ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΒΑΣΙΛΙΚΗ ΤΟΜΑΡΑ
ΠΑΪΠΟΥΤΛΙΔΗ ΜΑΡΙΑ

ΕΠΟΠΤΕΥΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Δρ. ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2016

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η χρησιμοποίηση των Μαθηματικών στις οικονομικο-διοικητικές επιστήμες δεν περιορίζεται μόνο σε εξειδικευμένους τομείς, όπως είναι η μαθηματική οικονομική, η οικονομετρία, η επιχειρησιακή έρευνα και η διοικητική επιστήμη, αλλά επεκτείνεται σε ολόκληρο το πεδίο μελέτης που καλύπτουν οι κλάδοι αυτοί της επιστήμης, το οποίο διευρύνεται διαρκώς. Αυτό οφείλεται στις αυξημένες απαιτήσεις που εμφανίζουν τα οικονομικά και η διοικητική επιστήμη για τη χρησιμοποίηση εργαλείων ανάλυσης με υψηλές επιδόσεις.

Σήμερα γίνεται διεθνώς αποδεκτό ότι η αποτελεσματική μελέτη και ανάλυση των πολύπλοκων σχέσεων και αλληλεξαρτήσεων που καλούνται να διερευνήσουν όσοι ακολουθούν οικονομικο-διοικητικές επιστήμες, τόσο στο επίπεδο της θεωρητικής ανάλυσης όσο και στους τομείς λήψης των αποφάσεων και της άσκησης πολιτικής, προϋποθέτει ότι οι επιστήμονες αυτοί είναι εξοπλισμένοι με ισχυρά εργαλεία ανάλυσης. Ορισμένα από τα πλέον ισχυρά και πιο αποτελεσματικά εργαλεία ανάλυσης των οικονομικο-διοικητικών φαινομένων τα δανείζονται από τα μαθηματικά. Αυτός είναι ο λόγος που η διδασκαλία των μαθηματικών και γενικότερα των ποσοτικών μεθόδων καταλαμβάνει διεθνώς διαρκώς και μεγαλύτερο χώρο στα προγράμματα εκπαίδευσης αυτών που ακολουθούν οικονομικο-διοικητικές επιστήμες.

Η διεθνής εμπειρία διδάσκει ότι η συγγραφή ενός κατάλληλου βιβλίου μαθηματικών για σπουδαστές οικονομικο-διοικητικών επιστημών μπορεί να γίνει είτε με τη συνεργασία ενός οικονομολόγου και ενός μαθηματικού είτε από οικονομολόγο με επαρκείς γνώσεις στα μαθηματικά, όπως είναι οι ειδικευμένοι στην οικονομετρία, στη μαθηματική οικονομική ή στην επιχειρησιακή έρευνα. Η αυξανόμενη εφαρμογή των μαθηματικών στους διάφορους κλάδους των οικονομικών επιστημών κατέστησε αναγκαίο για τους οικονομολόγους να αποκτήσουν έστω και στοιχειώδεις γνώσεις μαθηματικών.

Τα μαθηματικά της βελτιστοποίησης πραγματεύονται προβλήματα μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης συναρτήσεων πολλών μεταβλητών κάτω από περιορισμούς που μπορεί να έχουν τη μορφή ισότητας ή ανισότητας. Τελικός σκοπός είναι η αναζήτηση της καλύτερης επιλογής σε προβλήματα που επιδέχονται περισσότερες από μία λύσεις με διαφορετικές απαιτήσεις σε πόρους, οι οποίοι θέτουν πολλαπλούς περιορισμούς στις δυνατές επιλογές και συνεπάγονται διαφορετικά αποτελέσματα. Αντίθετα, τα μαθηματικά της δυναμικής ανάλυσης ασχολούνται με τη μελέτη της διαχρονικής εξέλιξης των φαινομένων και την ευστάθεια των καταστάσεων ισορροπίας.

Δεν αποτελεί ίσως υπερβολή ο ισχυρισμός ότι κανένα άλλο πεδίο της μαθηματικής επιστήμης δεν αγγίζει τόσο πολύ την καρδιά της οικονομικής και της διοικητικής επιστήμης όσο τα μαθηματικά. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι ο μεγάλος όγκος των προβλημάτων που απασχολούν τις δύο αυτές επιστήμες αφορούν θέματα επιλογών και αποφάσεων κάτω από περιορισμούς, καθώς και θέματα μελέτης της δυναμικής συμπεριφοράς. Έτσι, οι τεχνικές της βελτιστοποίησης και της δυναμικής ανάλυσης προσφέρονται για τη μελέτη τέτοιων καταστάσεων τόσο κατά το στάδιο μοντελοποίησης του προβλήματος, όσο και κατά το στάδιο αναζήτησης λύσης.

Τα Μαθηματικά αποτελούν ουσιαστικά ένα σημαντικό μέρος της σύγχρονης οικονομίας. Παρέχουν την βασική εργαλειοθήκη για τους σύγχρονες οικονομολόγους με σκοπό να διατυπώσουν τις ιδέες τους σε ένα λογικό και ελέγξιμο δρόμο αλλά και να χρησιμοποιούν αυτές τις ιδέες για να εξηγήσουν συμπεριφορές και αποτελέσματα. Για να πεισθούμε σχετικά με την συχνότητα και την σημασία της χρήσης των μαθηματικών στη σύγχρονη οικονομία αρκεί να διαβάσουμε ένα περιοδικό στο οποίο θα βρούμε πολλές αναφορές σε μια εξίσωση ή κάποια ποσοτική τεχνική.

Χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά στην οικονομική επιστήμη εξάγουμε σταθερά, ουσιώδη και κυρίως τεκμηριωμένα αποτελέσματα, τα οποία είναι σαφώς πιο ισχυρά από τυχόν λεκτικά επιχειρήματα. Με την χρήση των μαθηματικών έχουμε α). ακρίβεια και β). πληρότητα.

