βασικών μεταβλητών δίνονται στην τελευταία στήλη. Δηλαδή η τιμή 960 αντιστοιχεί στην S1 και η τιμή 400 στην S2. Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι μηδέν. Δηλαδή X1=0 και X2=0. Η πρώτη σειρά του πίνακα (Cj) περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους όλων των μεταβλητών.

3.4.4 Οικονομική Ερμηνεία του Πίνακα Simplex –Συντελεστές Ανταλλαγής

Τα στοιχειά κάθε στήλης του πίνακα Simplex είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές των περιορισμών του προβλήματος. Για παράδειγμα η πρώτη στήλη του κυρίως πίνακα (8,4) περιέχει τους συντελεστές του X1 στον πρώτο και δεύτερο περιορισμό αντίστοιχα. Τα στοιχεία της στήλης X1 καλούνται συντελεστής ανταλλαγής μεταξύ της X1 και των βασικών μεταβλητών του πίνακα, δηλαδή των S1 και των S2 και ερμηνεύονται ως εξής: Για να αυξήσουμε την τιμή της X1 κατά μία μονάδα (για να παράγουμε δηλαδή ένα τραπέζι) απαιτείται να μειώσουμε τις τιμές των S1 και S2 κατά 8 και 4 μονάδες αντίστοιχα (δηλαδή να ελαττώσουμε τις μη διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο και στο βαφείο κατά 8 και 4 αντίστοιχα). Η ερμηνεία αυτή είναι λογική αν σκεφτούμε ότι για την παραγωγή ενός τραπεζιού απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο και 4 ώρες στο βαφείο. Αντίστοιχη ερμηνεία μπορούμε να δώσουμε και για τα στοιχεία της στήλης X2. Η στήλη της S1 είναι (1,0) ενώ η στήλη της s2 είναι (0,1) . Η σειρά Cj περιέχει τους συντελεστές κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα στοιχεία αυτής της σειράς μπορεί να ερμηνευθούν ως η μικτή αύξηση που προκύπτει στο συνολικό κέρδος αν η τιμή κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα. Έτσι μία μονάδα της X1 αποφέρει επιπλέον κέρδος 14.000e. Τα στοιχεία της σειράς Zj δηλώνουν το κατά πόσο θα μειωθεί το συνολικό κέρδος αν η τιμή της κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα. Πως όμως δικαιολογείται η μείωση του κέρδους; Ας πάρουμε τη μεταβλητή X1. Για να αυξηθεί η X1 κατά μία μονάδα θα πρέπει να ελαττωθεί η S1 κατά 8 μονάδες και η S2 κατά 4 μονάδες. Γενικώς η μείωση κάποιων άλλων μεταβλητών ώστε να αυξηθεί η X1 θα μπορούσε να έχει επιπτώσεις στο συνολικό κέρδος. Αν και οι άλλες μεταβλητές είχαν συνεισφορά στο κέρδος όπως αυτό ορίζεται στην αντικειμενική συνάρτηση, τότε τυχόν μείωση των τιμών τους θα είχε ως αποτέλεσμα και μείωση του κέρδους. Η μείωση των S1 και S2 στην προκειμένη περίπτωση δεν έχουν καμία επίπτωση στο συνολικό κέρδος γιατί οι συντελεστές αυτοί είναι 0. Η τελευταία γραμμή του πίνακα Cj-Zj είναι η γραμμή που μας δίνει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος (αύξηση κέρδους – μείωση κέρδους) στην περίπτωση που κάθε μία από τις μη βασικές μεταβλητές του προβλήματος αυξηθεί κατά μία μονάδα. Η τελευταία αυτή γραμμή του πίνακα Simplex καθορίζει και κατά πόσο η δεδομένη λύση του πίνακα είναι βέλτιστη ή όχι. Αρνητικές τιμές Cj-Zj δηλώνουν ότι στην περίπτωση που η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί, θα υπάρχει μείωση του κέρδους. Αντίθετα θετικές τιμές Cj-Zj δηλώνουν ότι μπορεί να υπάρξει βελτίωση του κέρδους αν αυξηθεί η τιμή της συγκεκριμένης μεταβλητής με θετικό Cj-Zj. Αν βέβαια οι τιμές των Cj-Zj είναι αρνητικές ή μηδεν τότε η λύση που έχουμε είναι βέλτιστη.

