Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Ανάλυση Fourier – Αναπαράσταση Σημάτων και Συστημάτων»

Επιβλέπων: Κούγιας Ιωάννης

Φοιτητής: Ανδρέας Μήλας Α.Μ. 0502

Έτος 2018

Υπεύθυνη Δήλωση

Βεβαιώνω ότι είμαι ο συγγραφέας αυτής της πτυχιακής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της και την τελειοποίηση της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στο θέμα αυτής της πτυχιακής. Επίσης, έχω καταγράψει τις όποιες πηγές χρησιμοποίησα για να φέρω εις πέρας αυτή την πτυχιακή. Οι πηγές που αναφέρονται με βοήθησαν στην κατανόηση του θέματος, στη συλλογή δεδομένων, ιδεών και λέξεων που αναφέρονται είτε αυτούσιες, είτε παραφρασμένες. Τέλος, βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά, ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος σπουδών του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής του Τ.Ε.Ι. δυτικής Ελλάδας.

Πίνακας Περιεχομένων

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Κούγια Ιωάννη, που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα και με βοήθησε στην προσπάθεια μου να φέρω εις πέρας αυτή την πτυχιακή εργασία. Ο πολύτιμος χρόνος που μου αφιέρωνε αλλά και οι συμβουλές του ήταν καθοριστικά στοιχεία για το αποτέλεσμα αυτής της πτυχιακής εργασίας. Τον ευχαριστώ λοιπόν, για την βοήθεια, την καθοδήγηση και τις χρήσιμες συμβουλές που μου παρείχε. Τέλος, ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ χρωστάω και στην οικογένειά μου που με στήριξε με κάθε τρόπο σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Πρόλογος

Η πτυχιακή αυτή εργασία αποτελεί την κορύφωση των σπουδών μου στο Τ.Ε.Ι Δυτικής Ελλάδας, σχολή τεχνολογικών εφαρμογών και περιγράφει τους τρόπους ανάλυσης σημάτων. Η ανάλυση αυτή στηρίζεται στην χρήση των σειρών Fourier. Για την απεικόνιση των σημάτων, θα χρησιμοποιήσω το πρόγραμμα **matlab**, όπου για κάθε πράξη θα παραθέτω πρώτα τον κώδικα και εν συνεχεία το αποτέλεσμα. Για να υπάρχει μεγαλύτερη ακρίβεια και για την καλύτερη αναπαράσταση των αποτελεσμάτων, για κάθε σειρά Fourier θα πραγματοποιώ τρία πειράματα. Στο τέλος του κάθε πειράματος θα παραθέτω τα συμπεράσματα που προέκυψαν.

Εισαγωγή

Η πτυχιακή μου εργασία χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Ο χωρισμός αυτός έχει προέλθει μετά από μελέτη για την καλύτερη κι ευκολότερη ανάγνωση αυτής της πτυχιακής εργασίας από τον οποιονδήποτε.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται στοιχεία για τη ζωή του μαθηματικού Fourier, καθώς και η στάση που κράτησε ο ίδιος κατά την περίοδο της Γαλλικής Επανάστασης. Επίσης, γίνεται αναφορά στην ακαδημαϊκή του καριέρα και τις έρευνες του πάνω στην θερμοδυναμική και τα μαθηματικά.

Το δεύτερο κεφάλαιο, επικεντρώνεται πάνω στη θεωρία των σημάτων. Τι είναι γενικά ένα σήμα και πως μεταδίδεται, ξεκινώντας από τα απλά κύματα της θεωρίας που ο ίδιος διατύπωσε καταλήγοντας στα ηλεκτρομαγνητικά.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο αυτής της πτυχιακής εργασίας και με την βοήθεια του προγράμματος matlab, εφαρμόζονται πειράματα στα οποία βασίζονται και τα μετέπειτα συμπεράσματά πάντα με την χρήση των σειρών Fourier. Άρα, στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο βλέπουμε την πρακτική χρήση των σειρών Fourier.

Κεφάλαιο 1ο

1.1 Τα πρώτα χρόνια της ζωής του

Jean Batiste Joseph Fourier είναι το πλήρες όνομα του γνωστού Γάλλου μαθηματικού, φυσικού και ιστορικού που γεννήθηκε στο Auxere, την τέταρτη μεγαλύτερη πόλη στην Βουργουνδία της Γαλλίας στις 21 Μαΐου του 1768. Ήταν το ένατο παιδί ενός ράπτη ο οποίος χάνοντας την γυναίκα του και αλλόφρων πια, εγκατέλειψε τα παιδιά του. Ως εκ τούτου άφησε ορφανό σε ηλικία 9 ετών τον Joseph. Μια απόφαση σκληρή που όμως, έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην μετέπειτα εξέλιξη του Fourier. Πιο συγκεκριμένα, για εκείνον η τραγωδία του θανάτου και της εγκατάλειψης από τους γονείς του τον οδήγησαν σε μια μικρή αλλά σημαντική παρεμβολή στην εκπαίδευση του που για την εποχή ήταν πραγματικά καθοριστικής σημασίας.

Το Τάγμα των Βενεδικτινών και η εκπαίδευση του Fourier

Φοίτησε πρώτα, στην τοπική στρατιωτική σχολή, γνωστή ως **Τάγμα των Βενεδικτινών** της Μονής του Αγίου Μάρκου, εν έτει 1780 και εκεί αμέσως, ξεχώρισε για το γρήγορο μυαλό του και την ευφυΐα του. Σε ηλικία 13 ετών είχε ήδη εκδηλώσει το πάθος του για τα μαθηματικά, αφιερώνοντας πολλές ώρες μελέτης υπό το φως των κεριών. Ο στρατιωτικός τομέας, άρτια εξοπλισμένος για τέτοιες περιπτώσεις ανθρώπων του έδωσε τη δυνατότητα να δεχθεί μια σειρά διαλέξεων με αποκλειστικό θέμα την μεγάλη του λατρεία, τα μαθηματικά.

Η εμπλοκή του Fourier στη Γαλλική Επανάσταση

Ο ίδιος υπήρξε ένθερμος υποστηρικτής της Γαλλικής Επανάστασης και η ηγετική μορφή της στην γενέτηρά του. Αποτέλεσμα αυτού, να φυλακιστεί δύο φορές κατά τη περίοδο της Τρομοκρατίας. Κάτι που αποδεικνύει την έμπρακτη συμμετοχή του στην επανάσταση που τάραξε την Γαλλία αλλά κι όλη την Ευρώπη.

École Normale Supérieure και École Polytechnique

Κατά το έτος 1795, διορίστηκε στην École Normale Supérieure, ένα περίφημο, ιδιωτικό ίδρυμα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, ιδρυόμενο από τον Ναπολέων το 1793 με κύρια τμήματα: Θετικές Επιστήμες (μαθηματικά, φυσική, χημεία, βιολογία, γεωλογία, ιατρική) και Ανθρωπιστικές Επιστήμες. Στην συνέχεια, ακολούθησε μια θέση στο École Polytechnique, ένα γαλλικό δημόσιο ίδρυμα της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και έρευνας που βρίσκεται στο Palaiseau κοντά στο

Παρίσι. Ένα πανεπιστήμιο ιδρυμένο απ τον μαθηματικό Gaspard Monge το 1794.

Ο Fourier στην Αίγυπτο

Το 1798 φεύγει για την Αίγυπτο για να συνοδεύσει ως επιστημονικός σύμβουλος τον Ναπολέοντα στην αιγυπτιακή εκστρατεία. Εκεί, διορίστηκε ως γραμματέας στο Ινστιτούτο της Αιγύπτου ή αλλιώς του Καΐρου και συντόνισε όλες τις επιστημονικές εργασίες ώστε να αποδυναμωθεί ο βρετανική επιρροή στην Ανατολή. Κατά το 1801, επέστρεψε στην Γαλλία μετά τις βρετανικές νίκες και τη συνθηκολόγηση με τον στρατηγό Menou. Η παραμονή του στην Αίγυπτο όμως, εκτός από τις σημαντικές θέσεις που κατέλαβε εκεί είχε κι άλλη μια θετική έκβαση. Συνέβαλε στην δημοσίευση μιας σειράς από 21 τόμους των πολιτιστικών και επιστημονικών αποτελεσμάτων της εισβολής του Ναπολέοντα στην Αίγυπτο με τίτλο '' Description de l΄Igypte ''. Εξού, λοιπόν, και το προσωνύμιο ''Αιγυπτιολόγος'' που του αποδόθηκε.

Ο Fourier στην Grenoble

Την ίδια χρονιά με την επιστροφή του στην Γαλλία, ο Joseph διορίζεται Κυβερνήτης του τμήματος Isère της Grenoble απ τον ίδιο τον Ναπολέοντα, καθώς και νομάρχης της πόλης. Ήταν στην Grenoble όταν άρχισε να πειραματίζεται με τη διάδοση της θερμότητας όπου αργότερα, στις 21 Δεκεμβρίου του 1807 παρουσίασε στο Ινστιτούτο του Παρισιού την εργασία του για τη διάδοση της θερμότητας σε στερεά σώματα.

Ο Fourier και η Γαλλική Ακαδημία Επιστημών

Το 1816 ο Joseph μετακόμισε στην Αγγλία αλλά επέστρεψε στην Γαλλία έξι χρόνια αργότερα διοριζόμενος πια ως μόνιμος Γραμματέας της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών. Το 1820, ο Joseph Fourier υπολόγισε ότι ένα αντικείμενο στο μέγεθος της Γης και η απόστασή του από τον Ήλιο, θα πρέπει να είναι πολύ ψυχρότερη από τον πλανήτη. Κι είναι αλήθεια αν θερμαίνεται μόνο από τις επιπτώσεις της εισερχόμενης ηλιακής ακτινοβολίας.

Πρότεινε ότι η διαστρική ακτινοβολία μπορεί να είναι υπεύθυνη για ένα μεγάλο μέρος της επιπλέον ζεστασιάς και εξέτασε την πιθανότητα η ατμόσφαιρα της Γης να μπορούσε να δράσει ως μονωτής κάποιου είδους. Αυτή είναι και ευρέως αναγνωρισμένη ως η πρώτη πρόταση του Fourier και σήμερα είναι γνωστή ως το φαινόμενο του θερμοκηπίου.

''Αναλυτική θεωρία της Θερμότητας''

Το 1822 δημοσίευσε ένα απ τα μεγαλύτερα έργα του, την ''Αναλυτική θεωρία της Θερμότητας'' (Théorie analytique de la chaleur) όπου στήριζε όλη του την επιχειρηματολογία στον νόμο της ψύξης του Νεύτωνα. Το γεγονός δηλαδή ότι η ροή θερμότητας ανάμεσα σε δυο μόρια είναι ανάλογη με την απειροελάχιστη διαφορά στη θερμοκρασία τους. Σε αυτό του το έργο υπήρχαν τρεις σημαντικές συνεισφορές. Η μια στον μαθηματικό κλάδο και οι άλλες δυο στο κλάδο της φυσικής. Στα μαθηματικά, ο Fourier ισχυρίστηκε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση μιας μεταβλητής, συνεχής ή ασυνεχής, μπορεί να επεκταθεί σε μια σειρά από δίκες των πολλαπλασίων της μεταβλητής. Αν και αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό, η παρατήρηση του Fourier ότι ορισμένες ασυνεχείς συναρτήσεις είναι το άθροισμα της άπειρης σειράς ήταν μια σημαντική ανακάλυψη. Το ζήτημα του προσδιορισμού όταν μια σειρά Fourier συγκλίνει υπήρξε θεμελιώδες για αιώνες. Ο πρώτος που έδωσε μια ικανοποιητική επίδειξη με ορισμένους περιοριστικούς όρους ήταν ο Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Μια φυσική συμβολή στο βιβλίο ήταν η έννοια των διαστάσεων, η ομοιογένεια στις εξισώσεις, δηλαδή μια εξίσωση μπορεί να είναι τυπικά σωστή μόνον εάν οι διαστάσεις αντιστοιχούν στις εκατέρωθεν της ισότητας. Ο Joseph, επιπλέον βοήθησε να γίνουν σημαντικές συνεισφορές στην τρισδιάστατη ανάλυση. Η άλλη φυσική συνεισφορά ήταν η πρόταση του Fourier της μερικής διαφορικής εξίσωσης του για αγώγιμη διάχυση της θερμότητας. Αυτή η εξίσωση πλέον διδάσκεται σε κάθε μαθητή της μαθηματικής φυσικής.