Ακρίβεια γιατί πολλές φορές οι σχέσεις που καλούμαστε να εξετάσουμε είναι τόσο περίπλοκες που είναι αδύνατο να εξηγηθούν χωρίς σοβαρές ενδεχόμενες απώλειες. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε την ακόλουθη δήλωση: Εάν y είναι μία τετραγωνική συνάρτηση του x συν μια σταθερά, ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x θα είναι μια γραμμική συνάρτηση του x, με κλίση ίση με δύο. Όλα αυτά μπορούν να αποτυπωθούν σε μία συνάρτηση αρκεί να πούμε: if $y = y(x) = x^2 + c$ τότε $\frac{dy(x)}{dx} = 2x$. Εάν δεν λαμβάναμε υπόψιν τα μαθηματικά στην παραπάνω δήλωση θα ήταν εξαιρετικά δύσκολο να λύσουμε το εν λόγω πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Αναφορικά με την *πληρότητα* ας εξετάσουμε την παρακάτω δήλωση: *«Ο ρυθμός αύξησης του ΑΕΠ μιας χώρας εξαρτάται από τον πληθωρισμό, τις επενδύσεις, την αύξηση του πληθυσμού και την συχνότητα του εμπορίου»*. Η δήλωση αυτή είναι μη σημαντική, δεδομένου ότι δεν παρέχει καμία πληροφορία για τον τρόπο που το καθένα από τα τέσσερα παραπάνω επιχειρήματα επηρεάζουν την εξαρτημένη μεταβλητή, ήτοι τον ρυθμό ανάπτυξης του ΑΕΠ. Δημιουργούνται εύλογα ερωτήματα, όπως, εάν ο πληθωρισμός έχει αρνητικό ή θετικό αποτέλεσμα ή τι συμβαίνει με την αύξηση του πληθυσμού και το εμπόριο. Εναλλακτικά, μπορούμε να υποθέσουμε την παραπάνω δήλωση σε μια πιο λειτουργική μορφή, όπως:

$$\mathbf{GBP = c + \alpha_1 INF + \alpha_2 INV + \alpha_3 POP + \alpha_4 TRADE}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την παραπάνω συνάρτηση, όχι μόνο μπορούμε να εντοπίσουμε γρήγορα τις συνιστώσες που καθορίζουν την κύρια μεταβλητή μας, αλλά μπορούμε επίσης να ερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτές επηρεάζονται από «θεωρίες» και να δοκιμάσουμε σε τι βαθμό επηρεάζουν αυτές τώρα την εν λόγω μεταβλητή.

<u>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</u>

Στην παρούσα εργασία καταβλήθηκε κάθε προσπάθεια να συνδεθεί η θεωρία των Μαθηματικών με τα Οικονομικά Προβλήματα.

Στο *Πρώτο Κεφάλαιο (1^o)* θα αναφερθούμε στην διάκριση των μαθηματικών, καθώς αναλύεται η έννοια των Οικονομικών Μαθηματικών και παράλληλα παρουσιάζονται βασικοί ορισμοί που θα μας απασχολήσουν σε όλη την έκταση της παρούσας εργασίας.

Στη συνέχεια η εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Το Πρώτο μέρος περιλαμβάνει τις Βραχυπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις (Κεφάλαια 2, 3, 4) και το δεύτερο μέρος τις Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις (Κεφάλαια 5, 6, 7). Πιο αναλυτικά, στο *Δεύτερο Κεφάλαιο (2^o)* θα αναλύσουμε τον απλό τόκο μέσω παραδειγμάτων για την κατανόηση αυτού.

Συνεχίζοντας, στο *Τρίτο Κεφάλαιο (3^o)* και *Τέταρτο Κεφάλαιο (4^o)* θα παραθέσουμε το θεωρητικό υπόβαθρο τόσο της προεξόφλησης όσο και της αντικατάστασης των συναλλαγματικών σε διαταγή (γραμματίων), αντίστοιχα.

Στο *Πέμπτο Κεφάλαιο (5^o)* αναλύουμε την έννοια του ανατοκισμού ή σύνθετου τόκου για τον υπολογισμό της τελικής αξίας σε διάφορες χρονικές περιόδους μέσω παραδειγμάτων.

Εν συνεχεία, στο *Έκτο Κεφάλαιο (6^o)* πραγματοποιείται εκτενής αναφορά τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο μέσω παραδειγμάτων στις ράντες, και τέλος, στο *Έβδομο Κεφάλαιο (7^o)* παραθέτουμε τα δάνεια μέσω ορισμών και παραδειγμάτων.

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΡΑΝΤΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΑΝΕΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1.Γενικά

Παγκόσμιες μελέτες στο πεδίο των Εφαρμοσμένων Οικονομικών αναφέρουν ότι ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά της σύγχρονης οικονομικής θεωρίας είναι η εκτεταμένη χρήση μεθόδων στην ανάλυση οικονομικών φαινομένων. Τα Μαθηματικά είναι μία γλώσσα που βοηθά στην ανάλυση διαφορετικών κλάδων της οικονομικής επιστήμης, όπως η δημόσια οικονομική, η θεωρία του διεθνούς εμπορίου, η μικροοικονομική και η μακροοικονομική θεωρία. Η εφαρμογή των Μαθηματικών στην Οικονομική Επιστήμη απαιτεί λεπτομερείς παράθεση των υποθέσεων και συνεπάγεται μία αλληλουχία βημάτων για το τελικό συμπέρασμα.

Οι μαθηματικές μέθοδοι που εφαρμόστηκαν στα οικονομικά διαιρούνται σε τρεις περιόδους, την περίοδο της βασισμένης στο λογισμό οριακής ανάλυσης (1838-1947), την περίοδο της εφαρμογής θεωρίας συνόλων και γραμμικών υποδειγμάτων (1948-1960) και την τρέχουσα περίοδο (1961-), η οποία χαρακτηρίζεται από την ενοποίηση των παραπάνω μεθόδων και την εισαγωγή μη γραμμικών υποδειγμάτων.