3.4.5 Επαναληπτική Διαδικασία Simplex

Η μέθοδος Simplex είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος. Βασίζεται δηλαδή σε μία σταθερή επαναλαμβανόμενη διαδικασία με την οποία από ένα δεδομένο πίνακα Simplex με κατάλληλους αριθμητικούς υπολογισμούς προχωρούμε στον επόμενο, ο οποίος αντιστοιχεί σε μία καλύτερη λύση έως ότου προσδιορισθεί η βέλτιστη λύση. Η επαναληπτική αυτή διαδικασία περιλαμβάνει 5 βήματα. Η βασική φιλοσοφία της μεθόδου Simplex είναι ότι σε κάθε βήμα αντικαθιστούμε μία από τις βασικές μεταβλητές με μία μη βασική μεταβλητή με στόχο να βελτιωθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Βήμα 1

Επιλέγουμε τη μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στις βασικές μεταβλητές. Η επιλογή γίνεται με βάση τη συνεισφορά κάθε μη βασικής μεταβλητής στο συνολικό κέρδος, η οποία φαίνεται στα στοιχεία της σειράς Cj-Zj. Η μεταβλητή με το μεγαλύτερο θετικό Cj-Zj είναι αυτή που «μπαίνει» στη βάση. Αν όλες οι μεταβλητές έχουν τιμές Cj-Zj μικρότερες ή ίσες με μηδέν τότε η λύση που έχουμε είναι βέλτιστη. Τη στήλη που αντιστοιχεί στη μεταβλητή που μπαίνει στη βάση την ονομάζουμε **οδηγό στήλη**.

Βήμα 2

Εφ' όσον μία από τις μη βασικές μεταβλητές «μπαίνει» στη βάση, μία από τις βασικές μεταβλητές θα πρέπει να «φύγει». Βρίσκουμε τη μεταβλητή της βάσης η οποία θα αντικατασταθεί από τη νέα μεταβλητή που επιλέχθηκε στο βήμα 1 ως εξής:
Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα Simplex με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της οδηγού στήλης (σε περίπτωση αρνητικής ή μηδενικής τιμής το αγνοούμε). Το μικρότερο θετικό κλάσμα αντιστοιχεί στη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί. Τη σειρά της μεταβλητής που θα αντικατασταθεί την ονομάζουμε **οδηγό σειρά.** Η τομή της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη μας δίνει το **οδηγό στοιχείο.**

Βήμα 3

Υπολογίζουμε νέες τιμές για τον οδηγό σειρά. Για να βρούμε αυτές τις νέες τιμές της οδηγού σειράς διαιρούμε όλα τα στοιχεία με το οδηγό στοιχείο.

Βήμα 4

Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τις υπόλοιπες σειρές του πίνακα Simplex. Οι νέες τιμές κάθε σειράς εκτός της οδηγού σειράς υπολογίζονται ως εξής: Νέα σειρά = Προηγούμενη Σειρά – Στοιχείο οδηγού στήλης * Νέα οδηγό σειρά

Βήμα 5

Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για τη σειρά Cj-Zj

3.4.6 Ο Δεύτερος Πίνακας Simplex

Αφού αναπτύξαμε τα πέντε βήματα με τα οποία υπολογίζουμε τα στοιχεία του επόμενου πίνακα Simplex κάθε φορά, τώρα θα εφαρμόσουμε την εφαρμογή τους στο συγκεκριμένο μας παράδειγμα. Στόχος είναι να βρούμε μία νέα λύση η οποία θα μας δώσει μεγαλύτερο κέρδος. Το κέρδος με την υπάρχουσα λύση του αρχικού πίνακα Simplex είναι 0. Η αρχική λύση είναι X1 = 0, X2 = 0, S1 = 960, S2 = 400. Η επιλογή για το ποια μεταβλητή θα είναι αυτή που θα συμπεριληφθεί στη βάση θα γίνει μεταξύ των X1 και X2 διότι αυτές είναι οι μη βασικές μεταβλητές. Επιλέγουμε τη μεταβλητή με τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά Cj-Zj. Η μεταβλητή X1 έχει τιμή Cj-Zj=14.000 ενώ η X2 έχει τιμή 10.000. Επομένως επιλέγουμε την X1 γιατί για κάθε μονάδα από την X1 που θα παραχθεί το κέρδος θα αυξηθεί κατά 14.000. Αντίθετα η επιλογή της X2 θα οδηγούσε σε μικρότερη αύξηση μόνο κατά 10.000 ευρώ ανά μονάδα της X2. Επομένως η στήλη της X1 είναι η οδηγός στήλη

2ος Πίνακας Simplex

Συντ .Κέρδους	Cj→	***14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1	8	8	1	0	960
* 0	S2	**4	2	0	1	400
	Zj	0	0	0	0	****0
	Cj - Zj	14.000	10.000	0	0	