1.2 Ο θάνατος του

Δυστυχώς όμως, το 1830 βρισκόμενος στο Παρίσι πια, και έχοντας ήδη βιώσει πολλά συχνά επεισόδια ασφυξιών, σε συνδυασμό με παλιότερες ενοχλήσεις του ανευρύσματος της καρδιάς, καθώς και των μόνιμων προβλημάτων αϋπνίας, η υγεία του είχε εξασθενήσει κατακόρυφα. Μάλιστα, η πτώση του από τις σκάλες στις 4 Μάιου του ίδιου έτους επιδείνωσε ακόμη περισσότερο τα πράγματα. Τόσο ώστε δώδεκα μέρες αργότερα, δηλαδή στις 16 Μαΐου του 1830 να αφήσει την τελευταία του πνοή στο κρεβάτι του. Θάφτηκε στο νεκροταφείο του Παρισιού '' Père Lachaise '' σ έναν τάφο διακοσμημένο σύμφωνα με τα αιγυπτιακά πρότυπα ώστε να αντικατοπτρίζεται η θέση που κατέχει ως Γραμματέας στο Ινστιτούτο του Καΐρου. Το όνομα του είναι ένα από τα εβδομήντα δύο που έχουν χαραχθεί πάνω στο μεγαλύτερο μνημείο της Γαλλίας, τον Πύργο του Eiffel.

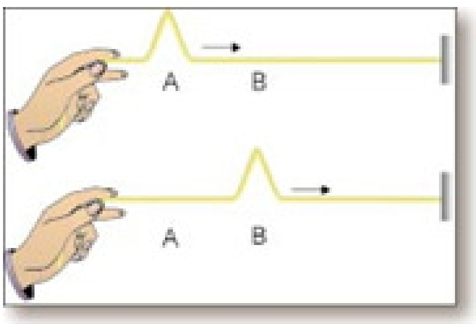
Κεφάλαιο 2^o

«Γενικά περί σημάτων»

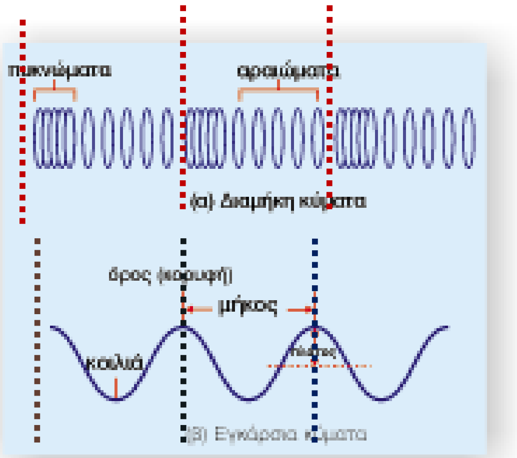
2.1 Βασικές έννοιες σημάτων

Ελαστικά σώματα – Κύμα - Ταλάντωση

- Τα ελαστικά σώματα έχουν την ιδιότητα να υφίστανται παροδικές παραμορφώσεις όταν ασκείται πάνω τους μια δύναμη.



- Μια διαταραχή που μεταδίδεται από σημείο σε σημείο, μέσα σε ένα ελαστικό μέσο (σώμα), λέγεται κύμα.



Κατά τη μετάδοση ενός κύματος δεν μεταφέρεται ύλη, αλλά τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου, ταλαντώνονται γύρω από τη θέση ισορροπίας τους και οι ταλαντώσεις μεταφέρονται από το ένα σημείο στο άλλο.

- Ταλάντωση είναι η περιοδική κίνηση που κάνει ένα σώμα γύρω από τη θέση ισορροπίας του.

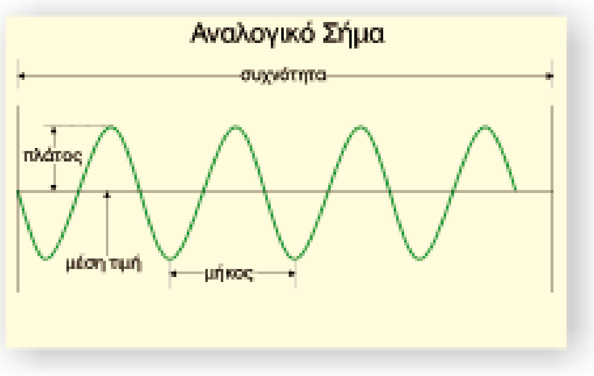
Ταλάντωση – Περιοδική κίνηση

- Περιοδική κίνηση είναι η κίνηση που επαναλαμβάνεται πανομοιότυπα μετά από κάποιο χρονικό διάστημα.

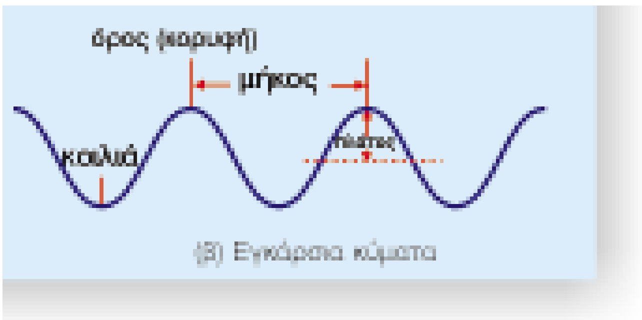
- Ταλάντωση ονομάζεται η περιοδική κίνηση που κάνει ένα σώμα γύρω από τη θέση ισορροπίας του.

Εγκάρσια κύματα

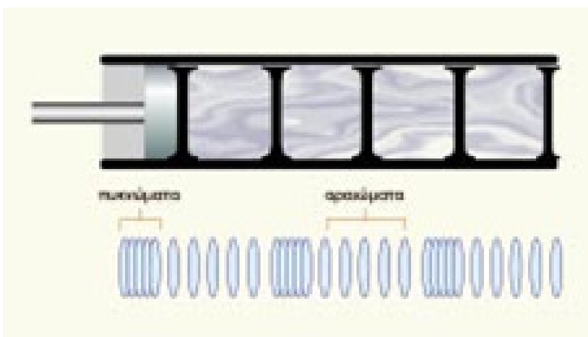
- Όταν η ταλάντωση των υλικών σημείων ενός ελαστικού σώματος είναι κάθετη προς την κίνηση του κύματος, τα κύματα λέγονται εγκάρσια.



- Όταν η ταλάντωση των υλικών σημείων ενός ελαστικού σώματος είναι παράλληλη προς την κίνηση του κύματος, τα κύματα λέγονται διαμήκη.

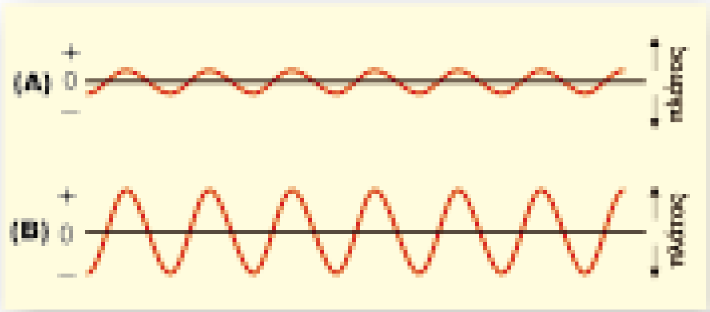


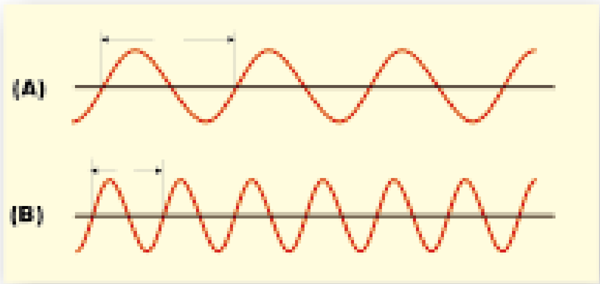
Χαρακτηριστικά κύματος

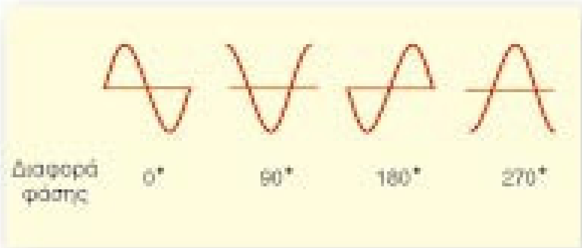


- Περίοδος
- Συχνότητα
- Ταχύτητα μετάδοσης
- Πλάτος

- Φάση







Μονάδες συχνότητας κύματος

- 1 Hz =1 cycle/sec
- 1 KHz =1 kc/sec =10^3 Hz
- 1 MHz =1 Mc/sec =10^6 Hz
- 1 GHz =1 Gc/sec =10^9 Hz

Περίοδος και Συχνότητα κύματος

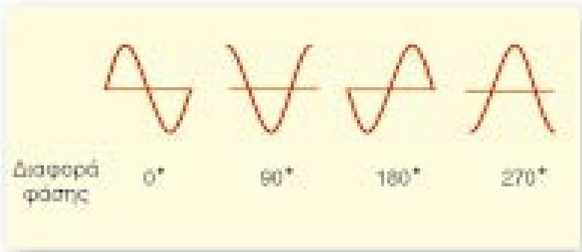
Περίοδος (period)

- Ονομάζεται η διάρκεια μιας πλήρους ταλάντωσης του υλικού σημείου στο ελαστικό μέσο, συμβολίζεται με ***T*** και μετριέται σε δευτερόλεπτα (sec).

Συχνότητα (frequency)

- Εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων μιας πλήρους ταλάντωσης στη μονάδα του χρόνου και συμβολίζεται με ***f*** ή ***v***. Μονάδα μέτρησης είναι ο κύκλος ανά δευτερόλεπτο, *Hertz (Hz)*

Ισχύει η σχέση: ν=1/Τ



Μήκος κύματος, Ταχύτητα μετάδοσης

- **Μήκος σήματος (length)**

Ονομάζεται η απόσταση στην οποία μεταδίδεται το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου και συμβολίζεται με λ.(απόσταση ανάμεσα σε δυο διαδοχικά πυκνώματα ή αραιώματα ή ανάμεσα σε δυο διαδοχικές κοιλίες ή κορυφές)

- **Ταχύτητα μετάδοσης (velocity)**

Είναι η ταχύτητα με την οποία το κύμα διαπερνά το μέσο μετάδοσης και συμβολίζεται με το γράμμα ***υ***.

- ✓ **Ισχύει η σχέση: υ = λ / Τ ή**
- ✓ **υ = λ * ν**

Πλάτος και Φάση κύματος

- **Πλάτος σήματος (amplitude)**

Εκφράζει τη στιγμιαία τιμή του κύματος, οποιαδήποτε χρονική στιγμή και συμβολίζεται με ***α***.

- **Φάση σήματος (phase)**

Εκφράζει τη διαφορά ***φ*** ενός κύματος, όταν συγκρίνεται με κάποιο άλλο που χρησιμοποιούμε σαν σήμα αναφοράς *(του οποίου ο κύκλος ξεκινάει τη χρονική στιγμή t=0)*

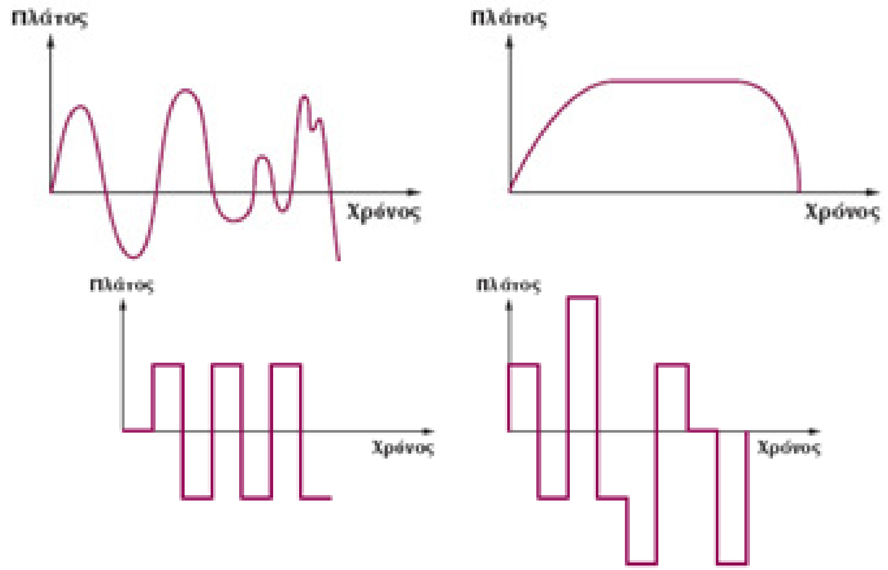
Δεδομένα & Σήματα

Τι εννοούμε με τον όρο δεδομένα;

Τα δεδομένα είναι οντότητες που μεταφέρουν πληροφορία (π.χ. ήχος & εικόνα).

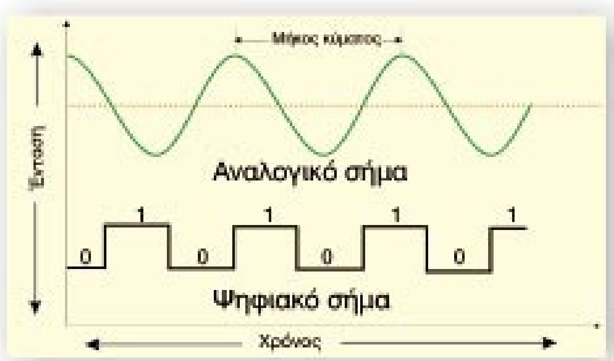
Τι είναι τα σήματα;

Τα σήματα είναι ηλεκτρική ή ηλεκτρομαγνητική αναπαράσταση των Δεδομένων.



Επικοινωνία Δεδομένων

- Η επικοινωνία γίνεται με *Σήματα* που ανταλλάσσονται από τις συσκευές επικοινωνίας.
- Τα σήματα μπορεί να είναι *Αναλογικά* ή *Ψηφιακά.*
- Το είδος του σήματος που θα χρησιμοποιηθεί εξαρτάται από τη συσκευή, την υπηρεσία και το μέσο μετάδοσης.
- Έτσι πολλές φορές γίνεται *μετατροπή* από τη μία μορφή στην άλλη.



2.2 Τι σημαίνει μετάδοση δεδομένων;

1
1
0
1

Μετάδοση είναι η ανταλλαγή δεδομένων με τη βοήθεια της διάδοσης και επεξεργασίας των σημάτων.

Τι είδους πηγές πληροφορίας έχουμε και τι συστήματα επικοινωνίας δημιουργούνται;

- Οι αναλογικές πηγές παράγουν μηνύματα ή σήματα συνεχή.
- Οι ψηφιακές πηγές παράγουν μηνύματα ή σήματα διακριτά ή πεπερασμένα.

Ψηφιακή Τεχνολογία

Η τεχνολογία στην οποία η πληροφορία είναι αποθηκευμένη ψηφιακά. Παίρνει συγκεκριμένες, διακριτές τιμές (αριθμούς).

Στη φύση όλα τα μεγέθη είναι αναλογικά, π.χ. ο ήχος, το φως, το ηλεκτρικό ρεύμα κλπ.

- Παίρνουν δηλ. άπειρες τιμές
- Π.χ. πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 1 και το 2;

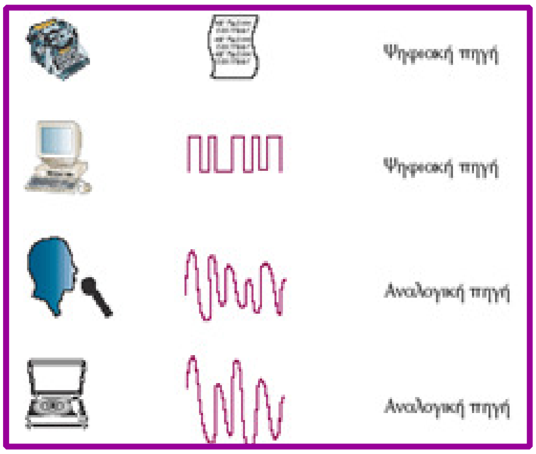
Μορφές σήματος

- Για την επικοινωνία, τα μηνύματα πρέπει να μεταφερθούν με τη βοήθεια του μέσου μετάδοσης, από τον πομπό στο δέκτη.

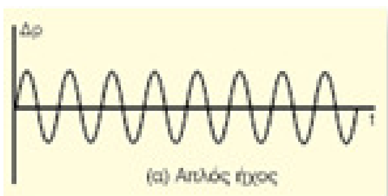
- Τα μηνύματα μπορούν να μεταφερθούν είτε σαν αναλογικά είτε σαν ψηφιακά σήματα.

Αναλογικά Σήματα

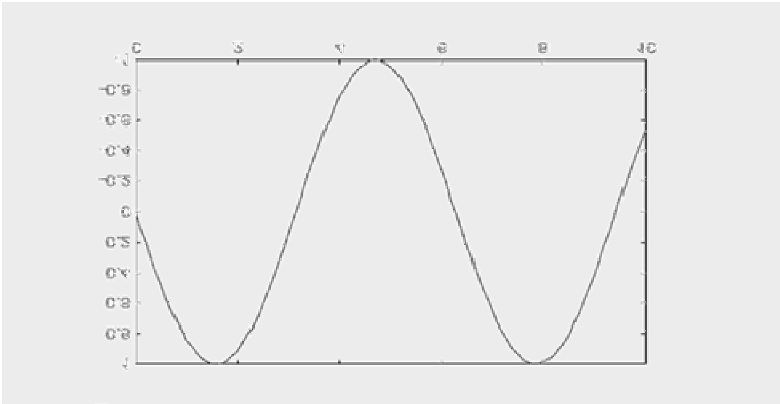
- Τα αναλογικά σήματα (π.χ. η φωνή, το video) είναι σήματα συνεχή στον χρόνο και έχουν τη μορφή ημιτονοειδούς καμπύλης.



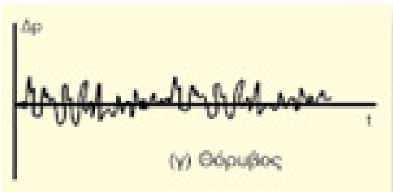
- Ο ακουστικός ήχος είναι ένα αναλογικό σήμα.



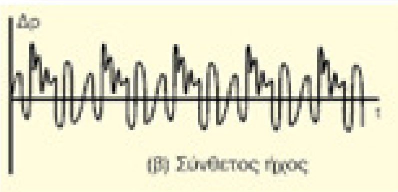
- Μια νότα είναι ένας απλός ήχος μιας συχνότητας (πχ. 4 KHz)



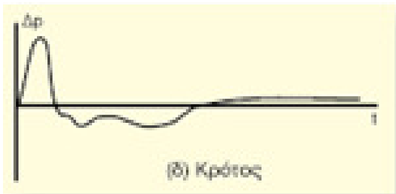
- Η ομιλία είναι ένα σύνθετο σήμα.



(γ) Θόρυβος

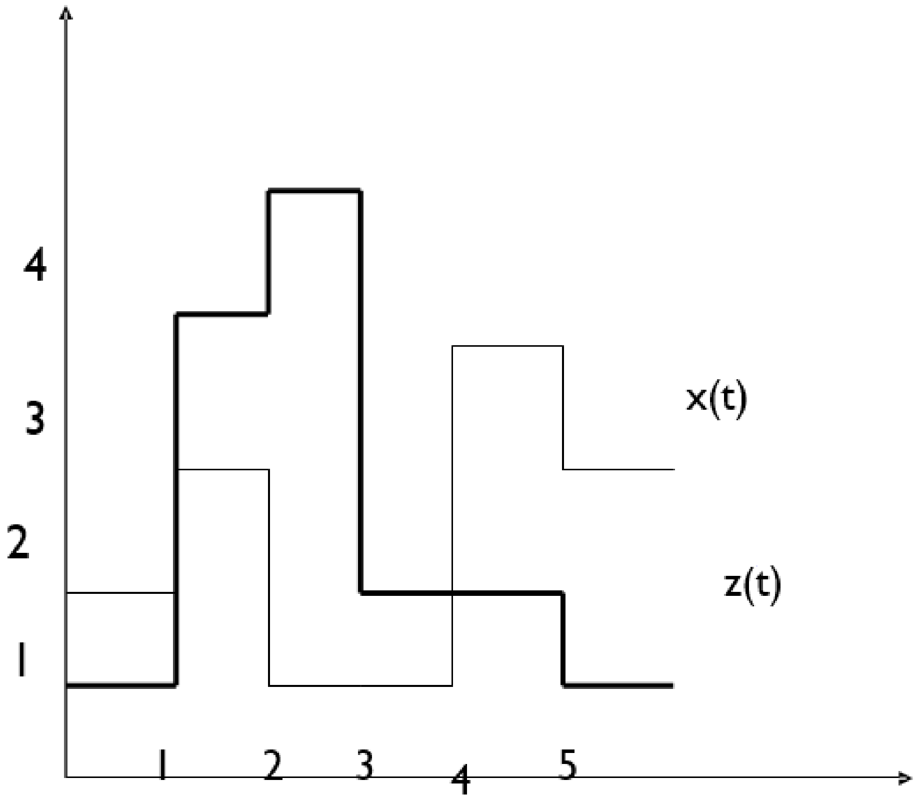


(β) Σύνθετος ήχος



(δ) Κρότος

Ψηφιακό σήμα

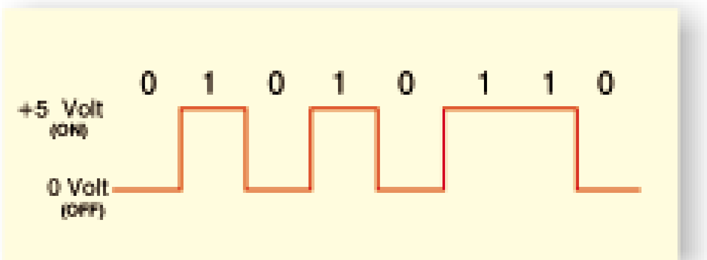


- Παίρνουν διακριτές τιμές μέσα στο χρόνο.
- Το δυαδικό σήμα, έχει δυο καταστάσεις (**1 ή 0**) και συνήθως αντιστοιχούν σε ηλεκτρικές τάσεις

+5 Volt (ένας παλμός)

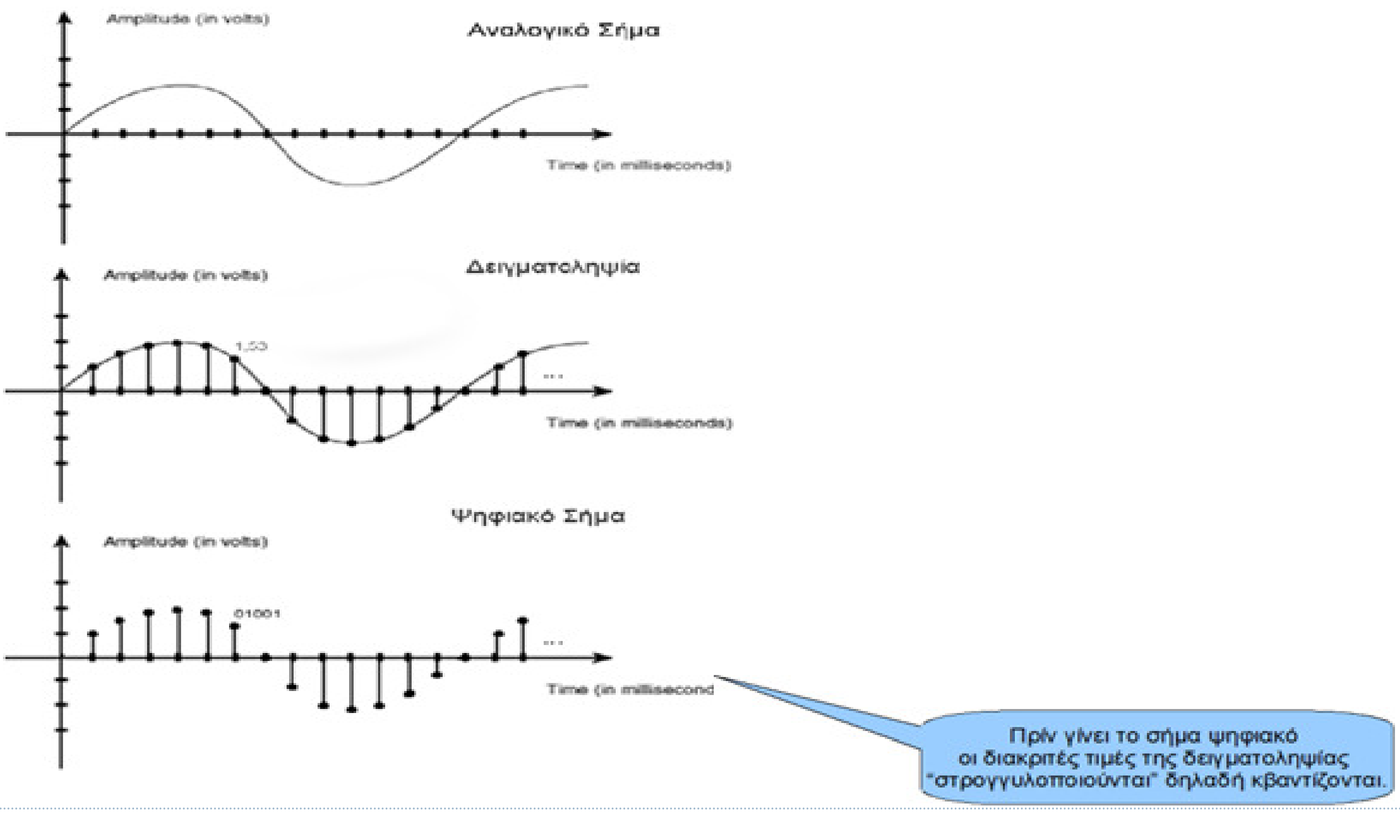
Και

- (0 Volt) (απουσία παλμού)
- Οι παλμοί έχουν το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα.