1.2. Διάκριση των Μαθηματικών

Τα Μαθηματικά διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες, στα *"Θεωρητικά"* και στα *"Εφαρμοσμένα"*. Τα ***Θεωρητικά Μαθηματικά*** αποτελούν το σύνολο των κλάδων της Μαθηματικής Επιστήμης, καθώς ασχολούνται με τη θεωρητική θεμελίωση, την διερεύνηση και την απόδειξη των νόμων ή αξιωμάτων, στους οποίους στηρίζεται η Μαθηματική Επιστήμη. Τα ***Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*** αποτελούν το σύνολο των κλάδων των διάφορων επιστημών, όπως η Οικονομική, η Οικονομετρία, η Στατιστική, η Φυσική, η Αστρονομία και άλλες, οι οποίες θεμελιώνονται τόσο με στους δικούς τους νόμους όσο και με τους νόμους της Μαθηματικής Επιστήμης. Ένας από τους κλάδους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών είναι τα ***Οικονομικά Μαθηματικά.***

1.3. Οικονομικά Μαθηματικά

Η ευρύτατη χρήση των Μαθηματικών στην Οικονομική Επιστήμη παρουσίασε διάσταση απόψεων αναφορικά με τα όρια των *Οικονομικών Μαθηματικών*, της *Μαθηματικής Οικονομικής*, των *Γενικών Οικονομικών Μαθηματικών για Οικονομολόγους* και της *Οικονομετρίας*. Παρόλα αυτά, τα τελευταία χρόνια τέθηκαν κάποια σύνορα μέσω της ταξινόμησης των Μαθηματικών στις Οικονομικές Σχολές, με αποτέλεσμα να τα διακρίνουμε σε *Μαθηματικά για Οικονομολόγους (Mathematics for Economists)* και σε *Οικονομικά Μαθηματικά (Mathematics of Finance).*

Τα *Μαθηματικά για Οικονομολόγους* είναι αυτά που χρησιμοποιούνται στις Οικονομικές Επιστήμες με αντικειμενικό σκοπό τόσο την εκμάθηση της ποσοτικής μεταβολής των οικονομικών μεγεθών όσο και την εξεύρεση παραδεκτών λύσεων διάφορων προβλημάτων της Οικονομικής Επιστήμης.

Τα *Οικονομικά Μαθηματικά* είναι κλάδος των Εφαρμοσμένων Οικονομικών με σκοπό την μαθηματική ανάλυση ζητημάτων με βασικό παράγοντα το χρήμα και διαχωρίζονται σε δύο βασικούς κλάδους, τα *Τραπεζικά ή Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά (Mathematics of Finance)* και τα *Αναλογιστικά Μαθηματικά (Actuarial Mathematics)*.

Τα *Τραπεζικά ή Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά* ασχολούνται με προβλήματα που παρουσιάζονται στις τραπεζικές και στις χρηματοοικονομικές συναλλαγές με βασικούς παράγοντες το χρήμα και τον τόκο.

Τα *Αναλογιστικά Μαθηματικά* ασχολούνται με προβλήματα που παρουσιάζονται στους ασφαλιστικούς οργανισμούς με βασικό παράγοντα τον τόκο.

1.4. Βασικοί Ορισμοί

Βραχυπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις καλούνται οι οικονομικές πράξεις οι οποίες έχουν χρονική διάρκεια από τρεις μήνες έως ένα έτος. Στις συγκεκριμένες οικονομικές πράξεις κατατάσσονται ο Απλός Τόκος, η Προεξόφληση Συναλλαγματικών και Γραμματίων και η Αντικατάσταση Γραμματίων.

Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις καλούνται οι οικονομικές πράξεις οι οποίες έχουν χρονική διάρκεια μεγαλύτερη του ενός έτους. Στις συγκεκριμένες οικονομικές πράξεις κατατάσσονται ο Ανατοκισμός ή Σύνθετος Τόκος, οι Ράντες και τα Δάνεια.

Κεφάλαιο (Capital) καλείται οποιοδήποτε χρηματικό ποσό, το οποίο είτε με την αποταμίευσή του είτε με τον δανεισμό τους αποκτά παραγωγική ικανότητα.

Χρόνος (Time) καλείται το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ένα χρηματικό ποσό έχει παραγωγική ικανότητα.

Τόκος (Interest) καλείται η πρόσθετη αμοιβή, την οποία λαμβάνει ο δανειστής από τον οφειλέτη για το δικαίωμα της εκμετάλλευσης ή της χρησιμοποίησης του κεφαλαίου του.

Επιτόκιο (Interest Rate) καλείται ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ
ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Απλός Τόκος

Ο απλός τόκος είναι ανάλογος του κεφαλαίου, του επιτοκίου και του χρόνου. Επομένως ο τύπος υπολογισμού του δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{I = K_0 \cdot i \cdot \eta}$$

όπου:

* I = ο απλός τόκος
* K_0 = το αρχικό κεφάλαιο
* i = το επιτόκιο
* η = ο χρόνος

Το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και του τόκου ονομάζεται *Τελική Αξία*, συμβολίζεται με K_n και δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 + I => K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \eta => K_n = K_0 \cdot [1 + (i \cdot \eta)]}$$

Οι παραπάνω τύποι υπολογισμού του τόκου ή της τελικής αξίας αποτελούν τη βάση για την επίλυση όλων των προβλημάτων σχετικών με βραχυχρόνιες οικονομικές πράξεις, αρκεί το επιτόκιο και η χρονικά διάρκεια της οικονομικής πράξης (δανεισμός ή κατάθεση) να εκφράζονται σε ετήσια βάση.

Στην περίπτωση που τα δύο αυτά μεγέθη (επιτόκιο και χρόνος) δίδονται σε διαφορετική χρονική βάση, τότε θα πρέπει πάντα να προσαρμόζεται το μέγεθος που δίδεται σε χρονική βάση μικρότερου του έτους, σε ετήσια βάση.

Το έτος διακρίνεται σε μικτό, εμπορικό και πολιτικό. Οπότε, προκύπτουν οι αντίστοιχοι τύποι:

- Όταν το επιτόκιο εκφράζεται σε ετήσια βάση και ο χρόνος του δανείου σε μήνες, τότε είναι απαραίτητη η μετατροπή των μηνών σε κλάσμα του έτους θέτοντας στη θέση του $\eta = \frac{\mu}{12}$, όπου μ ο αριθμός των μηνών διάρκειας της οικονομικής πράξης.

- Όταν το επιτόκιο εκφράζεται σε ετήσια βάση και ο χρόνος του δανείου σε αριθμό ημερών, τότε είναι απαραίτητη η μετατροπή των ημερών σε κλάσμα του έτους θέτοντας στη θέση του $\eta = \frac{\nu}{360}$, όπου ν ο αριθμός των ημερών διάρκειας της οικονομικής πράξης.