* Η σειρά όλη οριζόντια είναι η οδηγός σειράς

** Το 4 είναι το οδηγό στοιχείο

*** Η σειρά όλη κάθετα είναι η οδηγός στήλης

**** Το κέρδος

Μετά την επιλογή της X1 για να συμπεριληφθεί στη νέα βάση, θα πρέπει να δούμε ποια από τις ήδη μεταβλητές S1 και S2 θα αντικατασταθεί από την X1. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης έχουμε:

Για την S1: 960 ώρες ξυλουργείου / 8 ώρες ανά τραπέζι = 120 τραπέζια

Για την S2: 400 ώρες βαφείου / 4 ώρες ανά τραπέζι = 100 τραπέζια

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητή S2 που αντιστοιχεί στο μικρότερο κλάσμα θα αντικατασταθεί από την X1. Η μεταβλητή X1 επιλέγεται γιατί κάθε αύξηση της X1 κατά μια μονάδα, παραγωγή ενός τραπεζιού, αυξάνει το κέρδος κατά 14.000 ευρώ. Άρα λογικά θα επιθυμούσαμε να αυξήσουμε την τιμή X1 όσο το δυνατόν περισσότερο γίνεται. Επειδή όμως αύξηση της ποσότητας X1 σημαίνει ανάλωση πόρων, είναι λογικό ότι η αύξηση της X1 μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο εφόσον υπάρχουν διαθέσιμοι πόροι. Για κάθε μονάδα της X1 που παράγουμε πρέπει να μειώσουμε την S1 κατά 8 μονάδες και εφόσον έχουμε μόνο 960 μονάδες διαθέσιμες από την S1 τότε η ανώτερη τιμή για την X1 είναι 960/8=120. Ομοίως για κάθε μονάδα X1 πρέπει να μειώσουμε την S2 κατά 4 μονάδες. Εφόσον έχουμε 400 μονάδες της S2 διαθέσιμες η μεγαλύτερη ποσότητα της X1 που μπορεί να παραχθεί είναι 400/4=100 μονάδες. Αν θέσουμε X1=100 τότε θα χρησιμοποιηθεί όλη η ποσότητα των 400 ωρών της S2 και επομένως η τιμή της S2 θα γίνει 0 και δεν είναι πλέον βασική μεταβλητή. Αφού αποφασίσαμε πλέον ότι η μεταβλητή X1 θα αντικαταστήσει την τιμή S2 θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές για το δεύτερο πίνακα Simplex. Θα αντικαταστήσουμε τον οδηγό σειρά διαιρώντας όλα τα στοιχεία της με το 4 που είναι το οδηγό στοιχείο. Άρα η νέα οδηγός σειρά θα γίνει :

:

4/4=**1** 2/4=**1/2** 0/4=**0** 1/4=**1/4** 400/4=**100**

Επομένως ο δεύτερος πίνακας Simplex θα έχει την εξής μορφή:

Συντ. Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1					
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj					
	Cj-Zj					

Όπως βλέπουμε η X1 αντικατέστησε την S2 στη βάση. Η τιμή της X1 είναι 100 μονάδες, ενώ ο συντελεστής κέρδους της X1 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών. Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τη σειρά που αντιστοιχεί στην S1 καθώς και τις νέες τιμές στις σειρές Cj-Zj. Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά S1 θα κάνουμε τις εξής πράξεις:

Νέα σειρά = Προηγούμενη Σειρά – Στοιχείο οδηγού στήλης * Νέα οδηγό σειρά

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά S1 (πίνακας 2) είναι το 8.

	X1	X2	S1	S2	Bi
Προηγ. Τιμές Si	8	8	1	0	960
Οδ. Στοιχ * νέα οδ.σειρά	-8*1	-8*(1/2)	-8*0	-8*(1/4)	-8*100
Νέες τιμές S1	=0	=4	=1	=-2	=160

Επομένως ο νέος πίνακας Simplex μετά τον υπολογισμό της σειράς S1 θα έχει την εξής μορφή:

Συντ. Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1	0	4	1	-2	160
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj					0
	Cj-Zj					

Ο νέος πίνακας Simplex έχει και αυτός δύο μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές S1 (1.0) και X1 (0,1). Βασικά οι αλγεβρικές πράξεις που εκτελέσαμε για να πάρουμε τις νέες τιμές του πίνακα Simplex είχαν ακριβώς αυτό σαν στόχο. Το να μετατρέψουμε δηλαδή την στήλη που αντιστοιχεί στην νέα βασική μεταβλητή X1 σε μοναδιαία στήλη. Η διαίρεση με το οδηγό στοιχείο έδωσε την τιμή 1 στην θέση της τομής της σειράς X1 με τη στήλη X1. Ο πολλαπλασιασμός των νέων τιμών της οδηγού σειράς με το 8 και η αφαίρεση του γινομένου από τη σειρά S1 είχε σαν αποτέλεσμα να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης X1. Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τις σειρές Zj και Zj-Cj. Η σειρά Zj αντιστοιχεί στη μείωση του κέρδους στην περίπτωση που επιλέξουμε μια από τις μη βασικές μεταβλητές να συμπεριληφθεί στη βάση . Στο σημείο αυτό μπορούμε να εξηγήσουμε καλύτερα την έννοια των τιμών της σειράς Zj. Η νέα λύση που προέκυψε είναι X1=100 τεμάχια τραπεζιών, X2=0 τεμάχια καρεκλών, S1=160 ώρες και S2=0 ώρες. Δηλαδή παράγονται 100 τραπέζια, καθόλου καρέκλες με περίσσευμα 160 ώρες στο ξυλουργείο και 0 ώρες στο βαφείο. Αν θέλουμε να εξετάσουμε τη περίπτωση παραγωγής και ορισμένης ποσότητας καρεκλών αυτό σημαίνει ότι θέλουμε να αυξήσουμε την τιμή της X2 από 0 που είναι τώρα σε μια θετική ποσότητα, δηλαδή να τη συμπεριλάβουμε στη βάση αντικαθιστώντας κάποια από τις μεταβλητές S1 ή X1. Για να αυξηθεί η τιμή της X2 κατά μία μονάδα απαιτείται να μειώσουμε την S1 κατά 4 και την X1 κατά 1/2 μονάδες. Δηλαδή να παράγουμε ½ λιγότερα τραπέζια (X1) και να μειώσουμε κατά 4 ώρες τις διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο (S1). Η μείωση της X1 κατά ½ θα ελευθερώσει ορισμένες ώρες. Συγκεκριμένα αφού το 1 τραπέζι απαιτεί 8 ώρες ξυλουργείου και 4 ώρες βαφείου η μείωση της παραγωγής τραπεζιών κατά ½ θα έχει ως αποτέλεσμα την απελευθέρωση 4 ωρών ξυλουργείου και 2 ωρών βαφείου. Αν πάρουμε επίσης και 4 ώρες από αυτές που περίσσευαν στο ξυλουργείο θα έχουμε συνολικά 8 ώρες ξυλουργείου και 2 ώρες βαφείου που είναι ακριβώς οι ώρες που χρειάζονται για την παραγωγή 1 καρέκλας. Από την πλευρά των τιμών τώρα, η παραγωγή 1 καρέκλας θα έχει θετική συνεισφορά 10.000 ευρώ στα κέρδη (σειρά Cj). Παράλληλα όμως θα έχει και αρνητικό αποτέλεσμα γιατί η αύξηση της παραγωγής καρεκλών θα γίνει σε βάρος της παραγωγής των τραπεζιών. Εφόσον θα πρέπει να μειώσουμε την παραγωγή των τραπεζιών κατά ½ θα έχουμε απώλεια κερδών 7.000 ευρώ, αφού το κέρδος για κάθε τραπέζι είναι 14.000 ευρώ. Η τιμή της Zj που αντιστοιχεί στη στήλη X2 είναι 7.000 ευρώ. Για να υπολογίσουμε τις τιμές της σειράς Zj πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές ανταλλαγής στη στήλη κάθε μιας μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα ως εξής:

Συντ. Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσό-τητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1	0	4	1	-2	160
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	0*0	0*4	0*1	0*(-2)	
		+14000*1	+14000*1/2	+14000* 0	+14000* 1/4	
		=14.000	=7.000	=0	=3500	
	Cj-Zj	0	3.000	0	-3.500	

Οι τιμές της σειράς Cj-Zj προκύπτουν από την αφαίρεση των τιμών της σειράς Zj από τη σειρά Cj. Η αύξηση της X2 κατά 1 μονάδα (παραγωγή μιας καρέκλας) θα έχει σαν αποτέλεσμα καθαρή αύξηση των κερδών κατά 3.000 ευρώ. Τέλος, ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα Simplex(πίνακας 6) υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.

Κέρδος = 160*0 + 100*14.000 = 1.400.000 Μετά την ολοκλήρωση όλων των υπολογισμών ο **Δεύτερος Πίνακας Simplex** έχει ως εξής:

Τελικός Δεύτερος Πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσό-τητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
0	S1	0	4	1	-2	160
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	14.000	7.000	0	3.500	1.400.000
	Cj-Zj	0	3.000	0	-3.500	

3.4.7 Ο Τρίτος Πίνακας Simplex

Εφόσον η σειρά Cj-Zj του δεύτερου πίνακα Simplex περιλαμβάνει και θετικές τιμές η λύση που μας δίνει ο πίνακας αυτός δεν είναι η βέλτιστη λύση. Επομένως θα πρέπει να επαναλάβουμε τα πέντε βήματα του αλγόριθμου Simplex για να πάρουμε τον τρίτο κατά σειρά πίνακα. Η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στη βάση είναι η X2 γιατί είναι η μόνη με θετική τιμή 3.000 ευρώ στη σειρά Cj-Zj. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε καρέκλα που θα παράγουμε το κέρδος θα αυξηθεί κατά 3.000 ευρώ. Επομένως η στήλη της X2 είναι η οδηγός στήλη.

Αρχικός Τρίτος Πίνακας Simplex

Συντ .Κέρδους	Cj→	***14. 000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
** 0	S1	0	*4	1	-2	160
14.000	X1	1	1/2	0	1/4	100
	Zj	14000	7000	0	3500	1.400.000
	Cj - Zj	0	3.500	0	-3.500	

* Το 4 είναι το οδηγό στοιχείο

** Ολόκληρη η σειρά οριζόντια είναι η οδηγός σειρά

*** Ολόκληρη η κάθετη σειρά καλείται οδηγός στήλη

Μετά την επιλογή της X2 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να δούμε ποια από τις ήδη βασικές μεταβλητές S1 και X1 θα αντικατασταθεί. Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης ώστε να προσδιορίσουμε τη μέγιστη ποσότητα καρεκλών που μπορεί να παραχθεί, έχουμε: Για την S1: 160 ώρες ξυλουργείου / 4 ώρες ανά καρέκλα = 40 καρέκλες Για την X1: 100 τραπέζια / ½ τραπέζια ανά καρέκλα = 200 καρέκλες. Αυτό σημαίνει ότι η S1 θα αντικατασταθεί από την X2. Αφού ορίσαμε ότι η μεταβλητή X2 θα αντικαταστήσει την S1, θα πρέπει να υπολογίσουμε ξανά τις τιμές του τρίτου πίνακα (πίνακας 8). Θα αντικαταστήσουμε τη σειρά οδηγό. Το οδηγό στοιχείο είναι το 4. Διαιρούμε επομένως όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 4. Άρα η νέα οδηγός σειρά είναι:

0/4=**0** 4/4=**1** 1/4=**1/4** -2/4=**-1/2** 160/4=**40**

Η X2 αντικατέστησε την S1 στη βάση της. Η τιμή της X2 είναι 40 μονάδες, ενώ ο συντελεστής κέρδους της X2 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών. Τώρα μένει να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τη σειρά που αντιστοιχεί στην X1 καθώς και τις νέες τιμές στις σειρές Zj και Cj-Zj. Για να υπολογίσουμε τη νέα σειρά X1 θα κάνουμε τις εξής πράξεις όπως και πριν:

(Προηγούμενες τιμές σειράς X1) – (στοιχείο οδηγού στήλης σειράς X1) * νέες τιμές οδηγού σειράς = Νέες τιμές σειράς X1

Το στοιχείο της οδηγού στήλης που αντιστοιχεί στη σειρά X1 είναι το 1/2. Επομένως οι νέες τιμές της οδηγού σειράς αφού πολλαπλασιασθούν με 1/2 θα αφαιρεθούν από τις τιμές της σειράς X1. Έτσι έχουμε λοιπόν:

Συντ .Κέρδους	Cj→	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X1	X2	S1	S2	Bi
10.000	X2	0	1	1/4	-1/2	40
14.000	X1	1	0	-1/8	1/2	80
	Zj					
	Cj-Zj					

Παρατηρούμε ότι ο νέος πίνακας Simplex έχει δύο μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές X2 (η στήλη 1,0) και X1 (η στήλη 0,1). Μένει τώρα να υπολογίσουμε τις τιμές για τις σειρές Zj και Cj-Zj. Για να βρούμε τις τιμές της σειράς Zj πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές μετατροπής για κάθε μεταβλητή με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα. Οι τιμές της σειράς Cj-Zj προκύπτουν από την αφαίρεση της σειράς Zj από τη σειρά Cj. Τέλος ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα Simplex υπολογίζεται με την άθροιση των γινόμενων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.

ΚΕΡΔΟΣ = 40*10.000 + 80*14.000 = 1.520.000

Τελικός Πίνακας Simplex

Συντ. Κερδ.	Cj	14.000	10.000	0	0	Ποσότητα
↓	→	X1	X2	S1	S2	Bi
10.000	X2	0	1	1/4	-1/2	40
14.000	X1	1	0	-1/8	1/2	80
	Zj	14.000	10.000	750	2.000	1.520.000
	Cj-Zj	0	0	-750	-2.000	

Ο παραπάνω πίνακας (πίνακας 12) είναι ο τελικός πίνακας Simplex για το παράδειγμα που αναλύουμε. Παρατηρούμε ότι η σειρά Cj-Zj δεν περιέχει θετικά στοιχεία, συνεπώς δεν είναι δυνατόν να υπάρξει περαιτέρω αύξηση του κέρδους.Οι βασικές μεταβλητές είναι οι X1 και X2. Οι τιμές τους δίνονται στις αντίστοιχες θέσεις της τελευταίας στήλης. Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι μηδέν.

Η βέλτιστη λύση είναι:

X1 = 80 τραπέζια S1 = 0 ώρες διαθέσιμες στο ξυλουργείο

X2 = 40 καρέκλες S2 = 0 ώρες διαθέσιμες στο βαφείο

Ο συνδυασμός αυτός της παραγωγής δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος το οποίο ανέρχεται σε 1.520.000 ευρώ. Αν δούμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα από τους τρεις διαδοχικούς πίνακες Simplex παρατηρούμε τα εξής:

Αρχικός Πίνακας Simplex

Λύση

X1 = 0 τραπέζια

X2 = 0 καρέκλες

S1 = 960 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου

S2 = 400 διαθέσιμες ώρες βαφείου

Κέρδος 0

Δεύτερος Πίνακας Simplex

Λύση

X1 = 100 τραπέζια

X2 = 0 καρέκλες

S1 = 160 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου

S2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου

Κέρδος 1.400.000 ευρώ

Τρίτος Πίνακας Simplex

Λύση

X1 = 80 τραπέζια

X2 = 40 καρέκλες

S1 = 0 διαθέσιμες ώρες ξυλουργείου

S2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείο

Κέρδος 1.520.000 ευρώ

Κεφάλαιο 4ο : Πειραματικό Μέρος

Στο πειραματικό μέρος της εργασίας παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex , χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο Matlab. Ο αλγόριθμος αποτελείται από μια συνάρτηση που ονομάζεται **nma_simplex.m(A,b,c,false)** η οποία χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex παράγει τη βέλτιστη λύση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού που βρίσκονται σε τυποποιημένη μορφή. Αυτή η μορφή του προβλήματος είναι η εξής :

min $J(x) = c^T x$ (αντικειμενική συνάρτηση)

υπό τους περιορισμούς

$Ax=b$ (περιορισμοί σε τυποποιημένη μορφή)

$x>=0$ (πρόσημο των μεταβλητών)

Εφόσον το πρόβλημα απαιτείται να είναι σε τυποποιημένη μορφή όλοι οι περιορισμοί είναι σε μορφή ισότητας. Συνεπώς έχουμε ήδη προσθέσει /αφαιρέσει τις απαιτούμενες περιθώριες μεταβλητές. Η συνάρτηση παράγει το τελικό πίνακα (tableau) του αλγορίθμου το οποίο περιέχει την βέλτιστη λύση x^*. Υπάρχει η δυνατότητα εμφανίσουμε και τους ενδιάμεσους πίνακες που προκύπτουν από τη μέθοδο simplex αλλάζοντας το τελευταίο όρισμα της συνάρτησης από false σε true. Οι πίνακες που δέχεται η συνάρτηση ως ορίσματα είναι :

c^T : ανάστροφος πίνακας των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης

A : πίνακας των συντελεστών των μεταβλητών στους περιορισμούς

b : πίνακας των σταθερών όρων των περιορισμών

flag (false/true) : σημαία που καθορίζει την μορφή των αποτελεσμάτων

4.1 Παράδειγμα Εφαρμογής

Να επιλυθεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού :
minimize $z = 2x_1+3x_2$

υπό τους περιορισμούς

$4x_1 + 2x_2 \geq 12$

$x_1 + 4x_2 \geq 6$

$x_i \geq 0$

με τη χρήση του αλγορίθμου simplex.

Προκειμένου να καλέσουμε τη συνάρτηση nma_simplex θα πρέπει αρχικά να φέρουμε το πρόβλημα σε τυπική μορφή. Αυτό σημαίνει ότι η αντικειμενική συνάρτηση θα πρέπει να είναι της μορφής minimize η οποία είναι. Επίσης θα πρέπει όλοι οι περιορισμοί να είναι σε μορφή ισότητας. Για να το πετύχουμε , εφόσον οι περιορισμοί είναι "≥" αφαιρούμε δύο επιπλέον μεταβλητές (περιθώριες) , μία σε κάθε περιορισμό. Έτσι οι περιορισμοί γίνονται : $4x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 12$ και $x_1 + 4x_2 + 0x_3 - x_4 = 6$. Οι περιθώριες μεταβλητές θεωρούμε ότι είναι θετικές. Συνεπώς το πρόβλημα σε τυπική μορφή γίνεται :

minimize $z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$

υπό τους περιορισμούς

$4x1 + 2x2 - x3 + 0x4 = 12$

$x1 + 4x2 +0x3 - x4 = 6$

$x_i \geq 0$

Σε αυτή τη φάση είμαστε έτοιμοι να καλέσουμε τη συνάρτηση nma_simplex με τα παρακάτω ορίσματα :

c^T = [2 3 0 0] , A = [4 2 -1 0; 1 4 0 -1] , b = [12 6]

Με τα ορίσματα αυτά καλούμε τη συνάρτηση nma_simplex(A,b,c,true) και η λύση είναι :

```
>>>>Current tableau [phase one]
     4     2    -1     0     1     0    12
     1     4     0    -1     0     1     6
     0     0     0     0     1     1     0

**********************
Current tableau [phase one]
     4     2    -1     0     1     0    12
     1     4     0    -1     0     1     6
    -5    -6     1     1     0     0     0

pivot row is 2
current basic feasible solution is
         0
    1.5000
         0
         0
    9.0000
         0

**********************
```

```
Current tableau [phase one]
    3.5000         0   -1.0000    0.5000    1.0000   -0.5000    9.0000
    0.2500    1.0000         0   -0.2500         0    0.2500    1.5000
   -3.5000         0    1.0000   -0.5000         0    1.5000    9.0000

pivot row is 1
current basic feasible solution is
    2.5714
    0.8571
         0
         0
         0
         0

**********************
Current tableau [phase one]
    1.0000         0   -0.2857    0.1429    0.2857   -0.1429    2.5714
         0    1.0000    0.0714   -0.2857   -0.0714    0.2857    0.8571
         0         0         0         0    1.0000    1.0000   18.0000

**********************
```

```
**********************
Current tableau [phase two]
    1.0000         0   -0.2857    0.1429    2.5714
         0    1.0000    0.0714   -0.2857    0.8571
    2.0000    3.0000         0         0         0


ans =

    1.0000         0   -0.2857    0.1429    2.5714
         0    1.0000    0.0714   -0.2857    0.8571
    2.0000    3.0000         0         0         0

>>
```

Η λύση του προβλήματος βρίσκεται στην τελευταία στήλη του πίνακα ans δηλαδή είναι :

$\mathbf{x_1 = 2.5714}$ και $\mathbf{x_2 = 0.8571}$ και για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης έχουμε :

$\mathbf{z^* = 2*2.5714 + 3*0.8571 = 7.7441}$

Σημειώνουμε ότι εφόσον επιλέξαμε την τιμή true για την σημαία , η συνάρτηση εμφανίζει και όλα τα ενδιάμεσα βήματα (πίνακες) έως και τον τελικό πίνακα.

4.2 Κώδικας Matlab

```
function tab = nma_simplex(A,b,c,debug)
%function [A,b,c]=nma_simplex(A,b,c)
%This function implments the simplex matrix algorithm.
%It accepts A_eq and b_eq and c as defined in standard
%documentation and generates all the simplex tableaus, and
%returns the final tableau which the user can read from it the
%minimum value of the objective function and the optimal x vector
%directly.
%
%It runs both phase one and phase two automatically.
%
%The input is
%
%A: This is the Ax=b matrix. This is for simplex standard
%   form only. The caller must convert all inequalites to
%   equalities first by using slack and suprluse variables. This
%   is what is called the Aeq matrix in Matlab documenation.
%   This function does not support Ax<b form. A has to be in
%   standard form
```

```
%
%b: Vector. This is the right hand side of Ax=b.
%
%c: Vector. This is from minimize  J(x) = c'x. As defined in
%   standard Matlab documentations.
%
%debug: flag. Set to true to see lots of internal steps.
%
%Returns:
%
%This function returns the final tableau. It has the form
%
%  [ A | b  ]
%  [ c | J  ]
%
% Version 5/12/2016
% by Nasser M. Abbasi
% Free for use.

validate_input(A,b,c);

[A,b] = make_phase_one(A,b,debug);
tab   = simplex(A,b,c,debug,'phase two');
end
%==========================
function [A,b] = make_phase_one(A,b,debug)
[m,n]                = size(A);
tab                  = zeros(m+1,n+m+1);
tab(1:m,1:n)         = A;
tab(end,n+1:end-1) = 1;
tab(1:m,end)         = b(:);
tab(1:m,n+1:n+m)     = eye(m);

if debug
    fprintf('>>>>Current tableau [phase one]\n');
    disp(tab);
end

for i = 1:m %now make all entries in bottom row zero
    tab(end,:) = tab(end,:)-tab(i,:);
end

tab = simplex(tab(1:m,1:n+m),tab(1:m,end),tab(end,1:n+m),...
                                              debug,'phase one');
%if tab(end,end) ~=0
%   error('artificial J(x) is not zero at end of phase one.');
%end

A = tab(1:m,1:n);
b = tab(1:m,end);

end
%=================================
function tab = simplex(A,b,c,debug,phase_name)
[m,n]        = size(A);
tab          = zeros(m+1,n+1);
tab(1:m,1:n) = A;
tab(m+1,1:n) = c(:);
tab(1:m,end) = b(:);
```

```
keep_running = true;
while keep_running
    if debug
        fprintf('**********************\n');
        fprintf('Current tableau [%s] \n',phase_name);
        disp(tab);
    end

    if any(tab(end,1:n)<0)%check if there is negative cost coeff.
        [~,J] = min(tab(end,1:n)); %yes, find the most negative
        % now check if corresponding column is unbounded
        if all(tab(1:m,J)<=0)
          error('problem unbounded. All entries <= 0 in column
%d',J);
        %do row operations to make all entries in the column 0
        %except pivot
        else
            pivot_row = 0;
            min_found = inf;
            for i = 1:m
                if tab(i,J)>0
                    tmp = tab(i,end)/tab(i,J);
                    if tmp < min_found
                        min_found = tmp;
                        pivot_row = i;
                    end
                end
            end
            if debug
                fprintf('pivot row is %d\n',pivot_row);
            end
            %normalize
            tab(pivot_row,:) = tab(pivot_row,:)/tab(pivot_row,J);
            %now make all entries in J column zero.
            for i=1:m+1
                if i ~= pivot_row
                    tab(i,:)=tab(i,:)-sign(tab(i,J))*...
                                 abs(tab(i,J))*tab(pivot_row,:);
                end
            end
        end
        if debug  %print current basic feasible solution
            fprintf('current basic feasible solution is\n');
            disp(get_current_x());
        end
    else
        keep_running=false;
    end
end

    %internal function, finds current basis vector
    function current_x = get_current_x()
        current_x = zeros(n,1);
        for j=1:n
            if length(find(tab(:,j)==0))==m
                idx= tab(:,j)==1;
                current_x(j)=tab(idx,end);
            end
        end
    end
end
```

```
%==========================
function validate_input(A,b,c)
if ~ismatrix(A)
    error('A must be matrix');
end

if ~isvector(b)
    error('b must be vector');
end
if ~isvector(c)
    error('c must be vector');
end

[m,n]=size(A);
if rank(A) <m
    error('Rank A must be equal to number of rows in A');
end

if length(b) ~= m
    error('b must have same size as number of rows of A');
end
if length(c) ~= n
    error('c must have same size as number of columns of A');
end
end
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Καραγιάννης, Γ. και Πάντζιος, Χρ. Ι. (2000). Αξιολόγηση της Αποδοτικής Λειτουργίας των Ερευνητικών Μονάδων του ΕΘΙΑΓΕ.
2. Δ. Φακίνος, Α. Οικονόμου , Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα: Θεωρία και Ασκήσεις,
3. F. Hillier, G. Lieberman. Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα
4. Αντωνίου Χ. Παναγιωτόπουλου – Στοιχεία Μαθηματικού Προγραμματισμού
5. Π. Μηλιώτης: Εισαγωγή στο Μαθηματικό Προγραμματισμό
6. D. Bertsimas and J. Tsitsiklis: Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific, 1997.
7. Π.Κιοχός , Γ.Θάνος ,Δ.Σαλαμούρης , Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα 2002
8. HAMDY TAHA, Επιχειρησιακή Έρευνα Εκδόσεις Α. Τζιολα & ΥΙΟΙ Α.Ε., 2011
9. Οικονόμου Γ, Τσότρα. Γ , Ποσοτική Ανάλυση Περιπτώσεων, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα 1996
10. Ζερβάκης Σταύρος, Ο ρόλος της Επιχειρησιακής Έρευνας στη Λήψη Αποφάσεων και στον Προγραμματισμό της Επιχειρηματικής Δραστηριότητας, Πτυχιακή Εργασία, Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Κρήτης, Κρήτη 2012.
11. Καλλιόπη, Οικονόμου Ι., Ο Γραμμικός προγραμματισμός και η μέθοδος Simplex, Πτυχιακή Εργασία, Τ.Ε.Ι Δυτικής Μακεδονίας Παράρτημα Καστοριάς. (2009),Καστοριά.
12. https://uk.mathworks.com/
13. http://www.12000.org/my_notes/simplex/index.htm
14. https://www.usna.edu/Users/math/dphillip/sa305.s12/matlab-simplex-tutorial.pdf
15. https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898718775.ch3
16. https://www.youtube.com/watch?v=1mgSBHNkRvg