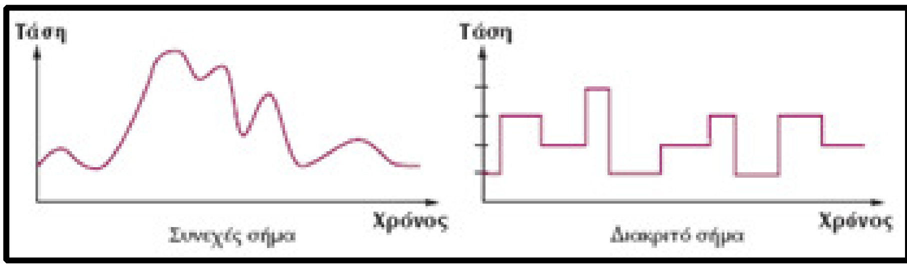
Αναλογικό ≠ Ψηφιακό Σήμα

- Το αναλογικό σήμα περιέχει τιμές σε κάθε χρονική στιγμή.
- Κατά την διάρκεια της δειγματοληψίας (sampling) παίρνουμε τιμές (ή αλλιώς δείγματα – samples) του σήματος ανά τακτά χρονικά διαστήματα.
- Το ψηφιακό σήμα εδώ προέρχεται από το αναλογικό σήμα και κωδικοποιείται με δυαδικούς αριθμούς (0 ή 1).
- Άρα: Αναλογικό ≠ Ψηφιακό Σήμα, παρόλο που μοιάζουν μεταξύ τους.

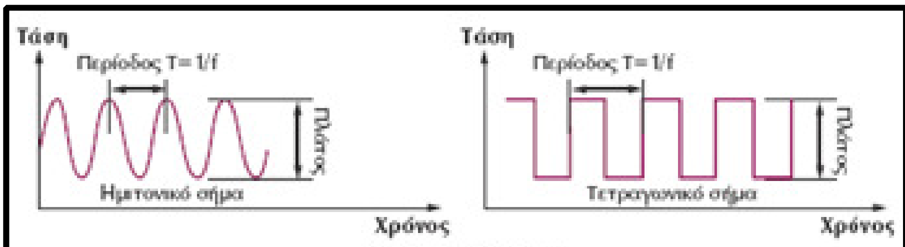


Αναπαράσταση σημάτων ως προς το χρόνο

- συνεχή σήματα
- διακριτά σήματα

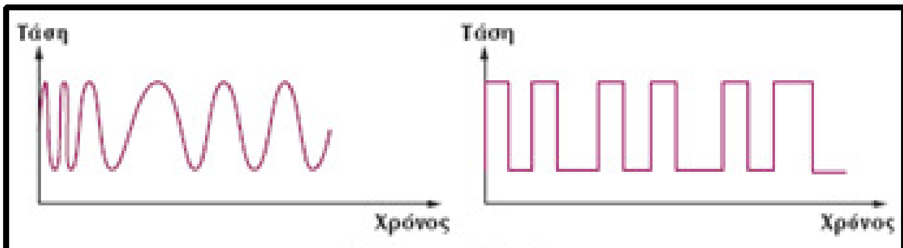


- περιοδικά σήματα



(α) Περιοδικά σήματα

- μη περιοδικά σήματα

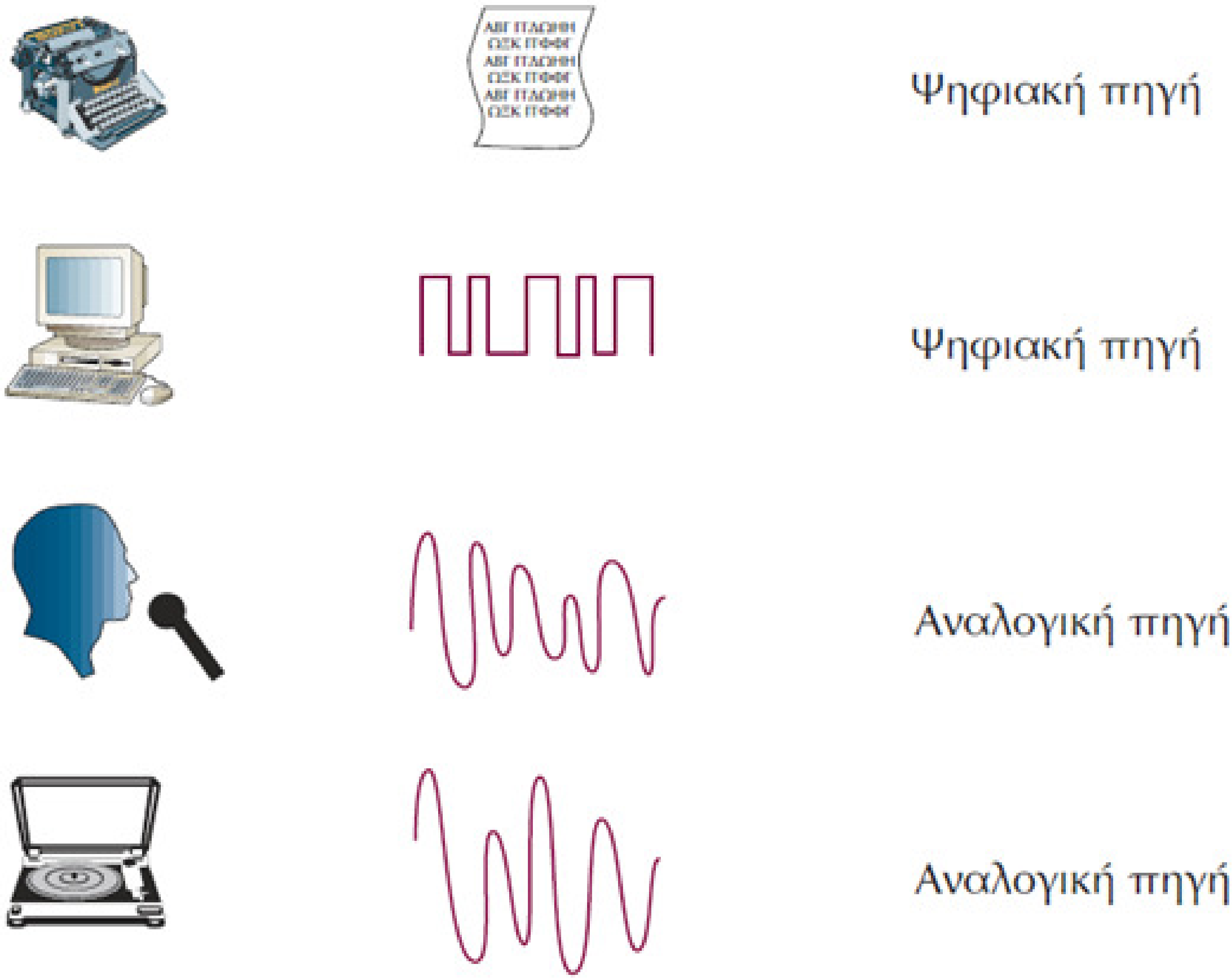


(β) Μη περιοδικά σήματα

Ψηφιακές / Αναλογικές πηγές

- Ψηφιακή Πηγή: Η ψηφιακή πηγή πληροφορίας παράγει πεπερασμένο πλήθος πιθανών μηνυμάτων. π.χ. η γραφομηχανή.
- Αναλογική Πηγή: Η αναλογική πηγή πληροφορίας παράγει μηνύματα, που ανήκουν στο συνεχές πεδίο τιμών (άπειρο πλήθος). π.χ. το μικρόφωνο.

Παραδείγματα πηγών πληροφορίας



Συστήματα Επικοινωνίας

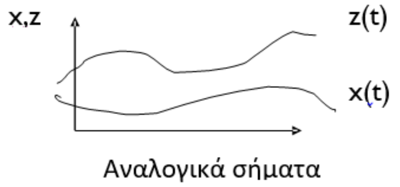
- Αναλογικό σύστημα επικοινωνίας: μεταφέρει μια αναλογική πηγή στον προορισμό (π.χ. Ένα καλώδιο που συνδέει τα ηχεία με την κάρτα ήχου)

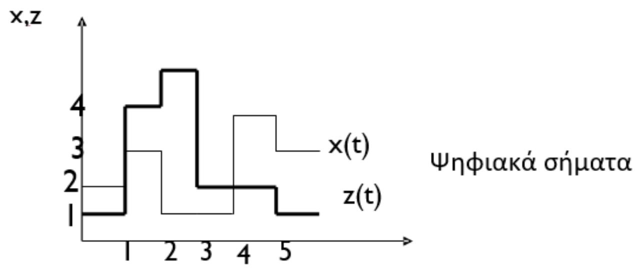
- Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας: μεταφέρει μια ψηφιακή πηγή στο προορισμό (π.χ. Ένα καλώδιο usb που συνδέει ένα εξωτερικό σκληρό δίσκο με τον Η/Υ).

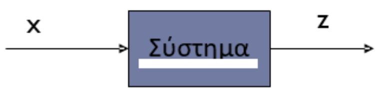
Τι Είναι Ένα Ψηφιακό Σύστημα

Τα συστήματα διακρίνονται σε:

- **Αναλογικά**, αν τα σήματα που τα διατρέχουν παίρνουν τιμές από ένα συνεχές διάστημα τιμών, και σε
- **Ψηφιακά**, αν τα σήματα που τα διατρέχουν έχουν ένα πεπερασμένο αριθμό διακριτών τιμών







Κεφάλαιο 3^{ο}

«Τρόποι ανάλυσης Σημάτων»

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε και θα μελετήσουμε τρόπους ανάλυσης ενός σήματος σε σήματα απλής συχνότητας. Η ανάλυση ενός σήματος σε επιμέρους σήματα απλής συχνότητας έχει θεμελιώδη σημασία στην επιστήμη των σημάτων και συστημάτων, αφού όπως θα δούμε στη συνέχεια, απλοποιεί σημαντικά τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος. Η ανάλυση αυτή στηρίζεται στη χρήση της σειράς Fourier. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι που μπορούμε να εκφράσουμε ένα σήμα ως ανάπτυγμα σειράς Fourier.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εναλλάσσουμε συχνά τα σύμβολα n και k. Αυτό γίνεται για να συμβαδίζει η θεωρία με τους κώδικες που γράφουμε στα παραδείγματα. Τα σύμβολα n και k εκφράζουν το ίδιο πράγμα.