- Όταν το επιτόκιο εκφράζεται σε μηνιαία βάση και ο χρόνος του δανείου σε έτη, τότε είναι απαραίτητη η μετατροπή του επιτοκίου σε ετήσια βάση, πολλαπλασιάζοντας το i με $\frac{12}{m}$, όπου m ο αριθμός των μηνών του επιτοκίου.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου € 100.000, το οποίο τοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 12% για 8 μήνες.

<u>Λύση</u>

Ξεκινάμε με τον τύπου ορισμού του απλού τόκου:

$$\boldsymbol{I = K_0 \cdot i \cdot \eta}$$

Εφόσον η χρονική διάρκεια δίνεται σε μήνες θα τη μετατρέψουμε σε κλάσμα του έτους θέτοντας στον παραπάνω τύπο στη θέση του χρόνου το $\frac{\mu}{12}$.

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{I = K_0 \cdot i \cdot \eta}$$

$$\boldsymbol{I = K_0 \cdot i \cdot \frac{\mu}{12}}$$

Επομένως ο τόκος θα ανέρχεται σε:

$$\boldsymbol{I = 100.000 \cdot 0,12 \cdot \frac{8}{12} = € \, 8.000}$$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου € 100.000, το οποίο τοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 10% για 1 χρόνο και 4 μήνες.

<u>Λύση</u>

Ξεκινάμε με τον τύπο ορισμού του απλού τόκου:

$$\boldsymbol{I = K_0 \cdot i \cdot \eta}$$

Εφόσον η χρονική διάρκεια δίνεται σε έτη και μήνες θα εκφράσουμε ολόκληρη την χρονική διάρκεια σε μήνες και θα τη μετατρέψουμε σε κλάσμα του έτους θέτοντας στον παραπάνω τύπο στη θέση του χρόνου το $\boldsymbol{\frac{\mu}{12}}$

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{I = K_0 \cdot i \cdot \eta}$$

$$\boldsymbol{I = K_0 \cdot i \cdot \frac{\mu}{12}}$$

Επομένως ο τόκος θα ανέρχεται σε:

$$\boldsymbol{I = 100.000 \cdot 0,10 \cdot \frac{16}{12} = € \, 13.334}$$

Παράδειγμα 3ο

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου € 100.000, το οποίο τοκίστηκε με απλό τόκο και με εξαμηνιαίο 12% για 1 χρόνο.

Λύση

Ξεκινάμε με τον τύπο ορισμού του απλού τόκου:

$$\boldsymbol{I = K_0 \cdot i \cdot \eta}$$

Εφόσον η χρονική διάρκεια δίνεται σε έτη και το επιτόκιο σε μηνιαία βάση θα μετατρέψουμε το επιτόκιο σε ετήσια βάση, πολλαπλασιάζοντάς το με το *λ,* όπου *λ*.
Δηλαδή:

$$\boldsymbol{I = K_0 \cdot i \cdot \lambda \cdot \eta}$$

Επομένως ο τόκος θα ανέρχεται σε :

$$\boldsymbol{I = 100.000 \cdot 0,12 \frac{12}{6} \cdot 1 = € \, 24.000}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συναλλαγματικές σε διαταγή

3.1. Προεξόφληση Συναλλαγματικών σε Διαταγή (Γραμματίων)

Οι σύγχρονες συναλλαγές έχουν ως βασικό χαρακτηριστικό τους τη μερική ή ολική αντικατάσταση του χρήματος με την πίστη. Δηλαδή, στο σύνολο σχεδόν των συναλλαγών, οι συναλλασσόμενοι δεν συναλλάσσονται αποκλειστικά με μετρητά, αλλά και επί πιστώσει χωρίς τη μεσολάβηση του χρήματος.

Με τις επί πιστώσει συναλλαγές δημιουργείται η έννοια της απαίτησης. Αυτή συνήθως παίρνει την μορφή της συναλλαγματικής εις διαταγή (γραμματίου), η οποία εκδίδεται από τον εκδότη (πωλητή) και αποτελεί εντολή προς τον οφειλέτη (πελάτη) να πληρώσει το αναγραφόμενο ποσό σε ορισμένο τόπο και χρόνο.

Οι εκδότες-κάτοχοι γραμματίων με οφειλέτες τους πελάτες τους ενεργούν με διάφορους τρόπους, όπως, τοποθετούν τα γραμμάτια σε ασφαλές μέρος και περιμένουν να λήξουν για να εισπράξουν το αναγραφόμενο ποσό από τους οφειλέτες τους, μεταβιβάζουν με οπισθογράφηση τα γραμμάτια που κατέχουν σε τρίτους, οπότε μεταβιβάζουν και την απαίτηση τους, αναθέτουν σε τράπεζα να εισπράξει τα αναγραφόμενα ποσά των γραμματίων που κατέχουν έναντι προμήθειας.

Στην περίπτωση που έχουν ανάγκη χρημάτων, ρευστοποιούν τα γραμμάτια που κατέχουν σε τράπεζα, οπότε τους παρακρατούνται οι τόκοι που αντιστοιχούν στο χρονικό διάστημα από την ημέρα της ρευστοποίησης του γραμματίου μέχρι τη λήξη του. Η ρευστοποίηση αυτή λέγεται *προεξόφληση*. Οι τόκοι δε που παρακρατούνται από την τράπεζα κατά την ρευστοποίηση των γραμματίων ονομάζονται *προεξόφλημα.* Το προεξόφλημα υπολογίζεται με δυο μεθόδους.

Πρώτον, βάση της Ονομαστικής Αξίας (Ο.Α.), δηλαδή του ποσού που αναγράφεται στο γραμμάτιο και εισπράττεται κατά τη λήξη του. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Εξωτερική Προεξόφληση και το προεξόφλημα που παρακρατείται από την τράπεζα Εξωτερικό Προεξόφλημα (Ε.Π.). Δεύτερον, βάση της Παρούσας Αξίας (Π.Α.), δηλαδή του ποσού που εισπράττεται κατά την προεξόφληση του γραμμάτιου. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται Εσωτερική Προεξόφληση (Ε.Π.) και το προεξόφλημα που παρακρατείται από την τράπεζα Εσωτερικό Προεξόφλημα (Ε').

3.2. Αντικατάσταση Συναλλαγματικών εις Διαταγή (Γραμματίων)

Όπως έχουμε προαναφέρει στις προεξοφλήσεις γραμματίων, υπάρχουν περιπτώσεις που ο εκδότης γραμματίων (πωλητής) δεν προεξοφλεί τα γραμμάτια που του οφείλουν οι πελάτες του, αλλά τα κρατά και περιμένει να εξοφληθούν από τους οφειλέτες τους όταν λήγουν. Σε τέτοιες περιπτώσεις συμβαίνει πολλές φορές οι οφειλέτες γραμματίων να ζητήσουν, προκειμένου να διευκολυνθούν, την αντικατάσταση των γραμματίων που ήδη οφείλουν με νέα γραμμάτια.

Η αντικατάσταση των γραμματίων στηρίζεται στην αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας. Δηλαδή, τα αντικαθιστάμενα γραμμάτια πρέπει να είναι οικονομικώς ισοδύναμα με αυτά που τα αντικαθιστούν. Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει, το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων να ισούται με το άθροισμα των παρουσών αξιών των νέων γραμματίων, σε ορισμένη χρονική στιγμή και με το ίδιο επιτόκιο.

Η χρονική στιγμή κατά την οποία το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων είναι ίσο με το άθροισμα των παρουσών αξιών των νέων γραμματίων, ονομάζεται εποχή ισοδυναμίας.

Συνήθως ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η ημέρα υπολογισμού, δηλαδή η ημέρα κατά την οποία γίνεται η αντικατάσταση των γραμματίων. Στις περιπτώσεις όμως που αντικαθίστανται πολλά γραμμάτια με ένα νέο μόνο, ή που αντικαθίσταται ένα γραμμάτιο με πολλά νέα, τότε είναι πιθανόν ως εποχή ισοδυναμίας να ληφθεί η ημέρα λήξης του ενός γραμματίου είτε του νέου που αντικαθιστά τα πολλά γραμμάτια, είτε αυτού που έχει ήδη εκδοθεί και αντικαθίσταται με πολλά νέα γραμμάτια. Σε αυτές τις περιπτώσεις ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η κοινή λήξη, δηλαδή, η ημέρα λήξης του ενός γραμματίου.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανατοκισμός ή Σύνθετος Τόκος

Σύνθετη κεφαλαιοποίηση ή ανατοκισμός (compound interest) ονομάζεται το σύστημα στο οποίο ο τόκος κεφαλαιοποιείται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, στην οποία υποδιαιρείται το χρονικό διάστημα επένδυσης ενός χρηματικού κεφαλαίου που επενδύεται σήμερα. Η μελλοντική αξία (terminal value or future value) του αρχικού χρηματικού κεφαλαίου είναι, δηλαδή, η αξία που θα έχει στο μέλλον το ποσό αυτό που επενδύεται σήμερα.

4.1. Υπολογισμός της τελικής αξίας, όταν η χρονική δίνεται σε ακέραιο αριθμό περιόδων

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας δίνεται από την σχέση:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n}$$

όπου:

* K_n = η τελική αξία
* K_0 = το αρχικό κεφάλαιο
* i = το επιτόκιο
* n = η χρονική διάρκεια σε αριθμό ετών

Ο συντελεστής $(1 + i)^n$ ονομάζεται συντελεστής ανατοκισμού.

Η παραπάνω σχέση της τελικής αξίας ισχύει όταν το επιτόκιο είναι ετήσιο και η χρονική διάρκεια τοκισμού υποδιαιρείται σε ετήσιες περιόδους. Όταν η χρονική διάρκεια τοκισμού υποδιαιρείται σε περιόδους μικρότερες του έτους (εξάμηνα, τετράμηνα, τρίμηνα, μήνες), τότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1 + i)^{\lambda n}}$$

όπου:

* i' = το προσαρμοσμένο στη μικρότερη του έτους περίοδο ανατοκισμού ετήσιο επιτόκιο
* λ = οι φορές των μηνών της περιόδου ανατοκισμού που αντιστοιχούν σε ένα έτος

Για να εφαρμοσθεί επομένως η παραπάνω σχέση της μελλοντικής αξίας, απαιτείται πριν, να υπολογισθεί το προσαρμοσμένο επιτόκιο i'. Αυτό γίνεται με τη χρήση της σχέσης:

$$\boldsymbol{i' = (1 + i)\frac{\mu}{12} - 1}$$

όπου:

* i = το επιτόκιο
* μ = οι μήνες της περιόδου ανατοκισμού

4.2. Υπολογισμός της τελικής αξίας, όταν η χρονική δίνεται σε κλασματικό αριθμό περιόδων

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας δίνεται από την σχέση:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1+i)^{n+\frac{\mu}{12}} => K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{12}}}$$

όπου:

* μ = ο αριθμός των μηνών που είναι επιπλέον του ακέραιου αριθμού των ετήσιων περιόδων της χρονικής διάρκειας.

Η παραπάνω σχέση της τελικής αξίας ισχύει όταν το επιτόκιο είναι ετήσιο και η χρονική διάρκεια τοκισμού υποδιαιρείται σε ετήσιες περιόδους. Όταν το επιτόκιο δίνεται σε μηνιαία βάση (εξάμηνο, τετράμηνο, τρίμηνο) και η χρονική διάρκεια τοκισμού υποδιαιρείται σε ετήσιες περιόδους, τότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1+i')^{\lambda \cdot (n+\frac{\mu}{12})} => K_n = K_0 \cdot (1+i')^{\lambda n} \cdot (1+i')^{\frac{\lambda\mu}{12}}}$$

Για να εφαρμοσθεί η παραπάνω σχέση, απαιτείται πριν να υπολογισθεί το προσαρμοσμένο επιτόκιο. Αυτό γίνεται με τη χρήση της σχέσης:

$$\boldsymbol{i' = (1+i)^{\frac{\mu}{12}} - 1}$$

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Να βρεθεί η τελική αξία ενός χρηματικού κεφαλαίου € 10.000 που τοκίζεται με ανατοκισμό με ετήσιο επιτόκιο 5% για 3 χρόνια.

<u>Λύση</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τύπο:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1+i)^n}$$

Η τελική αξίας θα είναι:

$$\boldsymbol{K_n = 10.000 \cdot (1+0,05)^3 = € \, 11.576.25}$$

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Να βρεθεί η σημερινή αξία ενός χρηματικού κεφαλαίου που αν τοκισθεί για 3 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο 5% θα έχει τελική αξία € 11.500.

<u>Λύση</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τύπο, λύνοντας ως προς K_0:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1+i)^n => K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}}$$

Η σημερινή αξίας θα είναι:

$$\boldsymbol{K_0 K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{11.500}{(1+0,05)^3} = € \, 9.934}$$

<u>Παράδειγμα 3ο</u>

Να βρεθεί η τελική αξία ενός χρηματικού κεφαλαίου € 15.000 που τοκίζεται με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και με ετήσιο επιτόκιο 5% για 3 χρόνια.

<u>Λύση</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τύπο:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1+i')^{\lambda n}}$$

Αφού πριν προσαρμόσουμε το ετήσιο επιτόκιο σε εξαμηνιαίο με τη χρήση του τύπου:

$i' = (1+i)^{\frac{\mu}{12}} - 1$

Θα έχουμε επομένως:

$$i' = (1+i)^{\frac{\mu}{12}} - 1 = (1+0{,}05)^{\frac{6}{12}} - 1 = 0{,}0247$$

Άρα η τελική αξία θα είναι:

$$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1+i')^{\lambda n} = 15.000 \cdot (1+0,0247)^{2\cdot 3} = € \, 17.364,38}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ράντες

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματευόμαστε την επίλυση μιας ιδιαίτερης κατηγορίας προβλημάτων ανατοκισμού. Το κυριότερο πρόβλημα του ανατοκισμού ήταν ο υπολογισμός της τελικής αξίας ενός αρχικού κεφαλαίου, που τοποθετείται με το σύστημα του ανατοκισμού για ένα αριθμό χρονικών περιόδων.

Υπάρχουν όμως και οι περιπτώσεις των μακροπρόθεσμων οικονομικών πράξεων, όπου με το σύστημα του ανατοκισμού επιδιώκεται με περιοδικές χρονικά καταβολές η δημιουργία ενός μεγάλου κεφαλαίου ή η αποπληρωμή ενός δανείου. Αν δηλαδή για τη δημιουργία ενός μεγάλου κεφαλαίου ή για την αποπληρωμή ενός δανείου καταβάλλονται ανά ίσα χρονικά διαστήματα διάφορα ποσά (καταθέσεις ή δόσεις) ίσα ή άνισα μεταξύ τους, τότε τα ποσά αυτά αποτελούν μια **ράντα.**

Τα χαρακτηριστικά της ράντας είναι τα ακόλουθα:

Όρος ή δόση	Το ποσό χρηματικού κεφαλαίου που καταβάλλεται κάθε φορά
Περίοδος ράντας	Ο χρόνος μεταξύ δύο καταβολών
Ληξιπρόθεσμη ράντα	Η ράντα της οποίας το ποσό καταβάλλεται στο τέλος της περιόδου
Προκαταβλητέα ράντα	Η ράντα της οποίας το ποσό καταβάλλεται στην αρχή της περιόδου
Ακέραια ράντα	Η ράντα της οποίας ο αριθμός των όρων είναι ίσος με τον αριθμό των περιόδων της
Κλασματική ράντα	Η ράντα της οποίας ο όρος διαιρείται σε ρ ίσα τμήματα και κάθε ένα από αυτά καταβάλλεται ρ φορές εντός της ακέραιης περιόδου
Σταθερή ράντα	Η ράντα της οποίας οι όροι είναι ίσοι
Μεταβλητή ράντα	Η ράντα της οποίας οι όροι (δόσεις) είναι άνισοι
Αρχή της ράντας	Η ημερομηνία που αρχίζει η πρώτη περίοδος. Επομένως αρχή της ληξιπρόθεσμης ράντας είναι η χρονική στιγμή που βρίσκεται μια ολόκληρη περίοδο μπροστά από το χρονικό σημείο που καταβάλλεται ο πρώτος όρος της. Επίσης αρχή της προκαταβλητέας ράντας είναι η χρονική στιγμή που συμπίπτει με την καταβολή του πρώτου όρου της
Τέλος ή λήξη της ράντας	Η ημερομηνία που τελειώνει η τελευταία περίοδος. Επομένως τέλος της ληξιπρόθεσμης ράντας είναι η χρονική στιγμή που συμπίπτει με την καταβολή του τελευταίου όρου της. Επίσης

	τέλος της προκαταβλητέας ράντας είναι η χρονική στιγμή που βρίσκεται μια ολόκληρη περίοδο μετά από το χρονικό σημείο που καταβάλλεται ο τελευταίος όρος της
Διάρκεια της ράντας	Το χρονικό διάστημα από την αρχή μέχρι τη λήξη της

Τα βασικά προβλήματα των ραντών είναι ο υπολογισμός της αξίας όλων των όρων της ράντας σε μια δεδομένη χρονική στιγμή ή ο υπολογισμός του όρου μιας ράντας που γνωρίζουμε την αξία της στο στην αρχή ή στη λήξη της.

Στην επίλυση αυτών των προβλημάτων οι όροι που χρησιμοποιούνται είναι οι ακόλουθοι:

Παρούσα αξία της ράντας	Το ποσό που είναι ίσο με την αξία όλων των όρων της σε μια ορισμένη χρονική στιγμή, με βάση την αρχή της ισοδυναμίας
Αρχική αξία της ράντας	Το ποσό που είναι ίσο με την αξία όλων των όρων της στην αρχή της, με βάση την αρχή της ισοδυναμίας
Μέλλουσα ή Τελική αξία της ράντας	Το ποσό που είναι ίσο με την αξία όλων των όρων της στην λήξη της, με βάση την αρχή της ισοδυναμίας

5.1. Μέλλουσα ή τελική αξία ληξιπρόθεσμης σταθερής ράντας

Η μέλλουσα αξία ληξιπρόθεσμης σταθερής ράντας είναι το άθροισμα των μελλουσών αξιών των όρων της. Επομένως η σχέση υπολογισμού της θα είναι η ακόλουθη:

$$\boldsymbol{FV = A_1 \cdot (1+i)^n + A_2 \cdot (1+i)^{n-1} + \cdots + A_n}$$

όπου:

* FV = μέλλουσα αξία.
* Α = όρος ή περιοδική καταβολή.
* η = ο αριθμός των ίσων χρονικών διαστημάτων καταβολής των όρων.

Επειδή όμως $A_1 = A_2 = \ldots A_n = A$ (σταθερή ράντα), η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\boldsymbol{FV = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Αν μια επιχείρηση καταθέσει σε Τράπεζα 2.000 ευρώ στο τέλος του χρόνου για 5 χρόνια με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%, τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στο τέλος του 5ου έτους;

<u>Λύση</u>

Επειδή ζητείται να υπολογισθεί το συνολικό ποσό μετά από 5 χρόνια από μια σειρά ετήσιων ισόποσων καταθέσεων στο τέλος του κάθε έτους, θα εφαρμοσθεί η προαναφερόμενη σχέση ως εξής:

$$\boldsymbol{FV = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 2.000 \cdot \frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05} = 2.000 \cdot \frac{1,2763 - 1}{0,05} = € \; 11.051}$$

5.2. Υπολογισμός όρου με βάση την μελλοντική αξία ετήσιας ληξιπρόθεσμης σταθερής ράντας

Λύνουμε την αρχική μας σχέση ως προς Α και έχουμε:

$$\boldsymbol{FV = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} => A = \frac{FV}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Για να εισπράξει μια επιχείρηση 10.000 ευρώ μετά από 5 χρόνια από μια Τράπεζα, τι σταθερό ποσό πρέπει να καταθέτει στο τέλος του κάθε χρόνου για τα επόμενα 5 χρόνια, με δεδομένο ότι ισχύουν ανατοκισμός και ετήσιο επιτόκιο 5%.

<u>Λύση:</u>

Επειδή ζητείται να υπολογισθεί το ετήσιο σταθερό ποσό για μια σειρά ετήσιων ισόποσων καταθέσεων στο τέλος του κάθε έτους, γνωρίζοντας το συνολικό ποσό που θα εισπραχθεί μετά από 5 χρόνια, θα εφαρμοσθεί η προαναφερόμενη σχέση ως εξής:

$$\boldsymbol{A = \frac{FV}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{10.000}{\frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05}} = € \; 1.810}$$

5.3. Μέλλουσα ή τελική αξία ετήσιας προκαταβλητέας σταθερής ράντας

Η μέλλουσα αξία ετήσιας προκαταβλητέας σταθερής ράντας είναι το άθροισμα των μελλουσών αξιών των όρων της. Επομένως η σχέση υπολογισμού της θα είναι η ακόλουθη:

$$\boldsymbol{FV = A_1 + A_2 \cdot (1+i)^{n-1} + \cdots + A_n}$$

όπου:

* FV = μέλλουσα αξία.
* A = όρος ή περιοδική καταβολή.
* η = ο αριθμός των ίσων χρονικών διαστημάτων καταβολής των όρων.

Επειδή όμως $A_1 = A_2 = ... A_n = A$ (σταθερή ράντα), η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\boldsymbol{FV = A \cdot (1+i)^n \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Αν μια επιχείρηση καταθέσει σε Τράπεζα 2.000 ευρώ στην αρχή του κάθε χρόνου για 5 χρόνια με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%, τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στο τέλος του 5ου έτους;

<u>Λύση:</u>

Επειδή ζητείται να υπολογισθεί το συνολικό ποσό μετά από 5 χρόνια από μια σειρά ετήσιων ισόποσων καταθέσεων στην αρχή του κάθε έτους, θα εφαρμοσθεί η προαναφερόμενη σχέση ως εξής:

$$\boldsymbol{FV = A \cdot (1+i)^n \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 2.000 \cdot (1+0,05)^5 \cdot \frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05} = € \; 14.104}$$

5.4. Υπολογισμός Όρου με βάση την μελλοντική αξία ετήσιας προκαταβλητέας σταθερής ράντας

Λύνουμε την παρακάτω σχέση ως προς A και έχουμε:

$$\boldsymbol{FV = A \cdot (1+i)^n \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} => A = \frac{FV}{(1+i)^n \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Για να εισπράξει μια επιχείρηση 10.000 ευρώ μετά από 5 χρόνια από μια Τράπεζα, τι σταθερό ποσό πρέπει να καταθέτει στην αρχή του κάθε χρόνου για τα επόμενα 5 χρόνια, με δεδομένο ότι ισχύουν ετήσιος ανατοκισμός και ετήσιο επιτόκιο 5%.

<u>Λύση:</u>

Επειδή ζητείται να υπολογισθεί το ετήσιο σταθερό ποσό για μια σειρά ετήσιων ισόποσων καταθέσεων στην αρχή του κάθε έτους, γνωρίζοντας το συνολικό ποσό που θα εισπραχθεί μετά από 5 χρόνια, θα εφαρμοσθεί η προαναφερόμενη σχέση ως εξής:

$$\boldsymbol{A = \frac{FV}{(1+i)^n \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{10.000}{(1+0,05)^5 \cdot \frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05}} = € \; 1.724}$$

5.5. Μέλλουσα αξία ετήσιας ληξιπρόθεσμης κυμαινόμενης ράντας

Η μέλλουσα αξία ετήσιας ληξιπρόθεσμης κυμαινόμενης ράντας είναι το άθροισμα των μελλουσών αξιών των όρων της. Επομένως η σχέση υπολογισμού της θα είναι η ακόλουθη:

$$\boldsymbol{FV = A_1 \cdot (1+i)^1 + A_2 \cdot (1+i)^2 + \cdots + A_n \cdot (1+i)^n}$$

όπου:

* FV = μέλλουσα αξία.
* A = όρος ή ετήσια καταβολή.

<u>Παράδειγμα</u>

Αν μια επιχείρηση καταθέσει σε Τράπεζα 2.000, 2.200 και 1.900 ευρώ αντίστοιχα στο τέλος του κάθε χρόνου για τα επόμενα 3 χρόνια με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%, τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στο τέλος του 3ου έτους;

<u>Λύση:</u>

Θα εφαρμοσθεί η προαναφερόμενη σχέση ως εξής:

$$\boldsymbol{FV = 2.000 \cdot (1+0,05)^1 + 2.200 \cdot (1+0,05)^2 + 1.900 \cdot (1+0,05)^3 = € \, 6.725}$$

5.6. Παρούσα αξία ετήσιας ληξιπρόθεσμης σταθερής ράντας

Η παρούσα αξία ετήσιας ληξιπρόθεσμης σταθερής ράντας είναι το άθροισμα των παρουσών αξιών των όρων της. Επομένως η σχέση υπολογισμού της θα είναι η ακόλουθη:

$$\boldsymbol{PV = A_1 \cdot \frac{i}{(1+i)^1} + A_2 \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + A_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n}}$$

όπου:

* PV = παρούσα αξία.
* A = όρος ή ετήσια καταβολή.
* η = ο αριθμός των ίσων χρονικών διαστημάτων καταβολής των όρων.

Επειδή όμως $A_1 = A_2 = \ldots A_n = A$ (σταθερή ράντα), η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\boldsymbol{PV = A \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Τι ποσό θα πρέπει να καταθέσει μια επιχείρηση σήμερα στην Τράπεζα ώστε να μπορεί να εισπράττει 2.000 ευρώ στο τέλος κάθε έτους για τα επόμενα 5 έτη και να έχει υπόλοιπο 0 στο τέλος του 5ου έτους. Ο ανατοκισμός θα είναι ετήσιος και το επιτόκιο 5%.

Λύση:

Επειδή ζητείται να υπολογισθεί το συνολικό σημερινό ποσό (παρούσα αξία) για μια σειρά ετήσιων ισόποσων εισπράξεων στο τέλος του κάθε έτους επί 5 έτη, θα εφαρμοσθεί η προαναφερόμενη σχέση ως εξής:

$$\boldsymbol{PV = A \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 2.000 \cdot \frac{1-(1+0,05)^{-5}}{0,05} = 2.000 \cdot \frac{1-0,7835}{0,05} = € \, 8.659}$$

5.7. Υπολογισμός όρου με βάση την παρούσα αξία ετήσιας ληξιπρόθεσμης σταθερής ράντας

Λύνουμε την προαναφερόμενη σχέση ως προς Α και έχουμε:

$$\boldsymbol{PV = A \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} => A = \frac{PV}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}}$$

Παράδειγμα

Μια επιχείρηση αν καταθέσει στο τέλος του έτους 10.000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 5% για 5 έτη, τι ποσό θα εισπράττει στο τέλος του κάθε έτους τα επόμενα έτη μέχρι το τέλος της κατάθεσης;

Λύση:

Με απευθείας εφαρμογή της προαναφερόμενης σχέσης θα έχουμε:

$$\boldsymbol{A = \frac{PV}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{10.000}{\frac{1-(1+0,05)^{-5}}{0,05}} = € \, 2.310}$$

5.8. Παρούσα αξία ετήσιας προκαταβλητέας σταθερής ράντας

Η παρούσα αξία ετήσιας προκαταβλητέας σταθερής ράντας είναι το άθροισμα των παρουσών αξιών των όρων της, λαμβάνοντας υπόψη ότι η παρούσα αξία του πρώτου όρου της ταυτίζεται με την ονομαστική αξία του, επειδή ο όρος καταβάλλεται στην αρχή της περιόδου. Επομένως η σχέση υπολογισμού της θα είναι η ακόλουθη:

$$\boldsymbol{PV = A_1 + A_2 \cdot \frac{i}{(1+i)^1} + A_3 \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + A_n \cdot \frac{1}{(1+i)^{n-1}}}$$

όπου:

* PV = παρούσα αξία.
* A = όρος ή ετήσια καταβολή.
* η = ο αριθμός των ίσων χρονικών διαστημάτων καταβολής των όρων.

Επειδή όμως $A_1 = A_2 = ... A_n = A$ (σταθερή ράντα), η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\boldsymbol{PV = A \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Τι ποσό θα πρέπει να καταθέσει μια επιχείρηση σήμερα στην Τράπεζα ώστε να μπορεί να εισπράττει 2.000 ευρώ στην αρχή του κάθε έτους για τα επόμενα 5 έτη. Ο ανατοκισμός θα είναι ετήσιος και το επιτόκιο 5%.

<u>Λύση:</u>

Επειδή ζητείται να υπολογισθεί το συνολικό σημερινό ποσό (παρούσα αξία) για μια σειρά ετήσιων ισόποσων εισπράξεων στην αρχή του κάθε έτους επί 5 χρόνια, θα εφαρμοσθεί η προαναφερόμενη σχέση ως εξής:

$$\boldsymbol{PV = 2.000 \cdot (1+0,05) \cdot \frac{1-(1+0,05)^{-5}}{0,05} = 2.000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1-0.7835}{0,05} = € \, 9.092}$$

5.9. Υπολογισμός όρου με βάση την παρούσα αξία ετήσιας προκαταβλητέας σταθερής ράντας

Λύνουμε την προαναφερόμενη σχέση ως προς Α και έχουμε:

$$\boldsymbol{PV = A \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow A = \frac{PV}{(1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Μια επιχείρηση αν καταθέσει στην τέλος του έτους 10.000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 5% για 5 έτη, τι ποσό θα εισπράττει στην αρχή του κάθε έτους τα επόμενα έτη μέχρι το τέλος της κατάθεσης;

<u>Λύση:</u>

Με απευθείας εφαρμογή της προαναφερόμενης σχέσης θα έχουμε:

$$\boldsymbol{A = \frac{PV}{(1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{10.000}{(1+0,05) \cdot \frac{1-(1+0,05)^{-5}}{0,05}} = € \, 2.200}$$

5.10. Παρούσα αξία ετήσιας ληξιπρόθεσμης κυμαινόμενης ράντας

Η παρούσα αξία ετήσιας ληξιπρόθεσμης κυμαινόμενης είναι το άθροισμα των παρουσών αξιών των όρων της. