

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας



Τμήμα Μηχανολογίας και
Υδάτινων Πόρων

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

ΥΦΑΝΤΗΣ ΒΛΑΣΙΟΣ Α.Μ. 11617

ΚΡΙΘΥΜΟΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑΣ Α.Μ. 11480

Επιβλέπων Καθηγητής: Ε.Ε. Τζιρτζιλάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2017



ΔΗΛΩΣΗ ΚΑΤΑΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΘΕΣΗΣ ΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ

ΕΠΩΝΥΜΟ	ΟΝΟΜΑ	ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΡΟΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΟΝΙΜΗΣ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ	ΤΗΛΕΦΩΝΟ	E-MAIL
ΣΧΟΛΗ	ΤΜΗΜΑ	

1. Με την υπογραφή αυτής της άδειας, ως κάτοχος των πνευματικών δικαιωμάτων παραχωρώ στη Βιβλιοθήκη του ΤΕΙ Δυτικής Ελλάδος το μη-αποκλειστικό δικαίωμα αναπαραγωγής, μεταφοράς (όπως ορίζεται παρακάτω) και/ή διανομής της υποβληθείσας εργασίας μου (συμπεριλαμβανομένης της περίληψης) διεθνώς σε έντυπη και ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, συμπεριλαμβανομένων, αλλά χωρίς αυτό να είναι περιοριστικό, ήχου ή βίντεο.

2. Συμφωνώ πως το ΤΕΙ Δυτικής Ελλάδος μπορεί, χωρίς να αλλάξει το περιεχόμενο, να μεταφέρει την υποβληθείσα εργασία σε οποιοδήποτε μέσο ή μορφή για λόγους συντήρησης.

3. Συμφωνώ, επίσης, πως το ΤΕΙ Δυτικής Ελλάδος μπορεί να τηρεί περισσότερα από ένα αντίγραφα της υποβληθείσας εργασίας για λόγους ασφαλείας και συντήρησης.

4. Δηλώνω πως η υποβληθείσα εργασία είναι γνήσιο έργο μου, και πως έχω το δικαίωμα να παραχωρώ τα δικαιώματα που αναφέρονται στην παρούσα άδεια. Βεβαιώνω ότι το σύνολο της εργασίας μου αποτελεί πρωτότυπο έργο, παραχθέν από εμένα, και δεν παραβιάζει κάθε δικαίωμα άλλου δημιουργού καθ' οιονδήποτε τρόπο. Δηλώνω επίσης υπεύθυνα ότι για τις ενέργειες της κατάθεσης της εργασίας μου υπάρχει ενημέρωση και συμφωνία του φορέα χορήγησης υποτροφίας ή οποιαδήποτε άλλης μορφής οικονομικής στήριξης της εκπόνησής της και ότι έχω εκπληρώσει οποιοδήποτε δικαίωμα αναθεώρησης ή άλλες υποχρεώσεις που απαιτούνται από τέτοιες συμβάσεις ή συμφωνίες.

5. Εάν η υποβληθείσα εργασία περιέχει υλικό για το οποίο δεν κατέχω τα πνευματικά δικαιώματα, βεβαιώνω πως έχω λάβει τη χωρίς περιορισμούς άδεια του κατόχου των πνευματικών δικαιωμάτων να παραχωρήσω στο ΤΕΙ Δυτικής Ελλάδος τα δικαιώματα που απαιτούνται από αυτήν την άδεια, και πως τέτοιο υλικό τρίτων είναι ευδιάκριτο και αναγνωρίζεται στο κείμενο ή το περιεχόμενο της υποβληθείσας εργασίας.

6. Το ΤΕΙ Δυτικής Ελλάδος αναλαμβάνει να προσδιορίσει ευδιάκριτα το όνομα σας ως συγγραφέα (συγγραφέων) ή κατόχου (κατόχων) της υποβληθείσας εργασίας, και δε θα κάνει καμία αλλαγή στην ανωτέρω, εκτός από αυτές που επιτρέπει ρητώς αυτή η άδεια.

...../...../201.....

Ο Καταθέτης

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Παρούσα πτυχιακή εργασία αναφέρεται στις υπολογιστικές τεχνικές για ρευστομηχανική. Οι στόχοι της εργασίας αυτής είναι για την κατανόηση της υπολογιστικής ρευστομηχανικής καθώς τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της. Παρέχει μια εκπόνηση της υπολογιστικής ρευστομηχανικής με έμφαση της σχέσης κόστους-αποτελεσματικότητας στο σχεδιασμό. Έν συνεχεία αναφέρονται μερικές διαφορικές εξισώσεις όπου θα αναπτυχθούν οι διαδικασίες για την ταξινόμηση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους όπως οι ελλειπτικές , οι παραβολικές ή οι υπερβολικές. Επίσης, αναφέρεται στις προκαταρτικές υπολογιστικές τεχνικές, που απαιτούνται για να λύσουν τα προβλήματα ροής.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός αυτής της πτυχιακής είναι η μελέτη της εφαρμοσμένης μηχανικής, των επιστημών και των εφαρμοσμένων μαθηματικών στις συγκεκριμένες τεχνικές και το πλαίσιο για την ανάπτυξη δεξιοτήτων στη χρήση τους, που έχουν αποδειχθεί αποτελεσματικές στους διάφορους κλάδους της υπολογιστικής δυναμικής ρευστού (CFD). Σε αυτή την πτυχιακή περιγράφουμε τόσο τις θεμελιώδεις όσο και τις γενικές τεχνικές που σχετίζονται με κλάδους της ροής ρευστού. Υπάρχουν συγκεκριμένες τεχνικές που ισχύουν για τις διάφορες κατηγορίες συμπεριφοράς ροής μηχανικής, πολλές από τις οποίες είναι επίσης κατάλληλες για τη μεταφορά θερμότητας μέσω μεταφοράς.

Ένα θεμελιώδες θέμα του κειμένου είναι ότι οι ανταγωνιστικές συνθέσεις που είναι κατάλληλες για υπολογιστική ρευστοδυναμική, π.χ. η πεπερασμένη διαφορά, το πεπερασμένο στοιχείο, ο πεπερασμένος όγκος και οι φασματικές μέθοδοι, είναι στενά συνδεδεμένες και μπορούν να ερμηνευθούν ως μέρος μιας ενοποιημένης δομής. Η εμπειρία στην τάξη δείχνει ότι αυτή η προσέγγιση βοηθά σημαντικά στην απόκτηση βαθύτερης κατανόησης των δυνατών και αδύνατων δυνατοτήτων των εναλλακτικών υπολογιστικών μεθόδων.

Στην παρούσα Πτυχιακή εργασία γίνεται μία εισαγωγή στους διάφορους τύπους φυσικών προβλημάτων καθώς και οι κατηγορίες στις οποίες ταξινομούνται. Στην συνέχεια γίνεται μία εισαγωγική παρουσίαση βασικών μεθόδων πεπερασμένων διαφορών. Δίνονται απλά παραδείγματα για διάφορα φυσικά προβλήματα καθώς και διάφορα σχήματα διακριτοποίησης. Τέλος εφαρμόζεται και παρουσιάζεται πρόγραμμα σε γλώσσα προγραμματισμού fortran το οποίο επιλύει το πρόβλημα διάδοσης θερμότητας σε μία ράβδο χρησιμοποιώντας ένα κλασσικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
1.1 Υπολογιστική Ρευστομηχανική: Εισαγωγή	1
1.2 Πλεονεκτήματα της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής	1
1.3 Τυπικά πρακτικά προβλήματα	9
1.3.1 Πολύπλοκη Γεωμετρία, Απλή Φυσική	9
1.3.2 Απλούστερη Γεωμετρία , Περισσότερο πολύπλοκη Φυσική	10
1.3.3 Απλή γεωμετρία, Πολύπλοκη Φυσική	11
1.4 Δομή Εξίσωσης	14
1.5 Επισκόπηση της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής	18
1.6 Περαιτέρω γνώση.....	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	22
2.1 Μερικές διαφορικές εξισώσεις	22
2.2 Ιστορικό	22
2.2.1 Η φύση ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος	24
2.2.3 Ταξινόμηση με την μέθοδο των χαρακτηριστικών	26
2.2.4 Συστήματα εξισώσεων	30
2.2.5 Ταξινόμηση κατά την ανάλυση Fourier	35
2.3 Υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις	37
2.3.1 Ερμηνεία χαρακτηριστικών.....	38
2.3.2 Φυσική Ερμηνεία	39
2.3.3 Κατάλληλες συνοριακές (και αρχικές) συνθήκες.....	40
2.4 Παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.....	43
2.4.1 Ερμηνεία χαρακτηριστικών.....	43
2.4.2 Φυσική Ερμηνεία	44
2.4.3 Κατάλληλες συνοριακές (και αρχικές) συνθήκες.....	44
2.5 Συμπεράσματα	45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	46

3.1 Προκαταρκτικές υπολογιστικές τεχνικές	46
3.2 Διακριτοποίηση	47
3.2.1 Μετατροπή των παραγώγων σε διακριτές αλγεβρικές εκφράσεις	47
3.2.2 Χωρικές παράγωγοι	49
3.2.3 Χρονικές παράγωγοι	50
3.3 Προσέγγιση παραγώγων	51
3.3.1 Ανάπτυγμα σειράς Taylor.....	51
3.3.2 Γενική τεχνική.....	53
3.3.3 Ασύμμετρος τύπος τριών σημείων για την $[\partial \bar{T} / \partial x]_j^n$	55
3.4 Ακρίβεια διακριτοποίησης	56
3.4.1 Τύποι υψηλότερης τάξης έναντι τύπων χαμηλότερης τάξης	60
3.4.2 Αναπαράσταση κυμάτων	62
3.4.3 Σημασία της πυκνότητας του πλέγματος.....	63
3.4.4 Ακρίβεια της αναπαράστασης των κυμάτων.....	64
3.4.5 Ακρίβεια των τύπων υψηλότερης τάξης.....	66
3.5 Μέθοδος πεπερασμένη διαφοράς	67
3.5.1 Εννοιολογική εφαρμογή	67
3.6 Συμπεράσματα	74
BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Υπολογιστική Ρευστομηχανική: Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό παρέχει μια επισκόπηση της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής με έμφαση στη σχέση κόστους-αποτελεσματικότητας στο σχεδιασμό. Μερικές αντιπροσωπευτικές εφαρμογές που περιγράφονται για να δείξουν για το τι είναι ικανή η Υπολογιστική Ρευστομηχανική. Η τυπική δομή των εξισώσεων που διέπουν την δυναμική των ρευστών επισημαίνεται και ο τρόπος με τον οποίο αυτές οι εξισώσεις μετατρέπονται σε αλγόριθμους εκτελέσιμους σε υπολογιστή. Τέλος, εφίσταται η προσοχή σε ορισμένες από τις σημαντικές πηγές για περαιτέρω πληροφορίες

1.2 Πλεονεκτήματα της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής

Η δημιουργία της επιστήμης της μηχανικής των ρευστών και την πρακτική εφαρμογή αυτής της επιστήμης ήταν σε εξέλιξη από την εποχή του Νεύτωνα. Η θεωρητική ανάπτυξη της δυναμικής των ρευστών επικεντρώνεται στην κατασκευή και την επίλυση των εξισώσεων που διέπουν για τις διάφορες κατηγορίες της δυναμικής των ρευστών και τη μελέτη των διαφόρων προσεγγίσεων για αυτές τις εξισώσεις.

Οι εξισώσεις για την Νευτώνεια δυναμική των ρευστών, και οι ασταθείς εξισώσεις Navier-Stokes έχουν γίνει γνωστές εδώ και 150 χρόνια ή και περισσότερο. Ωστόσο, η ανάπτυξη των μειωμένων μορφών των εξισώσεων αυτών εξακολουθεί να είναι μια ενεργή περιοχή έρευνας, όπως είναι το πρόβλημα για τις ταραχώδεις αναταράξεις των εξισώσεων του Reynolds και του Navier-Stokes. Για μη Νευτώνεια ρευστοδυναμική, που αντιδρούν χημικά και τα δύο ρεύματα φάσης η θεωρητική ανάπτυξη είναι σε λιγότερο προχωρημένο στάδιο.

Η πειραματική ρευστοδυναμική έχει παίξει σημαντικό ρόλο στην επικύρωση και οριοθέτηση των ορίων των διαφόρων προσεγγίσεων για τις εξισώσεις. Η αεροδυναμική σήραγγα, ως ένα κομμάτι του πειραματικού εξοπλισμού, παρέχει και αποτελεσματικό μέσο για την προσομοίωση πραγματικών ροών. Παραδοσιακά αυτό παρέχει μια οικονομικά αποδοτική εναλλακτική λύση για την μέτρηση της πλήρους κλίμακας, ως μέρος της διαδικασίας σχεδιασμού που είναι οικονομικά μη διαθέσιμη.

Η σταθερή βελτίωση στην ταχύτητα των υπολογιστών και το μέγεθος της μνήμης από τη δεκαετία του 1950 έχει οδηγήσει στην εμφάνιση της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής. Αυτός ο κλάδος της δυναμικής των ρευστών συμπληρώνει πειραματικές και θεωρητικές ρευστομηχανικές παρέχοντας ένα οικονομικά εναλλακτικό αποδοτικό μέσο για την προσομοίωση πραγματικών ροών. Ως εκ τούτου, προσφέρει τα μέσα για να δοκιμάσουν τις θεωρητικές εξελίξεις για τις οποίες οι συνθήκες δεν είναι διαθέσιμες πειραματικά. Για τα πειράματα της αεροδυναμικής σήραγγας, περιορίζονται σε ένα συγκεκριμένο εύρος αριθμών Reynolds τυπικά μία ή δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη από την πλήρη κλίμακα. Η ανάπτυξη των πιο αποδοτικών υπολογιστών προκάλεσε το ενδιαφέρον σε υπολογιστική

ρευστομηχανική και, με τη σειρά του αυτό έχει δημιουργήσει μια δραματική βελτίωση στην απόδοση των υπολογιστικών τεχνικών. Συνεπώς η υπολογιστική ρευστομηχανική είναι τώρα το προτιμώμενο μέσο για τη δοκιμή εναλλακτικών σχεδίων σε πολλούς κλάδους των αεροσκαφών, μηχανήματα ροής και σε μικρότερο βαθμό, στις βιομηχανίες αυτοκινήτων.

Μετά Chapman et al (1975), Chapman (1979,1981), Green (1982), Rubbert και Jameson (1989) η υπολογιστική ρευστοδυναμική προσφέρει πέντε μεγάλα πλεονεκτήματα σε σύγκριση με την πειραματική ρευστοδυναμική :

- (i) Ο Χρόνος στο σχεδιασμό και την ανάπτυξη έχει μειωθεί σημαντικά .
- (ii) Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική μπορεί να προσομοιώσει τις συνθήκες ροής που δύσκολα μπορούν να αναπαράγονται κατά πειραματικές δοκιμές μοντέλου.
- (iii) Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική παρέχει πιο λεπτομερείς και εκτενείς πληροφορίες.
- (iv) Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική είναι όλο και πιο αποδοτική από τις δοκιμές σε αεροδυναμική σήραγγα.
- (v) Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική παράγει σημαντικά αποτελέσματα χαμηλότερη κατανάλωση ενέργειας.

Παραδοσιακά οι μεγάλοι χρόνοι παράδοσης έχουν προκληθεί από την αναγκαία αλληλουχία του σχεδιασμού της δοκιμής της αεροδυναμικής σήραγγας και επανασχεδιασμού . Η Κατασκευή του μοντέλου είναι συχνά η πιο αργή συνιστώσα. Χρησιμοποιώντας ένα καλά αναπτυγμένο κώδικα της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, επιτρέπει εναλλακτικά σχέδια (διαφορετική γεωμετρική διαμόρφωση) για να τρέξει πάνω από ένα εύρος τιμών των παραμέτρων, π.χ. Αριθμός Reynolds, αριθμός Mach, προσανατολισμός της ροής. Σε κάθε περίπτωση μπορεί να απαιτεί να τρέξει 15 λεπτά σε έναν υπερυπολογιστή, π.χ. Cray Y-MP. Η διαδικασία βελτιστοποίησης του σχεδιασμού περιορίζεται ουσιαστικά από την ικανότητα του σχεδιαστή να απορροφήσει και να εκτιμήσει τα υπολογιστικά αποτελέσματα. Στην πράξη, η Υπολογιστική Ρευστομηχανική είναι πολύ αποτελεσματική στην πρόιμη εξάλειψη των ανταγωνιστικών διαμορφώσεων του σχεδιασμού. Οι τελικές επιλογές σχεδιασμού εξακολουθούν να επιβεβαιώνονται από τις δοκιμές στην αεροδυναμική σήραγγα.

Ο Rubbert (1986) επιστά την προσοχή στην ταχύτητα με την οποία η Υπολογιστική Ρευστομηχανική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επανασχεδιαστούν δευτερεύοντα εξαρτήματα, αν τα πακέτα της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής έχουν αξιολογηθεί σε βάθος. Ο Rubbert αναφέρει το παράδειγμα του επανασχεδιασμού της εξωτερικής περιμέτρου της καμπίνας του Boeing 757 για να φιλοξενήσει τα ίδια εξαρτήματα του πιλοτήριου όπως το Boeing 767 για την ελαχιστοποίηση των πιλοτικών χρόνων μετατροπής. Ο Rubbert δείχνει ότι η υπολογιστική ρευστομηχανική προϋποθέτει ότι η εξωτερική μορφή που ενσωματώθηκε στο πρόγραμμα παραγωγής πριν από κάθε επαλήθευση της αεροδυναμικής σήραγγας αναλήφθηκε.

Οι δοκιμές στην αεροσήραγγα είναι συνήθως περιορισμένες στον αριθμό Reynolds και μπορεί να επιτύχει συνήθως μικρής της πλήρους κλίμακας. Πολύ υψηλές θερμοκρασίες που σχετίζονται με συνδυασμό μεταφοράς θερμότητας προβλήματα ροής του ρευστού είναι πέρα από το πεδίο εφαρμογής πολλών πειραματικών εγκαταστάσεων. Αυτό είναι ιδιαίτερα αληθές για τα προβλήματα καύσης όπου η αλλαγή της χημικής σύνθεσης προσθέτει ένα άλλο επίπεδο πολυπλοκότητας. Ορισμένες κατηγορίες ασταθής κίνησης ροής δεν μπορούν να μοντελοποιηθούν σωστά πειραματικά ιδίως όταν συμβαίνει η γεωμετρική αστάθεια σε ορισμένες κατηγορίες της βιολογικής ρευστοδυναμικής. Πολλά γεωφυσικά ρευστό δυναμικά προβλήματα είναι πολύ μεγάλα ή πολύ απομακρυσμένα στο χώρο ή χρόνο για την πειραματική προσομοίωση. Έτσι οι ροές στην δεξαμενή πετρελαίου είναι γενικά μη προσβάσιμες σε λεπτομερείς επιστημονικές μετρήσεις. Τα προβλήματα των αστροφυσικών στην ρευστοδυναμική είναι πολύ απομακρυσμένα στον χώρο και τις καιρικές συνθήκες, πρέπει να προβλεφθούν πριν αυτά συμβούν. Όλες αυτές οι κατηγορίες της κίνησης του ρευστού είναι επιδεκτικές στην υπολογιστική προσέγγιση.

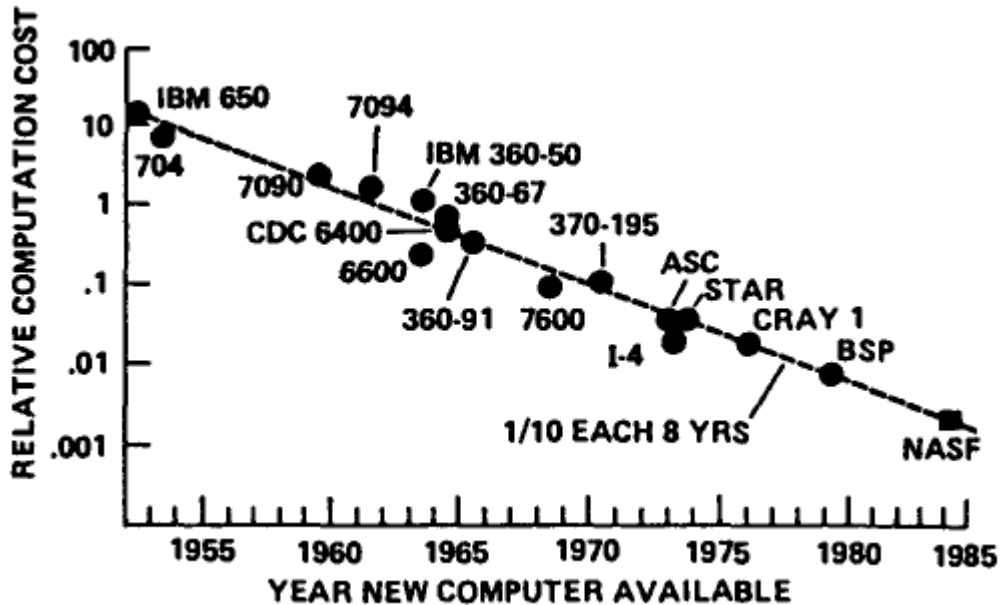
Πειραματικές εγκαταστάσεις, όπως οι σήραγγες ανέμου είναι πολύ αποτελεσματικές για την απόκτηση πληροφοριών όπως η πλήρης άντωση και οπισθέλκουσα σε ένα σώμα και τις διανομές της επιφάνειας πίεσης σε θέσεις κλειδιά. Ωστόσο, για να αποκτήσετε λεπτομερείς διανομές ταχύτητας και πίεσης, σε όλη την περιοχή γύρω από το σώμα θα ήταν απαγορευτικά δαπανηρή και πολύ χρονοβόρα. Η υπολογιστική ρευστοδυναμική παρέχει αυτές τις λεπτομερείς πληροφορίες χωρίς επιπλέον κόστος και κατά συνέπεια, επιτρέπει μια πιο ακριβή κατανόηση των διαδικασιών ροής που πρέπει να ληφθούν.

Ίσως ο πιο σημαντικός λόγος για την αύξηση της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής είναι ότι γενικά η προσομοίωση ροής, είναι σημαντικά φθηνότερη από τις δοκιμές στη σήραγγα αεροδυναμικής και θα γίνουν ακόμη περισσότερο στο μέλλον. Βελτιώσεις στην απόδοση του υλικού του υπολογιστή έχουν συμβεί με μια μείωση του κόστους του υλικού των υπολογιστών. Κατά συνέπεια, για ένα δεδομένο αριθμητικό αλγόριθμο και πρόβλημα ροής το σχετικό κόστος μιας υπολογιστικής προσομοίωσης έχει μειωθεί σημαντικά με το πέρασμα των χρόνων. (Σχήμα 1.1)

Παράλληλα με την βελτίωση στο υλικό του υπολογιστή υπήρξε η βελτίωση της αποτελεσματικότητας των υπολογιστικών αλγορίθμων για ένα δεδομένο πρόβλημα. Οι τρέχουσες βελτιώσεις στο κόστος του υλικού και η υπολογιστική αποδοτικότητα αλγορίθμου δεν παρουσιάζει καμία προφανή ένδειξη ότι φθάνουμε σε ένα όριο. Κατά συνέπεια, οι δύο αυτοί παράγοντες συνδυάζονται για να κάνουν την Υπολογιστική Ρευστομηχανική όλο και περισσότερο αποδοτική. Αντίθετα, το κόστος της εκτέλεσης πειραμάτων συνεχίζει να αυξάνεται.

Η βελτίωση στο υλικό του υπολογιστή και αριθμητικών αλγορίθμων έχει επιφέρει μείωση της κατανάλωσης ενέργειας για την απόκτηση των προσομοιώσεων ροής. Αντίθετα, η ανάγκη για την προσομοίωση για πιο ακραίες φυσικές συνθήκες, μεγαλύτερο αριθμό Reynolds, μεγαλύτερο αριθμό Mach, υψηλότερη θερμοκρασία, έχει επιφέρει αύξηση της κατανάλωσης ενέργειας που συνδέεται με την πειραματική δοκιμή.

Η χρονολογική εξέλιξη των υπολογιστών τα τελευταία τριάντα χρόνια ήταν προς ταχύτερα μηχανήματα με μεγάλες μνήμες.



Σχήμα 1.1 : Σχετικό κόστος του υπολογισμού για ένα συγκεκριμένο αλγόριθμο και ροής

Ένας σύγχρονος υπερυπολογιστής, όπως ο CRAY Y-MP είναι ικανός να λειτουργήσει σε περισσότερα από 2000 γιγαφλόπς (Dongarra 1989). Ένα Megaflop είναι ένα εκατομμύριο της αριθμητικής κινητής υποδιαστολής ανά δευτερόλεπτο. Οι πιο πρόσφατοι υπερυπολογιστές, π.χ. Η NEC SX3, είναι ικανοί για θεωρητικές ταχύτητες 20000 Megaflops. Η ταχύτητα προέρχεται εν μέρει από ένα σύντομο χρονικό διάστημα του κύκλου της μηχανής, που είναι ο χρόνος που απαιτείται για κάθε κύκλο λογικών πράξεων. Ο CRAY Y-MP έχει ένα χρόνο κύκλου 6 νανοδευτερολέπτων (6×10^{-9} s), ενώ ο NEC SX3 έχει χρόνο κύκλου 2,9 νανοδευτερολέπτων.

Μια ειδική λειτουργία, π.χ. ένα πλωτό σημείο προσθήκης μπορεί να χωριστεί σε έναν αριθμό λογικών πράξεων το καθένα απαιτεί ένα κύκλο του μηχανήματος για να εκτελεστεί. Αν την ίδια λειτουργία, π.χ. την προσθήκη της κινητής υποδιαστολής, πρέπει να εφαρμόζεται διαδοχικά, αλλά να επιτρέπει διαφορετικές λογικές πράξεις που σχετίζονται με κάθε στοιχείο του φορέα που πρόκειται να εκτελεστούν ταυτόχρονα. Έτσι υπάρχει σημαντική επικάλυψη σε σημαντική επιτάχυνση στο συνολικό χρόνο εκτέλεσης, εάν ο υπολογιστικός αλγόριθμος μπορεί να εκμεταλλευτεί μια τέτοια διάταξη αγωγών.

Οι σύγχρονοι υπερυπολογιστές έχουν ειδικούς διανυσματικούς επεξεργαστές που χρησιμοποιούν τη μορφή του αγωγού. Ωστόσο οι διανυσματικοί επεξεργαστές έχουν ένα αποτελεσματικό χρόνο εκκίνησης που τους κάνει πιο αργούς από τους βαθμωτούς επεξεργαστές για πολύ σύντομους φορείς. Κάποιος μπορεί να καθορίσει ένα διάλειμμα ακόμη και το μήκος φορέα, Nb, οι διανυσματικοί επεξεργαστές έχουν την ίδια ταχύτητα με ένα

βαθμωτό επεξεργαστή. Για πολύ καιρό οι διανυσματικοί φορείς ($N = \text{άπειρο}$) επιτυγχάνουν τη θεωρητική ταχύτητα του διανυσματικού επεξεργαστή.

Προκειμένου να συγκριθεί η αποδοτικότητα των διαφορετικών υπολογιστών φορέα επεξεργασίας είναι (σχεδόν) συνήθη πρακτική για να εξετάσει $N1 / 2$ (μετά Hockney και Jesshope 1981), το οποίο είναι το μήκος του διανύσματος για την οποία το ήμισυ της μέγιστης ασυμπτωτικής απόδοσης επεξεργασίας διανύσματος ($n = \text{άπειρο}$) έχει επιτευχθεί. Η πραγματική $N1 / 2$ εξαρτάται από συγκεκριμένες λειτουργίες που εκτελούνται, καθώς και το υλικό. Για μια λειτουργία SAXPY ($S = AX + Y$), $N1 / 2 = 37$ για ένα CRAY X-MP και $N1 / 2 = 238$ για την ασφάλεια στον KYBERNOXΩΡΟ 205. Για τους περισσότερους σύγχρονους υπερυπολογιστές, $30 < N1 / 2 < 100$.

Η επιτάχυνση λόγω της μεταγωγής είναι μετρήσιμη με την εξέταση του νόμου του Amdahl η οποία μπορεί να εκφραστεί ως (Gentzsch και Neves 1988) :

$$G = \left[(1 - P) + P / R \right]^{-1} \text{ και } R = V(N) / S$$

όπου G είναι η συνολική αύξηση στην ταχύτητα της διαδικασίας (συνολική αναλογία ταχύτητας)

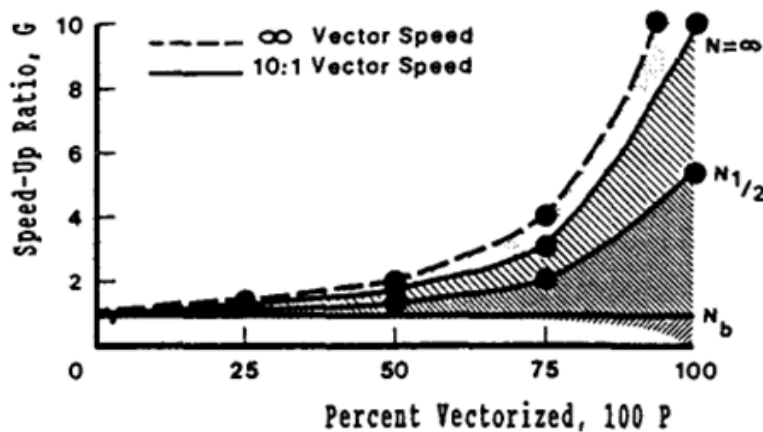
$V(N)$ είναι η ταχύτητα του διανυσματικού επεξεργαστή για μια συνιστώσα N

S είναι η ταχύτητα ενός βαθμωτού επεξεργαστή για μια ενιαία διαδικασία συστατικό

P είναι το ποσοστό της διαδικασίας που διανυσματοποιήθηκε και το

R είναι ο λόγος επιτάχυνσης του διανυσματικού επεξεργαστή.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2 ένα διανυσματικός επεξεργαστής με ένα θεωρητικό ($N = \text{άπειρο}$) λόγος επιτάχυνσης φορέα, $R = 10$, πρέπει να επιτύχει ένα υψηλό ποσοστό μεταγωγής, $P > 0.75$, να παράγει μια σημαντική συνολική επιτάχυνση αναλογία Z . Αλλά σε αυτό το επίπεδο $\partial G / \partial P > \partial G / \partial R$. Έτσι η τροποποίηση του προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή για την αύξηση της P θα παράσχει πολύ μεγαλύτερη αύξηση στο G από την τροποποίηση του υλικού για την αύξηση της V και ως εκ τούτου, το R . Εκτός εάν ένα μεγάλο μέρος του προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή μπορεί να γραφτεί έτσι ώστε τα διανυσματικά μήκη είναι σημαντικά μεγαλύτερα από $N1 / 2$, η συνολική αναλογία ταχύτητας, G , δεν θα είναι πολύ μεγάλη.



Εικόνα 1.2 : Επιτάχυνση υπολογισμών, νόμος Amdahl.

Η δυνατότητα να αυξηθεί η συνολική ταχύτητα εκτέλεσης του ορίου που καθορίζεται από το υλικό εξαρτάται εν μέρει από την ικανότητα του λειτουργικού συστήματος και μεταλωτιστή να διανυσματοποιήσει το υπολογιστικό αλγόριθμο και εν μέρει για την επιλογή υπολογιστικών αλγορίθμων που είναι εγγενώς διανυσματικά (Ortega και Voigt 1985).

Η διάρθρωση των υπολογιστικών αλγορίθμων για να επιτρέπει διανύσματα είναι ένα σημαντικό ζήτημα για την έρευνα, αλλά είναι πέρα από το πεδίο αυτού του βιβλίου (βλέπε Gentsch και Neves 1988). Η μακροπρόθεσμη τάση φαίνεται να είναι προς την κατεύθυνση καθιστώντας το λειτουργικό σύστημα και μεταφραστές να αναλάβει τη φροντίδα της μεταγωγής με λιγότερη έμφαση στον χρήστη που έχει να χειριστεί το βασικό αλγόριθμο.

Με μια αρχιτεκτονική αγωγού, ένα αποτελεσματικό σύνολο εντολών του φορέα και ως όσο το δυνατόν μικρότερο χρόνο κύκλου το κύριο μέσο για περαιτέρω αύξηση της ταχύτητας επεξεργασίας είναι να εισαγάγει πολλούς επεξεργαστές να λειτουργούν παράλληλα. Οι υπερυπολογιστές σχεδιάζονται συνήθως με έως και δεκαέξι επεξεργαστές παράλληλα. Θεωρητικά αυτό θα πρέπει να παρέχει έναν παράγοντα βελτίωσης μέχρι και δεκαέξι της ταχύτητας. Πειράματα του Grassl και Schwarzmeier (1190) με έναν οκταπύρινο επεξεργαστή CRAY Y-MP δείχνουν ότι μπορεί να επιτευχθεί 84% της θεωρητικής βελτίωσης για ένα τυπικό κώδικα CFD, όπως ο ARC3D.

Η έννοια της μια σειράς επεξεργαστών όπου ο καθένας εκ των οποίων σε ένα στοιχείο του διανύσματος υπήρξε σημαντικό στοιχείο ανάπτυξης στην πιο αποτελεσματική αρχιτεκτονική υπολογιστών (Hockney και Jesshope 1981). Ο Illiac IV είχε 64 παράλληλους επεξεργαστές και πέτυχε μια συνολική ταχύτητα επεξεργασίας συγκρίσιμης με τον CRAY-1 και Cyber-205 ακόμη και αν ο χρόνος κύκλου ήταν μόνο 80 νανοδευτερολέπτων. Ωστόσο ο νόμος του Amdahl, ισχύει επίσης για παράλληλους επεξεργαστές εάν το R αντικαθίσταται από N_p, τον αριθμό των παράλληλων επεξεργαστών, και P είναι το μέρος της διαδικασίας που παραλληλιζείται. Τα συγκριτικά πλεονεκτήματα του αγωγού και της παράλληλης

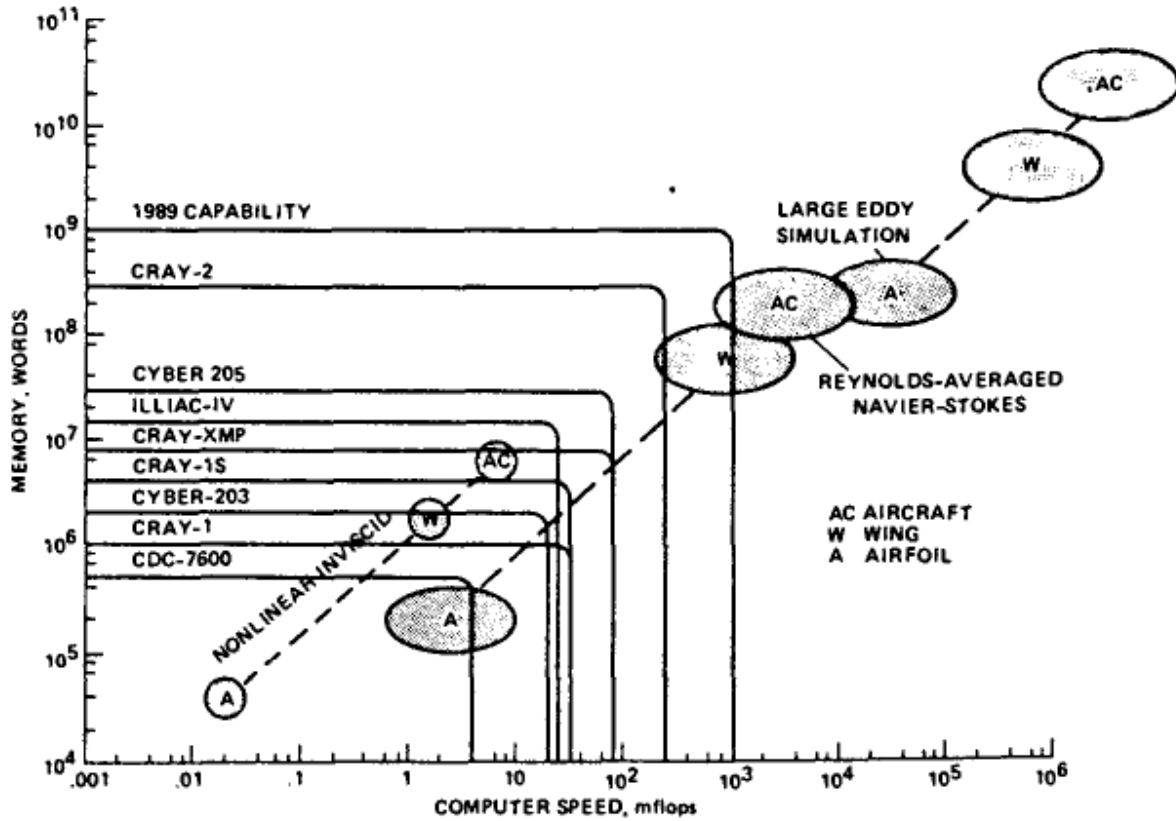
επεξεργασίας που συζητούνται εν γένει όροι από Levine (1982), Ortega και Voigt (1985) και με μεγαλύτερη λεπτομέρεια από Hockney και Jsshope (1981) και Genzschand Neves (1988).

Η ανάπτυξη των μεγαλύτερων και φθηνότερων μονάδων μνήμης οδηγείται από το σημαντικό εμπορικό ενδιαφέρον για την αποθήκευση δεδομένων και τον χειρισμό. Για εφαρμογές υπολογιστικής ρευστοδυναμικής είναι σημαντικό ότι το πλήρες πρόγραμμα, οι οδηγίες και η μεταβλητή αποθήκευση, θα πρέπει να βρίσκεται στην κύρια μνήμη. Αυτό συμβαίνει επειδή η ταχύτητα μεταφοράς δεδομένων από το δευτερογενείς μέσο αποθήκευσης (δίσκος) στην κύρια μνήμη είναι πολύ πιο αργή από τη μεταφορά δεδομένων τιμών μεταξύ της κύριας μνήμης και των μονάδων επεξεργασίας. Στο παρελθόν το κύριο μέγεθος της μνήμης είχε περιορίσει σε πολυπλοκότητα τα προβλήματα της υπολογιστικής ρευστοδυναμικής που ήταν υπό έρευνα.

Η χρονολογική εξέλιξη της αύξησης της χωρητικότητας της μνήμης για υπερυπολογιστές είναι εντυπωσιακή. Το CDC-7600 (τεχνολογία 1970) είχε χωρητικότητα 4×10^5 64-bit λέξεων. Η Cyber-205 (τεχνολογία 1980) έχει χωρητικότητα 3×10^7 64-bit λέξεων και τον CRAY-2 (τεχνολογία 1980) έχει χωρητικότητα 10^9 64-bit λέξεων. Σημαντική ανάπτυξη σε μίνι υπολογιστές τη δεκαετία του 1970 και μικροϋπολογιστές στη δεκαετία του 1980 έχουν δώσει πολλές εναλλακτικές διαδρομές για οικονομικά συμφέρουσα υπολογιστική ρευστοδυναμική. Η σχετική φθηνία της μνήμης τυχαίας προσπέλασης σημαίνει ότι τα μεγάλα προβλήματα μπορούν να αντιμετωπισθούν αποτελεσματικά στους πολύ μικρούς και μίνι υπολογιστές. Η κύρια διαφορά μεταξύ των μικροϋπολογιστών και των μεγάλων υπολογιστών είναι ο σημαντικά πιο αργός χρόνος κύκλου ενός μικρο-υπολογιστή και η απλούστερη, λιγότερο αποδοτική αρχιτεκτονική. Ωστόσο, αδυναμία σαφούς διάκρισης μεταξύ μικροϋπολογιστών και προσωπικών θέσεων εργασίας, όπως ο SUN Sparestation, και την εμφάνιση των μίνι υπερυπολογιστών έχει δημιουργήσει ένα συνεχές τιμής / απόδοσης (Genthzshc και Neves 1988).

Η σύζευξη των πολλών, σχετικά χαμηλής ισχύος, παράλληλων επεξεργαστών θεωρείται ως ένας πολύ αποτελεσματικός τρόπος για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Κάθε επεξεργαστής μπορεί να χρησιμοποιήσει αρκετά τυποποιημένα στοιχεία μικροϋπολογιστή; εξ ου και το δυνητικά χαμηλό κόστος. Ένα τυπικό σύστημα, QCDPAX, περιγράφεται από τον Hoshino (1989). Αυτό το σύστημα έχει από 100 έως 1000 μονάδες επεξεργασίας, όπου η κάθε μία βασίζεται στον L64132 κινητής υποδιαστολής επεξεργαστή. Έτσι, ένα σύστημα 400 μονάδων επεξεργασίας αναμένεται να παραδώσει περίπου 2000 Megaflops όταν λειτουργεί σε ένα αντιπροσωπευτικό κώδικα υπολογιστικής ρευστομηχανικής.

Σε ένα ορισμένο βαθμό, η σχετική βραδύτητα των συστημάτων μικροϋπολογιστή μπορεί να αντισταθμιστεί επιτρέποντας μεγαλύτερους χρόνους λειτουργίας.



Σχήμα 1.3. Απαιτήσεις ταχύτητας υπολογιστή και μνήμη για υπολογιστική ρευστομηχανική (μετά Bailey, 1986. Φωτογραφία από το βιβλίο Computational techniques for fluid dynamics Vol.1 - Fletcher C.A.J σελίδα 22)



Εικόνα 1.4. Κατανομή επιφανειακής πίεσης σε ένα τυπικό στρατιωτικό αεροσκάφος. Περίγραμμα επιφανειακής πίεσης, $\Delta C_p = 0.02$ (μετά Arlinger, 1986. Φωτογραφία από το βιβλίο Computational techniques for fluid dynamics Vol.1 - Fletcher C.A.J σελίδα 23).

Αν και 15 λεπτά σε έναν υπερυπολογιστή φαίνεται να είναι αποδεκτή πρακτική (Bailey 1986) για τις τρέχουσες εργασίες σχεδιασμού, τρέχοντας τες για λίγες ώρες σε έναν μικροϋπολογιστή μπορεί να είναι αποδεκτό στον τομέα της έρευνας και ανάπτυξης. Αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι επιτρέπει στον ερευνητή της υπολογιστικής ρευστομηχανικής επαρκή χρόνο για να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα και να προετοιμάσει πρόσθετες υποθέσεις.

Οι μελλοντικές τάσεις για την ταχύτητα του υπολογιστή και τη χωρητικότητα της μνήμης είναι ενθαρρυντικά. Οι προβλέψεις από τον Simon (1989) δείχνουν ότι μέχρι το 2000 αναμένεται συνεχόμενη αύξηση στις ταχύτητες ηλεκτρονικών υπολογιστών, μέχρι και 10^6 Megaflops και κύρια μνήμη ικανότητας 50000 Megawords. Αυτό αναμένεται να είναι επαρκής (Εικ. 1.3) για τις προβλέψεις της σταθερής τυρβώδους (στροβιλώδης) συμπιεστής ροής γύρω από όλο το αεροσκάφος και επιτρέπει στην βελτιστοποίηση του σχεδιασμού που πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη.

1.3 Τυπικά πρακτικά προβλήματα

Η υπολογιστική ρευστοδυναμική, ιδιαίτερα στους τομείς της μηχανικής, είναι ακόμα στο στάδιο της ανάπτυξης όπου «τα προβλήματα που αφορούν πολύπλοκες γεωμετρίες μπορεί να αντιμετωπιστούν με απλή φυσική και αυτών που αφορούν απλές γεωμετρίες μπορούν να αντιμετωπιστούν με σύνθετη φυσική» (Bailey 1986). Αυτό που αλλάζει είναι η αποδεκτή πρακτική για την απλότητα και την πολυπλοκότητα. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα που παρέχονται παρακάτω.

1.3.1 Πολύπλοκη Γεωμετρία, Απλή Φυσική

Η κατανομή της πίεσης επιφανείας σε ένα τυπικό υπερηχητικό στρατιωτικό αεροσκάφος φαίνεται στο Σχήμα. 1.4. Ο αριθμός Mach του ελεύθερου ρεύματος είναι 1.8 και η γωνία προσβολής είναι 8° . Το αεροσκάφος αποτελείται από ένα άτρακτο, θόλο, τα στόμια εισόδου του κινητήρα, περύγιο, κύρια πτέρυγα δέλτα και προς τα εμπρός φτερά. Επιπλέον, οι επιφάνειες ελέγχου στην οπίσθια άκρη του δέλτα φτερού εκτρέπονται προς τα πάνω 10° . Απαιτούνται περίπου 19.000 σημεία πλέγματος σε κάθε επίπεδο διατομής και σε κάθε κατάντη θέση. Η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας δίνει μια σημαντική απαίτηση για τη διαδικασία δημιουργίας του δικτύου. Ο Arlinger (1986) χρησιμοποιεί μια αλγεβρική τεχνική γενιάς βασισμένη στην άπειρη παρεμβολή.

Η ροή θεωρείται ιδεατή και παντού υπερηχητική έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα σαφή σύστημα που βαδίζει στην κατεύθυνση ελεύθερου ρεύματος. Το σχέδιο είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικό με το πλήρη πεδίο ροής που απαιτεί 15 λεπτά για ένα CRAY-1. Η μέθοδος του πεπερασμένου όγκου χρησιμοποιείται για να διακριτοποιούμε τις καταστατικές εξισώσεις. Ο Arlinger τονίζει ότι το βασικό στοιχείο για να επιτύχει τα αποτελέσματα αυτά είναι το τεχνικά ευέλικτο πλέγμα γενιάς.

1.3.2 Απλούστερη Γεωμετρία , Περισσότερο πολύπλοκη Φυσική

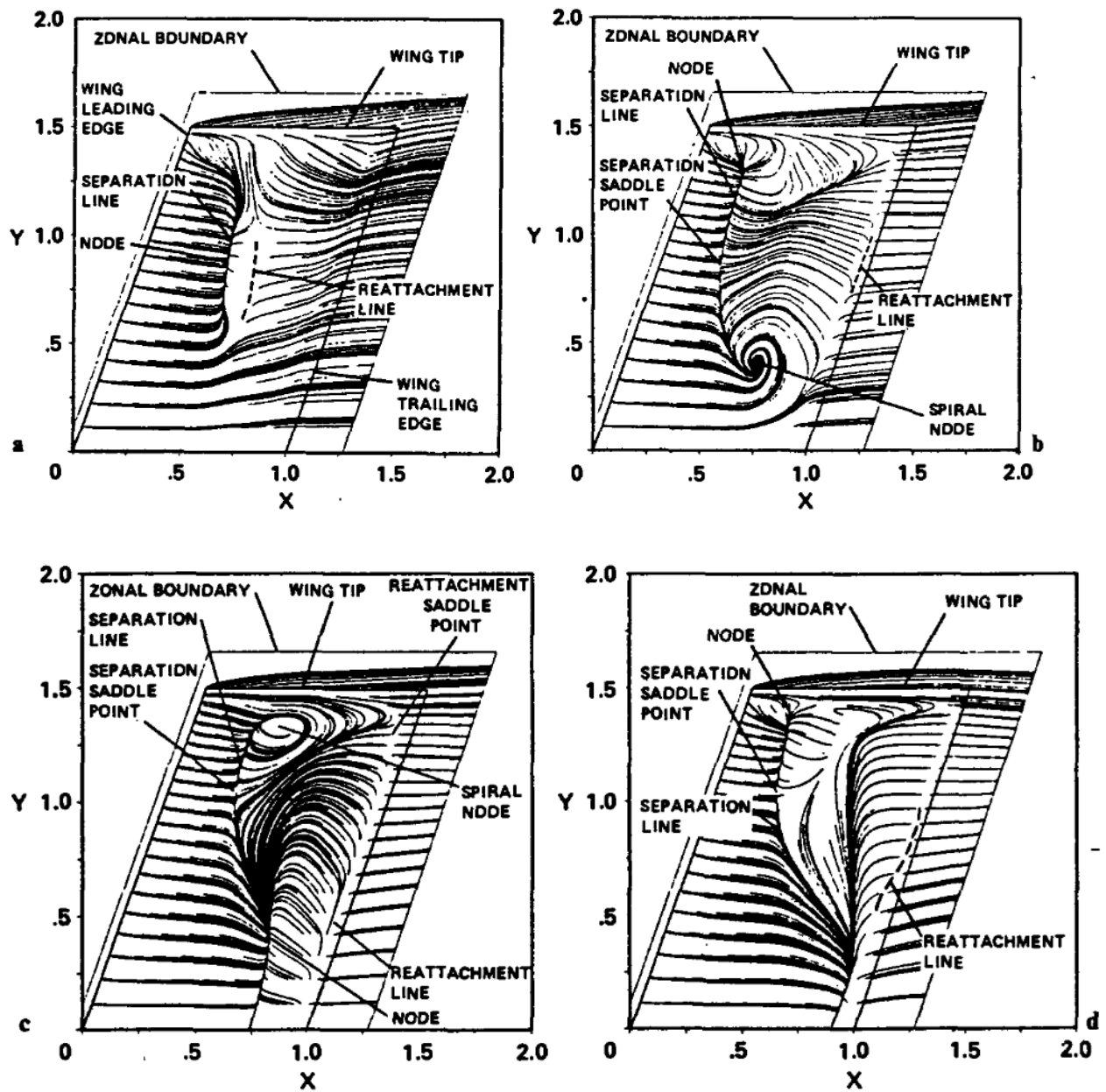
Οι οριακές διαδρομές των σωματιδίων στην άνω επιφάνεια ενός τρισδιάστατου πτερυγίου για την αύξηση ελεύθερου ρεύματος αριθμός Mach, M_∞ , δείχνεται στο Σχήμα 1.5. Οι οριακές διαδρομές των σωματιδίων αντιστοιχούν στα μοτίβα της επιφάνεια της ροής του πετρελαίου που λαμβάνεται πειραματικά. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.1 προέρχονται από υπολογισμούς (Holst κ.ά. 1986) του transonic ιξώδους ροής μετά το φτερό σε 2° γωνίας επίθεσης, με λόγο διαστάσεων 3 και χορδή Reynolds αριθμό 8×10^6 .

Για αυτές τις συνθήκες ένα κύμα σοκ σχηματίζεται πάνω από την πτέρυγα και αλληλεπιδρά με το ανώτερο στρώμα της οριακή επιφάνειας προκαλώντας μαζική διαχώριση. Η περιοχή του διαχωρισμού αλλάζει και μεγαλώνει καθώς το M_∞ αυξάνει. Η επιρροή της ροής πέρα από την άκρη του πτερυγίου καθιστά το μοτίβο διαχωρισμού πολύ τρισδιάστατο. Η ορολογία, κόμβος σπινάλ, κλπ, που αναφέρεται στο Σχήμα 1.5 είναι κατάλληλο για την κατάταξη των τριών διαστάσεων διαχωρισμού (Tobak και Peake 1982).

Οι λύσεις απαιτούν ένα τρισδιάστατο πλέγμα από περίπου 17000 μονάδες χωρίζονται τες σε τέσσερις ζώνες που αλληλεπικαλύπτονται εν μέρει. Οι δύο ζώνες αμέσως πάνω και κάτω από το φτερό έχουν ένα λεπτό πλέγμα στην κανονική κατεύθυνση που προβάλλει με ακρίβεια τις σοβαρές μεταβολές των ταχύτητας που συμβαίνουν. Σε αυτές τις δύο ζώνες το λεπτό στρώμα Navier Stokes εξισώνεται και επιτυγχάνεται η λύση τους. Αυτές οι εξισώσεις περιλαμβάνουν ιξώδης όρους που συνδέονται μόνο με την κανονική κατεύθυνση. Αποτελούν παράδειγμα των μειωμένων εξισώσεων Navier-Stokes (κεφάλαιο 1.6). Στις δύο ζώνες μακριά από την πτέρυγα η ροή θεωρείται ιδεατή και διέπεται από τις εξισώσεις του Euler .

Οι λύσεις σημείου του δικτύου σε όλες τις ζώνες λύνονται από μια μέθοδο ψευδο-μετάβασης στην οποία ο χρόνος παίζει τον ρόλο των επαναλήψεων για την εύρεση λύσης των εξισώσεων που διέπουν μέχρι όπου η λύση δεν αλλάζει πλέον. Οι ζώνες που συνδέονται με την τοπική παρεμβολή της περιοχής επικάλυψης, συνήθως δύο κύτταρων. Ο Holst δείχνει ότι λαμβάνονται σταθερές λύσεις παρόλο που σοβαρές κλίσεις διασχίζουν διζωνικά όρια.

Με τη συμπερίληψη επίδρασης του ιξώδους το τρέχον πρόβλημα ενσωματώνει σημαντικά μια πιο περίπλοκη συμπεριφορά ροής και απαιτεί έναν πιο εξελιγμένο αλγόριθμο, παρά το πρόβλημα που εξετάζεται στην παράγραφο 1.2.1. Ωστόσο, το σχήμα του υπολογιστικού πλέγματος παράγεται σε ζωνική βάση η οποία παρέχει καλύτερο έλεγχο επί των θέσεων του σημείο πλέγματος .

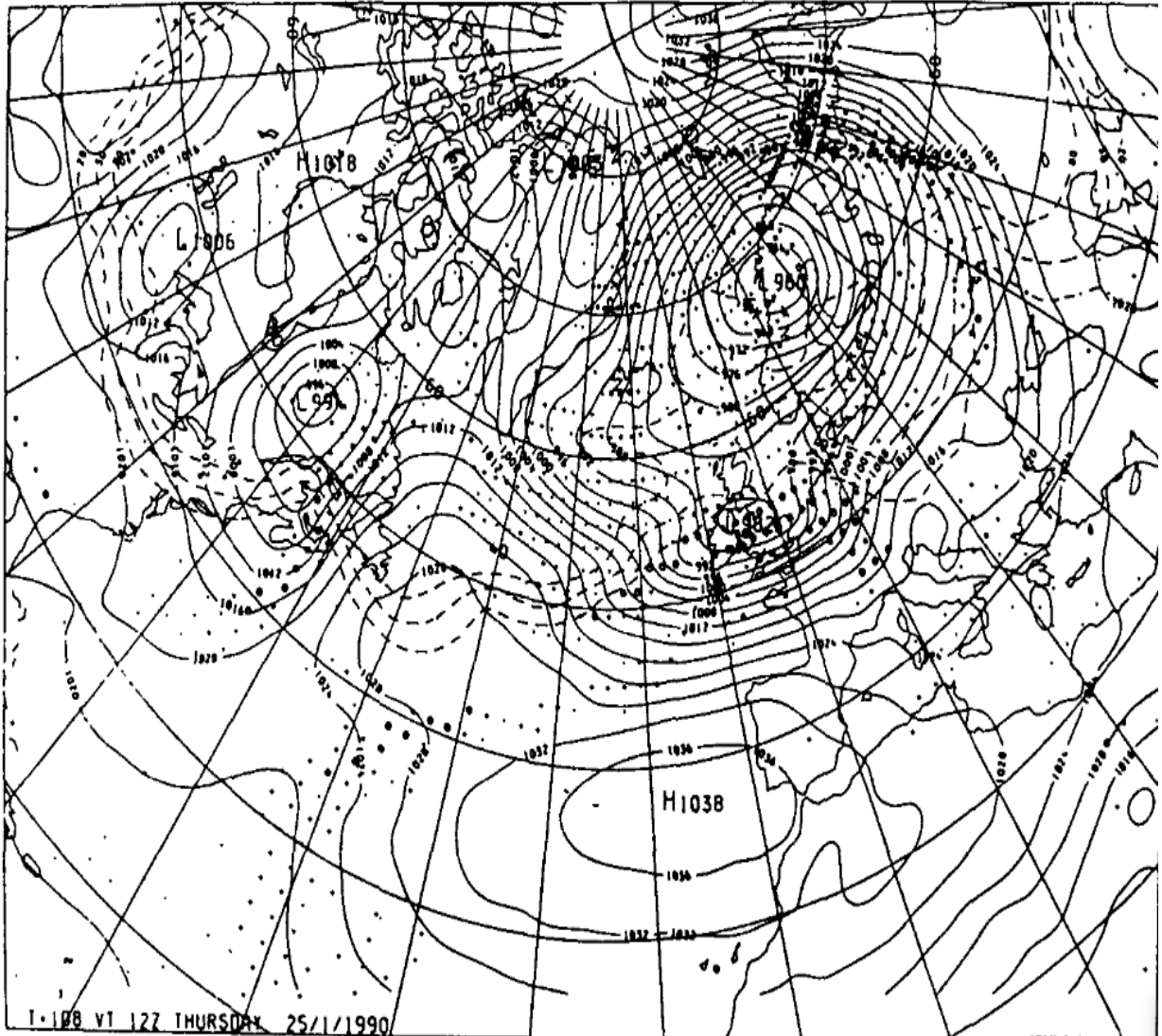


Σχήμα 1.5α-d. Μονοπάτια Σωματιδίων για την ανώτερη ροή του πτερυγίου. (α) = 0.80 M_∞ (β) $M_\infty = 0.85$ (γ) $M_\infty = 0.90$ (δ) $M_\infty = 0.95$ (μετά Holst κ.ά. 1986 Φωτογραφία από το βιβλίο Computational techniques for fluid dynamics Vol.1 - Fletcher C.A.J σελίδα 25)

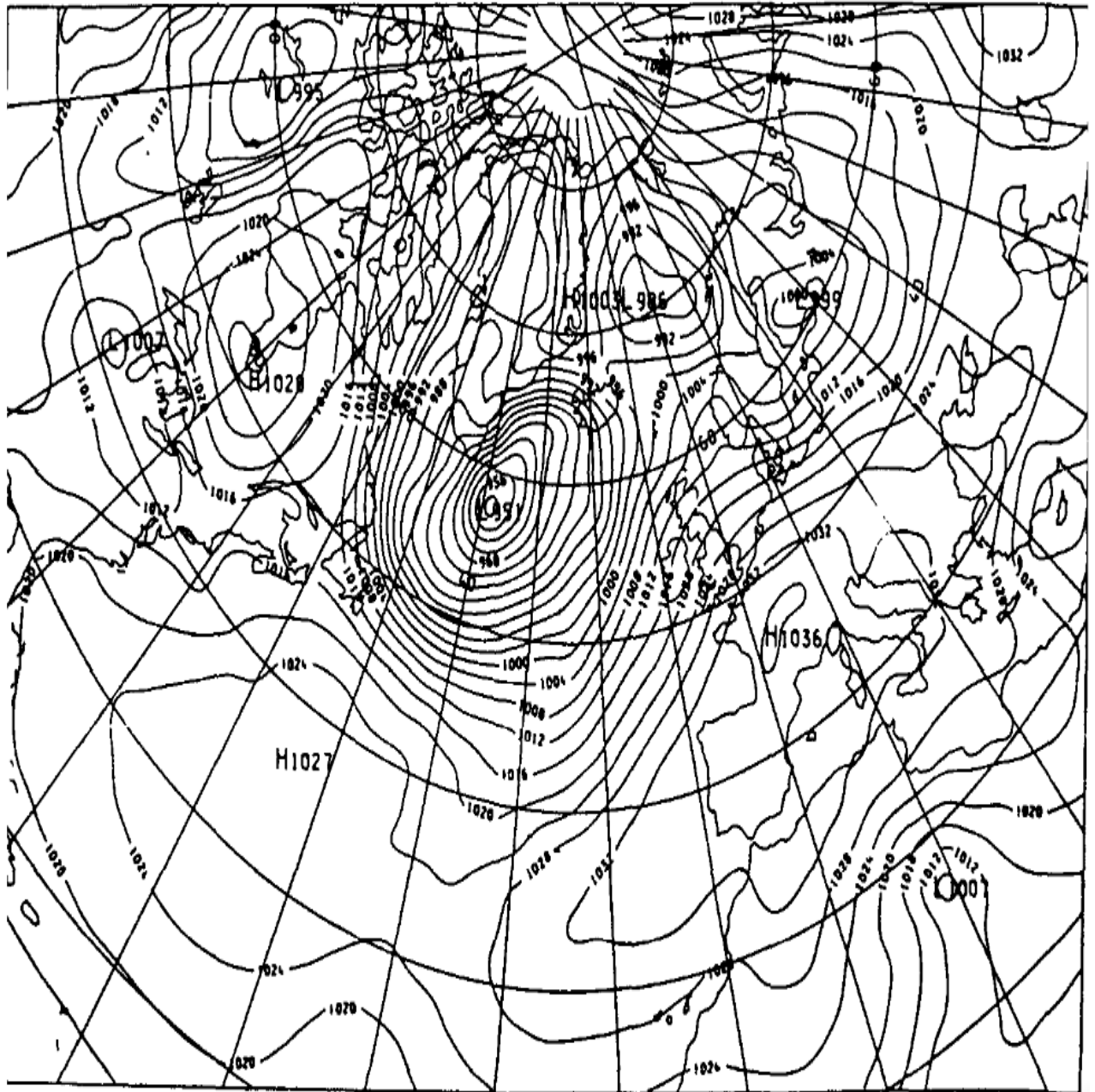
1.3.3 Απλή γεωμετρία, Πολύπλοκη Φυσική

Για την απεικόνιση αυτής της κατηγορίας χρησιμοποιείται μετεωρολογικό παράδειγμα αντί για ένα παράδειγμα της μηχανικής. Το σχήμα 1.6 δείχνει τετραήμερη πρόγνωση (β) της

επιφανειακής πίεσης σε σύγκριση με τις μετρήσεις (α). Το συγκεκριμένο μοτίβο καιρού συνδέθηκε με μια σφοδρή καταιγίδα στις 29 Ιανουαρίου 1990, που προκάλεσε σημαντικές περιουσιακές ζημιές στο νότιο τμήμα της Αγγλίας. Οι υπολογισμοί προβλέπουν την ανάπτυξη του μοτίβο του καιρού αρκετά στενά.



(α)



Σχήμα 1.6α β Σύγκριση της πίεση επιφάνειας. (α) Μετρήσεις (β) Προβλέψεις (after Cullen 1990) Φωτογραφία από το βιβλίο Computational techniques for fluid dynamics Vol.1 - Fletcher C.A.J σελίδα 25)

Οι εξισώσεις (Cullen 1983) είναι ουσιαστικά για ιδεατά ρευστά, δηλαδή με την σημαντική απλοποίηση ότι δεν υπάρχει ιξώδες αλλά λαμβάνουν υπόψη τον άνεμο, την θερμοκρασία, την πίεση, την διακύμανση της υγρασίας και επιφανειακές τάσεις πάνω από στεριά και θάλασσα, την επίδραση της θέρμανσης, την καθίζηση και άλλες επιδράσεις (Haltiner και Williams 1980). Οι εξισώσεις συνήθως γράφονται σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες κάθετα προς

την επιφάνεια της γης και σε κανονικοποιημένη πίεση κάθετα προς την επιφάνεια της γης. Κατά συνέπεια δυσκολίες που συνδέονται με ακανόνιστη υπολογιστικού ορίου και παραγωγής πλέγματος είναι ελάχιστες.

Ο Cullen (1190) δείχνει ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.6 ελήφθησαν σε ένα πλέγμα 192x120x15 και να χρησιμοποιήσει ένα σπλιτ πεπερασμένων διαφορών για να προχωρήσει στην λύση με την χρόνο. Αυτό επιτρέπει στο πλήρη πλέγμα να συγκρατείται στην κύρια μνήμη. Απαιτούνται 432 χρονικά βήματα που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη $4 \frac{1}{2}$ την μέρα και χρειάζονται 20 λεπτά χρόνου επεξεργασίας στο CYBER 205.

Ο Cullen (1983) αναφέρει ότι το μείζον πρόβλημα επέκτασης για ακριβείς προβλέψεις μεγάλης κλίμακας πέρα από 3-4 ημέρες αρχικής απόκτησης δεδομένων αρκετά καλής ποιότητας. Για πιο εκλεπτυσμένες τοπικές προβλέψεις περαιτέρω δυσκολίες προκύπτουν στην πρόληψη των διαταραχών από τα όρια των σφαλμάτων και την ακρίβεια που εκπροσωπούν οι σοβαρές τοπικές κλίσεις που συνδέονται με τα μέτωπα πρόγνωσης.

Για την παγκόσμια κυκλοφορία μοντελοποίησης και ιδιαίτερα για τις μακροπρόθεσμες προβλέψεις η φασματική μέθοδος είναι κατάλληλη για σφαιρική πολική γεωμετρία. Οι φασματικές μέθοδοι είναι γενικά πιο οικονομικές από την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένων στοιχείων για συγκρίσιμες μεθόδους ακρίβειας, τουλάχιστον για τις παγκόσμιες προβλέψεις. Η εφαρμογή των φασματικών μεθόδων για την πρόγνωση του καιρού συζητείται εν συντομία από τον Fletcher (1984) και με μεγαλύτερη λεπτομέρεια από Bourke κ.ά. (1977). Ο Chervin (1989) παρέχει μια πρόσφατη ένδειξη της ικανότητας της υπολογιστικής ρευστομηχανικής για τη διαμόρφωση του κλίματος.

Τα παραπάνω παραδείγματα είναι ενδεικτικά της τρέχουσας κατάστασης της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Για το μέλλον ο Bailey (1986) αναφέρει ότι "οι πιο ισχυροί υπολογιστές με μεγαλύτερη χωρητικότητα μνήμης που απαιτείται για την επίλυση των προβλημάτων που αφορούν και τις δύο πολύπλοκες γεωμετρίες και την σύνθετη φυσική". Η αύξηση της ανθρώπινης προσδοκίας θα κρατήσει αυτή την δήλωση πιθανότατα για πολύ καιρό να έρθει. Εδώ τονίζουμε ότι παρόλο που η παραπάνω μελέτες στην βιβλιογραφία είναι αρκετών ετών πριν οι ίδιοι περιορισμοί στην πρόγνωση για την μετεωρολογία ισχύουν ακόμη και σήμερα.

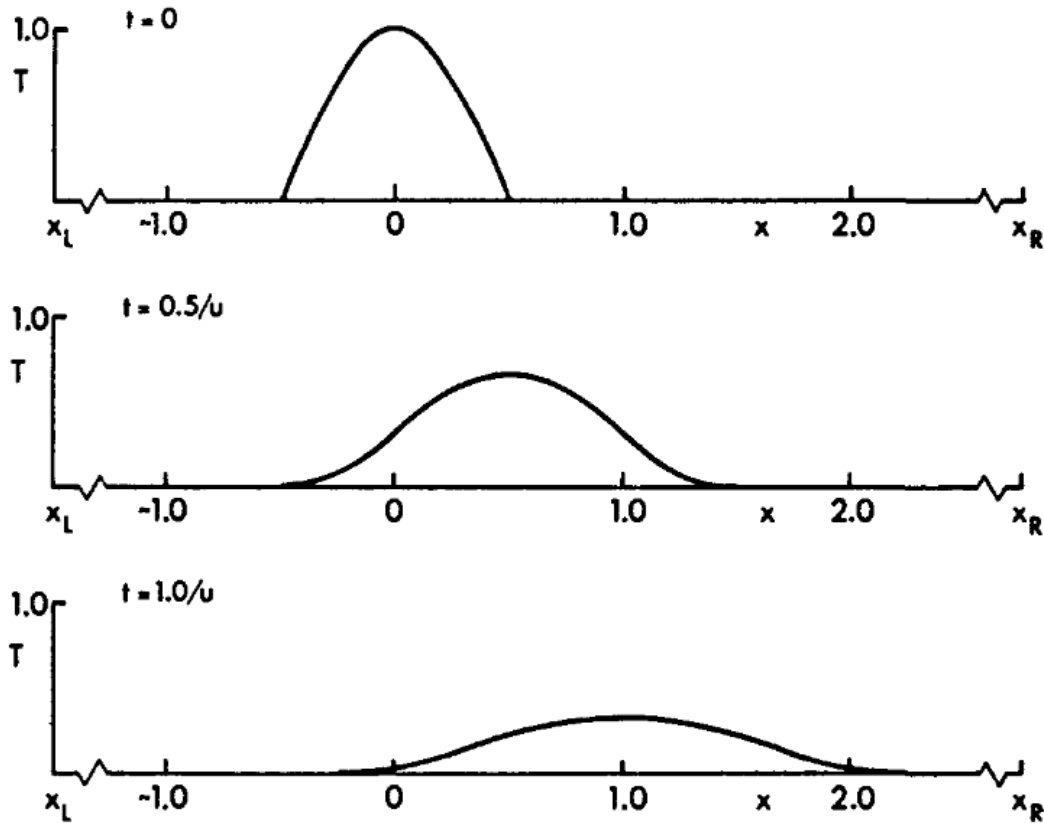
1.4 Δομή Εξίσωσης

Ένα συνδεδεμένο χαρακτηριστικό των κατηγοριών ρευστοδυναμικής που εξετάζεται σε αυτή την εργασία είναι ότι το ρευστό μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα συνεχές μέσο. Σαν αποτέλεσμα η συμπεριφορά του ρευστού μπορεί να περιγραφεί από την άποψη της ταχύτητας και τις θερμοδυναμικές ιδιότητες ως συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου και του χώρου.

Η εφαρμογή των αρχών της διατήρησης της μάζας, ορμής και ενέργειας παράγει συστήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους για την ταχύτητα και τις μεταβλητές θερμοδυναμικής ως συναρτήσεις του χρόνου και θέσης. Με όριο και αρχικές συνθήκες

κατάλληλες για την δεδομένη ροή του τύπου των μερικών διαφορικών εξισώσεων όπου η μαθηματική περιγραφή του προβλήματος είναι καθιερωμένη.

Πολλά προβλήματα ροής περιλαμβάνουν την ανάπτυξη αλληλεπίδρασης μεταξύ της συναγωγής και διάχυσης. Ένα απλό παράδειγμα υποδεικνύεται στο Σχήμα 1.7, που δείχνει την κατανομή της θερμοκρασίας του ρευστού σε ένα σωλήνα σε διαφορετικούς χρόνους. Υποτίθεται ότι το ρευστό κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα u και η θερμοκρασία είναι σταθερά εγκάρσια στον σωλήνα.



Σχήμα 1.7 Μονοδιάστατη κατανομή θερμοκρασίας

Η θερμοκρασία ως συνάρτηση του x και t διέπεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \text{ για } x_L \leq x \leq x_R \text{ και } t > 0 \quad (1.2)$$

Με κατάλληλη αδιαστατοποίηση, κατάλληλες συνοριακές και αρχικές συνθήκες είναι

$$T(x_L, t) = T(x_r, t) = 0 \quad (1.3)$$

$$T(x, 0) = \cos \pi x, \quad -0.5 \leq x \leq 0.5$$

$$= 0 \quad x < -0.5 \text{ και } x > 0.5 \quad (1.4)$$

Οι εξισώσεις (1.2 – 1.4) παρέχουν μια μαθηματική περιγραφή του προβλήματος. Ο όρος $\frac{\alpha \partial^2 T}{\partial^2}$ είναι ο ορισμός της διάχυσης και α είναι ο συντελεστής θερμικής διάχυσης. Αυτός ο όρος είναι υπεύθυνος για την εξάπλωση της μη μηδενικής θερμοκρασίας τόσο προς τα δεξιά όσο και προς τα αριστερά. Αν το α είναι μικρό τότε η διάδοση είναι μικρή.

Ο όρος $\frac{u \partial T}{\partial x}$ είναι ο όρος της συναγωγής και είναι υπεύθυνος για την κατανομή της θερμοκρασίας του σώματος που σάρωσε στα δεξιά με τη γνωστή ταχύτητα u . Η θεραπεία αυτού του όρου και την πλήρη εξίσωση των μεταφορών (1.2) θεωρούνται στο Κεφάλαιο 9. Σε περισσότερες από μία διαστάσεις οι όροι συναγωγής και διάχυσης εμφανίζονται να έχουν σχέση με κάθε μία κατεύθυνση.

Επειδή το u είναι γνωστό, η (1.2) είναι γραμμική ως προς T , ωστόσο, κατά την επίλυση για το πεδίο ταχύτητας, είναι αναγκαίο να εξεταστούν εξισώσεις με μη γραμμικούς όρους συναγωγής για μια τέτοια μη γραμμικότητα δίνεται από την εξίσωση Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.5)$$

Ο μη γραμμικός όρος συναγωγής $\frac{u \partial u}{\partial x}$, επιτρέπει πολύ απότομες κλίσεις στο u για την ανάπτυξη του α είναι πολύ μικρό. Απότομες κλίσεις απαιτούν λεπτότερα πλέγματα και η παρουσία μη γραμμικότητας συχνά απαιτεί ένα επιπλέον επίπεδο της επανάληψης στον υπολογιστικό αλγόριθμο.

Μερικά προβλήματα ροής και μεταφοράς θερμότητας που διέπονται από την εξίσωση του Laplace,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} = 0 \quad (1.6)$$

Αυτή είναι η περίπτωση για μια ροή που είναι ιδεατή, ασυμπίεστη και αστρόβιλη. Σε αυτή την περίπτωση το Φ είναι η πιθανή ταχύτητα. Η εξίσωση Laplace είναι χαρακτηριστική του τύπου της εξίσωσης και έχει επίσης την ιδιαίτερη ιδιότητα της επεξεργασίας απλών ακριβών λύσεων που μπορούν να προστεθούν μαζί (επάλληλα), δεδομένου ότι είναι γραμμικές.

Για πολλά προβλήματα ροής περισσότερες από μία εξαρτημένες μεταβλητές θα πρέπει να συμμετέχουν και είναι απαραίτητο να εξεταστούν τα συστήματα εξισώσεων. Έτσι η μονοδιάστατη ασταθή ιδεατή ροή συμπιεστού διέπεται από

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1.7a)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad (1.7b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(p + E)] = 0, \quad (1.7c)$$

όπου p είναι η πίεση και το E είναι η συνολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου και δίνεται από

$$E = \frac{P}{\gamma - 1} + 0.5 \rho u^2, \quad (1.8)$$

και γ είναι η αναλογία των ειδικών θερμοτήτων. Αν και οι εξισώσεις (1.7) είναι μη γραμμικές, η δομή μεθοδολογίας λύσης είναι παρόμοια με την (1.5) χωρίς τους διαχυτικούς όρους. Η στρατηγική εφαρμογής των υπολογιστικών τεχνικών που αναπτύχθηκαν για μεμονωμένες εξισώσεις θα είναι επίσης εφαρμόσιμη σε συστήματα εξισώσεων.

Για προβλήματα ροής, όπου οι μέσες ιδιότητες της αναταραχής χρειάζονται να συμπεριληφθούν στην δομή της εξίσωσης θα μπορούσε να γραφτεί ως εξής

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = S, \quad (1.9)$$

όπου τώρα το "α" είναι μια λειτουργία της εξαρτημένης μεταβλητής u , και S είναι ένας όρος πηγής που περιέχει πρόσθετα τυρβώδης συνεισφορές. Ωστόσο, είναι σκόπιμο να καταστεί σαφές, ότι η τυρβώδης ροή είναι τουλάχιστον δύο διαστάσεων και συχνά τρισδιάστατη και ότι ένα σύστημα εξισώσεων χρειάζεται για να περιγράψει τη ροή.

1.5 Επισκόπηση της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής

Η συνολική διαδικασία καθορισμού πρακτικών πληροφοριών σχετικά με τα προβλήματα που αφορούν την κίνηση του υγρού μπορεί να παρασταθεί σχηματικά στην Εικόνα 1.8.

Οι εξισώσεις για τη ροή του πρακτικού ενδιαφέροντος είναι συνήθως τόσο πολύπλοκες, όπου η ακριβή λύση δεν είναι διαθέσιμη και είναι αναγκαίο να αναζητηθεί μια υπολογιστική λύση. Υπολογιστικές τεχνικές έχουν αντικαταστήσει μερικές από τις κύριες διαφορικές εξισώσεις με συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων, έτσι ώστε ένας υπολογιστής να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ληφθεί η λύση. Στην εργασία μας θα ασχοληθούμε με στοιχειώδεις υπολογιστικές τεχνικές για την απόκτηση και την επίλυση των συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων.

Για τις τοπικές μεθόδους, όπως οι μέθοδοι των πεπερασμένων στοιχείων και πεπερασμένων όγκων, οι αλγεβρικές εξισώσεις συνδέουν μεταξύ τους τις τιμές των εξαρτημένων μεταβλητών σε γειτονικά σημεία πλέγματος. Για την κατάσταση αυτή είναι κατανοητό ότι ένα πλέγμα διακριτών σημείων διανέμεται σε όλο το υπολογιστικό πεδίο, στο χώρο του χρόνου. Κατά συνέπεια, κάποιος αναφέρεται στη διαδικασία μετατροπής των συνεχών εξισώσεων σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων ως διακριτοποίηση (Κεφάλαιο 3). Για μια συνολική μέθοδο, όπως και η φασματική μέθοδος, οι εξαρτημένες μεταβλητές αντικαθίστανται με εύρος που σχετίζεται με διαφορετικές συχνότητες, τυπικά.

Για κάθε στοιχείο υγρού

Αρχή διατήρησης μάζας : Εξίσωση συνέχειας

Ο δεύτερος νόμος κίνησης του Νεύτωνα: Εξισώσεις Euler Εξισώσεις Navier-Stokes

Διατήρηση ενέργειας Εξίσωση έκκεντρου: Εξίσωση Ενέργειας

Κατανομή ταχύτητας : $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$

Πίεση : $p(x,y,z,t)$

Πυκνότητα : $\rho(x,y,z,t)$

Θερμοκρασία : $T(x,y,z,t)$

Μείωση συμπεριφοράς ροής : Διαχωρισμός ροής

Ρυθμός ροής

Μεταφορά θερμότητας

Δυνάμεις των σωμάτων

(επιδερμική τριβή, έλξη, ανύψωση)

Αποτελεσματικότητα

(στροβιλισμός, διάχυση)

Επισκόπηση της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής

Οι αλγεβρικές εξισώσεις που παράγονται από διακριτοποίηση θα μπορούσαν να προκύψουν ως εξής. Μία τυπική πεπερασμένη διαφορά που αντιπροσωπεύει την εξίσωση (1.2) θα είναι

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} + \frac{u(T_{j+1}^n - T_{j-1}^n)}{2\Delta x} = \frac{\alpha(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{\Delta x^2}, \quad (1.10)$$

όπου $x = j\Delta x$ και $t = n\Delta t$.

Εάν η λύση είναι γνωστή σε όλα τα σημεία πλέγματος \mathbf{x}_j στο επίπεδο χρόνου \mathbf{n} , (1.10) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παρέχει έναν αλγόριθμο για την εύρεση του T_j^{n+1} , i, e .

$$T_j^{n+1} = T_j^n - \left(\frac{u\Delta t}{2\Delta x}\right)(T_{j+1}^n - T_{j-1}^n) + \left(\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n), \quad (1.11)$$

Η επαναλαμβανόμενη χρήση της (1.11) παράγει τη λύση σε όλα τα εσωτερικά σημεία του δικτύου, \mathcal{N} , στο επόμενο χρονικό βήμα $n + 1$. Επαύξηση στο n και αντικαθιστώντας τις τιμές T^{n+1} στη δεξιά πλευρά του (1.11), επιτρέπει τη διακριτή λύση να βαδίζει εμπρός στο χρόνο.

Για μια τοπική μέθοδο, π.χ. μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, ο απαιτούμενος αριθμός των σημείων του πλέγματος για μια ακριβή λύση εξαρτάται συνήθως από την διάσταση, τη γεωμετρική πολυπλοκότητα και τη σοβαρότητα των κλίσεων των εξαρτώμενων μεταβλητών. Για τη μελέτη ροής ενός πλήρους αεροσκάφους μπορεί να χρειάζονται ένα πλέγμα δέκα εκατομμυρίων σημείων. Σε κάθε σημείο του πλέγματος πρέπει να αποθηκεύονται κάθε εξαρτημένη μεταβλητή και ορισμένες βοηθητικές μεταβλητές. Για τυρβώδη συμπίεστη τρισδιάστατη ροή μπορεί να απαιτηθεί η χρήση μεταξύ πέντε και τριάντα εξαρτημένων μεταβλητών ανά σημείο του πλέγματος. Για τον αποτελεσματικό υπολογισμό όλων αυτών των μεταβλητών πρέπει να αποθηκεύονται στην κύρια μνήμη.

Δεδομένου ότι οι εξισώσεις για τις περισσότερες κατηγορίες ρευστοδυναμικής είναι η μη γραμμική και η υπολογιστική, η λύση προχωρά συνήθως επαναληπτικά. Δηλαδή, η λύση για κάθε εξαρτημένη μεταβλητή σε κάθε σημείο πλέγματος διαδοχικά διορθώνεται με τη χρήση των διακριτοποιούντων εξισώσεων. Η επαναληπτική διαδικασία είναι συχνά ισοδύναμη με την προώθηση της λύσης πάνω από ένα μικρό χρονικό βήμα. Ο αριθμός των επαναλήψεων ή των χρονικών βημάτων μπορεί να διαφέρει από μερικές εκατοντάδες έως μερικές χιλιάδες.

Η διαδικασία διακριτοποίησης εισάγει ένα σφάλμα που μπορεί να μειωθεί, εκφράζοντας την λύση κατ' αρχήν στο πλέγμα, όσο οι διακριτές εξισώσεις, π.χ. (1.10), είναι πιστές στην αναπαράσταση των εξισώσεων που διέπουν. Αν ο αριθμητικός αλγόριθμος που εκτελεί, τις επαναλήψεις ή προχωράει στο χρόνο είναι επίσης ευσταθής, δηλαδή τα σφάλματα δεν μεγαλώνουν με την παροδο του χρόνου, τότε η υπολογιστική λύση μπορεί να γίνει αυθαίρετα κοντά στην αληθινή λύση των εξισώσεων που διέπουν, όσο μικραίνουμε το υπολογιστικό πλέγμα. Αυτόν τον έλεγχο μπορούμε να τον κανοθυμε πρακτικά όσο υπάρχουν επαρκείς πόροι διαθέσιμοι στον υπολογιστή.

Παρά το γεγονός ότι η λύση συχνά ζητείται από την άποψη των διακριτών κομβικών τιμών κάποιοι μέθοδοι, π.χ., των πεπερασμένων στοιχείων και φασματικές μέθοδοι, που εισάγουν ρητά μια συνεχή εκπροσώπηση για την υπολογιστική λύση. Σε περίπτωση που το υποκείμενο πρόβλημα είναι ομαλό για τέτοιες μεθόδους, συχνά παρέχουν μεγαλύτερη ακρίβεια ανά αγνώστων στις διακριτοποιημένες εξισώσεις.

1.6 Περαιτέρω γνώση

Ο σκοπός του παρόντος κειμένου είναι να παράσχει μια στοιχειώδη εισαγωγή στις υπολογιστικές τεχνικές που είναι κατάλληλες για την επίλυση των προβλημάτων ροής.

Υπάρχουν πάρα πολλές διάχυτες πληροφορίες που είναι διαθέσιμες σε άλλα βιβλία, άρθρα ανασκόπησης, άρθρα σε περιοδικά και πρακτικά συνεδρίων τα οποία κάποιος μπορεί να συμβουλευτεί. Συγκεκριμένα:

Οι Richtmyer και Morton (1967) έχουν κατασκευάσει ένα γενικό θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση υπολογιστικών τεχνικών που σχετίζονται με την ρευστοδυναμική και να συζητήσουν συγκεκριμένες τεχνικές πεπερασμένων διαφορών και μη συνεκτική ροή συμπίεστου. Ο Roache (1976) εξετάζει την τυρβώδη ροή που υπόκειται σε συνθήκες για ασυμπίεστες και συμπίεστες ροές, αλλά επικεντρώνεται σε τεχνικές πεπερασμένων διαφορών. Πιο πρόσφατα, ο Peyret και Taylor (1983) μελετούν υπολογιστικές τεχνικές για διάφορους κλάδους της δυναμικής των ρευστών με μεγαλύτερη έμφαση στις πεπερασμένες διαφορές και φασματικές μεθόδους. Ο Holt (1984) περιγράφει πολύ ισχυρές τεχνικές για την ροή οριακού στρώματος και την ανιζωδική συμπίεστη ροή. Ο Book (1981) μελετάει τεχνικές πεπερασμένων διαφορών για την τεχνολογική και γεωφυσική ρευστοδυναμική, όπου οι μηχανισμοί διάχυσης είναι ανύπαρκτοι ή πολύ μικρό.

Ο Thomasset (1981), Baker (1983) και Glowinski (1984) εξετάζουν υπολογιστικές τεχνικές που βασίζονται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και ο Fletcher (1984) παρέχει τεχνικές πεπερασμένων στοιχείων και φασματικές μεθόδους. Ο Canuto κ.ά. (1987) αναλύουν υπολογιστικές τεχνικές που βασίζονται σε φασματικές μεθόδους. Haltiner και Williams (1980) συζητούν υπολογιστικές τεχνικές για τη γεωφυσική ρευστοδυναμική.

Τα άρθρα ανασκόπησης από Chapman (1975,1979,1981), Green (1982), Krause (1985), Kutler (1985) και τον Jameson (1989) αναφέρουν το τι μπορεί να κάνει η υπολογιστική ρευστοδυναμική μηχανική σήμερα και τι θα είναι εφικτό στο μέλλον. Τα άρθρα αυτά έχουν μια ισχυρή αεροναυτική κλίση όσον αφορά στις εφαρμογές των μελετούμενων προβλημάτων. Μια πιο γενική ανασκόπηση παρέχεται από τον Turkel (1982). Ο Cullen (1983) και ο Chervin (1989) εξετάζει την τρέχουσα κατάσταση των μετεωρολογικών υπολογιστικών ρευστοδυναμικών. Ανασκοπήσεις σε συγκεκριμένους κλάδους της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής εμφανίζονται στις ετήσιες Κριτικές της Ρευστομηχανικής, στη σειρά διαλέξεων του Von Karman της Ετήσιας κριτικής της Ρευστομηχανικής, στη σειρά Διάλεξη του von Karman Institute και στη σειρά μονογραφία της Pineridge Press. Σε αυτή την πτυχιακή εργασία δεν ασχοληθήκαμε καθόλου με τεχνικές παράλληλου υπολογισμού. Αυτά τα προχωρημένα θέματα μελετήθηκαν από τους Ortega και Voigt (1985) και Gentsch και Neves (1988) που παρέχουν μια περιεκτική επισκόπηση της περιοχής αυτής.

Σχετικά άρθρα περιοδικών εμφανίζονται στο διεθνή περιοδικά με κριτές AIAA Computational physics, Σε διεθνή περιοδικά που έχουν τίτλους που σχετίζονται με μελέτη αριθμητικών Μεθόδων σε ρευστά, Μοντελοποίηση Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, όπως τα Communications in Numerical Methods, Computers and Fluids, Numerical Methods in Fluid Mechanics.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Μερικές διαφορικές εξισώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα αναπτυχθούν οι διαδικασίες για την ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων όπως οι ελλειπτικές, οι παραβολικές ή οι υπερβολικές. Οι διαφορετικοί τύποι εξισώσεων με μερικές παραγώγους θα εξεταστούν και από μια μαθηματική και από μια φυσική άποψη για φανούν τα κύρια χαρακτηριστικά τους και οι κατηγορίες ροής για τις οποίες συμβαίνουν.

Οι διέπουσες εξισώσεις για την ρευστοδυναμική είναι κυρίως διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που περιέχουν πρώτες και δεύτερες παραγώγους στις χωρικές συντεταγμένες και πρώτες παραγώγους μόνο στον χρόνο. Οι χρονικές εμφανίζονται σε γραμμική μορφή αλλά οι χωρικές παράγωγοι εμφανίζονται συχνά σε μη γραμμικούς όρους. Επίσης, εκτός από την ειδική περίπτωση της δυναμικής ροής, τα προβλήματα ροής περιγράφονται από συστήματα των διεπουσών εξισώσεων παρά μια ενιαία εξίσωση μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες.

2.2 Ιστορικό

Για τις γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι δυνατή μια απλή ταξινόμηση. Κατά συνέπεια για τη μερική διαφορική εξίσωση (PDE)

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F U + G = 0, \quad (2.1)$$

όπου A έως G είναι σταθεροί συντελεστές, μπορούν να διακριθούν τρεις κατηγορίες μερικής διαφορικής εξίσωσης. Αυτές είναι:

$$\begin{aligned} \text{ελλειπτική PDE: } B^2 - 4AC < 0, \\ \text{παραβολική PDE: } B^2 - 4AC = 0, \\ \text{υπερβολική PDE: } B^2 - 4AC > 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Είναι προφανές ότι η ταξινόμηση εξαρτάται μόνο από την παράγωγο υψηλότερης τάξης ως προς κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή.

Για τη δισδιάστατη σταθερή συμπίεστη δυναμική ροή γύρω από ένα λεπτό σώμα η διέπουσα εξίσωση, είναι

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (2.3)$$

Η εφαρμογή των κριτηρίων (2.2) δείχνει ότι η (2.3) είναι ελλειπτική για την υποηχητική ροή ($M_\infty < 1$) και υπερβολική για την υπερηχητική ροή ($M_\infty > 1$).

Εάν οι συντελεστές, A έως G στην (2.1), είναι συναρτήσεις των x , y , u , $\partial u/\partial x$ ή $\partial u/\partial y$, (2.2) μπορεί ακόμα να χρησιμοποιηθεί εάν στα A , B και C δοθεί μια τοπική ερμηνεία. Αυτό υπονοεί ότι η ταξινόμηση των διεπουσών εξισώσεων μπορεί να αλλάξει στα διαφορετικά μέρη του υπολογιστικού πεδίου.

Η διέπουσα εξίσωση για τη σταθερή, συμπιεστή, δυναμική ροή, μπορεί να γραφτεί στις δισδιάστατες φυσικές συντεταγμένες ως

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} = 0, \quad (2.4)$$

όπου τα s και n είναι διευθύνσεις παράλληλα και κάθετα στην τοπική ροική κατεύθυνση, και το M είναι ο τοπικός αριθμός Mach.

Η εφαρμογή των όρων (2.2) σε τοπική βάση δείχνει ότι η (2.4) είναι ελλειπτική, παραβολική ή υπερβολική ως $M < 1$, $M = 1$ ή $M > 1$. Μια χαρακτηριστική διανομή του τοπικού αριθμού Mach, M . Το χαρακτηριστικό γνώρισμα ότι η διέπουσα εξίσωση μπορεί να αλλάξει τον τύπο της σε διαφορετικά μέρη του υπολογιστικού πεδίου είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που περιπλέκουν το πρόβλημα στον υπολογισμό της διηχητικής ροής.

Η εισαγωγή των απλούστερων κατηγοριών ροής μπορεί να εισαγάγει μια αλλαγή στον τύπο της εξίσωσης. Οι διέπουσες εξισώσεις για τη δισδιάστατη σταθερή, ασυμπίεστη ιξώδη ροή, χωρίς τους όρους $\partial u/\partial t$ και $\partial v/\partial t$, είναι ελλειπτικές. Εντούτοις, η εισαγωγή της προσέγγισης οριακού στρώματος παράγει ένα παραβολικό σύστημα των PDEs.

Για τις εξισώσεις που μπορούν να δημιουργηθούν υπό την μορφή της (2.1) η ταξινόμηση του PDE μπορεί να καθοριστεί από τον έλεγχο, χρησιμοποιώντας την (2.2). Όταν αυτό δεν είναι δυνατό, π.χ. συστήματα των PDEs, είναι συνήθως απαραίτητο για να εξεταστούν τα χαρακτηριστικά για να καθοριστεί η σωστή ταξινόμηση.

Οι διαφορετικές κατηγορίες των PDEs μπορούν να συνδεθούν, ευρέως, με διαφορετικούς τύπους προβλημάτων ροής. Γενικά, τα χρονικά εξαρτημένα προβλήματα οδηγούν είτε σε παραβολικές είτε σε υπερβολικές PDEs. Οι παραβολικές PDEs διέπουν ροές που περιέχουν μηχανισμούς σκέδασης, π.χ. σημαντικές ιξώδεις πιέσεις ή θερμική διεξαγωγή. Σε αυτήν την περίπτωση η λύση θα είναι ομαλή και οι κλίσεις θα μειώνονται όσο αυξάνεται ο χρόνος εάν οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι χρονικά εξαρτημένες. Εάν δεν υπάρχει κανένας σκεδαστικός μηχανισμός παρών, η λύση θα παραμείνει σταθερού ορίσματος εάν η PDE είναι γραμμική και μπορεί ακόμη και να αυξηθεί εάν η PDE είναι μη γραμμική. Αυτή η λύση είναι χαρακτηριστική των ροών που διέπονται από τις υπερβολικές PDEs. Οι ελλειπτικές PDEs διέπουν συνήθως προβλήματα μόνιμης κατάστασης ή ισορροπίας. Εντούτοις, κάποιες ροές μόνιμης κατάστασης οδηγούν σε παραβολικές PDEs (μόνιμη ροή οριακού στρώματος) και σε υπερβολικές PDEs (μόνιμη ανιξώδης υπερηχητική ροή).

2.2.1 Η φύση ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος

Πριν προχωρήσουμε περαιτέρω με την επίσημη ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων αξίζει να διατυπώσουμε τον σχηματισμό του προβλήματος και την κατασκευή του αλγορίθμου στα πλαίσια ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος. Οι διέπουσες εξισώσεις και οι βοηθητικές (αρχικές και οριακές) συνθήκες τίθενται καλά από μαθηματική άποψη εάν οι ακόλουθοι τρεις όροι ικανοποιούνται:

- i) η λύση υπάρχει,
- ii) η λύση είναι μοναδική,
- iii) η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα βοηθητικά στοιχεία.

Το θέμα της ύπαρξης λύσης δεν δημιουργεί συνήθως καμία δυσκολία. Μια εξαίρεση εμφανίζεται στην εισαγωγή των ακριβών λύσεων της εξίσωσης Laplace όπου η λύση μπορεί να μην υπάρχει σε απομονωμένα σημεία. Κατά συνέπεια δεν υπάρχει στη θέση της πηγής, $r=r_s$. Στην πράξη αυτό το πρόβλημα αποφεύγεται συχνά με την τοποθέτηση της πηγής έξω από το υπολογιστικό πεδίο.

Η συνηθισμένη αιτία της μη μοναδικότητας είναι μια αποτυχία στο να ταιριαχτούν κατάλληλα οι βοηθητικοί όροι με τον τύπο της διέπουσας PDE. Για την εξίσωση δυναμικού που διέπει τις ανιζώδεις, αστρόβιλες ροές, και για τις εξισώσεις οριακού στρώματος, οι κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες είναι καλά ορισμένες. Γιατί τις εξισώσεις Navier-Stokes οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες σε μια στερεά επιφάνεια είναι ευρέως γνωστές αλλά υπάρχει κάποια ευελιξία στην επίτευξη της σωστής επιλογής για τις συνοριακές συνθήκες μακρινού πεδίου (μακριά από τις διαταραχές του πεδίου ροής στο λεγόμενο απόρρευμα). Γενικά μία ελλιπής περιγραφή των συνοριακών συνθηκών οδηγεί σε μη μοναδικότητα και μια υπερβολική περιγραφή οδηγεί επίσης σε μη φυσικές λύσεις δίπλα στο εν λόγω όριο.

Υπάρχουν μερικά προβλήματα ροής για τα οποία πολλαπλές λύσεις μπορούν να αναμένονται σε φυσικές καταστάσεις. Αυτά τα προβλήματα θα απετύγχαναν στα ανωτέρω κριτήρια της καλής μαθηματικής τοποθέτησης. Αυτή η κατάσταση προκύπτει συχνά για τις ροές που υποβάλλονται στη μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη κίνηση. Εντούτοις, η ευρεία κατανόηση της ρευστοδυναμικής θα προσδιορίσει συνήθως τέτοιες κατηγορίες ροών για τις οποίες ο υπολογισμός μπορεί να περιπλακεί από την ανησυχία για την καλή τοποθέτηση της μαθηματικής διατύπωσης.

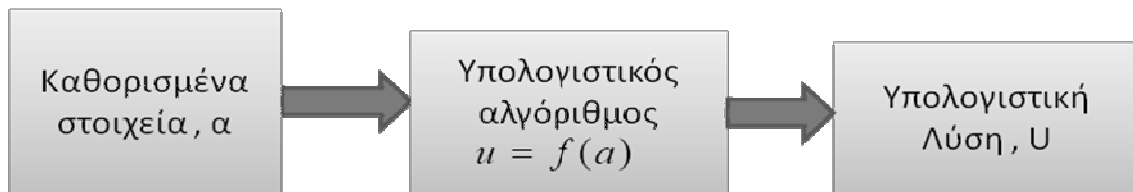
Το τρίτο κριτήριο ανωτέρω απαιτεί ότι μια μικρή αλλαγή στις αρχικές ή συνοριακές συνθήκες πρέπει να προκαλέσει μόνο μια μικρή αλλαγή στη λύση. Οι βοηθητικές συνθήκες εισάγονται συχνά κατα προσέγγιση σε έναν τυπικό υπολογιστικό αλγόριθμο. Συνεπώς εάν ο τρίτος όρος δεν ικανοποιηθεί τα λάθη στα βοηθητικά στοιχεία θα διαδοθούν στο εσωτερικό αναγκάζοντας τη λύση να αυξηθεί γρήγορα, ιδιαίτερα για τις υπερβολικές PDEs.

Τα ανωτέρω κριτήρια αποδίδονται συνήθως στον Hadamard. Επιπλέον θα μπορούσαμε να πάρουμε μια απλή παράλληλο και να απαιτήσουμε αυτήν για έναν καλά τοποθετημένο υπολογισμό:

- i) η υπολογιστική λύση υπάρχει,

- ii) η υπολογιστική λύση είναι μοναδική,
- iii) η υπολογιστική λύση εξαρτάται συνεχώς από τα κατά προσέγγιση βοηθητικά στοιχεία.

Η διαδικασία για την απόκτηση της υπολογιστικής λύσης μπορεί να αναπαρασταθεί σχηματικά όπως στο σχέδιο 2.1. Εδώ τα καθορισμένα στοιχεία είναι η κατά προσέγγιση εφαρμογή των αρχικών και συνοριακών συνθηκών. Εάν οι συνοριακές συνθήκες τοποθετηθούν στα παράγωγα του u ένα σφάλμα θα εισαχθεί στην προσέγγιση των συνοριακών συνθηκών. Ο υπολογιστικός αλγόριθμος κατασκευάζεται χαρακτηριστικά από



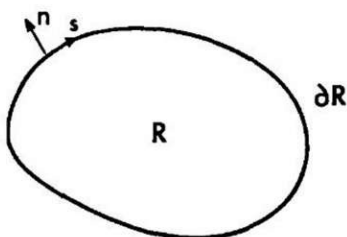
Σχέδιο 2.1. Υπολογιστική διαδικασία

την διέπουσα PDE (Παρ.3.1) και πρέπει να είναι ευσταθή ώστε οι ανωτέρω τρεις όροι να ικανοποιηθούν.

Επομένως για έναν καλά τοποθετημένο υπολογισμό είναι απαραίτητο ότι όχι μόνο θα πρέπει και η βασική PDE και οι βοηθητικοί όροι να είναι καλά τοποθετημένοι αλλά ότι και ο αλγόριθμος θα πρέπει να είναι καλά τοποθετημένος (ευσταθής) επίσης. Είναι αυτονόητο εδώ ότι η κατά προσέγγιση λύση που παράγεται από έναν καλά τοποθετημένο υπολογισμό θα είναι κοντά, υπό κάποια έννοια, στην ακριβή λύση του καλά τοποθετημένου προβλήματος.

2.2.2 Συνοριακές και αρχικές συνθήκες

Είναι σαφές από τη συζήτηση για τα καλά τοποθετημένα προβλήματα και των καλά τοποθετημένων υπολογισμών, ότι τα βοηθητικά στοιχεία είναι, από μία άποψη, η αφετηρία για τη λήψη της εσωτερικής λύσης, ιδιαίτερα για τα προβλήματα διάδοσης. Εάν δεν διακρίνουμε μεταξύ του χρόνου και του διαστήματος ως ανεξάρτητες μεταβλητές τότε τα βοηθητικά στοιχεία που καθορίζονται στο σύνορο ∂R , στο σχέδιο 2.2, «παρεμβάλλονται» από τον υπολογιστικό αλγόριθμο (βασισμένο στην PDE) για να παράσχουν τη λύση στο εσωτερικό, P .



Σχ. 2.2. Υπολογιστικό πεδίο R

Οι συνοριακές συνθήκες καθορίζονται με τρεις τρόπους:

- i) όρος Dirichlet, π.χ. $u=f$ στο ∂R .
- ii) όρος (παράγωγος) Neumann, π.χ. $\partial u/\partial n=f$ ή $\partial u/\partial s = g$ στο ∂R ,
- iii) μικτός ή όρος του Robin, π.χ. $\partial u/\partial n + ku=f, k>0$ στο ∂R

στις συνοριακές συνθήκες του τύπου ii) και iii), το $\partial/\partial n$ δείχνει την μερική παράγωγο με διεύθυνση κάθετη στο σύνορο.

Για τις περισσότερες ροές, που απαιτούν την λύση των εξισώσεων Navier-Stokes στις βασικές μεταβλητές (u, v, p , κ.λ.π.), τουλάχιστον ένα τμήμα ταχύτητας δίνεται σε ένα όριο εισροής. Αυτό παρέχει μια συνοριακή συνθήκη Dirichlet στην ταχύτητα. Για την δυναμική εξίσωση ταχύτητας που διέπει την κολλώδη συμπίεστη ροή, ο όρος ότι $\partial\phi/\partial n=0$ στην επιφάνεια σωμάτων είναι μια συνοριακή συνθήκη Neumann. Οι μικτοί όροι είναι σπάνιοι στην ρευστομηχανική αλλά εμφανίζονται στη συναγωγική μεταφορά θερμότητας. Υπολογιστικά, οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet μπορούν να εφαρμοστούν επ'ακριβώς εφ' όσον το f είναι αναλυτικό. Εντούτοις, εισάγονται λάθη στην αναπαράσταση Neumann ή των μικτών όρων.

2.2.3 Ταξινόμηση με την μέθοδο των χαρακτηριστικών

Για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που είναι συναρτήσεις δύο ανεξάρτητων μεταβλητών η ταξινόμηση σε ελλειπτικό, παραβολικό ή υπερβολικό τύπο μπορεί να επιτευχθεί αναζητώντας πρώτα χαρακτηριστικές κατευθύνσεις κατά μήκος των οποίων οι διέπουσες εξισώσεις περιλαμβάνουν μόνο τα τέλεια διαφορικά.

Για μια απλή πρώτης τάξης PDE σε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές,

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} = C, \quad (2.5)$$

υπάρχει ένα απλό πραγματικό χαρακτηριστικό μέσω κάθε σημείου και η χαρακτηριστική καμπύλη καθορίζεται από (σχ. 2.5)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B}{A}, \quad (2.6)$$

Κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης, η (2.5) ανάγεται σε

$$\frac{du}{dt} = \frac{C}{A} \text{ και } \frac{du}{dx} = \frac{C}{B} \quad (2.7)$$

Η εξίσωση (2.5) είναι μια υπερβολική PDE και είναι δυνατό να ενσωματώσει την (2.7) ως συνήθεις διαφορικές εξισώσεις κατά μήκος ενός πλέγματος που καθορίζεται από την (2.6), εφ' όσον δίνονται τα αρχικά στοιχεία σε μια μη χαρακτηριστική γραμμή.

Η ίδια έννοια των χαρακτηριστικών κατευθύνσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί από κοινού με τις PDE δεύτερης τάξης σε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Δεδομένου ότι βρίσκεται από την (2.1) ότι μόνο οι συντελεστές των υψηλότερων τάξης παραγώγων καθορίζουν την κατηγορία της PDE, είναι βολικό να γραφτεί η (2.1) ως

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + H = 0 \quad (2.8)$$

όπου το H περιέχει όλους τους όρους με παραγώγους πρώτης τάξης κ.λπ. στην (2.1) και τα A , B και C μπορούν να είναι συναρτήσεις των x , y . Είναι δυνατό να ληφθούν, για κάθε σημείο στο πεδίο, δύο κατευθύνσεις κατά μήκος των οποίων η ολοκλήρωση της (2.8) περιλαμβάνει μόνο τα τέλεια διαφορικά. Η ύπαρξη αυτών των (χαρακτηριστικών) κατευθύνσεων σχετίζεται άμεσα με την κατηγορία της PDE.

Για ευκολία της παρουσίασης ο ακόλουθος συμβολισμός εισάγεται:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad S = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad T = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

Μια καμπύλη K εισάγεται στο εσωτερικό του πεδίου στο οποίο τα P , Q , R , S , T και u ικανοποιούν την (2.8). Κατά μήκος μιας εφαπτομένης στην K τα διαφορικά των P και Q ικανοποιούν

$$dP = Rdx + Sdy \quad (2.10)$$

$$dQ = Sdx + Tdy \quad (2.11)$$

και η (2.8) μπορεί να γραφτεί ως

$$AR + BS + CT + H = 0 \quad (2.12)$$

Στις (2.10 και 2.11), το dy/dx καθορίζει την κλίση της εφαπτομένης στην K . Χρησιμοποιώντας τις (2.10 και 2.11) τα R και T μπορούν να αποβληθούν από την (2.12) για να δώσουν

$$S \left[A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C \right] - \left\{ \left[A \left(\frac{dP}{dx} \right) + H \right] \frac{dy}{dx} + C \frac{dQ}{dx} \right\} = 0 \quad (2.13)$$

Εάν το dy/dx επιλέγεται έτσι ώστε

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0 \quad (2.14)$$

η (2.13) ανάγεται στην απλούστερη σχέση μεταξύ των dP/dx και dQ/dx ,

$$\left[A \left(\frac{dP}{dx} \right) + H \right] \frac{dy}{dx} + C \frac{dQ}{dx} = 0 \quad (2.15)$$

Οι δύο λύσεις στην (2.14) καθορίζουν τις χαρακτηριστικές κατευθύνσεις για τις οποίες η (2.15) ισχύει. Συγκρίνοντας την (2.14) με την (2.2) είναι σαφές ότι εάν η (2.8) είναι:

- i) μια υπερβολική PDE, δύο πραγματικά χαρακτηριστικά υπάρχουν,
- ii) μια παραβολική PDE, ένα πραγματικό χαρακτηριστικό υπάρχει,
- iii) μια ελλειπτική PDE, τα χαρακτηριστικά είναι μιγαδικά.

Κατά συνέπεια μια εκτίμηση της διακρίνουσας, $B^2 - 4AC$, καθορίζει και τον τύπο της PDE και την φύση των χαρακτηριστικών.

Η ταξινόμηση του τύπου της μερικής διαφορικής εξίσωσης έχει αναληφθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες, μέχρι τώρα. Μια σημαντική ερώτηση είναι εάν ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων, μπορεί να αλλάξει τον τύπο της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Κατά συνέπεια οι νέες ανεξάρτητες μεταβλητές (ξ, η) εισάγονται στην θέση των (x, y) και υποτίθεται ότι ο μετασχηματισμός, $\xi = \xi(x, y)$ και $\eta = \eta(x, y)$ είναι γνωστός. Οι παράγωγοι μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (2.16)$$

όπου $\xi_x \equiv \partial \xi / \partial x$ κ.λ.π. Μετά από κάποια επεξεργασία, η (2.8) γίνεται

$$A' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + H' = 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
\text{όπου} \quad A' &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\
B' &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\
C' &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Η διακρίνουσα, $(B')^2 - 4A'C'$, γίνεται έπειτα

$$(B')^2 - 4A'C' = J^2 [B^2 - 4AC] \tag{2.19}$$

όπου η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$. Η εξίσωση (2.19) δίνει το σημαντικό αποτέλεσμα ότι η ταξινόμηση της PDE είναι ακριβώς η ίδια είτε καθορίζεται στις καρτεσιανές συντεταγμένες από την (2.8) ή στις συντεταγμένες (ζ, η) από τις (2.17 και 2.18). Έτσι, η εισαγωγή ενός συντεταγμένου μετασχηματισμού δεν αλλάζει τον τύπο της PDE.

Το να επεκταθεί η εξέταση των χαρακτηριστικών πέρα από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι λιγότερο χρήσιμο. Στις διαστάσεις m οι διαστατικές επιφάνειες $(m-1)$ πρέπει να εξεταστούν. Εντούτοις, μια εξέταση των συντελεστών που πολλαπλασιάζουν τα παράγωγα υψηλής τάξης μπορεί, σε γενικές γραμμές, να παράσχει χρήσιμες πληροφορίες. Παραδείγματος χάριν, στις τρεις διαστάσεις η (2.8) θα αντικαθίσταται από

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + F \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + H = 0 \tag{2.20}$$

Είναι απαραίτητο να ληφθεί ένας μετασχηματισμός, $\xi = \xi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$ έτσι ώστε όλα οι μικτές παράγωγοι στις συντεταγμένες (ζ, η, ξ) να εξαφανιστούν. Αυτή η προσέγγιση θα αποτύχει για περισσότερες από τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές, οπότε σ' αυτή την περίπτωση είναι κατάλληλο να αντικατασταθεί η (2.20) με

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + H = 0 \tag{2.21}$$

όπου το N είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών και οι συντελεστές a_{jk} αντικαθιστούν τα A έως το F στην (2.20). Ο προηγούμενος αναφερθείς μετασχηματισμός για να αφαιρεθούν οι μικτές παράγωγοι είναι ισοδύναμος με την εύρεση των ιδιοτιμών λ της μήτρας \underline{A} με στοιχεία a_{jk} .

Η ακόλουθη ταξινόμηση, σύμφωνα με τον Chester, μπορεί να δοθεί:

i) Εάν οποιαδήποτε από τις ιδιοτιμές λ είναι μηδενική, η (2.21) είναι παραβολική.

- ii) εάν όλες οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές από το μηδέν και του ίδιου πρόσημου, η (2.21) είναι ελλειπτική.
- iii) εάν όλες οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές από το μηδέν και όλες εκτός από μια έχει το ίδιο πρόσημο, η (2.21) είναι υπερβολική.

Για τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές ο Hellwig παρέχει μια ισοδύναμη ταξινόμηση από την άποψη των συντελεστών που πολλαπλασιάζουν τα παράγωγα στις μετασχηματισμένες εξισώσεις.

Σε περισσότερες από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές χρήσιμες πληροφορίες μπορούν συχνά να καθοριστούν για τη συμπεριφορά της μερικής διαφορικής εξίσωσης εξετάζοντας τις δισδιάστατες επιφάνειες, δηλ. με την επιλογή των ιδιαίτερων συντεταγμένων τιμών. Κατά συνέπεια για την (2.20) ο χαρακτήρας της εξίσωσης μπορεί να καθιερωθεί στο επίπεδο x =σταθερό παγώνοντας προσωρινά όλους τους όρους που περιλαμβάνουν τα παράγωγα x και μεταχειριζόμενοι την προκύπτουσα εξίσωση σαν ήταν μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών.

2.2.4 Συστήματα εξισώσεων

Μια εκτίμηση δείχνει ότι οι διέπουσες εξισώσεις για την ρευστοδυναμική διαμορφώνουν συχνά ένα σύστημα, αντί να είναι μια ενιαία εξίσωση. Ένα σύστημα δύο PDE πρώτης τάξης, σε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, θα μπορούσε να γραφτεί

$$A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + A_{22} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial y} = E_2 \quad (2.22)$$

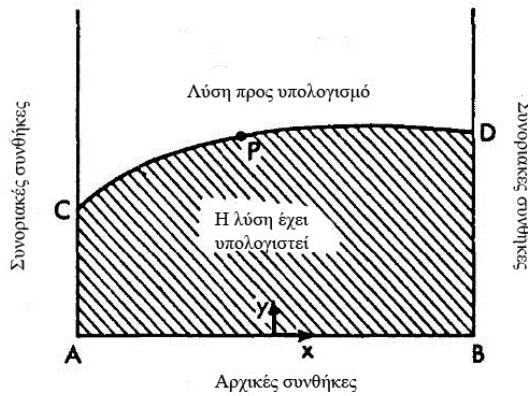
$$A_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + A_{22} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial y} = E_2 \quad (2.23)$$

Δεδομένου ότι και το u και το v είναι συναρτήσεις των x και y οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \quad (2.24)$$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \quad (2.25)$$

Για το πρόβλημα που παρουσιάζεται στο σχ. 2.3 υποτίθεται ότι η λύση έχει καθοριστεί ήδη στην περιοχή ACPDB. Όπως πριν, δύο κατευθύνσεις, dy/dx , έως P



Σχ. 23. Σχηματική αναπαράσταση του υπολογιστικού πεδίου για ένα πρόβλημα διάδοσης αναζητούνται κατά μήκος των οποίων μόνο τέλεια διαφορικά, du και dv , εμφανίζονται. Για το σύστημα των εξισώσεων (2.22, 23) αυτό είναι ισοδύναμο με την αναζήτηση των πολλαπλασιαστών, L_1 και L_2 , έτσι ώστε

$$L_1 \times (2.22) + L_2 \times (2.23) \Rightarrow m_1 du + m_2 dv = (L_1 E_1 + L_2 E_2) \quad (2.26)$$

Η επέκταση των όρων που αποτελούν την (2.26) καθιερώνει τις σχέσεις

$$\begin{aligned} L_1 A_{11} + L_2 A_{21} &= m_1 dx, & L_1 B_{11} + L_2 B_{21} &= m_1 dy \\ L_1 A_{12} + L_2 A_{22} &= m_2 dx, & L_1 B_{12} + L_2 B_{22} &= m_2 dy \end{aligned} \quad (2.27)$$

Η εξάλειψη των m_1 και m_2 και η αναδιάταξη δίνει

$$\begin{bmatrix} (A_{11} dy - B_{11} dx)(A_{21} dy - B_{21} dx) \\ (A_{12} dy - B_{12} dx)(A_{22} dy - B_{22} dx) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.28)$$

Δεδομένου ότι αυτό το σύστημα είναι ομοιογενές στο L_1 είναι απαραίτητο ότι

$$\det[\underline{A}dy - \underline{B}dx] = 0 \quad (2.29)$$

για μια μη τετριμμένη λύση. Για το ανωτέρω παράδειγμα, η (2.29) λαμβάνει τη μορφή

$$(A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (A_{11} B_{22} - A_{21} B_{12} + B_{11} A_{22} - B_{21} A_{12}) \frac{dy}{dx} + (B_{11} B_{22} - B_{21} B_{12}) = 0 \quad (2.30)$$

Η εξίσωση (2.30) έχει δύο λύσεις και η φύση των λύσεων εξαρτάται από την διακρίνουσα

$$DIS = (A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12} + A_{22}B_{11} - A_{12}B_{21})^2 - 4(A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12})(A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12}) \quad (2.31)$$

η οποία καθορίζει επίσης την ταξινόμηση του συστήματος (2.22,23). Οι διαφορετικές δυνατότητες είναι υποδεικνύονται στον πίνακα 2.1.

Στα χαρακτηριστικά οι μερικές παράγωγοι $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ και $\partial v/\partial y$ δεν καθορίζονται μεμονωμένα. Στην πραγματικότητα, κατά την διασταύρωση των χαρακτηριστικών ασυνέχειες στα κανονικά παράγωγα μπορούν να εμφανιστούν ενώ τα εφαπτόμενα παράγωγα είναι συνεχή.

Ένα παράδειγμα με χρήση της ανωτέρω ταξινόμησης μπορεί να αναπτυχθεί ως εξής. Οι διέπουσες εξισώσεις για τη δισδιάστατη συμπιεστή δυναμική ροή, μπορούν

Πίνακας 2.1. Ταξινόμηση των (2.22,23)

DIS	Ρίζες της (2.30)	Ταξινόμηση του συστήματος (2.22,23)
Θετικό	2 πραγματικές	Υπερβολικό
Μηδενικό	1 πραγματικές	Παραβολικό
αρνητικό	2 μιγαδικές	ελλειπτικό

να ανασχηματιστούν από την άποψη των συνιστωσών ταχύτητας, δηλ.

$$(2.32) \quad \left(\frac{u^2}{a^2} - 1\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{uv}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{uv}{\alpha^2}\right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{και} \quad -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.33)$$

Οι εξισώσεις (2.32, 2.33) έχουν την ίδια δομή όπως οι (2.22, 2.23). Η αξιολόγηση της (2.31) δίνει

$$DIS = 4(M^2 - 1), \quad \text{όπου} \quad M^2 = (u^2 + v^2) / a^2,$$

και δείχνει ότι το σύστημα (2.32, 2.33) είναι υπερβολικό εάν $M > 1$. Αυτό είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που βρέθηκε κατά την εξέταση της συμπιεστής δυναμικής εξίσωσης (2.4). Αυτό πρέπει να είναι αναμενόμενο αφού, αν και οι εξισώσεις είναι διαφορετικές, αυτές διέπουν την ίδια φυσική κατάσταση.

Η κατασκευή που χρησιμοποιείται για να παραγάγει τις (2.28 και 2.29) μπορεί να γενικευτεί σε ένα σύστημα n εξισώσεων πρώτης τάξης. Η εξίσωση (2.28) αντικαθίσταται από

$$\left[\underline{A} \left(\frac{dy}{dx} \right)^{(k)} - \underline{B} \right] L^{(k)} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

Ο χαρακτήρας του συστήματος εξαρτάται από τη λύση της (2.29).

- i) Εάν n πραγματικές ρίζες λαμβάνονται το σύστημα είναι υπερβολικό.
- ii) Εάν n πραγματικές ρίζες, $1 \leq n \leq n-1$, και καμία μιγαδική ρίζα δεν λαμβάνονται, το σύστημα είναι παραβολικό.
- iii) εάν καμία πραγματική ρίζα δεν λαμβάνεται το σύστημα είναι ελλειπτικό.

Για τα μεγάλα συστήματα μερικές ρίζες μπορούν να είναι μιγαδικές και μερικές μπορούν να είναι πραγματικές αυτό δίνει ένα μικτό σύστημα. Η σημαντικότερη διαίρεση είναι μεταξύ των ελλειπτικών και μη-ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεδομένου ότι οι ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις αποκλείουν την σχετική με τον χρόνο συμπεριφορά. Επομένως το σύστημα των εξισώσεων θα θεωρηθεί ότι είναι ελλειπτικό εάν οποιεσδήποτε μιγαδικές ρίζες εμφανιστούν.

Η ανωτέρω ταξινόμηση επεκτείνεται στα συστήματα των εξισώσεων δεύτερης τάξης σε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές δεδομένου ότι βοηθητικές μεταβλητές μπορούν να εισαχθούν για να παραγάγουν ένα ακόμα μεγαλύτερο σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης. Εντούτοις, υπάρχει ένας κίνδυνος ότι και το \underline{A} και το \underline{B} είναι ιδιάζοντα έτσι ώστε μπορεί να είναι απαραίτητο να καταφύγουμε σε συνδυασμούς των εξισώσεων για να αποφευχθεί αυτή η εκφυλισμένη συμπεριφορά.

Για τα συστήματα περισσότερων από δύο ανεξάρτητων μεταβλητών η (2.29) μπορεί να γενικευτεί μερικώς ως εξής. Ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης σε τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές θα μπορούσε να γραφτεί

$$\underline{A} \frac{\partial q}{\partial x} + \underline{B} \frac{\partial q}{\partial y} + \underline{C} \frac{\partial q}{\partial z} = D, \quad (2.35)$$

όπου το q είναι το διάνυσμα n εξαρτώμενων μεταβλητών. Η εξίσωση (2.35) οδηγεί στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο ένατης τάξης

$$\det [\underline{A}\lambda_x + \underline{B}\lambda_y + \underline{C}\lambda_z] = 0, \quad (2.36)$$

όπου τα $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ καθορίζουν μια κάθετη κατεύθυνση σε μια επιφάνεια (x, y, z) . Η εξίσωση (2.36) γενικεύει την (2.29) και δίνει τον όρο ότι η επιφάνεια είναι μια χαρακτηριστική επιφάνεια. Σαφώς, για μια πραγματική χαρακτηριστική επιφάνεια η (2.36) πρέπει να έχει πραγματικές ρίζες. Εάν n πραγματικές ρίζες ληφθούν το σύστημα είναι υπερβολικό.

Είναι δυνατό να αναρωτηθούμε ποια είναι η χαρακτηριστική της μερικής διαφορικής εξίσωσης αναφορικά με τις ιδιαίτερες κατευθύνσεις. Παραδείγματος χάριν θέτοντας $\lambda_x = \lambda_z = 1$ και επιλύοντας για λ_y δείχνει ότι η (2.35) είναι ελλειπτική όσον αφορά την κατεύθυνση Y εάν οποιεσδήποτε φανταστικές ρίζες εμφανιστούν. Σαφώς κάθε κατεύθυνση μπορεί να εξεταστεί με τη σειρά.

Εδώ παρέχουμε ένα απλό παράδειγμα ενός συστήματος εξισώσεων βασισμένο στις σταθερές ασυμπίεστες εξισώσεις Navier Stokes σε δύο διαστάσεις. Σε αδιάστατη μορφή αυτές είναι

$$u_x + u_y = 0, \quad (2.37a)$$

$$uu_x + \nu u_y + p_x - \frac{1}{\text{Re}}(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad (2.37b)$$

$$uv_x + \nu v_y + p_y - \frac{1}{\text{Re}}(v_{xx} + v_{yy}) = 0, \quad (2.37c)$$

όπου $u_x = \partial u / \partial x$, κ.λπ., το Re είναι ο αριθμός Reynolds και τα u, v, p είναι οι εξαρτώμενες μεταβλητές. Οι εξισώσεις (2.37) ανάγονται σε ένα σύστημα πρώτης τάξης με την εισαγωγή των βοηθητικών μεταβλητών $R = \nu_x, S = \nu_y$ και $T = u_y$. Έτσι η (2.37) μπορεί να αντικατασταθεί με

$$\begin{aligned} u_y &= T, \\ u_x + \nu_y &= 0, \\ -R_y + S_x &= 0, \\ S_y + T_x &= 0, \\ S_x / \text{Re} - T_y / \text{Re} + p_x &= uS - \nu T, \\ -R_x / \text{Re} - S_y / \text{Re} + p_y &= uR - \nu S, \end{aligned} \quad (2.38)$$

Οι ιδιαίτερες επιλογές για την (2.38) γίνονται για να αποφευχθεί το γεγονός το ισοδύναμο των \underline{A} και \underline{B} στην (2.35) να είναι ιδιάζων. Ο χαρακτήρας του ανωτέρω συνόλου εξισώσεων μπορεί να καθοριστεί με την αντικατάσταση του $\partial/\partial x$ με το λ_x και του $\partial/\partial y$ με το λ_y , και θέτοντας την ορίζουσα σε μηδέν, όπως στην (2.36). Το αποτέλεσμα είναι

$$(1/\text{Re})\lambda_x^2(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)^2 = 0, \quad (2.39)$$

Θέτοντας $\lambda_y = 1$ δείχνει ότι το λ_x είναι φανταστικό. Θέτοντας 1 δείχνει ότι υπάρχουν φανταστικές ρίζες για λ_y . Επομένως συνάγεται το συμπέρασμα ότι το σύστημα (2.37) είναι ελλειπτικό.

2.2.5 Ταξινόμηση κατά την ανάλυση Fourier

Η ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων οδηγεί στην ερμηνεία των ριζών ενός χαρακτηριστικού πολυώνυμου, π.χ. (2.36). Οι ρίζες καθορίζουν τις χαρακτηριστικές κατευθύνσεις (ή τις επιφάνειες σε περισσότερες από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές).

Εντούτοις, το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να ληφθεί από μια ανάλυση Fourier των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σε αυτήν την περίπτωση οι ρίζες έχουν μια διαφορετική φυσική ερμηνεία, αν και η ταξινόμηση της μερικής διαφορικής εξίσωσης σε σχέση με τη φύση των ριζών παραμένει η ίδια. Η προσέγγιση με την ανάλυση Fourier είναι χρήσιμη για τα συστήματα των εξισώσεων όπου εμφανίζονται μερικές παράγωγοι υψηλότερης από πρώτης τάξης, δεδομένου ότι αποφεύγει την κατασκευή ενός ενδιάμεσου, αλλά διευρυμένου, συστήματος πρώτης τάξης. Η προσέγγιση με την ανάλυση Fourier δείχνει επίσης την αναμενόμενη μορφή της λύσης, π.χ. ταλαντωτική, εκθετική αύξηση, κ.λ.π. Αυτό το χαρακτηριστικό γνώρισμα αξιοποιείται στο κεφ. 16 κατά τον καθορισμό του εάν ευσταθείς υπολογιστικές λύσεις των αναγόμενων μορφών των εξισώσεων Navier-Stokes μπορούν να ληφθούν σε μια απλή χωρική πορεία.

Ας υποθέσουμε μια λύση ομοιογενούς κλιμακωτής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.40)$$

επιδιώκεται να έχει την μορφή

$$u(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{jk} \exp[i(s_x)_j x] \exp[i(\sigma_y)_k y] \quad (2.41)$$

Τα εύρη των διάφορων τρόπων καθορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Εντούτοις, η φύση της λύσης θα εξαρτηθεί από τους συντελεστές $(\sigma_x)_j$ και $(\sigma_y)_k$, οι οποίοι μπορούν να είναι μιγαδικοί. Εάν τα A , B και C δεν είναι συναρτήσεις του u η σχέση μεταξύ των σ_x και σ_y είναι η ίδια για όλους τους τρόπους έτσι ώστε μόνο ένας τρόπος χρειάζεται να εξεταστεί στην (2.41).

Η αντικατάσταση στην (2.40) δίνει

$$-A\sigma_x^2 - B\sigma_x\sigma_y - C\sigma_y^2 = 0$$

$$\text{ή} \quad (2.42)$$

$$A(\sigma_x / \sigma_y)^2 + B(\sigma_x / \sigma_y) + C = 0$$

Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό πολυώνυμο για το ισοδύναμο σ_x/σ_y με την (2.29). Η φύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (2.40) εξαρτάται από τη φύση των ριζών, και ως εκ τούτου από τα A , B και C όπως υποδεικνύεται από την (2.2).

Η προσέγγιση με την ανάλυση Fourier παράγει το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο από το κύριο μέρος της διέπουσας εξίσωσης όπως κάνει η χαρακτηριστική ανάλυση. Εντούτοις, εάν το σ_y υποτίθεται ότι είναι πραγματικό, η μορφή της λύσης είναι κυματοειδής στην κατεύθυνση y .

Κατόπιν η λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (2.42) που διαμορφώνεται από την τέλεια εξίσωση δείχνει τη μορφή της λύσης στην κατεύθυνση x .

Μια εξέταση της (2.41) δείχνει την ομοιότητα με τον ορισμό μετασχηματισμένη Fourier .

$$\hat{u}(\sigma_x, \sigma_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) \exp(-i\sigma_x x) \exp(-i\sigma_y y) dx dy \quad (2.43)$$

ή, συμβολικά, $\hat{u} = Fu$.

Για να αναλυθεί ο χαρακτήρας των μερικών διαφορικών εξισώσεων, γίνεται χρήση των ακόλουθων αποτελεσμάτων:

$$i\sigma_x \hat{u} = F \frac{\partial u}{\partial x}, \quad i\sigma_y \hat{u} = F \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.44)$$

Κατά συνέπεια το χαρακτηριστικό πολυώνυμο λαμβάνεται παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier της διέπουσας εξίσωσης. Ως παράδειγμα η (2.40) μετασχηματίζεται σε

$$\left[A(i\sigma_x)^2 + B(i\sigma_x i\sigma_y) + C(i\sigma_y)^2 \right] \hat{u} = 0 \quad (2.45)$$

και η (2.42) ακολουθεί άμεσα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που παράγεται μέσω της μετασχηματισμένης Fourier καλείται συχνά *σύμβολο* της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Η προσέγγιση με την μετασχηματισμένη Fourier για την λήψη του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ισχύει εάν τα A , B ή C είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών. Εάν τα A , B ή C είναι συναρτήσεις των εξαρτώμενων μεταβλητών είναι απαραίτητο να τα παγώσουμε στις τοπικές τιμές τους πριν εισάγουμε την μετασχηματισμένη Fourier.

Η εφαρμογή της προσέγγισης με ανάλυση Fourier στα συστήματα των εξισώσεων μπορεί να απεικονιστεί εξετάζοντας την (2.37). Παγώνοντας τους συντελεστές u και v στην (2.37b, c) και λαμβάνοντας τις μετασχηματισμένες Fourier των u , v και p παράγει το ακόλουθο ομοιογενές σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} i\sigma_x & i\sigma_x & 0 \\ i(u\sigma_x + u\sigma_y) + \frac{1}{\text{Re}}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) & 0 & i\sigma_x \\ 0 & i(u\sigma_x + u\sigma_y) + \frac{1}{\text{Re}}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) & i\sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.46)$$

το οποίο οδηγεί στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $\det[\] = 0$, δηλ.

$$(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \left[i(u\sigma_x + u\sigma_y + (1/\text{Re})(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)) \right] = 0 \quad (2.47)$$

Εντούτοις, η (2.47) περιέχει την ομάδα $i(u\sigma_x + v\sigma_y)$, η οποία αντιστοιχεί στις πρώτης τάξης παραγώγους των u και v . Αλλά ο χαρακτήρας του συστήματος (2.37) καθορίζεται από το κύριο μέρος, το οποίο αποκλείει ρητά όλες εκτός από τις υψηλότερης τάξης παραγώγους. Σε αυτήν την περίπτωση η (2.47) συμπίπτει με την (2.39) και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η (2.37) είναι ένα ελλειπτικό σύστημα. Είναι σαφές κατά την σύγκριση της (2.46) με την (2.38) ότι η προσέγγιση με ανάλυση Fourier αποφεύγει το πρόβλημα κατασκευής ενός ισοδύναμου συστήματος πρώτης τάξης και την πιθανότητα ότι μπορεί να είναι ιδιάζων.

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου που παράγονται από την ανάλυση Fourier ερμηνεύονται εδώ με τον ίδιο τρόπο όπως μέθοδο των χαρακτηριστικών για τον καθορισμό του τύπου της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Μια εναλλακτική ταξινόμηση βασισμένη στο μέγεθος της μεγαλύτερης ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου περιγράφεται από τους Gelfand και Shilov (1967).

Η προσέγγιση με ανάλυση Fourier χρησιμοποιείται για να καθορίσει το χαρακτήρα της λύσης που παράγεται από μια ενιαία πορεία κατάντη. Σε αυτή την κατάσταση διατηρούνται όλοι οι όροι στις διέπουσες εξισώσεις, όχι μόνο το κύριο μέρος, στο ισοδύναμο της (2.47).

2.3 Υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις

Το απλούστερο παράδειγμα μιας υπερβολικής PDE είναι η εξίσωση κυμάτων,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.48)$$

Για τις αρχικές συνθήκες, $u(x, 0) = \sin \pi x$, $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$, και τις συνοριακές συνθήκες, $u(0, t) = u(l, t) = 0$, η (2.48) έχει την ακριβή λύση

$$u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t \tag{2.49}$$

Η έλλειψη απόσβεσης είναι ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα των γραμμικών υπερβολικών PDE. Η εξίσωση μεταφοράς, είναι μια γραμμική υπερβολική PDE. Οι εξισώσεις που διέπουν την ασταθή ανιζώδη ροή είναι υπερβολικές, αλλά μη γραμμικές, όπως είναι οι εξισώσεις που διέπουν την σταθερή υπερηχητική ανιζώδη ροή.

2.3.1 Ερμηνεία χαρακτηριστικών

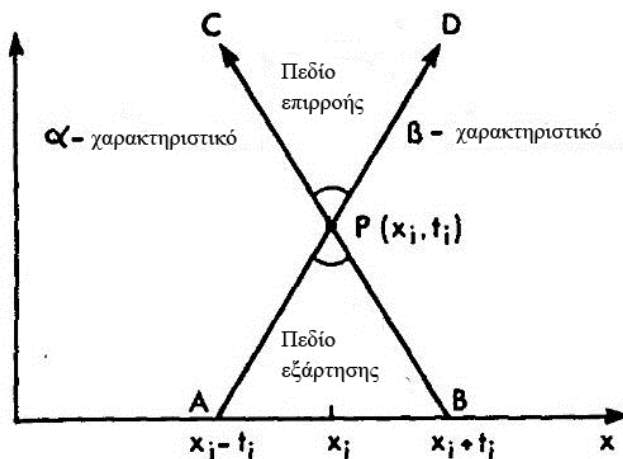
Οι υπερβολικές PDE παράγουν τα πραγματικά χαρακτηριστικά. Για την εξίσωση κύματος (2.48) οι χαρακτηριστικές κατευθύνσεις δίνονται από το $dx/dt = \pm 1$. Στο επίπεδο (x, t) , τα χαρακτηριστικά μέσω ενός σημείου P παρουσιάζονται στο σχ. 2.4.

Για το σύστημα των εξισώσεων (2.32,33) υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά, που δίνονται από

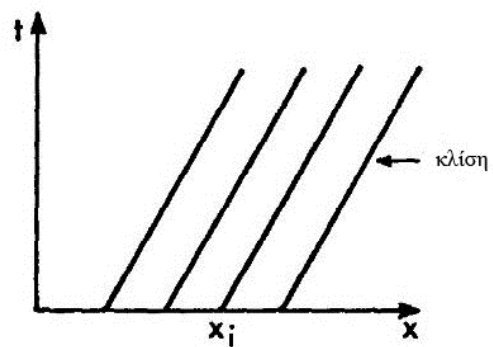
$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{uv}{\alpha^2} \pm \left(\frac{u^2 + v^2}{\alpha^2} - 1 \right)^{1/2} \right] \left[\left(\frac{u}{\alpha} \right)^2 - 1 \right]^{-1} \tag{2.50}$$

Είναι ξεκάθαρο ότι τα χαρακτηριστικά εξαρτώνται από την τοπική λύση και, γενικά, θα είναι καμπυλόγραμμα.

Για την πρώτη τάξης υπερβολική PDE (2.5) μία χαρακτηριστική της μορφής, $dt/dx = A/B$, περνά μέσω κάθε σημείου (σχ. 2.5). Εάν τα A και B είναι σταθερά τα χαρακτηριστικά είναι ευθείες γραμμές. Εάν τα A και B είναι συναρτήσεις των u , x ή t , τότε είναι καμπυλόγραμμες.



Σχ. 2.4. Χαρακτηριστικά για την εξίσωση κύματος.



Σχ. 2.5. Χαρακτηριστικά για μια υπερβολική πρώτη τάξης PDE, (2.5)

Για την γραμμική εξίσωση μεταφοράς ο λόγος B/A είναι απλώς η ταχύτητα.

Για τις υπερβολικές PDE είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν οι χαρακτηριστικές κατευθύνσεις για να αναπτυχθεί ένα υπολογιστικό πλέγμα στο οποίο οι συνθήκες συμβιβαστότητας, παραδείγματος χάριν (2.15), ισχύουν. Αυτή είναι η στρατηγική πίσω από τη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Αυτή η μέθοδος των χαρακτηριστικών είναι τώρα κυρίως ιστορικού ενδιαφέροντος και δεν χρησιμοποιείται εντατικά στην πράξη. Εντούτοις όμως, είναι χρήσιμη για τον καθορισμό των συνοριακών συνθηκών μακρινού πεδίου το οποίο είναι και αυτό ένα σημαντικό πρόβλημα στον καθορισμό των συνοριακών συνθηκών.

2.3.2 Φυσική Ερμηνεία

Όπως σημειώνεται ανωτέρω, οι υπερβολικές PDE συνδέονται με τα προβλήματα διάδοσης όταν δεν είναι εμφανίζεται διάχυση. Η εμφάνιση των πραγματικών χαρακτηριστικών, όπως στο σχ. 2.4, υπονοεί ότι μια διαταραχή στην λύση u στο P μπορεί μόνο να επηρεάσει το υπόλοιπο της λύσης στην περιοχή CPD . Αντιθέτως η λύση στην P επηρεάζεται από τις διαταραχές στην περιοχή APB μόνο.

Επιπλέον, εάν οι αρχικές συνθήκες καθορίζονται στο $t=0$, δηλ. στο AB στο σχ. 2.4, αυτές είναι επαρκείς για να καθορίσουν τη λύση στο P , μεμονωμένα. Αυτό μπορεί να καταδειχθεί, για την (2.48) ως εξής.

Οι νέες ανεξάρτητες μεταβλητές (ξ, η) εισάγονται ως

$$\xi = x + t, \eta = x - t \quad (2.51)$$

έτσι ώστε η (2.48) ανάγεται σε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.52)$$

η οποία έχει τη γενική λύση

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad (2.53)$$

όπου f και g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες. Εάν η (2.48) λύνεται ως πρόβλημα καθαρής αρχικής τιμής είναι αρμόζον να εισαχθούν οι αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = S(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = T(x) \quad (2.54)$$

Μπορεί να παρουσιαστεί ότι, για $t=0$,

$$f(x) = 0.5 \left[S(x) + \int_0^x T(r) dr \right] + C$$

$$f(x) = 0.5 \left[S(x) - \int_0^x T(r) dr \right] + D$$
(2.55)

όπου C και D είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Προκύπτει έπειτα από την (2.53) ότι η γενική λύση της (2.48) με τις αρχικές συνθήκες που δίνονται από την (2.54) είναι

$$u(x,t) = 0.5 \left[S(x+t) + S(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} T(r) dr \right]$$
(2.56)

Ειδικότερα, εάν το σημείο P έχει τις συντεταγμένες (x_i, t_i) , η λύση στο P είναι

$$u(x,t) = 0.5 \left[S(x_i + t_i) + S(x_i - t_i) + \int_{x_i - t_i}^{x_i + t_i} T(r) dr \right]$$
(2.57)

δηλ. η λύση στο P καθορίζεται μεμονωμένα από τις αρχικές συνθήκες στο AB (σχ. 2.4).

Για τις υπερβολικές εξισώσεις δεν είναι παρών κανένας σκεδαστικός μηχανισμός (ή μηχανισμός εξομάλυνσης). Αυτό υπονοεί ότι εάν τα αρχικά στοιχεία (ή συνοριακά στοιχεία) περιέχουν ασυνέχειες αυτές θα διαβιβαστούν στο εσωτερικό κατά μήκος των χαρακτηριστικών, χωρίς απόσβεση της ασυνέχειας για τις γραμμικές εξισώσεις. Αυτό είναι σύμφωνο ότι μπορούν να εμφανιστούν ασυνέχειες στα κανονικά παράγωγα κατά το πέρασμα από τα χαρακτηριστικά.

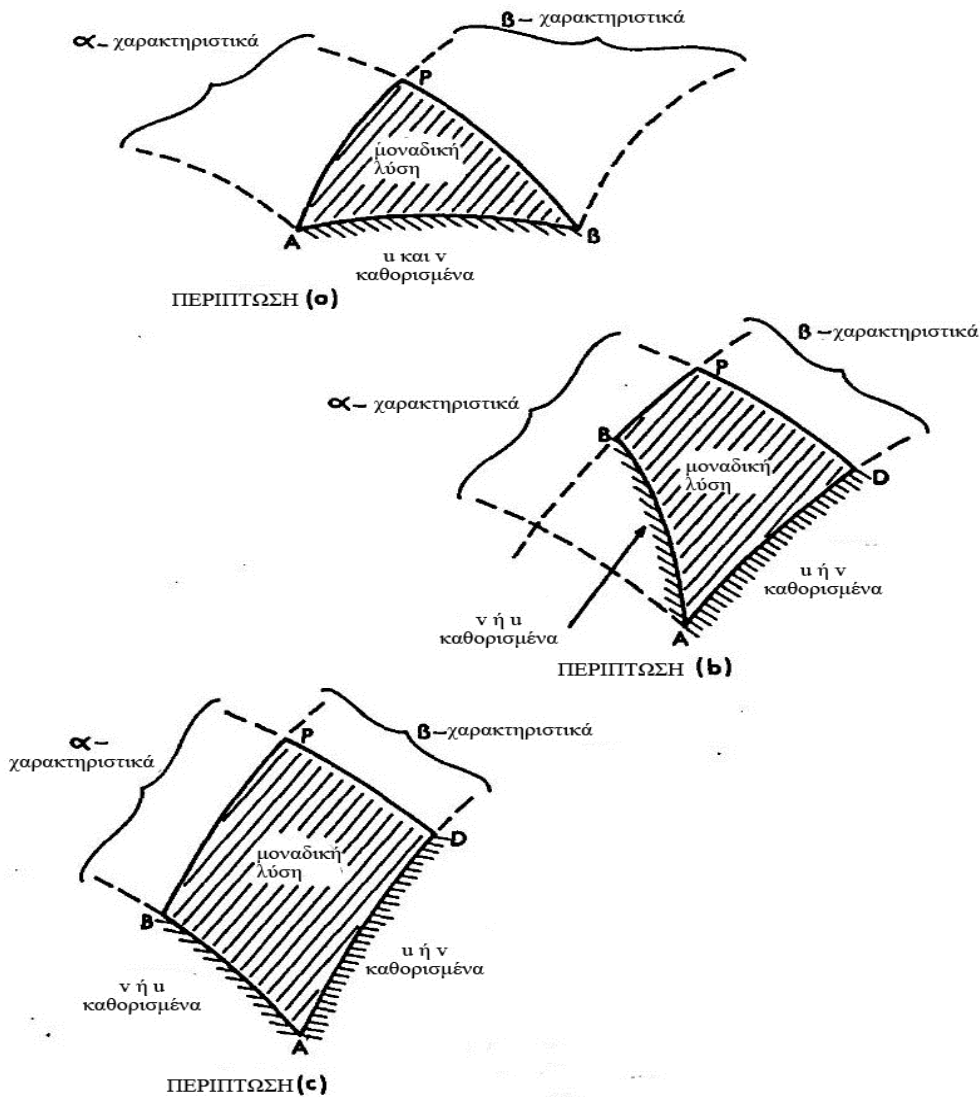
Πρέπει να υπογραμμιστεί εδώ ότι κατά την εξέταση των εξισώσεων που διέπουν την υπερηχητική ανιζώδη ροή, οι οποίες είναι υπερβολικές, οι ασυνέχειες πρέπει να είναι μικρές για να είναι σύμφωνες με την ισεντροπική ροή. Για την υπερηχητική ανιζώδη ισεντροπική ροή οι διέπουσες εξισώσεις (2.32, 2.33) παράγουν χαρακτηριστικές κατευθύνσεις που δίνονται από την (2.50). Εάν η λύση είναι τέτοια που οι χαρακτηριστικές καμπύλες υποδεικνύουν ότι θα υπάρξει μία μη-μοναδική λύση στην πράξη εμφανίζεται ένα κρουστικό κύμα. Εντούτοις, υπάρχει μια αλλαγή στην εντροπία κατά μήκος του κρουστικού κύματος και αυτό ακυρώνει την υπόθεση της ισεντροπικής ροής στην οποία βασίζονται οι (2.32 και 2.33). Επομένως το κρουστικό κύμα διαμορφώνει ένα όριο (εσωτερικό ή εξωτερικό) της περιοχής στην οποία οι (2.32 και 2.33) είναι έγκυρες.

2.3.3 Κατάλληλες συνοριακές (και αρχικές) συνθήκες

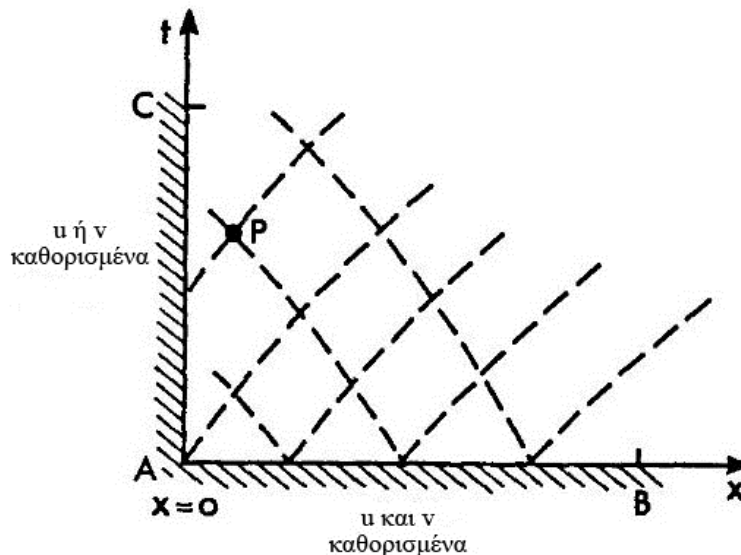
Έχει υποδειχθεί ήδη (Παρ. 2.2.2) ότι για την εξίσωση κύματος (2.48) οι αρχικές συνθήκες (2.54) είναι κατάλληλες, και, ανάλογα με την έκταση του AB , θα καθορίσουν την λύση, μοναδικά, στην περιοχή APB (σχ. 2.4). Είναι επίσης δυνατό να καθοριστούν οι συνοριακές συνθήκες, παραδείγματος χάριν όπως στα CD και EF στο σχ. 2.8.

Εδώ επανεξετάζουμε τις εξισώσεις (2.22), (2.23), δεδομένου ότι αυτές είναι άμεσα εφαρμόσιμες στην υπερηχητική ανιζώδης ροή (με τις ιδιαίτερες επιλογές του A_{11} , κ.λπ.) και αναζητούμε ποιες είναι οι κατάλληλες επιλογές των βοηθητικών συνθηκών έτσι ώστε μια μοναδική λύση στις (2.22 και 2.23) να είναι δυνατή. Οι χαρακτηριστικές κατευθύνσεις που προκύπτουν από το ισοδύναμο της (2.50) θα ονομαστούν χαρακτηριστικά α και β . Τρεις περιπτώσεις (που παρουσιάζονται στο σχ. 2.6) εξετάζονται αρχικά.

Η περίπτωση που παρουσιάζεται στο σχ. 2.6α είναι ισοδύναμη με αυτήν που παρουσιάζεται στο σχ. 2.4. Δηλαδή τα στοιχεία και για το u και για το v σε μια μη χαρακτηριστική καμπύλη, AB , καθορίζουν μεμονωμένα τη λύση



Σχ. 26α-γ. Προδιαγραφές συνοριακών συνθηκών για τις (2.22) και (2.23) όταν έχουμε παραβολικές εξισώσεις.



Σχ. 2.7. Συνοριακές συνθήκες για την μεταβατική ερμηνεία των (2.22 και 2.23)

μέχρι το P . Για την περίπτωση που παρουσιάζεται στο σχ. 2.6b η AB είναι μια μη χαρακτηριστική καμπύλη αλλά η AD είναι ένα χαρακτηριστικό β . Για αυτήν την υπόθεση το u ή v πρέπει να δοθεί σε μια καμπύλη που αντιστοιχείται με το v ή u στην άλλη. Κατά συνέπεια και το u και το v είναι γνωστά στο A . Μια παρόμοια κατάσταση εμφανίζεται για την περίπτωση που παρουσιάζεται στο σχ. 2.6c εκτός από το ότι και το AB και AD είναι χαρακτηριστικές καμπύλες.

Οι εξισώσεις (2.22) και (2.23) μπορούν να ερμηνευθούν ως εξισώσεις μετάβασης με την αντικατάσταση του y με το t . Μια εκτίμηση (το σχέδιο 2.7) του υπολογιστικού πεδίου $x^{\wedge}O$ και $i^{\wedge}O$ δείχνει ότι ένα σημείο P κοντά στο όριο $x=0$ καθορίζεται εν μέρει από τις συνοριακές συνθήκες στο AC και εν μέρει από τις αρχικές συνθήκες στο AB , υποθέτοντας ότι οι διέπουσες PDE είναι υπερβολικές. Οι κατάλληλες βοηθητικές συνθήκες για αυτήν την περίπτωση είναι τα u και v καθορισμένα στο AB και τα v ή u καθορισμένα στο AC .

Αυτά τα παραδείγματα, Σχ. 2.6 και 2.7, απεικονίζουν το γενικό κανόνα για τις υπερβολικές PDE ότι ο αριθμός των βοηθητικών συνθηκών είναι ίσος με τον αριθμό των χαρακτηριστικών μέσα στο πεδίο. Η κατεύθυνση κατά μήκος του χαρακτηριστικού πρέπει να επιλεγεί με συνέπεια. Για τα εξαρτημένα από το χρόνο προβλήματα η θετική κατεύθυνση θα είναι στην κατεύθυνση του αυξανόμενου χρόνου. Για τα πολυδιάστατα σταθερά υπερβολικά χωρικά προβλήματα στις κύριες μεταβλητές μία χαρακτηριστική καμπύλη («συσχετισμένη» με την εξίσωση συνέχειας) συμπίπτει με την τοπική ροική γραμμή. Κατά συνέπεια μέσω ενός συνοριακού σημείου αυτό η χαρακτηριστική καθορίζει τη θετική κατεύθυνση και δείχνει τη θετική κατεύθυνση για τις άλλες χαρακτηριστικές μέσω του ίδιου σημείου.

2.4 Παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις

Οι παραβολικές PDE εμφανίζονται όταν τα προβλήματα διάδοσης περιλαμβάνουν τους σκεδαστικούς μηχανισμούς, όπως η ιξώδης διάτμηση ή η αγωγή θερμότητας. Το κλασικό παράδειγμα μιας παραβολικής PDE είναι η εξίσωση διάχυσης ή αγωγής θερμότητας

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.58)$$

Η εξίσωση (2.58) θα χρησιμοποιηθεί για να εισαγάγει τις διαφορετικές υπολογιστικές. Για αρχικές συνθήκες $u = \sin \pi x$ και συνοριακές συνθήκες $u(0,t)=u(l,t) = 0$, η (2.58) έχει την ακριβή λύση

$$u(x,t) = \sin \pi x \exp(-\pi^2 t) \quad (2.59)$$

Η εκθετική μείωση στον χρόνο που παρουσιάζεται από την (2.59) μπορεί να αντιπαραβληθεί με την λύση ταλάντωσης (2.49) της εξίσωσης κύματος (2,48).

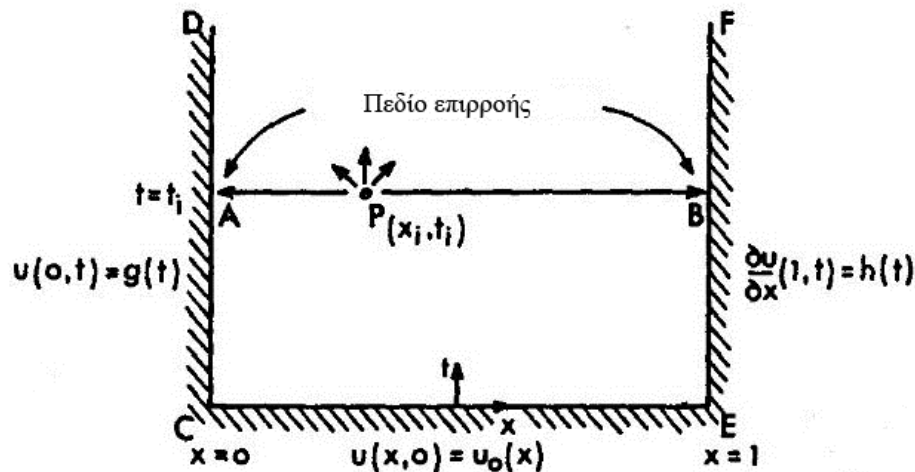
Η εξίσωση μεταφοράς είναι μια γραμμική παραβολική PDE, και η εξίσωση Burger, που εξετάζεται, είναι μια μη γραμμική παραβολική PDE. Εντούτοις, ο μετασχηματισμός Cole-Hopf (Fletcher 1983) επιτρέπει στην εξίσωση Burger να μετατραπεί στην εξίσωση διάχυσης (2.58). Οι Navier-Stokes εξισώσεις μετάβασης (χρονοεξαρτώμενες) είναι παραβολικές. Αυτές οι εξισώσεις χρησιμοποιούνται και για τα μεταβατικά προβλήματα αλλά επιπλέον, όταν εισάγεται μια ψευδομεταβατική διατύπωση χρησιμοποιούνται για την επίλυση ενός προβλήματος μόνιμης κατάστασης. Για την καθαρώς μόνιμη ροή, τα οριακά στρώματα και τα διατμητικά στρώματα διέπονται τυπικά από τις παραβολικές PDE, με την κατεύθυνση ροής να παίζει τον ρόλο της μετάβασης στον χρόνο. Πολλές από τις ανηγμένες μορφές των εξισώσεων Navier-Stokes διέπονται από τις παραβολικές PDE.

2.4.1 Ερμηνεία χαρακτηριστικών

Η ερμηνεία των (2.58) έως (2.8) με $y = t$ δείχνει ότι $A = 1$, $B = C=0$ έτσι ώστε η (2.58) να είναι παραβολική. Η λύση (2.14) δείχνει ότι υπάρχει μια ενιαία χαρακτηριστική κατεύθυνση που καθορίζεται από το $dt/dx = 0$. Ένα χαρακτηριστικό υπολογιστικό πεδίο για την (2.58) απεικονίζεται στο σχ. 2.8. Σε αντίθεση με την κατάσταση για τις υπερβολικές εξισώσεις, τα παράγωγα του u είναι πάντα συνεχή κατά το πέρασμα της γραμμής $t=t_i$. Τα χαρακτηριστικά δεν διαδραματίζουν έναν τόσο σημαντικό ρόλο όπως για τις υπερβολικές PDE. Δεν υπάρχει κανένα ισοδύναμο στη μέθοδο των χαρακτηριστικών για τις παραβολικές PDE. Σαφώς, η σχεδίαση ενός υπολογιστικού πλέγματος που ακολουθεί τα τοπικά χαρακτηριστικά δεν θα προωθούσε ποτέ τη λύση στον χρόνο.

2.4.2 Φυσική Ερμηνεία

Τα παραβολικά προβλήματα απεικονίζονται από λύσεις που προχωρούν μπροστά στο χρόνο αλλά διαχέονται στον χώρο. Κατά συνέπεια μια διαταραχή στη λύση που εισάγεται στο P (στο σχ. 2.8) μπορεί



Σχ. 2.8. Υπολογιστικό πεδίο για μια παραβολική PDE

να επηρεάσει οποιοδήποτε μέρος του υπολογιστικού πεδίου για $t \geq t_i$. Εντούτοις, το μέγεθος της διαταραχής εξασθενίζει γρήγορα κατά την απομάκρυνση από το P . Για την μόνιμη δισδιάστατη ροή οριακού στρώματος τα χαρακτηριστικά είναι κανονικά προς την κατεύθυνση ροής και δεν συνεπάγεται καμία ανάντη επιρροή.

Η ενσωμάτωση ενός μηχανισμού σκέδασης συνεπάγεται επίσης ότι ακόμα κι αν οι αρχικές συνθήκες περιλαμβάνουν μια ασυνέχεια, η λύση στο εσωτερικό θα είναι πάντα συνεχής. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις σε περισσότερες από μια χωρικές κατευθύνσεις που είναι παραβολικές στον χρόνο γίνονται ελλειπτικές στην μόνιμη κατάσταση (εάν υπάρχει μια τέτοια λύση μόνιμης κατάστασης).

2.4.3 Κατάλληλες συνοριακές (και αρχικές) συνθήκες

Για την (2.58) είναι απαραίτητο να καθοριστούν οι αρχικές συνθήκες Dirichlet, π.χ.

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.60)$$

Οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες θα ήταν

$$u(0, t) = g(t) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = h(t) \quad (2.61)$$

Για τα όρια CD και EF (σχ. 2.8) οποιοσδήποτε συνδυασμός των Dirichlet, Neumann ή μικτών συνοριακών συνθηκών είναι αποδεκτός. Εντούτοις, είναι επιθυμητό, στον καθορισμό των συνοριακών συνθηκών Dirichlet, να εξασφαλιστεί η συνοχή με τις αρχικές συνθήκες στα C και E . Η αποτυχία να γίνει κάτι τέτοιο θα παραγάγει μια λύση με δυσμενείς κλίσεις δίπλα στα C και E , το οποίο μπορεί να δημιουργήσει δυσκολίες για τον υπολογιστικό αλγόριθμο. Για τα συστήματα των παραβολικών PDE, οι αρχικές συνθήκες στο CE και οι συνοριακές συνθήκες στο CD και το EF είναι απαραίτητες για όλες τις εξαρτώμενες μεταβλητές.

2.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο έχουμε εξετάσει την ταξινόμηση των PDE στον υπερβολικό, παραβολικό και ελλειπτικό τύπο. Και οι τρεις τύποι εμφανίζονται για διάφορες απλοποιήσεις των εξισώσεων που διέπουν την ρευστοδυναμική. Εντούτοις, τα συστήματα των εξισώσεων μπορούν επίσης να είναι μικτού τύπου. Οι υπερβολικές PDE συσχετίζονται συνήθως με τα προβλήματα διάδοσης χωρίς σκέδαση (η κυματοειδής κίνηση παραμένει με μειούμενο πλάτος ταλάντωσης) και οι παραβολικές PDE συσχετίζονται συνήθως με τα προβλήματα διάδοσης με σκέδαση. Στην ρευστοδυναμική η σκέδαση προέρχεται συνήθως από τους όρους ιξώδους ή αγωγής θερμότητας ή τη μοντελοποίηση τυρβώδους ιξώδους δίνης. Οι ελλειπτικές PDE συσχετίζονται με τα προβλήματα μόνιμης κατάστασης.

Κάθε τύπος των PDE απαιτεί διαφορετικές συνοριακές (και αρχικές) συνθήκες και μπορεί να παραχωρηθεί σε ιδιαίτερες τεχνικές λύσης. Παραδείγματος χάριν η μέθοδος των χαρακτηριστικών είναι «φυσική» για τις υπερβολικές PDE σε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Για τις μη γραμμικές εξισώσεις που διέπουν την ρευστοδυναμική η ταξινόμηση της PDE μπορεί να αλλάξει τοπικά. Συνεπώς οι συνοριακές συνθήκες πρέπει να επιλεγθούν ώστε να ταιριάζουν με την ταξινόμηση της PDE δίπλα στο όριο.

Η μεταβαλλόμενη ταξινόμηση των διεπουσών PDE σε διαφορετικά μέρη του πεδίου μπορεί να απεικονιστεί εξετάζοντας την υπερηχητική ιξώδη ροή σε μια δυσδιάστατη πτέρυγα. Για αυτό το παράδειγμα οι διεπουσες εξισώσεις είναι εξισώσεις Navier-Stokes που, λόγω της εμφάνισης των δευτέρων παραγώγων, είναι αυστηρά ελλειπτικές. Εντούτοις, μια τέτοια ταξινόμηση δεν λαμβάνει υπόψη το μέγεθος των σχετικών όρων. Στην πραγματικότητα οι ιξώδεις όροι είναι σημαντικοί μόνο κοντά στην επιφάνεια όπου η σχετική με την ιξώδης σκέδαση είναι μια τάξη μεγέθους μικρότερη από την ιξώδη σκέδαση της εγκάρσιας ροής και οι αντίστοιχες διεπουσες εξισώσεις είναι μικτές παραβολικές/υπερβολικές. Μακριά από το σώμα όλοι οι ιξώδεις όροι είναι μικροί και το σύστημα εξίσωσης είναι υπερβολικού τύπου. Όταν εμφανίζονται κρουστικά κύματα οι δυσμενείς κλίσεις μακριά από το σώμα αναγκάζουν τους ιξώδης (και αγωγή θερμότητας) όρους να είναι σημαντικοί έτσι ώστε οι διεπουσες εξισώσεις να είναι τοπικά ελλειπτικές (μέσα στο πάχος του κρουστικού κύματος). Αυτό είναι επαρκές για να αντικαταστήσει την ασυνεχή λύση (στην ανιζωδική προσέγγιση) με μια δυσμενή, αλλά συνεχή, κλίση.

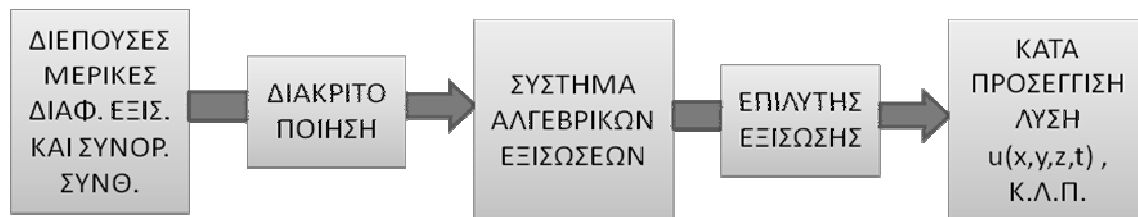
Σαφώς η ακριβής μαθηματική ταξινόμηση των διεπουσών PDE πρέπει να μετριαστεί από μια γνώση των σχετικών φυσικών διαδικασιών για να εξασφαλιστεί ότι οι σωστοί βοηθητικοί όροι καθορίζονται και οι κατάλληλες υπολογιστικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Προκαταρκτικές υπολογιστικές τεχνικές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει μια εξέταση μερικών από τις βασικές υπολογιστικές τεχνικές που απαιτούνται για να λύσουν τα προβλήματα ροής. Για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα οι διέπουσες εξισώσεις και οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες θα είναι γνωστές. Οι υπολογιστικές τεχνικές χρησιμοποιούνται για να ληφθεί μια κατά προσέγγιση λύση των διεπουσών εξισώσεων και των συνοριακών συνθηκών.

Παραδείγματος χάριν, για τις λύσεις τρισδιάστατης μεταβατικής ασυμπίεστης ροής, θα υπολογιστούν οι βασικές μεταβλητές ταχύτητας και πίεσης, τα $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ και $p(x,y,z,t)$. Η διαδικασία λήψης της υπολογιστικής λύσης αποτελείται από δύο στάδια που παρουσιάζονται σχηματικά στο σχέδιο 3.1. Το πρώτο στάδιο μετατρέπει τις συνεχείς μερικές διαφορικές εξισώσεις και τις βοηθητικές (συνοριακές και αρχικές) συνθήκες σε ένα διακριτό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Αυτό το πρώτο στάδιο καλείται διακριτοποίηση (παρ 3.1). Η διαδικασία διακριτοποίησης προσδιορίζεται εύκολα εάν χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (Παρ.3.5) αλλά είναι ελαφρώς λιγότερο προφανής με το πεπερασμένο στοιχείο, τον πεπερασμένο όγκο και τις φασματικές μεθόδους.



Σχ. 3.1. Επισκόπηση της διαδικασίας υπολογιστικής λύσης

Η αντικατάσταση των ατομικών παραγωγισμένων όρων στις διέπουσες μερικές διαφορικές εξισώσεις από τις αλγεβρικές εκφράσεις που συνδέουν κομβικές τιμές σε ένα πεπερασμένο πλέγμα εισάγει ένα σφάλμα. Η επιλογή των αλγεβρικών εκφράσεων με έναν τρόπο που παράγει μικρά λάθη εξετάζεται στην παράγραφο 3.2. Η πραγματοποιηθείσα ακρίβεια της αναπαράστασης των παραγωγισμένων όρων εξετάζεται στις παραγράφους 3.3 και 3.4. Εξίσου σημαντικός όπως το σφάλμα που υπεισέρχεται στην αναπαράσταση των παραγωγισμένων όρων στην διέπουσα εξίσωση είναι το σφάλμα στη λύση. Ένα απλό πρόγραμμα πεπερασμένων διαφορών παρέχεται στην παράγραφο 3.5 έτσι ώστε το σφάλμα λύσης να μπορεί να εξεταστεί άμεσα.

Κατά την συζήτηση των μεταβατικών προβλημάτων η διαδικασία διακριτοποίησης προσδιορίζεται συχνά με την αναγωγή των διεπουσών μερικών διαφορικών εξισώσεων σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων στον χρόνο. Αυτό είναι κατανοητό υπό την έννοια ότι οι τεχνικές για την επίλυση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (Lambert 1973) είναι τόσο καλά γνωστές που περαιτέρω συζήτηση μπορεί να μην χρειάζεται. Εντούτοις, στην εφαρμογή μιας ιδιαίτερης μεθόδου, το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρέπει

να μετατραπεί σε ένα αντίστοιχο σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων για να ληφθεί η υπολογιστική λύση.

Το δεύτερο στάδιο της διαδικασίας λύσης (Σχ. 3.1) απαιτεί έναν επιλυτή εξίσωσης για να παράσχει τη λύση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων. Αυτό το στάδιο μπορεί επίσης να εισαγάγει ένα σφάλμα αλλά είναι συνήθως αμελητέο σε σύγκριση με το σφάλμα που εισάγεται στο στάδιο της διακριτοποίησης, εκτός αν η μέθοδος είναι ασταθής. Τα συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων προκύπτουν τυπικά στην επίλυση των προβλημάτων σταθερής ροής. Για τα προβλήματα μεταβατικής ροής η χρήση των αναλυτών μπορεί να αναγάγει το στάδιο επίλυσης της εξίσωσης σε ένα όχι λιγότερο από έναν αλγόριθμο μιας γραμμής.

3.2 Διακριτοποίηση

Για να μετατραπούν οι διέπουσες μερικές διαφορικές εξισώσεις (ή και μια μόνο εξίσωση) σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (ή συνήθων διαφορικών εξισώσεων), είναι διαθέσιμες διάφορες επιλογές. Οι πιο κοινές είναι οι μέθοδοι πεπερασμένης διαφοράς, πεπερασμένου στοιχείου, πεπερασμένου όγκου και οι φασματικές μέθοδοι.

Ο τρόπος που εκτελείται η διακριτοποίηση εξαρτάται επίσης από το εάν οι χρονικές παράγωγοι (στα εξαρτώμενα από τον χρόνο προβλήματα) ή εξετάζονται οι εξισώσεις που περιέχουν μόνο χωρικές παραγώγους. Στην πράξη, οι χρονικές μερικές παράγωγοι διακριτοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά χρησιμοποιώντας την μέθοδο πεπερασμένης διαφοράς. Οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο διακριτοποιούνται είτε με την μέθοδο πεπερασμένης διαφοράς, πεπερασμένου στοιχείου, πεπερασμένου όγκου είτε τη φασματική μέθοδο.

3.2.1 Μετατροπή των παραγώγων σε διακριτές αλγεβρικές εκφράσεις

Η διαδικασία διακριτοποίησης μπορεί να απεικονιστεί εξετάζοντας την εξίσωση

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

η οποία διέπει την μεταβατική αγωγή θερμότητας σε μια διάσταση. Το \bar{T} είναι η θερμοκρασία και το α είναι ο θερμικός συντελεστής διάχυσης. Η άνω παύλα ($\bar{\quad}$) δείχνει την ακριβή λύση. Οι τυπικές συνοριακές και αρχικές συνθήκες που ταιριάζουν με την (3.1) είναι

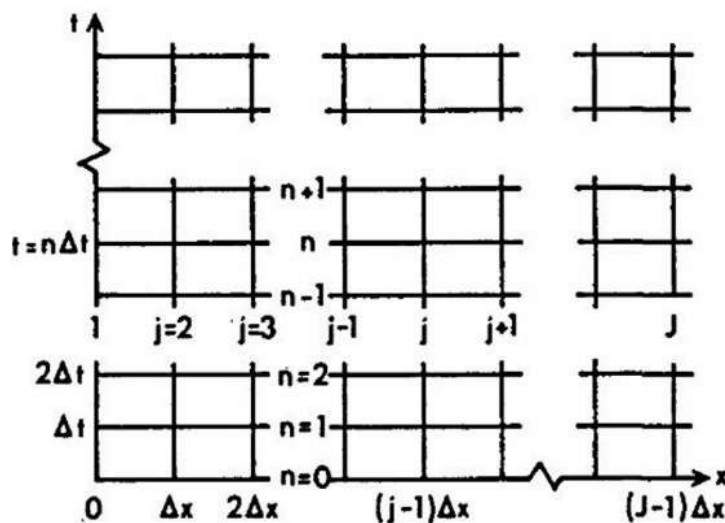
$$\bar{T}(0, t) = b, \quad \bar{T}(1, t) = d \quad (3.2)$$

$$\bar{T}(x, 0) = T_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3)$$

Τα αμεσότερα μέσα διακριτοποίησης παρέχονται με την αντικατάσταση των παραγώγων από τις ισοδύναμες εκφράσεις πεπερασμένης διαφοράς. Κατά συνέπεια, με χρήση των (3.21, 25), η (3.1) μπορεί να αντικατασταθεί με

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha(T_j^{n+1} - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{\Delta x^2} \quad (3.4)$$

Τα μεγέθη βημάτων, Δt , Δx και η έννοια του κάτω δείκτη j και του άνω δείκτη n υποδεικνύονται στο σχ. 3.2. Στην (3.4) το T_j^n είναι η τιμή του T στον (j, n) ιωστό κόμβο.



Σχ. 3.2. Το διακριτό πλέγμα

Η διαδικασία διακριτοποίησης της (3.1) για να δώσει την (3.4) υπονοεί ότι το πρόβλημα της εύρεσης της ακριβούς (συνεχούς) λύσης $\bar{T}(x, t)$ έχει αντικατασταθεί με το πρόβλημα της εύρεσης των διακριτών τιμών T_j^n , δηλ. η κατά προσέγγιση λύση στον (j, n) ιωστό κόμβο (σχ. 3.2). Στη συνέχεια, προκύπτουν δύο σχετικά σφάλματα, το σφάλμα αποκοπής και το σφάλμα λύσης. Το σφάλμα αποκοπής που εισάγεται από την διακριτοποίηση της (3.1) θα εξεταστεί στις παραγράφους 3.3 και 3.4.

Η ακριβής τιμή της κατά προσέγγιση λύσης μεταξύ των κομβικών σημείων (πλέγμα) δεν είναι προφανής. Διαισθητικά η λύση θα αναμενόταν να ποικίλει ομαλά μεταξύ των κομβικών σημείων. Σε γενικές γραμμές, η λύση σε κάποιο σημείο (x_r, t_r) που δεν συμπίπτει με έναν κόμβο μπορεί να ληφθεί με την παρεμβολή της λύσης του περιβάλλοντος κομβικού σημείου. Αυτή η διαδικασία παρεμβολής ενσωματώνεται αυτόματα στην μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων.

Είναι προφανές ότι, ενώ η (3.1) είναι μια μερική διαφορική εξίσωση, η (3.4) είναι μια αλγεβρική εξίσωση. Αναφορικά με το τύπο (3.2), η (3.4) μπορεί να επεξεργαστεί για να

δώσει έναν τύπο (ή αλγόριθμο) για την άγνωστη τιμή T_j^{n+1} από την άποψη των γνωστών τιμών T_j^n στον n -ιοστό χρονικό επίπεδο, δηλ.

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) \quad (3.5)$$

Για να παράσχει την πλήρη αριθμητική λύση στο χρονικό επίπεδο $(n+1)$, η (3.5) πρέπει να εφαρμοστεί για όλους τους κόμβους $j=2, \dots, J-1$, υποθέτοντας ότι οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet παρέχουν τις τιμές T_1^{n+1} και T_J^{n+1} .

3.2.2 Χωρικές παράγωγοι

Έχει φανεί ήδη πώς η μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς διακριτοποιεί τις χωρικές παραγώγους, π.χ. η $\partial^2 \bar{T} / \partial x^2$ στην (3.1) γίνεται $(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) / \Delta x^2$ στην (3.4).

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων επιτυγχάνει την διακριτοποίηση υποθέτοντας πρώτα ότι η τοπική λύση για το T μπορεί να παρεμβληθεί. Στη συνέχεια η τοπική λύση αντικαθίσταται σε ένα κατάλληλα σταθμισμένο ολοκλήρωμα της διέπουσας εξίσωσης και υπολογίζονται τα αντίστοιχα ολοκληρώματα. Ένα χαρακτηριστικό αποτέλεσμα (που χρησιμοποιεί τα γραμμικά στοιχεία σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα) θα ήταν

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta x / 6)(T_{j-1}^{n+1} - T_{j-1}^n)}{\Delta t} + \frac{(2\Delta x / 3)(T_j^{n+1} - T_j^n)}{\Delta t} + \frac{(\Delta x / 6)(T_{j+1}^{n+1} - T_{j+1}^n)}{\Delta t} \\ & = \frac{\alpha(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Η διαίρεση και των δύο πλευρών της (3.6) με Δx παράγει ένα αποτέλεσμα που είναι παρόμοιο με την δομή στην (3.4).

Η φασματική μέθοδος προχωρά κατά τρόπο παρόμοιο με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων εκτός από το ότι η υποτιθέμενη λύση για T είναι της μορφής

$$T = \sum_{j=1}^J \alpha_j(t) \Phi_j(x) \quad (3.7)$$

όπου τα $\alpha_j(t)$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές που θα καθοριστούν ως τμήμα της λύσης και τα $\Phi_j(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις της x . Η τελική μορφή της διακριτοποιημένης εξίσωσης με χρήση της φασματικής μεθόδου μπορεί να γραφτεί

$$\frac{\alpha_j^{n+1}}{\Delta t} = \sum_{j=1}^J p_j \alpha_j^n \quad (3.8)$$

όπου τα p_j είναι γνωστοί αλγεβρικοί συντελεστές.

Οποιαδήποτε μέθοδος χρησιμοποιείται για να εκτελέσει την διακριτοποίηση η επόμενη λύση των εξισώσεων, π.χ. με χρήση της (3.5), λαμβάνεται άμεσα από τις αλγεβρικές εξισώσεις και είναι, από μία άποψη, ανεξάρτητη από τον τρόπο που έγινε η διακριτοποίηση.

3.2.3 Χρονικές παράγωγοι

Η αντικατάσταση της $\partial \bar{T} / \partial t$ στην (3.1) με τον τύπο μονόπλευρης διαφοράς $(T_j^{n+1} - T_j^n) / \Delta t$ χρησιμοποιεί μόνο τις πληροφορίες στα χρονικά επίπεδα n και $n + 1$. Επειδή ο χρόνος προχωρά μόνο στη θετική κατεύθυνση, οι πληροφορίες στα χρονικά επίπεδα $n + 2$ και μεγαλύτερα δεν είναι διαθέσιμες. Στην (3.4) η αναπαράσταση πεπερασμένης διαφοράς της χωρικής παραγωγού $\partial^2 \bar{T} / \partial x^2$ έχει υπολογιστεί στο χρονικό επίπεδο n και παρέχει έναν εκπεφρασμένο αλγόριθμο για την εύρεση της T_j^{n+1} . Εάν οι χωρικοί όροι αξιολογούνταν στο χρονικό επίπεδο $n+1$ θα λαμβάνονταν ο ακόλουθος μη εκπεφρασμένος αλγόριθμος:

$$-sT_{j-1}^{n+1} + (1 + 2s)T_j^{n+1} - sT_{j+1}^{n+1} = T_j^n \quad (3.9)$$

όπου $s = a\Delta t / \Delta x^2$. Η εξίσωση (3.9) μπορεί να λυθεί μόνο ως τμήμα ενός συστήματος εξισώσεων που διαμορφώνεται με τον υπολογισμό του για όλους τους κόμβους $j=2, \dots, J-1$.

Εάν ο τύπος κεντρικής διαφοράς $(T_j^{n+1} - T_j^{n-1}) / 2\Delta t$ χρησιμοποιούνταν για να αντικαταστήσει το $\partial \bar{T} / \partial t$ στην (3.1) ο ακόλουθος εκπεφρασμένος αλγόριθμος μπορεί να κατασκευαστεί για την θερμοκρασία T_j^{n+1} :

$$T_j^{n+1} = T_j^{n-1} + (2a\Delta t / \Delta x^2)(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) \quad (3.10)$$

Ο αλγόριθμος (3.10) είναι ακριβέστερος από τον (3.5) αλλά περισσότερο πολύπλοκος δεδομένου ότι περιλαμβάνει τρία χρονικά επίπεδα δεδομένων, $n-1$, n , $n+1$, αντί για δύο. Αυτός ο συγκεκριμένος αλγόριθμος δεν είναι πρακτικός δεδομένου ότι είναι ασταθής. Εντούτοις η χρήση των κεντρικών διαφορών χρόνου με άλλες εξισώσεις, π.χ. η εξίσωση μεταφοράς, είναι σταθερή.

Υπάρχει μια εναλλακτική προσέγγιση στην διακριτοποίηση των χρονικών παραγωγών που δημιουργείται στη σύνδεση με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Η εξίσωση (3.1) μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = L\bar{T} \quad (3.11)$$

όπου το L είναι ο διαφορικός τελεστής $a\partial^2 / \partial x^2$. Μετά από την χωρική διακριτοποίηση, η (3.11) γίνεται

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = L_a T_j \quad (3.12)$$

όπου το L_a , είναι ο αλγεβρικός τελεστής ως αποτέλεσμα της χωρικής διακριτοποίησης. Η εξίσωση (3.12), επαναλαμβανόμενη για κάθε κόμβο, αντιπροσωπεύει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων στον χρόνο. Συνεπώς, σε γενικές γραμμές, οποιεσδήποτε από τις τεχνικές για την ολοκλήρωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (Gear 1971) μπορούν να εφαρμοστούν στην (3.12). Γενικά η ολοκλήρωση μπορεί να γραφτεί

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_a T_j dt \quad (3.13)$$

Το σχήμα Euler για την αξιολόγηση της (3.13) είναι

$$T_j^{n+1} = T_j^n + [L_a T_j]^n \Delta t \quad (3.14)$$

το οποίο είναι ίδιο με την (3.5) εάν το L_a , είναι ο τελεστής πεπερασμένης διαφοράς που δίνεται στην (3.4). Λόγω των σφαλμάτων που συνδέονται με τον τελεστή χωρικής διακριτοποίησης L_a , δεν υπάρχει συνήθως κανένα πλεονέκτημα στην χρήση ενός πολύ υψηλής τάξης τύπου ολοκλήρωσης στην (3.13).

3.3 Προσέγγιση παραγώγων

Στην παράγραφο 3.1 οι χαρακτηριστικοί αλγεβρικοί τύποι παρουσιάστηκαν για να απεικονίσουν την μηχανική των παραγώγων διακριτοποίησης όπως $\partial^2 T / \partial x^2$. Εδώ τέτοιοι αλγεβρικοί τύποι κατασκευάζονται, πρώτα από την χρήση ενός αναπτύγματος σειράς Taylor και αφετέρου μέσω μιας γενικής διαδικασίας. Σε κάθε περίπτωση είναι εύκολα διαθέσιμη μια εκτίμηση του σφάλματος που υπεισέρχεται στην διαδικασία διακριτοποίησης.

3.3.1 Ανάπτυγμα σειράς Taylor

Σαν πρώτο βήμα στην ανάπτυξη ενός αλγορίθμου για να υπολογίσει τις τιμές του \bar{T} που εμφανίζονται στην (3.1), οι μερικές παράγωγοι χώρου και χρόνου του \bar{T} στον κόμβο (j,n) εκφράζονται με χρήση των τιμών του \bar{T} στους κοντινούς κόμβους. Τα αναπτύγματα σειράς Taylor όπως

$$\bar{T}_{j+1}^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Delta x^m}{m!} \left[\frac{\partial^m \bar{T}}{\partial x^m} \right]_j \quad (3.15)$$

και

$$\bar{T}_j^{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Delta x^m}{m!} \left[\frac{\partial^m \bar{T}}{\partial t^m} \right]_j \quad (3.16)$$

χρησιμοποιούνται στη διαδικασία. Αυτή η σειρά μπορεί να αποκοπεί μετά από οποιοδήποτε αριθμό όρων, με το σφάλμα αποκοπής να κυριαρχείται από τον επόμενο όρο στο ανάπτυγμα εάν $\Delta x \ll 1$ στην (3.15) ή εάν $\Delta t \ll 1$ στην (3.16). Κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε

$$\bar{T}_{j+1}^n = \bar{T}_j^n + \Delta x \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j + \frac{\Delta x^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right]_j + O(\Delta x^3) \quad (3.17)$$

Ο όρος $O(\Delta x^3)$ ερμηνεύεται ότι σημαίνει ότι υπάρχει μια θετική σταθερά K , εξαρτώμενη από το \bar{T} , έτσι ώστε η διαφορά μεταξύ του \bar{T} στον $(j+1, n)$ ιστό κόμβο και οι πρώτοι τρεις όροι στη δεξιά πλευρά της (3.17), όλα υπολογισμένα στον (j, n) ιστό κόμβο, είναι αριθμητικά μικρότερη από το $K\Delta x^3$ για όλα τα επαρκώς μικρά Δx . Σαφώς το σφάλμα που περιλαμβάνεται σε αυτήν την προσέγγιση μειώνεται γρήγορα σε μέγεθος καθώς το μέγεθος της Δx μειώνεται. Μια εκτίμηση της (3.17) προτείνει ότι μια έκφραση πεπερασμένης διαφοράς για το $\partial \bar{T} / \partial x$ θα μπορούσε να ληφθεί άμεσα. Κατά συνέπεια, επαναδιατάσσοντας την (3.17) έχουμε:

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j = \frac{(\bar{T}_{j+1}^n - \bar{T}_j^n)}{\Delta x} - 0.5\Delta x \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right]_j + \dots \quad (3.18)$$

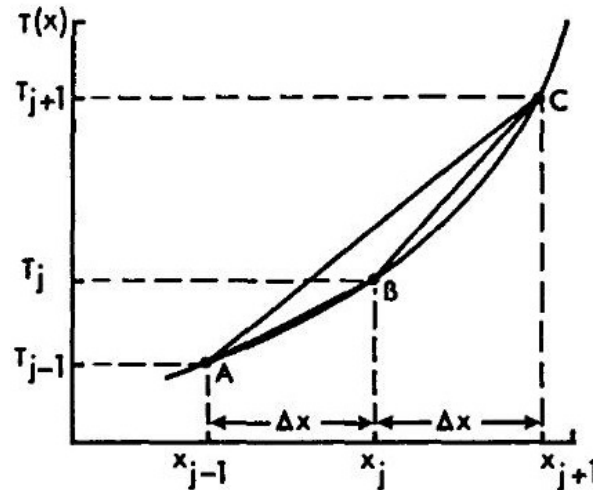
Είναι προφανές ότι χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση πεπερασμένης διαφοράς

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j \approx \frac{(T_{j+1}^n - T_j^n)}{\Delta x} \quad (3.19)$$

Έχει ακρίβεια τάξης $O(\Delta x)$. Οι πρόσθετοι όροι που εμφανίζονται στην (3.18) αναφέρονται ως σφάλμα αποκοπής. Η εξίσωση (3.19) καλείται προσέγγιση προς τα εμπρός διαφοράς. Με την ανάπτυξη του T_{j-1}^n ως σειρά Taylor γύρω από τον κόμβο (j, n) και επαναδιατάσσοντας, μια προσέγγιση προς τα πίσω διαφοράς μπορεί να κατασκευαστεί:

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j \approx \frac{(T_j^n - T_{j-1}^n)}{\Delta x} \quad (3.20)$$

Αυτό, όπως στην (3,19), εισάγει ένα σφάλμα $O(\Delta x)$. Μια γεωμετρική ερμηνεία των (3.19 και 3.20) παρέχεται στο Σχ. 3.3. Η εξίσωση (3.19) υπολογίζει την $[\partial \bar{T} / \partial x]_j^n$ ως την κλίση BC. Η (3.20) υπολογίζει την $[\partial \bar{T} / \partial x]_j^n$ ως την κλίση AB.



Σχ. 33. Αναπαραστάσεις πεπερασμένης διαφοράς της $\partial \bar{T} / \partial x$

Οι εξισώσεις (3.19 και 3.20) έχουν ληφθεί με την εισαγωγή ενός αναπτύγματος σειράς Taylor στον χώρο. Το ανάπτυγμα σειράς Taylor στον χρόνο (3.16), μπορεί να επεξεργαστεί για να δώσει την προσέγγιση της προς τα εμπρός διαφοράς

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right]_j^n \approx \frac{(T_j^{n+1} - T_j^n)}{\Delta t} \quad (3.21)$$

η οποία εισάγει ένα σφάλμα τάξης του $O(\Delta t)$, υποθέτοντας ότι $\Delta t \ll 1$ και οι μεγαλύτερης τάξης παράγωγοι είναι φραγμένες.

3.3.2 Γενική τεχνική

Οι εκφράσεις πεπερασμένης διαφοράς που παρέχονται στην παράγραφο 3.2.1 έχουν κατασκευαστεί από μια απλή επεξεργασία ενός απλού αναπτύγματος Taylor. Μια συστηματικότερη τεχνική για την κατασκευή των προσεγγίσεων διαφορών είναι να αρχίσουμε από μια γενική έκφραση, π.χ.

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n = a \bar{T}_j^n + b \bar{T}_j^n + c \bar{T}_{j+1}^n + O(\Delta x^m) \quad (3.22)$$

όπου τα a , b και c πρόκειται να καθοριστούν και ο όρος $O(\Delta x^m)$ θα δείξει την ακρίβεια της υποκείμενης προσέγγισης. Χρησιμοποιώντας την (3.15) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
a\bar{T}_{j-1}^n + b\bar{T}_j^n + c\bar{T}_{j+1}^n &= (a+b+c)\bar{T}_j^n + (-a+c)\Delta x \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right] \\
&+ (a+c) \frac{\Delta x^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right]_j + (-a+c) \frac{\Delta x^3}{6} \left[\frac{\partial^3 \bar{T}}{\partial x^3} \right]_j + \dots
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Θέτοντας

$$a+b+c=0 \quad , \quad (-a+c)\Delta x=1$$

δίνει

$$a=c-1/\Delta x \quad \text{και} \quad b=-2c+1/\Delta x$$

για οποιοδήποτε c .

Η επιλογή του c έτσι ώστε ο τρίτος όρος στη δεξιά πλευρά της (3.23) να εξαφανιστεί παράγει την ακριβέστερη πιθανή προσέγγιση με τρεις αναλώσιμες παραμέτρους. Δηλαδή

$$c=-a=1/2\Delta x \quad \text{και} \quad b=0.$$

Η αντικατάσταση αυτών των τιμών στην (3.23) δίνει

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n = \frac{1}{2\Delta x} (-T_{j-1}^n + T_{j+1}^n) - \frac{\Delta x^2}{6} \left[\frac{\partial^3 \bar{T}}{\partial x^3} \right]_j^n + \dots$$

Επομένως η προσέγγιση κεντρικής διαφοράς στην $[\partial \bar{T} / \partial x]_j^n$, είναι

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n \approx \frac{\bar{T}_{j+1}^n - \bar{T}_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{3.24}$$

η οποία έχει ένα σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x^2)$. Εμφανώς, η προσέγγιση κεντρικής διαφοράς παράγει ένα σφάλμα αποκοπής υψηλότερης τάξης από τις προσεγγίσεις προς τα εμπρός (3.19) ή προς τα πίσω (3.20) διαφοράς. Η εξίσωση (3.24) υπολογίζει την $[\partial \bar{T} / \partial x]_j^n$ ως την κλίση AC στο Σχ. 3.3.

Χρησιμοποιώντας μια παρόμοια αναπαράσταση στην (3.22) η ακόλουθη μορφή κεντρικής διαφοράς για την $[\partial^2 \bar{T} / \partial x^2]_j^n$ μπορεί να ληφθεί ως

$$\left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right]_j^n = \frac{(\bar{T}_{j-1}^n - 2\bar{T}_j^n + \bar{T}_{j+1}^n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) . \tag{3.25}$$

Η ανωτέρω τεχνική, (3.22), μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ληφθούν οι τύποι μονόπλευρης διαφοράς με την ανάπτυξη γύρω από έναν κατάλληλο κόμβο. Η ίδια τεχνική, (3.22), μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να αναπτύξει τους πολυδιάστατους τύπους ή τους τύπους διαφοράς σε ένα ανομοιόμορφο πλέγμα.

3.3.3 Ασύμμετρος τύπος τριών σημείων για την $[\partial \bar{T} / \partial x]_j^n$

Η γενική τεχνική για την απόκτηση των αλγεβρικών τύπων για τις μερικές παραγώγους (παρ. 3.2.2) χρησιμοποιείται για να παραγάγει την μονόπλευρη αναπαράσταση τριών σημείων για την $[\partial \bar{T} / \partial x]_j^n$. Η αφετηρία είναι η ακόλουθη γενική έκφραση, στην θέση της (3.22),

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n = a \bar{T}_j^n + b \bar{T}_{j+1}^n + c \bar{T}_j^n + O(\Delta x^m) \quad (3.26)$$

όπου τα a , b , και c πρόκειται να καθοριστούν. Οι \bar{T}_{j+1}^n και \bar{T}_{j+2}^n αναπτύσσονται γύρω από το j ως σειρά Taylor (παρ 3.2.1). Η αντικατάσταση στην (3.26) και η επαναδιάταξη δίνει

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n &= (a + b + c) \bar{T}_j^n + (b \Delta x + c 2 \Delta x) \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n \\ &\quad + \left(\frac{b \Delta x^2}{2} + \frac{c (2 \Delta x)^2}{2} \right) \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right]_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

Η σύγκριση της αριστερής και της δεξιάς πλευράς της (3.27) δείχνει ότι οι ακόλουθες συνθήκες πρέπει να επιβληθούν στα a , b και c για να ληφθεί το μικρότερο σφάλμα:

$$a + b + c = 0, \quad b \Delta x + c 2 \Delta x = 1, \quad \frac{b \Delta x^2}{2} + \frac{c (2 \Delta x)^2}{2} = 0$$

Αυτό δίνει τις τιμές

$$a = \frac{1.5}{\Delta x}, \quad b = \frac{2}{\Delta x}, \quad \text{και} \quad c = -\frac{0.5}{\Delta x}$$

και

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n = \frac{-1.5 \bar{T}_j^n + 2 \bar{T}_{j+1}^n - 0.5 \bar{T}_{j+2}^n}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3} \left[\frac{\partial^3 \bar{T}}{\partial x^3} \right]_j^n + \dots,$$

το οποίο συμφωνεί με το αποτέλεσμα που δίνεται στον πίνακα 3.3. Αυτός ο τύπος έχει ένα σφάλμα αποκοπής $O(\Delta x^2)$ όπως ο τύπος κεντρικής διαφοράς (3.24).

Εάν συμπεριλαμβάνονται περισσότεροι όροι στην (3.26), π.χ.

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n \approx a\bar{T}_j^n + b\bar{T}_{j+1}^n + c\bar{T}_{j+2}^n + d\bar{T}_{j+3}^n + e\bar{T}_{j+4}^n \quad ,$$

λαμβάνονται από την (3.27) επιπλέον συνθήκες για να καθορίσουν τους συντελεστές a έως e υποκείμενες στην απαίτηση ότι οι συντελεστές που πολλαπλασιάζουν της μερικές παραγώγους υψηλής τάξης να είναι μηδέν. Εντούτοις οι μέθοδοι που βασίζονται στις διακριτοποιήσεις υψηλότερης τάξης έχουν συχνά αυστηρότερους περιορισμούς σταθερότητας από εκείνες που βασίζονται στις διακριτοποιήσεις χαμηλής τάξης. Συνεπώς μια εναλλακτική στρατηγική είναι να επιλεχτούν μερικοί από τους συντελεστές a έως e για να μειώσουν το σφάλμα και μερικοί για να βελτιώσουν τη σταθερότητα. Μια παρόμοια προσέγγιση υιοθετείται στην κατασκευή των μεθόδων για να λυθούν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις .

3.4 Ακρίβεια διακριτοποίησης

Η διακριτοποίηση είναι απαραίτητη για να μετατραπεί η διέπουσα διαφορική εξίσωση σε ένα ισοδύναμο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων που μπορούν να λυθεί χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή. Η διαδικασία διακριτοποίησης εισάγει ένα σφάλμα εκτός αν η υποκείμενη ακριβής λύση έχει μια πολύ στοιχειώδη αναλυτική μορφή. Κατά συνέπεια ο τύπος κεντρικής διαφοράς (3.24) είναι ακριβής για τα πολυώνυμα μέχρι την εξίσωση δευτέρου βαθμού, ενώ οι μονόπλευροι τύποι (3.19,20) είναι ακριβείς μόνο για τα γραμμικά πολυώνυμα. Η ακρίβεια μπορεί να προκύψει από το γεγονός ότι όλοι οι όροι στο σφάλμα αποκοπής είναι μηδέν για τα πολυώνυμα της αρκετά χαμηλής τάξης.

Γενικά το σφάλμα για μια αναπαράσταση πεπερασμένης διαφοράς ενός παραγώγου μπορεί να ληφθεί κάνοντας ένα ανάπτυγμα σειράς Taylor γύρω από τον κόμβο στον οποίο υπολογίζεται η μερική παράγωγος (παρ. 3.2.2), και ο υπολογισμός του κύριου όρου στο υπόλοιπο παρέχει μια ακριβή προσέγγιση στο σφάλμα εάν το μέγεθος πλέγματος είναι μικρό. Εντούτοις, ο πλήρης υπολογισμός των όρων στην σειρά Taylor στηρίζεται στο ότι η ακριβής λύση είναι γνωστή.

Ένας αμεσότερος τρόπος σύγκρισης της ακρίβειας των διάφορων αλγεβρικών τύπων για τις παραγώγους είναι να εξεταστεί μια απλή αναλυτική συνάρτηση, όπως η $\bar{T} = \exp x$, και να συγκριθεί η τιμή της παραγώγου που υπολογίστηκε αναλυτικά με αυτή που υπολογίστηκε από τον τύπο διακριτοποίησης. Ο πίνακας 3.1 παρουσιάζει μια τέτοια σύγκριση για την $d\bar{T}/dx$ υπολογισμένη στο $x=1$, με την $\bar{T} = \exp x$ ως την αναλυτική συνάρτηση, το μέγεθος βημάτων $\Delta x=0.1$. Γενικά οι τύποι τριών σημείων, είτε συμμετρικοί είτε ασυμμετρικοί, είναι αρκετά ακριβέστεροι από τους τύπους (δύο σημείων) προς τα εμπρός διαφοράς είτε προς τα πίσω διαφοράς, αλλά αρκετά λιγότερο ακριβείς από τον συμμετρικό τύπο πέντε σημείων.

Είναι προφανές (Πίνακας 3.1) ότι ο κύριος όρος στο ανάπτυγμα Taylor (Τ.Ε.) δίνει μια καλή εκτίμηση του λάθους, εάν το Δx είναι αρκετά μικρό. Για αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα όλα οι παράγωγοι υψηλότερης τάξης στο ανάπτυγμα Taylor είναι ίσες με το $\exp x$. Για ένα γενικότερο πρόβλημα όπου οι παράγωγοι υψηλότερης τάξης μπορούν να είναι μεγαλύτερες ένα μέγεθος βήματος λιγότερο από 0,1 μπορεί να είναι απαραίτητο για να εξασφαλίσει ότι το λάθος προσεγγίζεται ακριβέστερα από τον κύριο όρο στο σφάλμα αποκοπής.

Πίνακας 3.1. Σύγκριση των τύπων για να αξιολογηθεί η $d\bar{T}/dx$ στο $x = 1.0$

Περίπτωση	Αλγεβρικός τύπος	$\left[\frac{d\bar{T}^2}{dx} \right]_j$	Σφάλμα	Κύριος όρος στο Τ.Ε
Ακριβής	—	27183	—	—
3 ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	$(\bar{T}_{j+1} - \bar{T}_{j-1}) / 2\Delta x$	27228	0.4533×10^{-2}	0.4531×10^{-2}
ΔΙΑΦ.ΕΜΠΡΟΣ	$(\bar{T}_{j+1} - \bar{T}_j) / \Delta x$	2.8588	0.1406×10^{-0}	0.1359×10^0
ΔΙΑΦ. ΠΙΣΩ	$(\bar{T}_j - \bar{T}_{j-1}) / \Delta x$	2.5868	-0.1315×10^{-0}	-0.1359×10^{-0}
3 ΣΗΜ. ΑΣΥΜΜ.	$(-1.5\bar{T}_j + 2\bar{T}_{j+1} - 0.5\bar{T}_{j+2}) / \Delta x$	2.7085	-0.9773×10^{-2}	-0.9061×10^{-2}
5 ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	$(\bar{T}_{j-2} - 8\bar{T}_{j-1} + 8\bar{T}_{j+1} - \bar{T}_{j+2}) / 12\Delta x$	2.7183	-0.9072×10^{-5}	-0.9061×10^{-5}

Οι χαρακτηριστικοί αλγεβρικοί τύποι για την $d^2\bar{T}/dx^2$ αξιολογημένη στο $x = 1.0$ για τις τιμές συνάρτησης του $\bar{T} = \exp x$ παρουσιάζονται στον πίνακα 3.2. Οι τιμές συνάρτησης υπολογίζονται σε διαστήματα $\Delta x = 0.1$. Όπως πριν, ο τριών σημείων συμμετρικός τύπος είναι ακριβής, αλλά τώρα ο τριών σημείων ασυμμετρικός τύπος δεν έχει καλή ακρίβεια. Όπως με τον υπολογισμό των πρώτων τύπων παραγώγων, ο κύριος όρος στο ανάπτυγμα Taylor παρέχει μια ακριβή εκτίμηση του λάθους.

Οι αλγεβρικοί τύποι για τον κύριο όρο στις εκφράσεις σφάλματος αποκοπής παρουσιάζονται στους πίνακες 3.3 και 3.4. Αυτοί οι τύποι λαμβάνονται φτιάχνοντας ένα ανάπτυγμα Taylor γύρω από τον j -ιοστό κόμβο όπως στην παρ 3.2.1. Στον Πίνακα 3.3, $\bar{T}_{xxx} \equiv d^3\bar{T}/dx^3$, κ.λ.π. Για αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα ($\bar{T} = \exp x$), $\bar{T}_{xxx} = \bar{T}_{xxx}$, κ.λ.π. Κατά συνέπεια το μέγεθος του σφάλματος εξαρτάται πρώτιστα από τις δυνάμεις του Δx .

Πίνακας 3.2. Σύγκριση των τύπων για να αξιολογηθεί η $d^2\bar{T}/dx^2$ στο $x = 1,0$

Περίπτωση	Αλγεβρικός τύπος	$\left[\frac{d\bar{T}^2}{dx^2} \right]_j$	Σφάλμα	Κύριος όρος στο Τ.Ε.
-----------	------------------	--	--------	----------------------

Ακριβής	—	2.7183		
3 ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	$(\bar{T}_{j-1} - 2\bar{T}_j + \bar{T}_{j+1}) / \Delta x^2$	2.7205	0.2266×10^{-2}	0.2265×10^{-2}
3 ΣΗΜ ΑΣΥΜΜ	$(\bar{T}_j - 2\bar{T}_{j+1} + \bar{T}_{j+2}) / \Delta x^2$	3.0067	0.2884×10^{-0}	0.2718×10^{-0}
5ΣΗΜ ΣΥΜΜ	$(-\bar{T}_{j-1} + 16\bar{T}_{j-1} - 30\bar{T}_j + 16\bar{T}_{j+1} - \bar{T}_{j+2}) / 12\Delta x^2$	2.7183	-0.3020×10^{-5}	-0.3020×10^{-5}

Πίνακας 3.3. Κύριος όρος σφάλματος αποκοπής (αλγεβρικός): $d\bar{T}/dx$

Περίπτωση	Αλγεβρικός τύπος	Κύριος όρος σφάλματος αποκοπής
3 ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	$(\bar{T}_{j+1} - \bar{T}_{j-1}) / 2\Delta x$	$\Delta x^2 \bar{T}_{xxx} / 6$
ΔΙΑΦ. ΕΜΠΡΟΣ	$(\bar{T}_{j+1} - \bar{T}_j) / \Delta x$	$\Delta x \bar{T}_{xxx} / 2$
ΔΙΑΦ. ΠΙΣΩ	$(\bar{T}_j - \bar{T}_{j-1}) / \Delta x$	$-\Delta x \bar{T}_{xxx} / 2$
3 ΣΗΜ. ΑΣΥΜΜ.	$(-1.5\bar{T}_j + 2\bar{T}_{j+1} - 0.5\bar{T}_{j+2}) / \Delta x$	$-\Delta x^2 \bar{T}_{xxx} / 3$
5 ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	$(\bar{T}_{j-2} - 8\bar{T}_{j-1} + 8\bar{T}_{j+1} - \bar{T}_{j+2}) / 12\Delta x$	$-\Delta x^4 \bar{T}_{xxxx} / 30$

Πίνακας 3.4. Κύριος όρος σφάλματος αποκοπής (αλγεβρικός): $d^2\bar{T}/dx^2$

Περίπτωση	Αλγεβρικός τύπος	Κύριος όρος σφάλματος αποκοπής
3 ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	$(\bar{T}_{j-1} - 2\bar{T}_j + \bar{T}_{j+1}) / \Delta x^2$	$-\Delta x^2 \bar{T}_{xxxx} / 12$
3 ΣΗΜ. ΑΣΥΜΜ.	$(\bar{T}_j - 2\bar{T}_{j+1} + \bar{T}_{j+2}) / \Delta x^2$	$\Delta x \bar{T}_{xxx}$
5 ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	$(-\bar{T}_{j-2} + 16\bar{T}_{j-1} - 30\bar{T}_j + 16\bar{T}_{j+1} - \bar{T}_{j+2}) / 12\Delta x^2$	$-\Delta x^4 \bar{T}_{xxxx} / 90$

Συνεπώς, καθώς το Δx μειώνεται είναι αναμενόμενο ότι το σφάλμα αποκοπής, κατά την χρήση του τύπου πέντε σημείων, θα μειωθεί πολύ γρηγορότερα από το σφάλμα κατά την χρήση των τύπων δύο σημείων προς τα εμπρός ή προς τα πίσω διαφοράς.

Ο λόγος για το μεγάλο σφάλμα που συνδέεται με τον τριών σημείων ασυμμετρικό τύπο που παρουσιάζεται στον πίνακα 3.2 είναι προφανής στον πίνακα 3.4 όπου ο κύριος όρος στο σφάλμα αποκοπής φαίνεται να είναι μόνο πρώτης τάξης ακρίβειας.

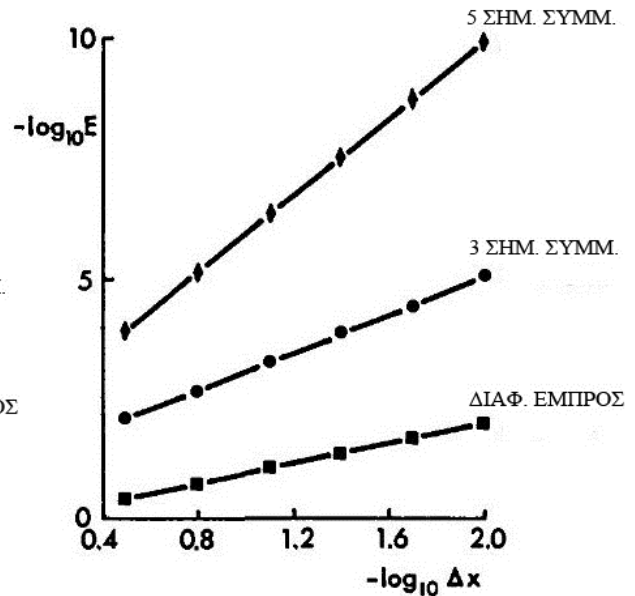
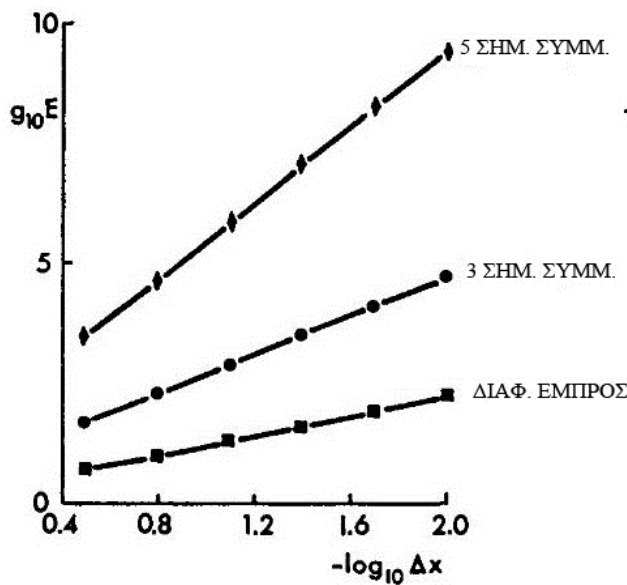
Κατά προσέγγιση το άμεσα υπολογισμένο σφάλμα, E , μπορεί να γραφτεί

$$E = A(\Delta x)^k$$

και το σφάλμα αποκοπής ως

$$TE = B (\Delta x)^k$$

όπου το k είναι ο εκθέτης του μεγέθους του πλέγματος στον κύριο όρο του σφάλματος αποκοπής, όπως παραδείγματος χάριν στους Πίνακες 3.3 και 3.4.



Σχ. 3.4. Αποτελέσματα σύγκλισης για την αξιολόγηση της

Σχ. 3.4. Αποτελέσματα σύγκλισης για την αξιολόγηση της

$$d\bar{T} / dx.E = \left| \left[\frac{d\bar{T}}{dx} \right]_{FD} / \left[\frac{d\bar{T}}{dx} \right]_{ex} - 1 \right|$$

$$d^2\bar{T} / dx.E = \left| \left[\frac{d^2\bar{T}}{dx^2} \right]_{FD} / \left[\frac{d^2\bar{T}}{dx^2} \right]_{ex} - 1 \right|$$

Επομένως αναμένεται ότι το άμεσα υπολογισμένο σφάλμα θα μειωθεί με την Δx με τον τρόπο που παρουσιάζεται στους Πίνακες 3.3 και 3.4. Αυτό επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα Σχ. 3.4 και 3.5. Με την σχεδίαση γραφικής παράστασης σε μια μεγάλη κλίμακα, το k δίνεται από την κλίση των δεδομένων, και αντιστοιχεί στον εκθέτη του μεγέθους πλέγματος στον κύριο όρο στο σφάλμα αποκοπής. Είναι σαφές από τα δεδομένα που σχεδιάζονται στην γραφική παράσταση ότι οι διάφορες περιπτώσεις επιτυγχάνουν τον αναμενόμενο ρυθμό σύγκλισης που υπαγορεύεται από τους κύριους όρους του σφάλματος αποκοπής στους Πίνακες 3.3 και 3.4. Ο ρυθμός σύγκλισης μπορεί ακόμα να υπολογιστεί από το σφάλμα αποκοπής ακόμα και όταν η ακριβής λύση είναι άγνωστη. Κατά συνέπεια κάποιος μπορεί να συμπεράνει από ένα σφάλμα αποκοπής με έναν τέταρτης τάξης ($k = 4$) κύριο όρο (5ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.) ότι το σφάλμα λύσης μειώνεται με έναν πολύ γρηγορότερο ρυθμό με την πυκνωση πλέγματος από το σφάλμα λύσης που αντιστοιχεί σε ένα σφάλμα αποκοπής με έναν δεύτερης τάξης ($k = 2$) κύριο όρο (3ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.).

3.4.1 Τύποι υψηλότερης τάξης έναντι τύπων χαμηλότερης τάξης

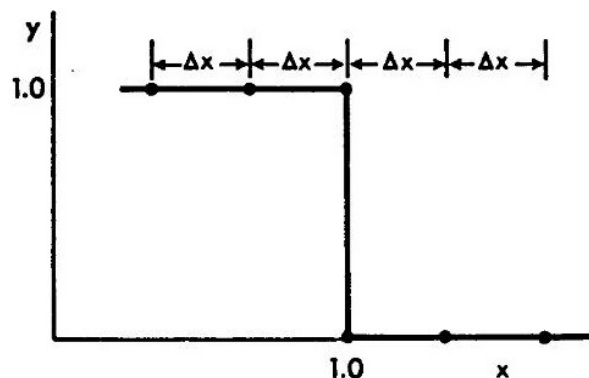
Από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα μπορεί να φανεί ότι πρέπει πάντα να χρησιμοποιείται ένας τύπος υψηλότερης τάξης σε ένα λεπτό πλέγμα. Εντούτοις αυτό είναι παραπλανητικό. Κατ' αρχάς, η αξιολόγηση ενός τύπου υψηλότερης τάξης περιλαμβάνει περισσότερα σημεία και ως εκ τούτου είναι λιγότερο οικονομικός από την αξιολόγηση ενός τύπου χαμηλής τάξης. Από μια πρακτική προοπτική, η ακρίβεια που μπορεί να επιτευχθεί για έναν δεδομένο χρόνο εκτέλεσης, ή η υπολογιστική αποδοτικότητα, είναι σημαντικότερες από την ακρίβεια. Μόνο η ακρίβεια μπορεί πάντα να αυξηθεί με πυκνωση του πλέγματος. Η υπολογιστική αποδοτικότητα.

Δεύτερον, οι τύποι υψηλότερης τάξης παρουσιάζουν ένα σχετικά μικρό πλεονέκτημα ακρίβειας έναντι των τύπων χαμηλής τάξης για ένα τραχύ (αραιό) πλέγμα αλλά καταδεικνύουν ένα πολύ μεγαλύτερο πλεονέκτημα ακρίβειας όταν πυκνώνεται το πλέγμα. Εντούτοις για ένα ιδιαίτερο πρόβλημα ισχύει συχνά ότι το γενικό επίπεδο ακρίβειας από τις απαντήσεις που απαιτείται να είναι κατάλληλο για ένα αραιό πλέγμα ή ότι ένα αραιό πλέγμα να είναι απαραίτητο λόγω των περιορισμών της μνήμης του υπολογιστή ή του χρόνου εκτέλεσης. Η αποτελεσματικότητα των τύπων υψηλότερης τάξης που παρουσιάζονται στα Σχ. 3.4 και 3.5 εξαρτάται επίσης από την ομαλότητα της ακριβούς λύσης. Οι ανιζώδεις υπερηχητικές ροές μπορούν να παράγουν ασυνεχείς λύσεις, που συνδέονται με την παρουσία κρουστικών κυμάτων. Εάν η λύση είναι ασυνεχής η εγκυρότητα των τεχνικών για την κατασκευή των τύπων διαφοράς επιδέχεται ταίριασμα-παρεμβολή δεδομένων ότι δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι οι διαδοχικοί όροι στα αναπτύγματα σφάλματος αποκοπής μειώνονται στο μέγεθος. Κατά συνέπεια ο εγκλεισμός περισσότερων σημείων στην έκφραση πεπερασμένης διαφοράς και η ακύρωση περισσότερων όρων στα αναπτύγματα σφάλματος αποκοπής δεν υπονοεί τίποτα για την τελική ακρίβεια της αντίστοιχης λύσης. Αυτό μπορεί να φανεί για την ακριβή λύση που παρουσιάζεται στο Σχ. 3.6.

Χρησιμοποιώντας τον τριών σημείων συμμετρικό τύπο: $\left[\frac{d\bar{T}}{dx} \right]_{x=1} = -0.5 / \Delta x$

Χρησιμοποιώντας τον πέντε σημείων συμμετρικό τύπο: $\left[\frac{d\bar{T}}{dx} \right]_{x=1} = -7 / (12\Delta x)$

Δεδομένου ότι η ακριβής λύση είναι $\left[\frac{d\bar{T}}{dx} \right]_{x=1} = -\infty$, ο πέντε σημείων τύπος δεν είναι αισθητά ακριβέστερος από τον τριών σημείων τύπο.



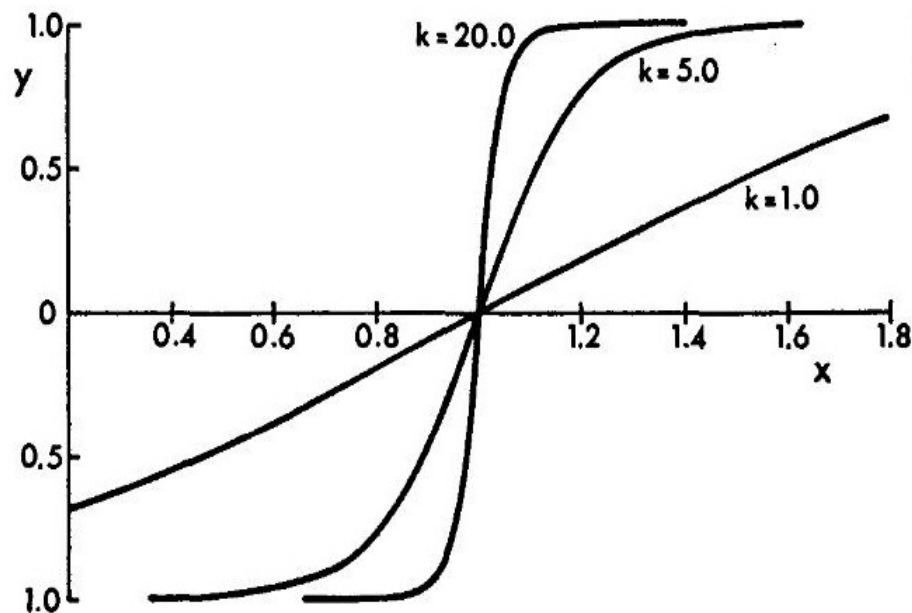
Σχ. 3.6. Ασυνεχής (ακριβής) λύση

Για τα ιξώδη προβλήματα στον υψηλό αριθμό Reynolds (δηλ. λίγη φυσική διάχυση) οι ασυνέχειες δεν μπορούν να εμφανιστούν αλλά οι πολύ απότομες κλίσεις εμφανίζονται. Εάν η κλίση είναι αρκετά απότομη και το πλέγμα αρκετά αραιό τα σχήματα διακριτοποίησης υψηλής τάξης δεν είναι επωφελή. Αυτό μπορεί να απεικονιστεί από την συνάρτηση

$$\bar{y} = \tanh[k(x-1)]$$

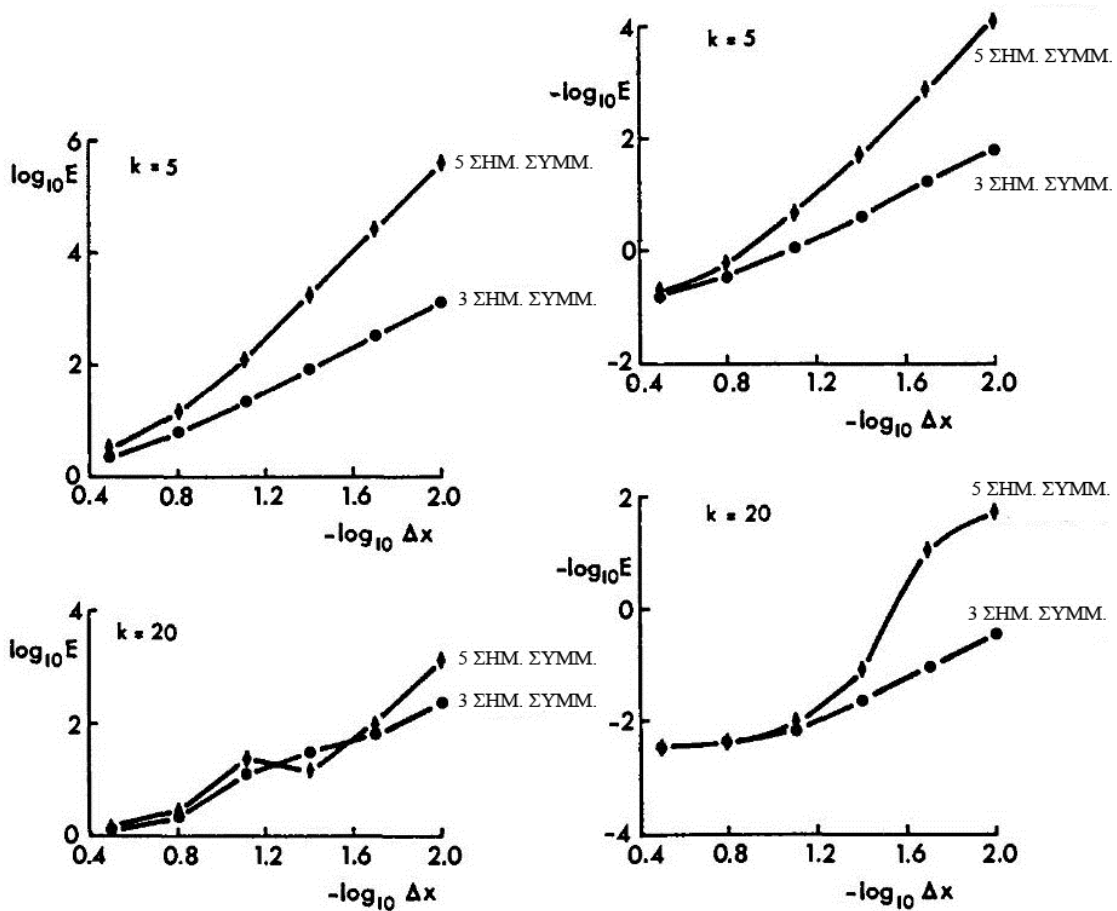
Αυτή σχεδιάζεται γραφικά για τρεις τιμές του k στο Σχ. 3.7. Σαφώς, υπάρχει μια κλίση κεντρική στο $x = 1$ η δριμύτητα της οποίας αυξάνεται με το k . Το πρώτο παράγωγο dy/dx έχει αξιολογηθεί στο $x = 0.96$ χρησιμοποιώντας τους τριών σημείων και πέντε σημείων συμμετρικούς τύπους (Πίνακας 3.1) για να μειωθεί το Δx με το $k = 5$ και 20

Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο Σχ. 3.8. Είναι αξιοπρόσεχτο ότι ο πέντε σημείων τύπος παράγει την ανώτερη ακρίβεια μόνο εάν το πλέγμα πυκνώνεται αρκετά. Ο απαραίτητος βαθμός πυκνώσης αυξάνεται όσο κλίση γίνεται πιο απότομη (αύξηση του k). Για μερικές ενδιάμεσες τιμές του Δx ο τύπος πέντε σημείων παράγει μια λιγότερο ακριβή αξιολόγηση του παραγώγου. Η αντίστοιχη σύγκριση για την αξιολόγηση του δεύτερου παραγώγου παρουσιάζεται στο Σχ. 3.9. Η ίδια γενική τάση είναι προφανής, δηλαδή ότι ο τύπος υψηλότερης τάξης παρέχει μια ουσιαστική βελτίωση μόνο όταν πυκνώνεται το πλέγμα. Όταν εμφανίζονται απότομες κλίσεις, το μέγεθος των παραγώγων υψηλότερης τάξης είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό των παραγώγων χαμηλής τάξης.



$$\bar{y} = \tanh[k(1-x)]$$

Σχ. 3.7. Αναλυτική συνάρτηση



Σχ. 3.8. Σύγκλιση της $[d\bar{y}/dx]_{FD}$: επιρροή της ομαλότητας της λύσης.

$$E = \left| \left[\frac{d\bar{y}}{dx} \right]_{FD} / \left[\frac{d\bar{y}}{dx} \right]_{ex} - 1 \right|$$

Σχ. 3.8. Σύγκλιση της $[d^2\bar{y}/dx^2]_{FD}$: επιρροή της ομαλότητας της λύσης.

$$E = \left| \left[\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} \right]_{FD} / \left[\frac{d^2\bar{y}}{dx^2} \right]_{ex} - 1 \right|$$

Συνεπώς, σε ένα δεδομένο πλέγμα οι όροι υψηλότερης τάξης στην έκφραση σφάλματος αποκοπής δεν μειώνονται με ένα τόσο γρήγορο ρυθμό όπως όταν η αντίστοιχη ακριβής λύση είναι ομαλή. Για τον ίδιο λόγο, εκτός αν το πλέγμα γίνεται πολύ λεπτό το μέγεθος της υψηλότερης τάξης παράγωγο στον κύριο όρο του σφάλματος αποκοπής μπορεί να είναι τόσο μεγάλο για μια υψηλότερης τάξης διακριτοποίηση από όσο είναι το γενικό λάθος συγκρινόμενο με αυτό της χαμηλής τάξης διακριτοποίηση.

Σαν γενικό σχόλιο, οι διακριτοποιήσεις τουλάχιστον δεύτερης τάξης θα πρέπει να χρησιμοποιούνται. Η χρήση διακριτοποιήσεων ακόμη υψηλότερης τάξης μπορεί να δικαιολογηθεί υπό ειδικές συνθήκες.

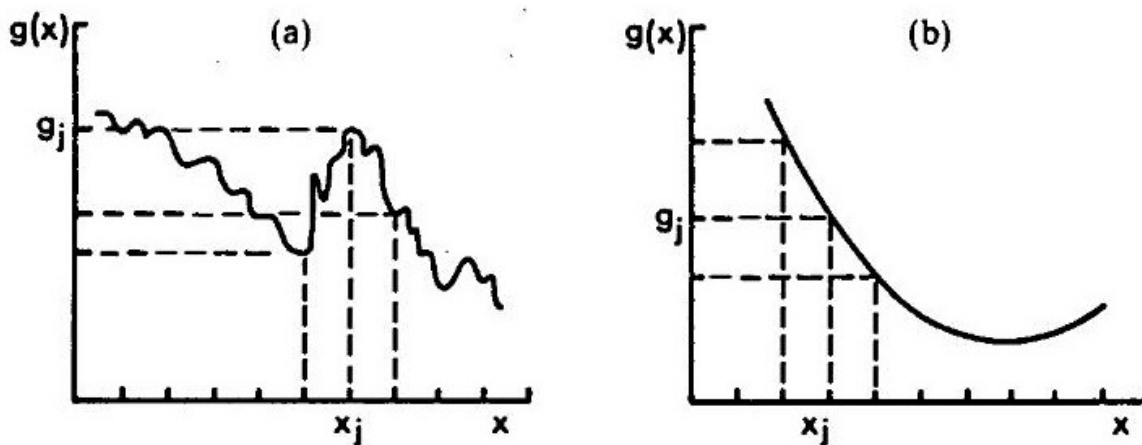
3.4.2 Αναπαράσταση κυμάτων

Πολλά φαινόμενα ρευστής ροής καταδεικνύουν μια κυματοειδή κίνηση. Επομένως είναι εννοιολογικά χρήσιμο να εξεταστεί η ακριβής λύση ως διαχωρισμένη στα ξεχωριστά τμήματα

Fourier της. Αυτό θέτει το θέμα εάν η διαδικασία διακριτοποίησης αναπαριστά τα κύματα του σύντομου και μακροχρόνιου μήκους κύματος με την ίδια ακρίβεια.

3.4.3 Σημασία της πυκνότητας του πλέγματος

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών αντικαθιστά μια συνεχή συνάρτηση $g(x)$ με ένα διάνυσμα κομβικών τιμών (g_j) που αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα διακριτών σημείων πλέγματος (x_j). Η επιλογή ενός κατάλληλου διαστήματος πλέγματος Δx εξαρτάται από την ομαλότητα του $g(x)$. Μια φτωχή επιλογή απεικονίζεται στο σχ. 3.10a, και μια λογική επιλογή παρουσιάζεται στο σχ. 3.10b. Για να ληφθεί μια ακριβής αναπαράσταση του $g(x)$ που παρουσιάζεται στο Σχ. 3.10a θα απαιτούνταν ένα πολύ μικρότερο διάστημα πλέγματος Δx από ότι για το $g(x)$ που παρουσιάζεται στο Σχ. 3.10b.



Σχ. 3.10a, b. Διακριτή αναπαράσταση του $g(x)$. Διάστημα πλέγματος πάρα πολύ αραιό (a) και λογικό (b)

Μια αναπαράσταση Fourier του $g(x)$ (υποτιθέμενο περιοδικό) στο διάστημα

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m e^{imx} \quad (3.28)$$

όπου $i=(-1)^{1/2}$, m είναι ο αριθμός κυμάτων και g_m είναι το εύρος του τρόπου Fourier του μήκους κύματος $\lambda=2\pi/m$ που δίνεται από τον (Hamming 1973)

$$g_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-imj} dx \quad (3.29)$$

Στο διάνυσμα των κομβικών τιμών, (g_j), μπορεί επίσης να δοθεί μια αναπαράσταση Fourier. Αυτή έχει τη μορφή

$$g_j = \sum_{m=1}^j g_m e^{imj\Delta x} \quad (3.30)$$

όπου τα τυπικά εύρη g_m δίνονται από

$$g_m = \Delta x \sum_{j=1}^m g_m e^{-imj\Delta x} \quad (3.31)$$

Η ιδιαίτερη φύση του πλέγματος περιορίζει την κλίμακα των μηκών κύματος που μπορεί να αναπαρασταθούν. Ειδικότερα, τα μήκη κύματος μικρότερα από το μήκος κύματος αποκοπής $\lambda = 2\Delta x$ δεν μπορούν να αναπαρασταθούν. Συνεπώς το (g_j) πρέπει να ερμηνευθεί ως προσέγγιση μακρών κυμάτων του $g(x)$. Ομοίως, το T_j^{n+1} , η κατά προσέγγιση λύση που λαμβάνεται από την (3.5) πρέπει να θεωρηθεί μια προσέγγιση κυμάτων στην ακριβή λύση της (3.1).

3.4.4 Ακρίβεια της αναπαράστασης των κυμάτων

Η ακρίβεια των προσεγγίσεων πεπερασμένης διαφοράς, όταν πρέπει να αναμένεται κυματοειδής κίνηση, μπορεί να αξιολογηθεί με την εφαρμογή στα οδεύοντα κύματα όπως

$$\bar{T}(x,t) = R \left\{ e^{[imx(x-qt)]} \right\} = \cos[m(x-qt)] \quad (3.32)$$

όπου το $i = (-1)^{1/2}$, το \Re δείχνει το πραγματικό μέρος, το m είναι ο αριθμός κυμάτων, όπως στην (3.28), και το q είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος που κινείται στη θετική κατεύθυνση x . Σε ένα σταθερό σημείο x_j η κίνηση των κυμάτων είναι περιοδική με μια περίοδο $P=2\pi/(qm)$.

Στον (j,n) ιστό κόμβο, η ακριβής τιμή των πρώτων και δεύτερων παραγώγων του \bar{T} είναι

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = -m \sin[m(x_j - qt_n)] \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = -m^2 \cos[m(x_j - qt_n)] \quad (3.34)$$

Η αντικατάσταση της (3.32) στον τύπο τριών σημείων

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n \approx \frac{(\bar{T}_{j+1}^n - \bar{T}_{j-1}^n)}{2\Delta x}$$

δίνει

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\cos \left\{ \left[m(x_j - qt_n) \right] + m\Delta x \right\} - \cos \left\{ \left[m(x_j - qt_n) \right] - m\Delta x \right\} \right) \\ &= \frac{-m \sin \left[m(x_j - qt_n) \right] \sin(m\Delta x)}{m\Delta x} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Κατά συνέπεια η αναλογία εύρους της αναπαράστασης του πρώτου παράγωγου είναι

$$AR(1)_{3PT} = \frac{\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]_j^n}{\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right]} = \frac{\sin(m\Delta x)}{m\Delta x} \quad (3.36)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.32), η προσέγγιση κεντρικής διαφοράς στην $\partial^2 \bar{T} / \partial x^2$ δίνει

$$\frac{T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n}{\Delta x^2} = -m^2 \left(\frac{\left[\sin(m\Delta x / 2) \right]}{(m\Delta x / 2)} \right)^2 \cos \left[m(x_j - qt_n) \right] \quad (3.37)$$

Η αναλογία εύρους της αναπαράστασης της παραγώγου δεύτερης τάξης είναι

$$AR(2)_{3PT} = \left(\frac{\sin(0.5m\Delta x)}{0.5m\Delta x} \right)^2 \quad (3.38)$$

Μια εξέταση της (3.36) δείχνει ότι η χρήση της προσέγγισης πεπερασμένης διαφοράς έχει εισαγάγει μια αλλαγή στο εύρος του παραγώγου. Για τα μακριά μήκη κύματος, δηλαδή $\lambda > 20\Delta x$, το εύρος του πρώτου παραγώγου μειώνεται από έναν παράγοντα μεταξύ 0.984 και 1.000 κατά την χρησιμοποίηση της προσέγγισης κεντρικής διαφοράς. Εντούτοις, όταν υπάρχουν λιγότερο από 4 διαστήματα πλέγματος σε ένα μήκος κύματος (κοντά μήκη κύματος) το εύρος του παραγώγου είναι λιγότερο από 0.64 της σωστής τιμής του. Για ένα μήκος κύματος $\lambda = 20\Delta x$, η αναπαράσταση κεντρικής διαφοράς $\partial^2 \bar{T} / \partial x^2$ μειώνει το εύρος κατά 0.992. Εντούτοις, σε ένα μήκος κύματος $\lambda = 2\Delta x$ το εύρος του δεύτερου παραγώγου μειώνεται κατά 0.405. Όπως σημειώνεται στην παράγραφο 3.4.1, τα μακριά μήκη κύματος αναπαρίστανται ακριβέστερα από τα κοντά μήκη κύματος.

Όταν η προσέγγιση μπροστινής διαφοράς στην $[\partial \bar{T} / \partial x]_j^n$, η (3.19), συγκρίνεται με την ακριβή τιμή του παραγώγου, για το \bar{T} που δίνεται από την (3.32), διαπιστώνεται ότι εισάγονται σφάλματα και στη φάση και στο εύρος. Το αληθινό εύρος πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $[\sin(m\Delta x/2)/(m\Delta x/2)]$ και η φάση μειώνεται κατά $m\Delta x/2$, το οποίο είναι

ισοδύναμο με μια χωρική προπορεία κατά $\Delta x/2$. Για τα ανωτέρω παραδείγματα τα λάθη εύρους και φάσης εξαφανίζονται καθώς $\Delta x \rightarrow 0$, δηλ. το όριο μακρού μήκους κύματος.

3.4.5 Ακρίβεια των τύπων υψηλότερης τάξης

Στην παράγραφο 3.4.2 υποδείχθηκε ότι η ακρίβεια της διακριτοποίησης θα μπορούσε να αξιολογηθεί εξετάζοντας ένα προοδευτικό κύμα που ταξιδεύει με σταθερό εύρος και ταχύτητα, q . Η ακριβής λύση δίνεται από την (3.32). Εδώ αυτό το παράδειγμα θα χρησιμοποιηθεί για να δούμε εάν οι τύποι διαφοράς υψηλότερης τάξης αναπαριστούν τα κύματα ακριβέστερα από τους τύπους χαμηλότερης τάξης. Συγκεκριμένα, θα γίνει μια σύγκριση των συμμετρικών τύπων τριών σημείων και πέντε σημείων για την $\partial \bar{T} / \partial x$ και $\partial^2 \bar{T} / \partial x^2$ που δίνεται στους Πίνακες 3.1 και 3.2.

Ακολουθώντας την ίδια ανάπτυξη όπως για την (3.36) η αναλογία εύρους για τη συμμετρική αναπαράσταση πέντε σημείων για την $\partial \bar{T} / \partial x$ (Πίνακας 3.1) είναι

$$AR_{SPT}(1) = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos m\Delta x \right) = \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x} \quad (3.39)$$

Η συμπεριφορά μακρού (long) και κοντού (short) μήκους κύματος της (3.39) παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.5.

Πίνακας 3.5. Αναλογίες εύρους για ένα προοδευτικό κύμα

Παραγωγό	Σχήμα	Αναλογία Εύρους	Αναλογία Εύρους
		Μακρύ μήκος κύματος ($\lambda = 20\Delta x$)	Κοντό μήκος κύματος ($\lambda = 4\Delta x$)
dT	3ΣΗΜ. ΣΥΜΜ	0.9836	0.6366
dx	5ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	0.9996	0.8488
Παράγωγο	Σχήμα	Μακρύ μήκος κύματος ($\mu = 20\Delta x$)	Κοντό μήκος κύματος ($\lambda = 2\Delta x$)
d^2T	3ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	0.9918	0.4053
dx^2	5ΣΗΜ. ΣΥΜΜ.	0.9999	0.5404

Η αναλογία εύρους για την αναπαράσταση πέντε σημείων της $\partial^2 \bar{T} / \partial x^2$ (Πίνακας 3.2) δίνεται από

$$AR_{SPT}(2) = \frac{4}{3} \left\{ 1 - 0.25 [\cos(0.5m\Delta x)]^2 \right\} \left(\frac{\sin(0.5m\Delta x)}{0.5m\Delta x} \right)^2 \quad (3.40)$$

Η συμπεριφορά μακριών και κοντών μηκών κύματος (3.40) παρουσιάζεται στον Πίνακα 3.5. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.5 δείχνουν ότι και τα δύο σχήματα είναι πιο ακριβή για τα μακριά μήκη κύματος, με το σχήμα πέντε σημείων να είναι ιδιαίτερα ακριβές. Εντούτοις, κανένα σχήμα δεν είναι πολύ ακριβές για τα κοντά μήκη κύματος. Αυτό το αποτέλεσμα είναι σύμφωνο με τα προηγούμενα σχόλια (παρ 3.3) για τη σχετική έλλειψη πλεονεκτήματος κατά την χρησιμοποίηση ενός σχήματος υψηλότερης τάξης σε ένα τραχύ πλέγμα.

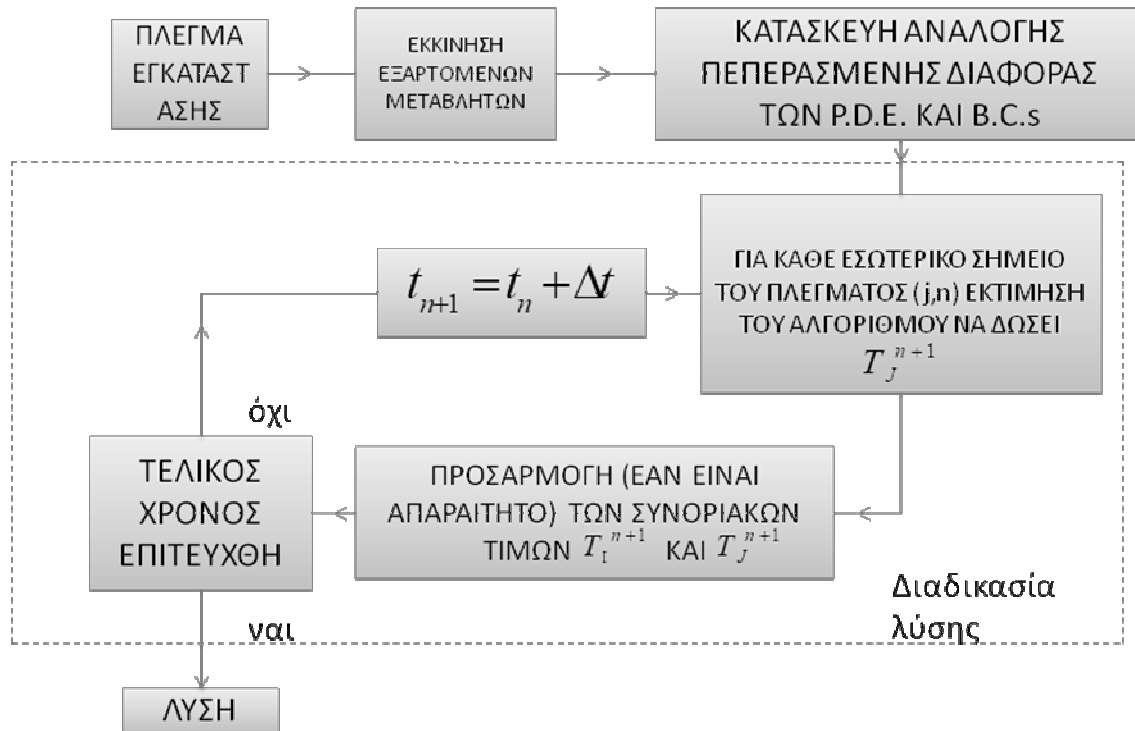
Για ένα δεδομένο κύμα που διαμορφώνεται, η πύκνωση του πλέγματος (δηλ. επιτρέποντας σε περισσότερα σημεία να αναπαραστήσουν κάθε μήκος κύματος) μετατοπίζει το πρόβλημα από ένα κοντό μήκος κύματος σε ένα πρόβλημα μακρού μήκους κύματος. Συνεπώς το κύριο συμπέρασμα που προέρχεται από τον Πίνακα 3.5 είναι η ανάγκη να χρησιμοποιηθεί ένα αρκετά πυκνό πλέγμα για να υπολογιστούν με ακρίβεια οι κυματοειδείς κινήσεις. Σε περίπτωση επίσης που θέλουμε να αυξήσουμε την ακρίβεια των υπολογισμών για ένα κοντό κύμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς.

3.5 Μέθοδος πεπερασμένη διαφοράς

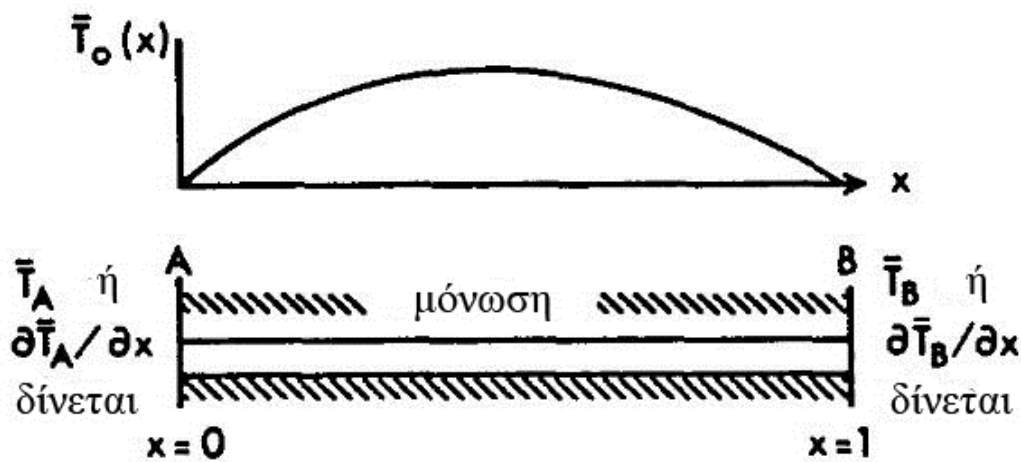
Όπως υπονοείται στην παράγραφο 3.1 η βάση για την μέθοδο πεπερασμένης διαφοράς είναι η κατασκευή ενός διακριτού πλέγματος (Σχ. 3.2), η αντικατάσταση των συνεχών παραγώγων στις διέπουσες μερικές διαφορικές εξισώσεις με τις ισοδύναμες εκφράσεις πεπερασμένης διαφοράς και η αναδιάταξη της προκύπτουσας αλγεβρικής εξίσωσης σε έναν αλγόριθμο, όπως στην (3.5). Σε αυτή την παράγραφο οι ανωτέρω πτυχές συνδέονται μαζί και παρέχεται ένα απλό πρόγραμμα πεπερασμένης διαφοράς.

3.5.1 Εννοιολογική εφαρμογή

Τα διάφορα βήματα στην εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών σε ένα δεδομένο πρόβλημα αναπαρίστανται σχηματικά στο Σχ. 3.11.



Σχ. 3.11. Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας λύσης πεπερασμένης διαφοράς.



Σχ. 3.12. Μεταβατική αγωγή θερμότητας σε μια ράβδο

Η διαδικασία μπορεί να γίνει συγκεκριμένη με την εφαρμογή της στο ακόλουθο πρόβλημα μεταβατικής αγωγής θερμότητας (διάχυση). Μια μονωμένη ράβδος (Σχ. 3.12) αρχικά έχει μια θερμοκρασία $T(x,0)=0^{\circ}\text{C}$. Σε $t=0$ καυτές δεξαμενές ($T = 100^{\circ}\text{C}$) έρχονται σε επαφή με τις δύο άκρες, A και B. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί (αριθμητικά) η επακόλουθη θερμοκρασία $T(x,t)$ για οποιοδήποτε σημείο στη ράβδο.

Η διέπουσα εξίσωση για αυτό το πρόβλημα είναι η (3.1)

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0$$

Για τη λύση αυτής της εξίσωσης, οι αρχικοί όροι (3.3) χρησιμεύουν να εκκινήσουν τις εξαρτώμενες μεταβλητές T_j^0 (σχ. 3.2). Ένα από τα απλούστερα ανάλογα πεπερασμένης διαφοράς της εξίσωσης διάχυσης λαμβάνεται με την αντικατάσταση της χρονικής παραγώγου με μια προσέγγιση προς τα εμπρός διαφοράς και της χωρικής παραγώγου με μια προσέγγιση κεντρικής διαφοράς (όπως στη παρ. 3.1.1). Αυτό οδηγεί, μέσω της (3.5), στο σχέδιο προς τα εμπρός του χρόνου και κεντρικού χώρου (Forward Time Central Space, FTCS)

$$T_j^{n+1} = sT_{j-1}^n + (1-2s)T_j^n + sT_{j+1}^n \quad (3.41)$$

όπου $s = a\Delta t/\Delta x^2$. Η εξίσωση (3.41) εφαρμόζεται σε όλους τους εσωτερικούς κόμβους $j = 2, \dots, J - 1$. Σε ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα αγωγής θερμότητας οι τιμές ορίου T_1^{n+1} και T_J^{n+1} δίνονται από τις συνοριακές συνθήκες (3.2). Η διαδικασία λύσης επαναλαμβάνεται, προχωρώντας στον χρόνο ($n = 1, 2, \dots$), έως ότου επιτυγχάνεται ο απαραίτητος τελικός χρόνος.

3.5.2 DIFF: Πρόβλημα μεταβατικής αγωγής θερμότητας (διάχυση)

Στην παράγραφο 3.5.1 η εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένης διαφοράς περιγράφεται ποιοτικά, εδώ παρέχεται ένα αντίστοιχο πρόγραμμα υπολογιστών, το DIFF. Το DIFF εφαρμόζει το αριθμητικό σχήμα FTCS (3.41), στο πρόβλημα μεταβατικής διάχυσης θερμότητας που παρουσιάζεται στο Σχ. 3.12.

Η λίστα του προγράμματος DIFF παρουσιάζεται στο Σχ. 3.13 και οι διάφορες παράμετροι που χρησιμοποιούνται από το DIFF περιγράφονται στον Πίνακα 3.6.

```

1
2 C          SOLVES 1D TRANSENT HEAT CONDUCT EQUATION USING
3 C          FTCS SCHEME
4 C
5           DIMENSION TN( 41 ) ,DUM( 41 ) ,TD( 41 ) , TE ( 41 )
6 C
7 C          INPUT DATA :
8 C
9 C          JMAX = THE NUMBER OF POINTS ALONG THE ROD
10 C         MAXEX = THE NUMBER OF TERMS IN THE EXACT SOLUTION
11 C         NMAX = THE MAXIMUM NUMBER OF TIME STEPS
12 C         ALPH = THE THERMAL DIFFUSIVITY
13 C         S     = ALPB•DELT/DELI/DELI
14 C         TMAX = THE MAXIMUM TIME

```

```

15 C
16     OPEN ( 1 , FILE='FIDD.DAT')
17     OPEN ( 2 , FILE='FIDD.OUT')
18     READ(1,1) JMAX , MAXEX ,NMAX , ALPH ,ALPH , S ,TMAX
19     1  FORMAT (3i5 , E10 .3,F5.2,F5.0)
20     PI = 3.1415927
21 C
22 C     TD = DIMENSIONAL TEMPERATURE
23 C     TN = NONDIMENSIONAL TEMPERATURE
24 C
25     JMAP = JMAX -1
26     AJM = JMAP
27     DELX = 1./AJM
28     DELT = DELX•DELX•S/ALPH
29     WRITE ( 6, 2) JMAX , MAXEX, NMAX ,TMAX
30     2  FORMAT ( ' JMAX=',I5, ' MAXEX=',I5, ' TMAX=',F8.2)
31     WRITE (6,2) S,ALPH,DELT,DELX
32     3  FORMAT ( ' S=',F5.3, ' ALPH =', E10.3,
33     1' DELX =',E10.3,//)
34     WRITE (6,4)S
35     4  FORMAT(' FTCS(EXPLICIT_ SCHEME, ',5X, 'S =',F5.3//)
36 C
37 C     SET INITIAL CONDITIONS
38 C
39     DO 5 J= 1 , JMAP
40     5  TW ( J ) = 0.
41     N = 0
42     T = 0
43     SJ = 1 . 0 - 2.0 •S
44 C
45 C     SET BOUNDARY CONDITIONS
46 C     EACH TIME STEP STARTS AT STATEMENT 6
47 C
48     6  TN(1) = 1.
49     TN(JAMX) =1.
50     IF(T .LT. 0.01)TN(1) = 0.5
51     IF(T .LT. 0.01)TN(JMAX)= 0.5
52     TD(1) = 100. •TN(1)
53     TD(JMAX) =100, •TN(JMAX)
54 C
55 C     COMPUTE F.D. SOLUTION
56 C
57     DO 7 J = 2,JKAP
58     DUM(J) = SJPTI(J) + S*(TN(J-1) + TI(J+1))

```

```

59      7  CONTINUE
60      DO 8 J = 2,JMAP
61      8  TN(J) = DUM(J)
62 C
63      DO 9 J = 2,JMAP
64      9  TD(J) = 100.*Ti(J)
65      T = T + DELT
66      WRITE(6,10)T,(TD(J),J=1,JMAX)
67     10  FORMAT(' T= ',F5.0,' TD=1.11F6.2)
68 C
69 C    IF MAXIMUM TIME OR MAXIMUM NUMBER OF TIME-STEPS EXCEEDED
70 C    EXIT FROM LOOP
71 C
72      IF(N .GE. IMAX) GOTO 11
73      IF(T TMAX) GOTO 8
74 C
75 C    OBTAIN EXACT SOLUTION AND COMPARE
76 C
77     11  SUM = 0,
78      DO 13 J = 1,JNAX
79      AJ = J 1
80      X(J) = DELX*AJ
81      TE(J) = 100.
82      DO 12 M = 1,MAXEX
83      AM = K
84      DAM = (2.*AX - 1.)
85      DXM= DAM*PI*X(J)
86      DTM= -ALPH*DAM*DAM*PI*PI*T
87 C
88 C    LIMIT THE ARGUMENT SIZE OF EXP (DTM)
89 C
90      IF( DTM . LT . - 87. ) DTm = -87,0
91     12  TE( J ) = TE( J ) 400 . /DAM/PI*SIN(DXM)*EXP(DTM)
92      SUM = SUM * (TE(J) TD(J))**2
93     13  CONTINUE
94      WRITE(6,14)T,(TE(J),J=1,JMAX)
96     14  FORMAT(/, ' Ts ',F5.0,' TE=',11F6.2.//)
96 C
97 C    RMS IS THE RMS ERROR
98 C
99      AVS = SUN/(1. + AJN)
100     RMS = SQRT(AVS)
101     WR/TE(6,15)RMS
102     15  FORMAT(' HMS DIF = ',E11,4,//)

```

103 STOP
104 END

Σχ. 3.13. Το πρόγραμμα DIFF

Το πρόγραμμα DIFF διαβάζει στις διάφορες παραμέτρους ελέγχου (γραμμή 16), θέτει τα Δx και Δt και καταγράφει τις διάφορες παραμέτρους. Η λύση υπολογίζεται σε κάθε χρονικό βήμα $n+1$ (Σχ. 3.11) μέχρι είτε το NMAX είτε το TMAX (γραμμές 72,73) να ξεπεραστούν. Κατόπιν η ακριβής λύση υπολογίζεται (γραμμές 74-91) από

$$TE(x_j, t_n) = 100 - \sum_{M=1}^{MAXEX} \left[\frac{400}{(2m-1)\pi} \right] \sin \left[(2m-1)\pi x_j \right] e^{-a(2m-1)^2 x^2 t_n} \quad (3.42)$$

Αυτή η λύση λαμβάνεται από τον διαχωρισμό της προσέγγισης μεταβλητών (παρ. 2.5.2). Ταυτόχρονα το σφάλμα rms λαμβάνεται από :

$$RMS = \left[\left(\sum_{J=1}^{JMAX} (T_j - TE_j)^2 \right) / JMAX \right]^{1/2} \quad (3.43)$$

Πίνακας 3.6. Παράμετροι που χρησιμοποιούνται στο πρόγραμμα DIFF

Παράμετρος	Περιγραφή
JMAX	Αριθμός σημείων κατά μήκος της ράβδου
MAXEX	Αριθμός όρων στην ακριβή εξίσωση
NMAX	Μέγιστος αριθμός χρονικών βημάτων
ALPH	Συντελεστής θερμικής διάχυσης α
S	$\alpha/\Delta t/\Delta x^2$
HMAX	Μέγιστος χρόνος
TD	Πίνακας διαστατικής θερμοκρασίας
TN	Πίνακας αδιαστατικής θερμοκρασίας
TE	Πίνακας ακριβούς (διαστατικής) θερμοκρασίας
DX	Δx
DT	Δt
TIM	Χρόνος
X	Τοποθεσία $0 < X < 1.0$
RMS	σφάλμα mis στην λύση

Για τις αρχικές συνθήκες $\bar{T}(x,0)=0$ και τις συνοριακές συνθήκες $\bar{T}(0,t) = \bar{T}(1,t) = 100$ η έξοδος του υπολογιστή που παράγεται από το DIFF, που αντιστοιχεί σε συντελεστή διάχυσης $s=0.5$, δίνεται στο σχ. 3.14 και σχεδιάζεται γραφικά στο σχ. 3.15.

Η τιμή του s χρησιμοποιείται στο DIFF για να θέσει το χρονικό βήμα Δt η τιμή του $\Delta x = 0.1$. Η μείωση του s μειώνει το Δt και οδηγεί σε ένα μικρότερο σφάλμα rms στη λύση. Αυτό είναι

προφανές από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.7 με $\bar{T}(0.0) = \bar{T}(1.0) = 50$. Το αποτέλεσμα που αντιστοιχεί στο $s=0.167$ είναι μια ειδική περίπτωση .

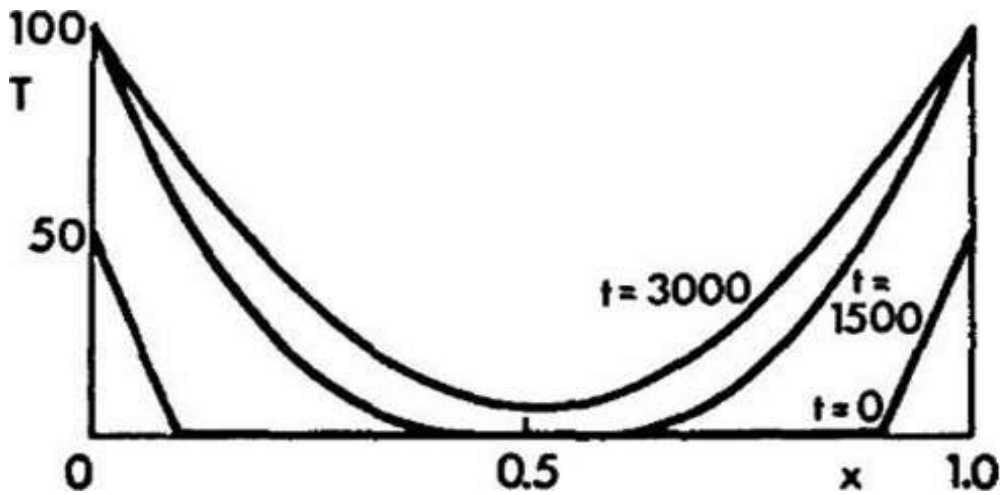
JMAX= 11 MAXEX= 10 NMAX= 500 TMAX= 2999.00
 S= .500 ALPH = .100E-04 DELT = .500E+03 DELX = .100E+00

FTCS(ΑΝΑΛΥΤΗ) ΜΕΘΟΔΟΣ, S = .500

T= 500.	TD=50.00	25.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	25.00	50.00
T= 1000.	TD=100.00	50.00	12.50	.00	.00	.00	.00	.00	12.50	50.00	100.00
T= 1500.	TD=100.00	56.25	25.00	6.25	.00	.00	.00	6.25	25.00	56.25	100.00
T= 2000.	TP=100.00	62.50	31.25	12.50	3.13	.00	3.13	12.50	31.25	62.50	100.00
T= 2500.	TD=100.00	65.63	37.50	17.19	6.25	3.13	6.25	17.19	37.50	65.63	100.00
T= 3000.	TD=100.00	68.75	41.41	21.88	10.16	6.25	10.16	21.88	41.41	68.75	100.00
T=3000.	TE=100.00	68.33	41.53	22.49	11.68	8.25	11.68	22.49	41.53	68.33	100.00

RMS DIF = .9418E+00

Σχ. 3.14. Χαρακτηριστική έξοδος από το DIFF' $s=0.5$



Σχ. 3.15. Λύση της (3.41) με $s = 0,5$: ευσταθής συμπεριφορά

Μια εξέταση των γραμμών 50 και 51 του DIFF (Σχ. 3.13) δείχνει ότι οι τιμές των $\bar{T}(0.0)$ και $\bar{T}(1.0)$ υπολογίζονται κατά μέσο όρο μεταξύ των τιμών τους που υπονοούνται από τις αρχικές συνθήκες και εκείνες που υπονοούνται από τις συνοριακές συνθήκες. Η επίδραση του ορισμού του $\bar{T}(0,0) = \bar{T}(1, 0) = 0$, (δηλ. όπως δίνεται από τις αρχικές συνθήκες) παρουσιάζεται επίσης στον Πίνακα 3.7. Σαφώς αυτό οδηγεί σε ένα πολύ μεγαλύτερο σφάλμα

λύσης. Εάν $\bar{T}(0,0) = \bar{T}(1,0) = 100$ το σφάλμα είναι ενός παρόμοιου μεγέθους με αυτό για $\bar{T}(0,0) = \bar{T}(1,0) = 0$.

Πίνακας 3.7 Σφάλμα rms για $t=t_{\max}$

s	Σφάλμα rms $\bar{T}(0,0) = \bar{T}(1,0) = 50$.	Σφάλμα rms $\bar{T}(0,0) = \bar{T}(1,0) = 0$.
0.5	0.492	2.251
0.3	0.187	0.953
0.167	0.00169	0.440

3.6 Συμπεράσματα

Η διακριτοποίηση φαίνεται ότι εισαγάγει ένα σφάλμα που μπορεί να αξιολογηθεί με την εξέταση του σφάλματος αποκοπής, τουλάχιστον για την μέθοδο πεπερασμένης διαφοράς. Το σφάλμα αποκοπής είναι πιθανό να είναι ένας σταδιακά ακριβέστερος δείκτης του σφάλματος λύσης καθώς το πλέγμα πυκνώνεται.

Οι συγκεκριμένοι τύποι που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν τις παραγώγους μπορούν να επιλεγούν με την εξάλειψη των διαδοχικών όρων από το σφάλμα αποκοπής (Παρ. 3.2.2). Εντούτοις μια τέτοια προσέγγιση πρέπει συχνά να τροποποιείται για να επιλεγθούν μερικοί από τους συντελεστές έτσι ώστε ο προκύπτων αλγόριθμος να είναι ευσταθής .

Είναι προφανές από τα συγκεκριμένα παραδείγματα που εξετάζονται στις παραγράφους 3.3 και 3.4 ότι οι τύποι υψηλότερης τάξης δεν είναι πιθανό να είναι σημαντικά ακριβέστεροι από τους τύπους χαμηλής τάξης ακρίβεια εάν η αντίστοιχη αναλυτική λύση περιέχει ασυνέχειες ή μεγάλες κλίσεις. Επιπλέον, κατά την αναπαράσταση της κυματοειδούς κίνησης, τα κοντά μήκη κύματος προβλέπονται με λιγότερη ακρίβεια από τα μακριά μήκη κύματος.

Η εφαρμογή ενός απλού προγράμματος πεπερασμένης διαφοράς, DIFF, επιτρέπει σε πολλά από τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών να απεικονιστούν. Με χρήση παραδειγμάτων αποδεικνύεται ότι η ακρίβεια της λύσης πεπερασμένων διαφορών της εξίσωσης διάχυσης είναι αρκετά ευαίσθητη στον τρόπο με το οποίο η ασυνέχεια στην προδιαγραφή των συνοριακών και των αρχικών συνθηκών αντιμετωπίζεται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

T. J. Chung . (2002). Computational Fluid Dynamics , Cambridge University Press .

John Anderson . (1995). Computational Fluid Dynamics , McGraw-Hill Education .

Von Wendt, J.F. (Ed.) (1996). Computational Fluid Dynamics: An Introduction. New York: Springer-Verlag.

Jiyuan Tu, Guan Heng Yeoh, Chaoqun Liu . (2007). Computational Fluid Dynamics : A Practical Approach , Butterworth-Heinemann .

Guan Heng Yeoh, Kwok Kit Yuen . (2009). Computational Fluid Dynamics in Fire Engineering: Theory, Modelling and Practice Butterworth-Heinemann .

Fletcher, Clive A. J. (1988). Computational Techniques for Fluid Dynamics: Fundamental and general techniques , Springer .

Durran, D.R. (1999). Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics. , Springer.