3.1 Εκθετική σειρά Fourier

Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα σήμα $x(t)$ το οποίο ορίζεται σε ένα πεπερασμένο χρονικά διάστημα $[t_0, t_0+T]$.Τότε το σήμα $x(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια της εκθετικής σειράς Fourier ως:

$$\chi_{(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\Omega_0 t}, t \in [t_0, t_0 + T] \qquad (3.1)$$

όπου $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ και t_0 Πραγματικός αριθμός τα α_k της σχέσεις (3.1)

Υπολογίζονται ως:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\Omega_0 t}\, dt. \qquad (3.2)$$

Οι μιγαδικοί συντελεστές a_k Καλούνται συντελεστές Fourier ή φασματικές γραμμές του $\chi_{(t)}$ Και ορίζουν το φάσμα του σήματος.Η σταθερά α_0 Ονομάζεται συνεχής ή σταθερά συνιστώσα του φάσματος. κάθε a_k αντιστοιχεί στην προβολή του σήματος χ(t) πάνω στην k-οστή Ορθογώνια συνιστώσα $e^{jk\Omega_0 t}$ και δηλώνει το φασματικό περιεχόμενο του χ(t) στη συχνότητα $k\Omega_0$ και ονομάζεται k-στή αρμονική συνιστώσα. Θα πρέπει να τονιστεί ότι το ανάπτυγμα σειράς Fourier ισχύει μόνο στο διάστημα $[\boldsymbol{t_0}. t_0 + T]$ Και εύρος T καθορίζει την βασική συχνότητα.

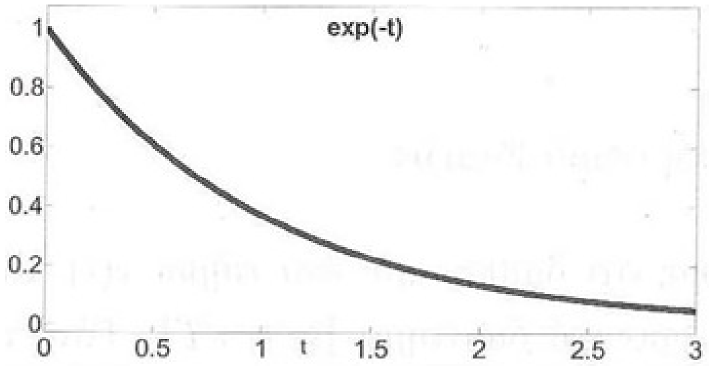
Παράδειγμα:

Να αναλυθεί σε εκθετική σειρά Fourier το σήμα $x_{(t)} = e^{-t}$, $0 \leq t \leq 3$.

Το πρώτο πράγμα που θα πρέπει να κάνουμε είναι να ορίσουμε, τα $t_0 = 0$, $T = 3$, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ και το σήμα $x(t)$ ως συμβολική έκφραση.

Ορίζουμε και σχεδιάζουμε το σήμα $x(t)$

```
t0=0;
T=3;
w=2*pi/T;
syms t
x=exp(-t);
ezplot(x,[t0 T]);
```



Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier a_k σύμφωνα με την σχέση (3.2). Παρατηρώντας τη σχέση (3.1) θα δούμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε άπειρους συντελεστές Fourier. Όπως φαντάζεστε αυτό δεν μπορεί να γίνει. Ευτυχώς όσο το k μεγαλώνει προς το άπειρο ή μικραίνει προς το μείον άπειρο οι συντελεστές Fourier Τείνουν στο μηδέν. Επομένως μπορούμε με ένα πεπερασμένο αριθμό συντελεστών να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά το σήμα $\chi(t)$ Υπολογίζοντας τα a_k για $-100 \leq k \leq 100$ Αναμένουμε μια αξιοπρεπή προσέγγιση του αρχικού σήματος $\chi(t)$

Γίνεται υπολογισμός των α_κ σύμφωνα με την σχέση 3.2

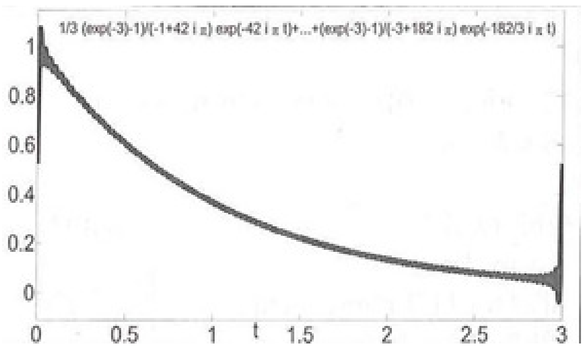
```
for k=-100:100
a(k+
101)=(1/T)*int(x*exp(-
j*k*w*t),t,t0,t0+T);
end
```

Παρατηρούμε ότι για να ορίζουμε το διάνυσμα a που θα περιέχει τους συντελεστές Fourier $\mathrm{a_k}$ $-100 \leq k \leq 100$ γράφουμε $\mathrm{a(k+101)}$. Αυτό γίνεται για προγραμματιστικούς λόγους αφού το index ενός διανύσματος δεν μπορεί να είναι αρνητικό ή μηδέν.

Έχοντας υπολογίσει τα $\mathrm{a_k}$ είμαστε σε θέση να προσεγγίσουμε το αρχικό σήμα μέσω της (3.1)

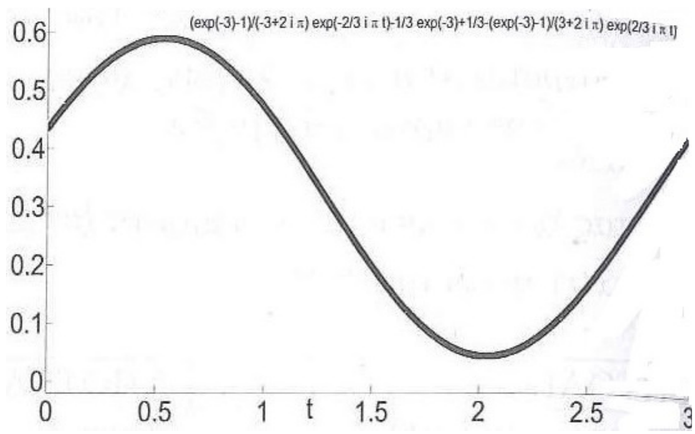
Αρχικά ορίζουμε την ποσότητα $e^{jk\Omega_0 t}$, $-100 \leq k \leq 100$ και στην συνέχεια υπολογίζουμε το σήμα σύμφωνα με την (3.1)

```
for k=-100:100
ekhth(k+
101)=exp(j*K*w*t);
end
xx=sum(a.*ekth);
ezplot(xx,[0 3]);
```



Βλέπουμε ότι το σήμα $xx(t)$ που έχουμε σχεδιάσει με τη βοήθεια της εκθετικής σειράς Fourier είναι αρκετά κοντά στο αρχικό σήμα $x(t)$. Για να καταλάβουμε τη σημασία του πλήθους των συντελεστών $\mathrm{a_k}$ σύμφωνα με τους οποίους προσεγγίζουμε το σήμα $x(t)$ με τη μορφή του σήματος $xx(t)$ για διαφορετικές τιμές του k.

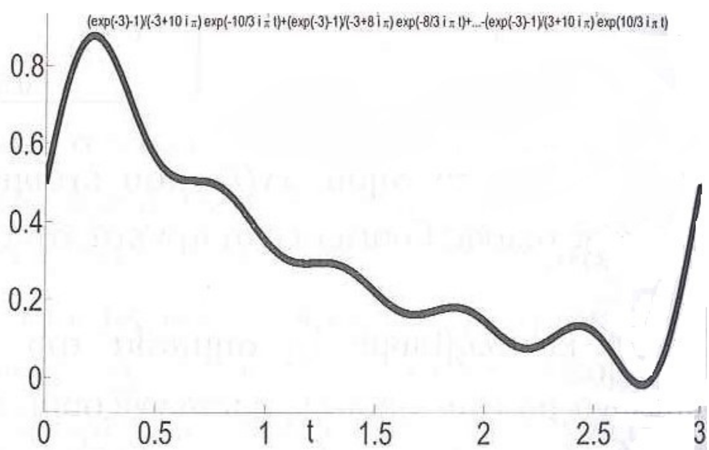
Άρχικά θα προσπαθήσουμε να δούμε την προσέγγιση για το $x(t)$ $x(t)$υπολογίζοντάς τους a_k , για $-1 \leq k \leq 1$.




```
for k=-1:1
a(k+2)=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
end
for k=-1:1
ekth(k+2)exp(j*k*w*t);
end
xx=sum(a.*ekth);
ezplot(xx,[0 3]);
```

Ας δούμε την προσέγγιση για το $x(t)$ υπολογίζοντάς τους a_k , για $-5 \leq k \leq 5$.

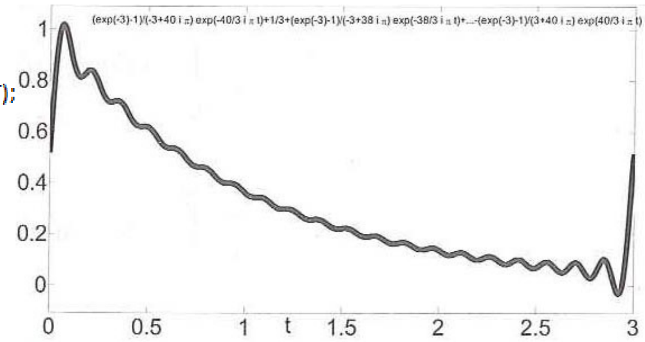
```
for k=-5:5
a(k+6)=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t)t,t0,t0+T);
end

for k=-5:5
ekth(k+6)=exp(j*k*w*t);
end

xx=sum(a.*ekth);
ezplot(xx,[0 3]);
```



Βλέπουμε ότι ακόμα και όταν το σήμα προσεγγίζεται με 11 όρους , εξακολουθεί να είναι πολύ μακριά από το σήμα $\chi(t)$.

Ας δούμε την προσέγγιση για το $x(t)$ υπολογίζοντάς τους a_k , για $-20 \leq k \leq 20$.

```
for k=-20:20
a(k+21)=(1/T)*int(x*exp( j*k*w*t),t,t0,t0+T);
end


for k=-20:20
ekth(k+21)=exp(j*k*w*t);
end
xx=sum(a.*ekth);
ezplot(xx,[0 3]);
```



Όταν λοιπόν το σήμα προσεγγίζεται με 41 όρους αρχίζει να προσεγγίζει ικανοποιητικά το $\chi(t)$.Επομένως όσο πιο πολλούς συντελεστές Fourier λάβουμε υπόψη μας, τόσο καλύτερα το σήμα που φτιάχνουμε από αυτούς προσεγγίζει το αρχικό.
Όπως είδαμε αρχικά, όταν χρησιμοποιήσαμε 201 όρους η προσέγγιση μας ήταν αρκετά καλή.

3.2. Τριγωνομετρική σειρά Fourier

Ας υποθέσουμε και πάλι ότι έχουμε ένα σήμα $x(t)$ το οποίο ορίζεται σε ένα πεπερασμένα χρονικά διαστήματα $[t_0, t_0 + T]$. Τότε το σήμα $x(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής σειράς Fourier στο διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, αναπτύσσοντας το σε άθροισμα τριγωνομετρικών σημάτων που το καθένα από αυτά έχει θεμελιώδη συχνότητα $k\Omega_0$. Η μαθηματική σχέση είναι:

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\Omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\Omega_0 t) \qquad (3.3)$$

Οι συντελεστές $a_0, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ της τριγωνομετρικής σειράς Fourier υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt. \qquad (3.4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(n\Omega_0 t)\, dt \,, n = 1,2, \ldots. \qquad (3.5)$$

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(n\Omega_0 t)\, dt \,, n = 1,2, \ldots$$

(3.6)

Παράδειγμα:

Θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο το σήμα με πριν. Ζητάμε λοιπόν να

αναλυθεί σε τριγωνομετρική σειρά Fourier το σήμα $x_{(t)} = e^{-t}$,
$0 \leq t \leq 3$. Θα υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς συντελεστές Fourier b_n, c_n σύμφωνα με τις σχέσεις (3.4) (3.5) (3.6) για $n = 1{,}2, \ldots ,200$.

```
T=3;
t0=0;
w=2*pi/T;
syms t
x=exp(-t);
```

Ορίζουμε τα $t_0 = 0$, $T = 3$, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

```
a0=(1/T)*int(x,t,t0,t0+T);

for n=1:200
b(n)=(2/T)*int(x*cos(n*w*t)t,t0,t0+T);
end
for n=1:200
c(n)=(2/T)*int(x*sin(n*w*t),t,t0,t0+T);
```

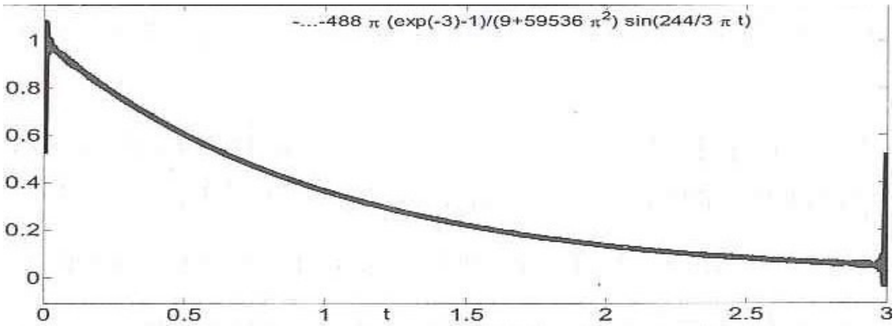
Υπολογίζουμε τους συντελεστές της τριγωνομετρικής ΣΦ σύμφωνα με τις σχέσεις (3.4) ως (3.6)

```
k=1:200
x=a0+sum(b.*cos(k*w*t))+sum(c.*sin(k*w*t))
```

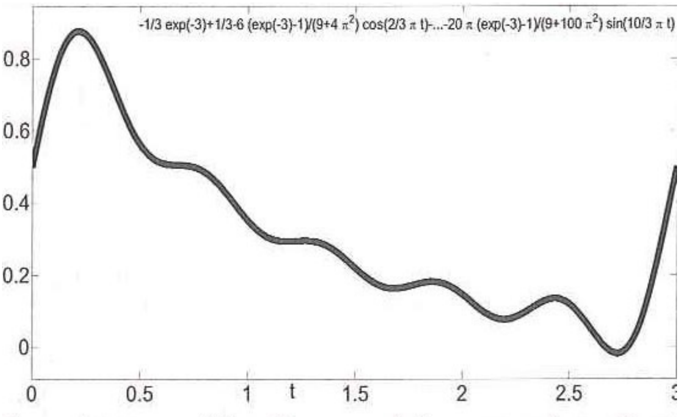
```
ezplot(xx,[0 3]);
```

Προσεγγίζουμε το $\chi(t)$μέσω της σχέσης (3.3)

Σχεδιάζουμε το σήμα που έχουμε υπολογίσει μέσω των συντελεστών της τριγωνομετρικής ΣΦ.



Παρατηρούμε ότι για n=200 όρους έχουμε μια καλή προσέγγιση του σήματος.
Ας δούμε όπως κάναμε και πριν την μορφή που θα έχει το σήμα όταν προσεγγίζουμε με λιγότερους όρους. Προσέγγιση με 5 όρους $(n = 1, \dots ,5)$



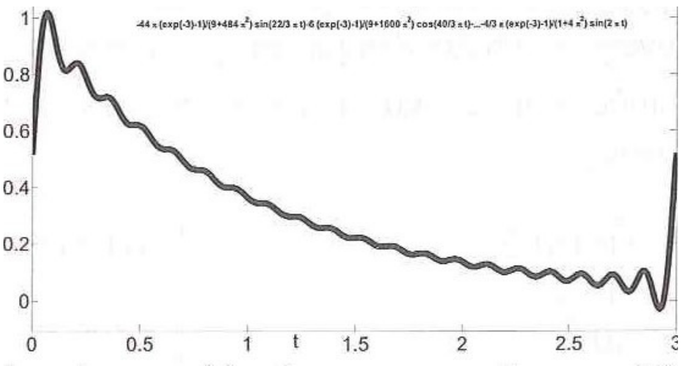

```
for n=1:5
b(n)=(2/T)*int(x*cos(n*w*t)
,t,t0,t0+T);
end
for n=1:5
c(n)(2/T)*int(x*sin(n*w*t),
t,t0,t0+T);
end
k=1:5;
xx=a0+sum(b.*cos(k*w*t))+sum(c.*sin(k*w*t));
ezplot(xx,[0 3]);
```

Με 5 όρους παρατηρούμε ότι το σήμα είναι πολύ μακριά από την τριγωνομετρική ΣΦ

Προσέγγιση με 20 όρους

```
for n=1:20
b(n)=(2/T)*int(x*cos(n*w*t),t,t0,t0+T);
end
for n=1:20
c(n)=(2/T)*int(x*sin(n*w*t),t,t0,t0+T);
end
k=1:20;
xx=a0+sum(b.*cos(k*w*t))+sum(c.*sin(k*w*t));
```

$(n = 1, \dots ,2$



Το σήμα είναι πιο κοντά στην τριγωνομετρική ΣΦ αφότου χρησιμοποιήσαμε 20 όρους.

3.3 Σειρά Fourier σε μορφή αθροίσματος συνημιτόνων

Μια τρίτη μορφή της σειράς Fourier που προκύπτει με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας
$\boldsymbol{b_k \cos(k\Omega_0 t) + c_k \sin(k\Omega_0 t) = A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)}$. Εδώ το σήμα

$x(t)$ (που ορίζεται σε ένα πεπερασμένο χρονικά διάστημα $[t_0, t_0 + T]$)
Αναλύεται σύμφωνα με την σχέση

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 + \theta_\kappa) \quad (3.7)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα $x(t)$ έχει αναλυθεί σε ένα άθροισμα συνημίτονων, κάθε ένα από τα οποία έχει διαφορετικό πλάτος και φάση. Τα a_0, A_k, θ_κ, προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt.$$

$$A_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2}, k = 1,2, \dots \dots \quad (3.9)$$

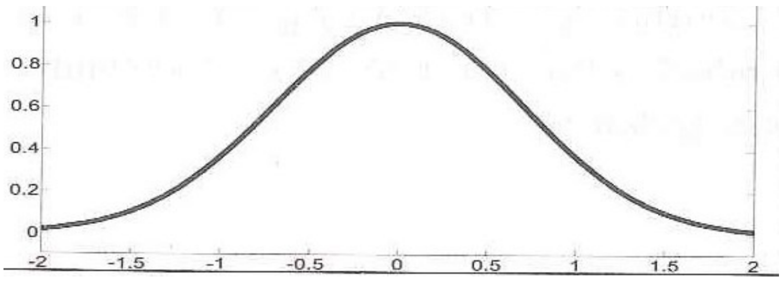
$$\theta_k = -tan^{-1}\left(\frac{c_k}{b_k}\right), k = 1,2, \dots \quad (3.10)$$

Παράδειγμα:

Ζητάμε να αναλυθεί σε σειρά Fourier της μορφής αθροίσματος συνημιτόνων το σήμα $x(t) = e^{-t^2} \quad , -2 \leq t \leq 2$.

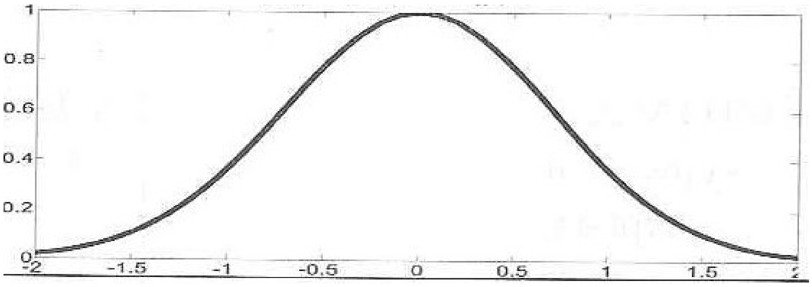
Αρχικά θα σχεδιάσουμε το σήμα ώστε να έχουμε μέτρο σύγκρισης. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές $\alpha_0, b_n, \ c_n$ της τριγωνομετρικής σειράς Fourier και σχεδιάζουμε το σήμα που προκύπτει σύμφωνα με αυτούς

```
T=4;
t0=-2;
w=2*pi/T;
syms t
x= exp(-t^2);
```



Ορίζουμε τα $t_0 = 0, \ T = 3, \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ και το σήμα $x(t)$

```
k=1:100;
A=sqrt(b.^2+c.^2);
thita=-atan(c./b);
xx=a0+sum(A.*cos(k*w*t+thita))
xtc=subs(xx,t,t0:.1:t0+t);
plot(-2:.1:2,xtc)
```

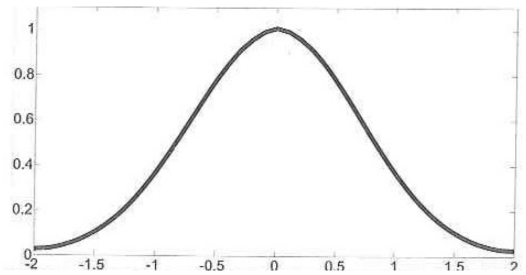


Υπολογίζουμε τους συντελεστές της τριγωνομετρικής ΣΦ σύμφωνα με τις σχέσεις (3.4) ως (3.6) και προσεγγίζουμε και σχεδιάζουμε το σήμα σύμφωνα με την σχέση (3.3).

Σημείωση:
Δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε την εντολή for. Είναι προγραμματιστικά σωστό να αποφεύγεται η χρήση βρόγχου επανάληψης (loop).

Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές $\alpha_0, b_n,\ c_n$ της τριγωνομετρικής σειράς Fourier μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τα πλάτη A_k και τις φάσεις θ_k της μορφής αθροίσματος συνημίτονων και στη συνέχεια να προσεγγίσουμε το σήμα $x(t)$ από τη μορφή αθροίσματος συνημίτονων της σειράς Fourier.

```
k=1:100
A=sqrt(b.^2+c.^2);
thita=-atan(c./b);
xx=a0+sum(A.*cos(k*w*t+thita))
xtc=subs(xx,t,t0:.1:t0+T);
plot(-2:.1:2,xtc)
```

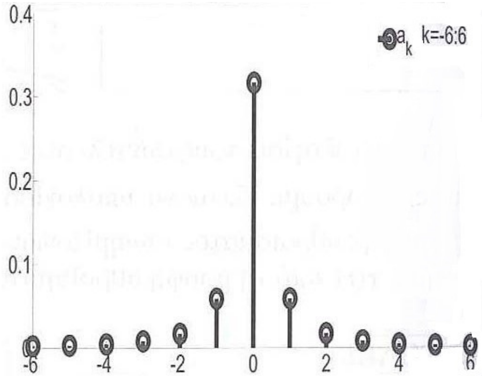


Υπολογίζουμε τα πλάτη και τις φάσεις σύμφωνα με τις σχέσεις (3.9) και (3.10) και αναπτύσσουμε το σύμφωνα με την (3.7).
Παρατηρούμε ότι τα τρία σχήματα είναι ίδια, επομένως η τρίτη μορφή σειράς Fourier, αυτή του αθροίσματος συνημιτόνων είναι ισοδύναμη με τις δύο προηγούμενες.

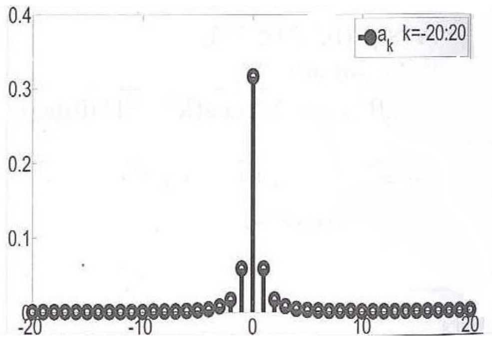
3.4 Σχεδίαση των συντελεστών της σειράς Fourier

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να σχεδιάσουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier ενός σήματος $x(t)$. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε τον τρόπο που μπορούμε να το πραγματοποιήσουμε. Ας δοκιμάσουμε σχεδιάσουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t) = e^{-t}\ , 0 \leq t \leq e$. Ας ξεκινήσουμε με τους συντελεστές a_k της εκθετικής σειράς Fourier.

```
syms t k n
x=exp(-t)
t0=0;
T=3;
w=2*pi/T;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
k1=-6:6;
ak=subs(a,k,k1);
stem(k1,ak);
legend('a k k=-6:6')
```

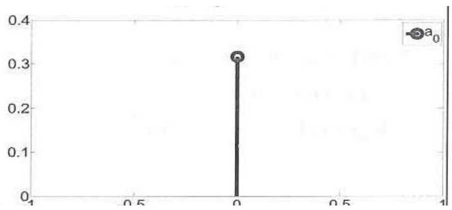



```
k2=-20:20;
ak2=subs(a,k,k2);
stem(k2,ak2);
legend('a_k k=-20:20')
```



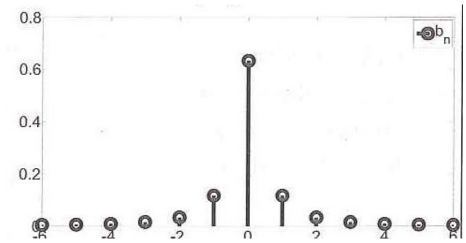
Συνεχίζουμε με τους συντελεστές α_0, b_n, c_n της τριγωνομετρικής σειράς Fourier. Ο συντελεστής α_0

```
a0=(1/T)*int(x,t0,t0+T)
stem(0,eval(a0));
```

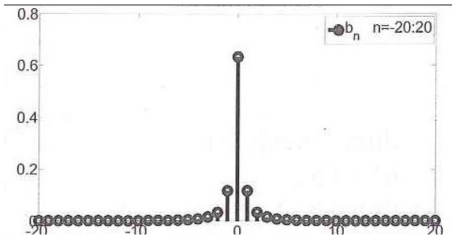


Οι συντελεστές b_n

```
b=(2/T)*int(x*cos(n*w*t),t,t0,t0+T)
n1=-6:6
bn=subs(b,n,n1);
stem(n1,bn);
legend('b n')
```

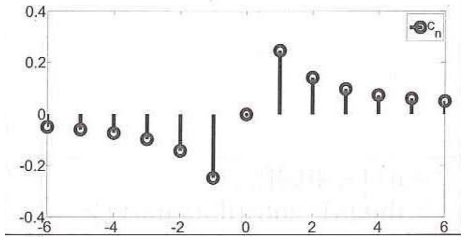



```
n11= -20:20
bn1=subs(b,n,n11);
stem(n11,bn1);
legend('b_n n=-20:20')
```

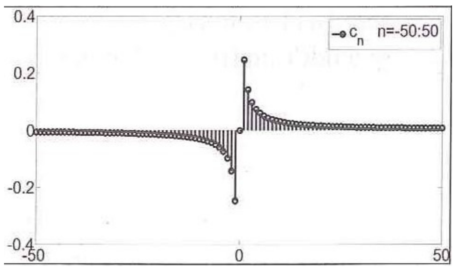


Οι συντελεστές c_n

```
c=(2/T)*int(x*sin(n*w*t),t,t0,t0+T);
n2=-6:6;
cn=subs(c,n,n2);
stem(n2,cn);
legend('c_n')
```



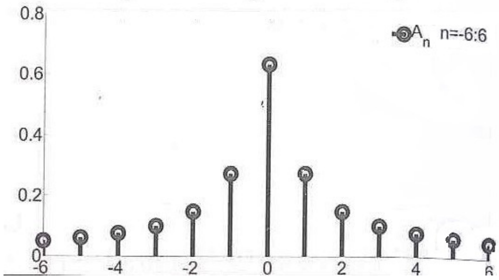

```
n21=-50:50
cn1=subs(c,n,n21);
stem(n21,cn1);
legend('c_n  n=-50:50')
```



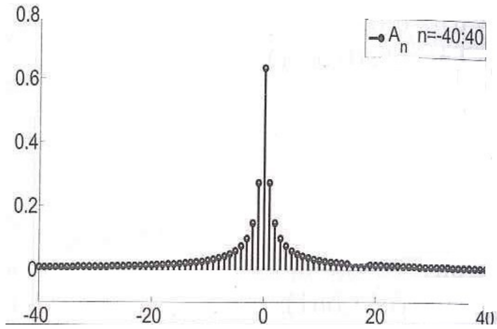
Ας δούμε και τους συντελεστές A_k και θ_k της μορφής αθροίσματος συνημίτονων.

Τα πλάτη των συνημίτονων A_k.

```
A=sqrt(b^2+c^2);
n1=-6:6;
An=subs(A,n,n1);
stem(n1,An);
legend('A_n   n=-6:6')
```

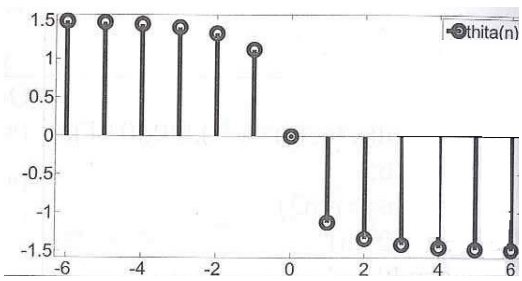



```
n11=-40:40;
An1=subs(A,n,n11);
stem(n11,An1);
legend('A_n   n=-40:40')
```

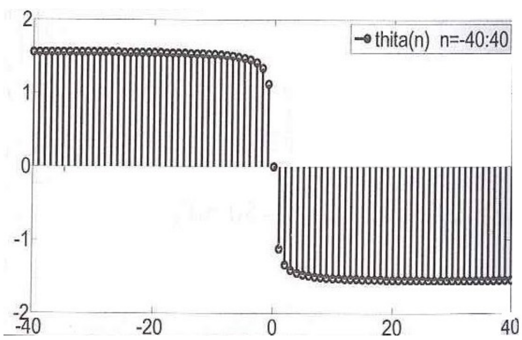


Οι φάσεις θ_k των συνημίτονων.

```
thita=-atan(c/b)
n1=-6:6
thitan=subs(thita,n,n1);
stem(n1,thitan);
```




```
n11=-40:40;
thitan1=subs(thita,n,n11);
stem(n11,thitan1);
legend('thita(n)   n=-40:40)
```



3.5 Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων

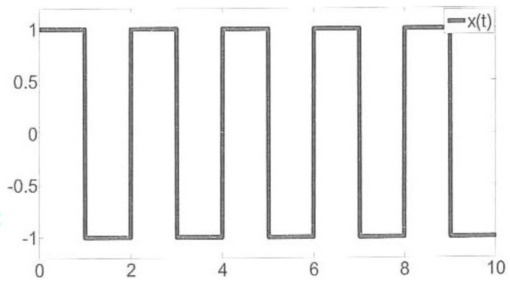
Μέχρι τώρα ορίσαμε το ανάπτυγμα στην σειρά Fourier ενός σήματος σε ένα διάστημα $[t_0, t_0 + T]$. Εκτός από το διάστημα αυτό η σειρά Fourier δεν συγκλίνει κατ' ανάγκην στο σήμα $x(t)$. Ας δούμε όμως τι γίνεται εάν το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T, εάν δηλαδή $x(t) = x(t + T)$. Σε αυτή την περίπτωση, η σειρά Fourier είναι περιοδική με περίοδο ίση με την περίοδο του σήματος, άρα συγκλίνει στο $x(t)$ σε όλο το διάστημα $-\infty < t < +\infty$

Παράδειγμα:
Να αναλυθεί στις τρεις μορφές της σειράς Fourier το περιοδικό σήμερα που σε μία περίοδο εκφράζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 1 & ,0 \le t \le 1 \\ -1 & ,1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Αρχικά ας σχεδιάσουμε το σήμα $x(t)$ σε χρόνο πέντε περιόδων ώστε να έχουμε μια εικόνα.

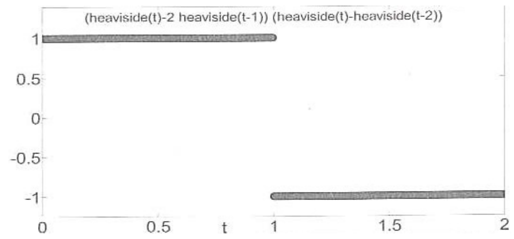
```
t1=0:.01:1;
t2=1.01:.01:2;
x1=ones(size(t1));
x2=-ones(size(t2));
xp=[x1 x2];
t=linspace(0,10,length(xp));
plot(t,xp)
```



Στη συνέχεια θα πρέπει να εκφράσουμε την δίκλαδη συνάρτηση $x(t)$ ως μία ενιαία συμβολική έκφραση. Η έκφραση αυτή είναι

$x(t) = [u(t) - 2u(t-1)][u(t) - u(t-2)]$, όπου $u(t)$ η βηματική συνάρτηση.Ας σχεδιάσουμε το σήμα μας σε χρόνο μιας περιόδου T = 2 για επιβεβαίωση.

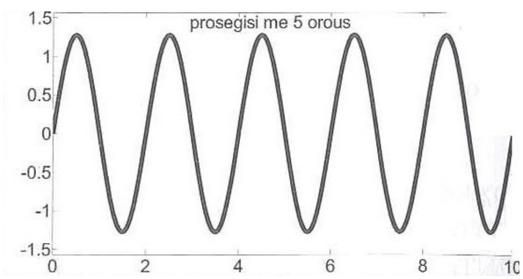
```
syms t
x=(heaviside(t)-2*(heaviside(t-
l))*(heaviside(t)-heavyside(t-2));
ezplot(x,[0 2]
```



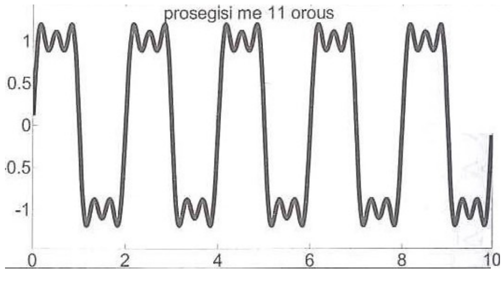
Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές a_k της εκθετικής σειράς Fourier και ας δούμε την προσέγγιση που θα έχουμε για το σήμα ανάλογα με τον αριθμό των όρων σειράς Fourier που χρησιμοποιούμε.

```
k=-2:2
t0=0;
T=2;
w=2*pi/T;

a=(1/T)*int(x*exp(-i*k*w*t),
t,t0,t0+T)
xx=sum(a.exp(j*k*w*t))
ezplot(xx,[0 10])
title('prosegisi me 5 orous')
```

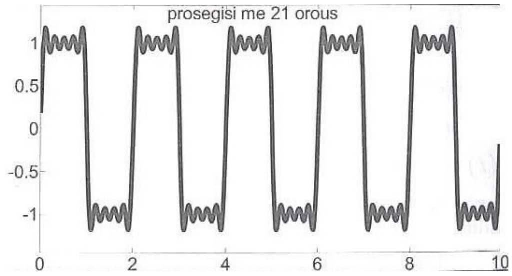
```
a=

[0,  @*i/pi,   0,   -2*i/pi,  0]
```



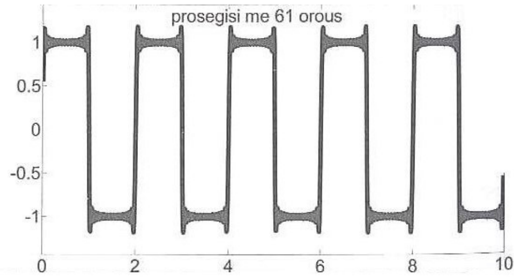

```
k=-5:5;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
xx=sum(a.exp(j*k*w*t));
ezplot(xx,[0 10]
title('prosegisi me 11 orous')
```



```
k=-10:10
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
xx=sum(a.*exp(j*k*w*t));
ezplot(xx,[0 10])
title('prosegisi me 21 orous')
```

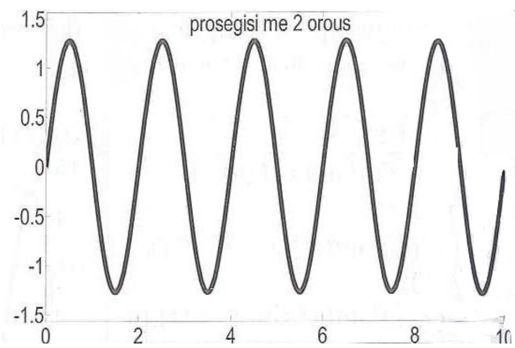



```
k=-30:30;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
xx=sum(a.*exp(j*k*w*t));
ezplot(xx,[0 10])
title('prosegisi me 61 orous')
```

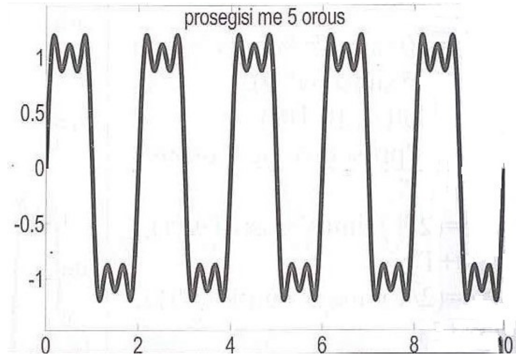


Ας δούμε την προσέγγιση σύμφωνα με τη μορφή αθροίσματος συνημίτονων της σειράς Fourier. Έχουμε ήδη υπολογίσει τα a_0, b_k, c_k για $k = 1 : 40$ επομένως μπορούμε απευθείας να περάσουμε στον υπολογισμό των Πλατών A_k και των φάσεων θ_k.

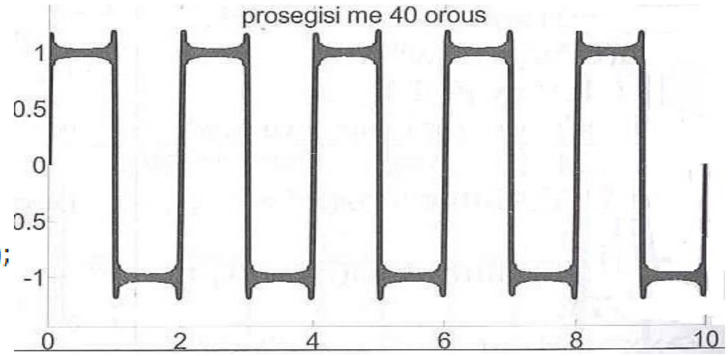
```
>> for n=1:2
A(n)=sqrt(b(n)^2+c(n)^2);
thita(n)=-atan(c(n)/b(n));
end
>> k=1:2;
>>xx=a0+sum(A.*cos(k*w*t+
thita))
>> ezplot(xx,[0 10])
>> title('prosegisi me 2 orous')
```



```
for n=1:5
A(n)=sqrt(b(n)^2+c(n)^2);
thita(n)=-atan(c(n)/b(n));
end
k=1:5;
xx=a0+sum(A.*cos(k*w*t+thita));
ezplot(xx,[0 10])
title('prosegisi me 5 orous')
```




```
for n=1:40
A9n)=sqrt(b(n)^2+c(n)^2);
thita(n)=-atan(c(n)/b(n));
end
k=1:40;
xx=a0+sum(A.*cos(k*w*t+thita));
ezplot(xx,[0 10])
title('prosegisi me 40 orous')
```



Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στις προσεγγίσεις που κάναμε με όλες τις μορφές σειράς Fourier, υπάρχει μια ταλάντωση του σήματος στα σημεία ασυνέχειας αυτού. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φαινόμενο Gibbs. Όταν ο αριθμός Ν των συχνοτήτων που προσεγγίζουμε το σήμα γίνεται άπειρο, τότε το φαινόμενο Gibbs πάυει να υφίσταται, δηλαδή η προσέγγιση μας είναι τέλεια. Αναφέρουμε ότι το πλάτος των ταλαντώσεων είναι ανεξάρτητο του πλήθος των συχνοτήτων που συνεισφέρουν στην προσέγγιση του σήματος $x(t)$. Σε αντίθεση με το πλάτος των ταλαντώσεων που παραμένει αναλλοίωτο όσο το Ν αυξάνεται, το εύρος της περιοχής, στην οποία εντοπίζονται ταλαντώσεις, όσο το Ν τείνει στο μηδέν.

3.6 Σειρά Fourier για άρτια και περιττή συμμετρία

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τι συμβαίνει με τους συντελεστές της σειράς Fourier ανάλογα με το είδος συμμετρίας που έχει το σήμα $x(t)$.

3.6.1 Άρτια συμμετρία

Στην περίπτωση που έχουμε άρτια συμμετρία για το σήμα $x(t)$ ισχύει : $x(-t) = x(t)$. Τότε οι συντελεστές c_k της τριγωνομετρικής σειράς Fourier του σήματος είναι μηδενικοί. Για να το αποδείξουμε θα υπολογίσουμε τους συντελεστές c_k ενός άρτιου σήματος σε χρόνο μιας περιόδου $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος υπολογίζουμε τους c_k για $t < 0$ δηλαδή το $x(-t)$ στο χρόνο $[-T/2, 0]$. Λόγω άρτιας συμμετρίας όμως $x(-t) = x(t)$. Επομένως έχουμε:

```
syms xt k T
w=2*pi/T
c 1=(2/T)*int(x*sin(l*w*t),t,-T/2,0;
```

```
c 1=
x*(-1+cos(k*pi))/k/pi
```

Στη συνέχεια υπολογίζομαι τους c_k στο χρόνο $[0,\frac{T}{2}]$ και αθροίζουμε τα δύο μέρη για να βρούμε τους c_k

```
c2=(2/T)*int(x*sin(k*w*t),t,t0,t0+T/2);
c=c1+c2
```

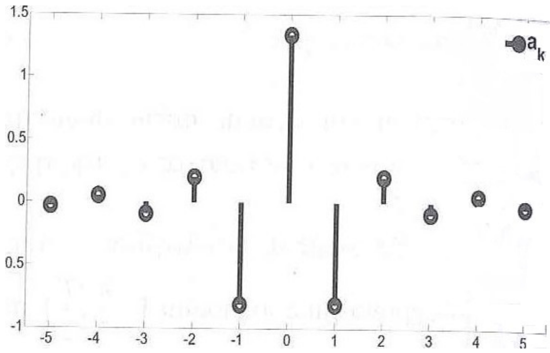
```
c2=
-x*(-1+cos(k*pi))/k/pi

c=0
```

Δείξαμε ότι όντως όταν έχουμε άρτια συμμετρικό σήμα οι συντελεστές c_k της τριγωνομετρικής σειράς Fourier είναι μηδενικοί.

Για τους συντελεστές a_k της εκθετικής σειράς Fourier στην περίπτωση άρτιας συμμετρίας του σήματος $x(t)$ ισχύει $a_k = a_{-k}$, δηλαδή έχουν και αυτοί άρτια συμμετρία.

Για να το αποδείξουμε ας υπολογίσουμε τους πρώτους 10 συντελεστές a_k του σήματος που σε μία περίοδο ορίζεται ως $x(t) = t\ , -2 \leq t \leq 2$. Το $x(t)$ είναι ξεκάθαρο ότι πρόκειται για ένα σήμα με άρτια συμμετρία.

```
t0=-2;
T=4;
w=2*pi/T;
syms t
x=t^2;
k=-5:5;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
stem(k,eval(a))
legend('a_k')
```



Βλέπουμε ότι οι συντελεστές a_k της εκθετικής σειράς Fourier στην περίπτωση άρτιας συμμετρίας του σήματος $x(t)$ έχουν και αυτοί άρτια συμμετρία, δηλαδή $a_k = a_{-k}$.

3.6.2 Περιττή συμμετρία

Στην περίπτωση που έχουμε περιττή συμμετρία για το σήμα $x(t)$ ισχύει $x(-t) = x(t)$. Τότε οι συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς Fourier b_k του σήματος είναι μηδενικοί. Για να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση θα υπολογίσουμε όπως και πριν τους συντελεστές b_k ενός περιττού σήματος σε χρόνο μίας περιόδου $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος υπολογίζουμαι τους b_k για $t < 0$ δηλαδή το $x(-t)$ στο χρόνο $[-\frac{T}{2}, 0]$. Λόγω άρτιας συμμετρίας όμως $x(-t) = -x(t)$. Επομένως:

```
syms x t k T                          b1=
w=2*pi/T;
b1=(2/T)*int(-x*cos(k*w*t,t,-T/2,0    -sin(k*pi)*x/k/pi
```

Στη συνέχεια υπολογίζομαι τους b_k στο χρόνο $[0, \frac{T}{2}]$ και αθροίζουμε τα δύο μέρη για να βρούμε τους b_k.

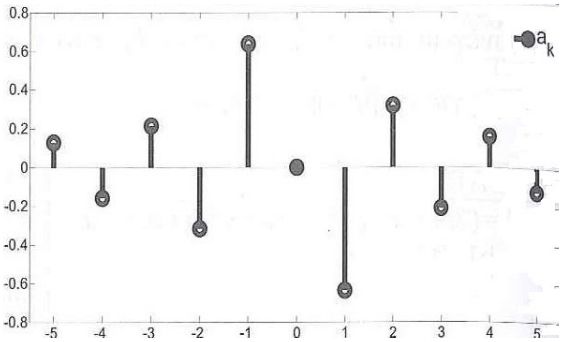
```
                                      b2=

                                      sin(k*pi)*x/k/pi

b2=(2/T)*int(x*cos(k*w*t),t,t0,T/2)   b=0
b=b1+b2
```

Δείξαμε ότι όντως όταν έχουμε περιττά συμμετρικό σήμα οι συντελεστές b_k της τριγωνομετρικής σειράς Fourier είναι μηδενικοί. Για τους συντελεστές a_k της εκθετικής σειράς Fourier στην περίπτωση περιττής συμμετρίας του σήματος $x(t)$ ισχύει $a_k = -a_{-k}$, δηλαδή έχουν και αυτοί περιττή συμμετρία. Για να το αποδείξουμε ας υπολογίσουμε τους πρώτους 10 συντελεστές a_k του σήματος που σε μια περίοδο ορίζεται ως $x(t) = t$, $-2 \leq t \leq 2$. Εδώ λοιπόν έχουμε ένα σήμα με περιττή συμμετρία.

```
t0=-2;
T=4;
w=2*pi/T;
syms t;
x=t;
k=-5:5;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);

stem(k,imag(eval(a)))
legend('a_k')
```

```
a=

[2/5*i*pi, -1/2*i/pi,
2/3*i/pi , -i/pi, 2*i/pi,
-2*i/pi, i/pi, -2/3*i/pi,
1/2*i/pi, -2/5*i/pi]
```

Βλέπουμε λοιπόν ότι πρόκειται για μιγαδικούς αριθμούς με περιττή συμμετρία και μηδενικό πραγματικό μέρος. Σχεδιάζουμε το φανταστικό μέρος για να γίνει εμφανείς η περιττή συμμετρία.



Βλέπουμε ότι οι συντελεστές α_κ της εκθετικής σειράς Fourier στην περίπτωση περιττής συμμετρίας του σήματος $x(t)$ έχουν και αυτοί περιττή συμμετρία, δηλαδή $a_k = -a_{-k}$. Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι εάν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και άρτιο τότε τα a_k είναι πραγματικά και άρτια , ενώ εάν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και περιττό τότε τα a_k είναι φανταστικά και περιττά.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ο στόχος της πτυχιακής εργασίας μου ήταν η εκμάθηση και η εκβάθυνση των σειρών Fourier, αλλά και η απόδειξη της πρακτικής τους εφαρμογής στην καθημερινή ζωή και στην επιστήμη. Οι σειρές Fourier δεν είναι μια ανακάλυψη που κάποτε ήταν χρήσιμη. Ακόμη και σήμερα, είναι εξαιρετικά χρήσιμη για να διευκολύνει την καθημερινότητα του ανθρώπου αλλά και να βοηθήσει στην περαιτέρω εξέλιξη των επιστημών που θα φέρουν κι άλλα επιτεύγματα τα οποία θα κάνουν το αύριο ευκολότερο από το σήμερα και το χθες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΗ :

JW Cooley, JW Tukey – Mathematics of computation **'An Algorithm for the machine calculation of complex – Fourier series'** (Apr., 1965)

H. Dym, H.P. McKean **'Fourier series and integrals'** (Jan., 1973)

MR Spiegel **'Advanced mathematics for Engineers and Scientists'** (1971)

A. Papoulis **'Signal analysis'** (1977)

ΕΛΛΗΝΙΚΗ :

Ι. Τσακνάκης, Α. Φλώρος **'Εισαγωγή στις τεχνολογίες της πληροφορικής και των επικοινωνιών'** Εκδόσεις Κλειδάριθμος (2007)

ΜΗ Hayes – Σειρά SCHAUM **'Ψηφιακή επεξεργασία σήματος'** Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ (2014)

Α Παλαμίδης, Α Βελώνη **'Σήματα και συστήματα με matlab'** Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ (2004)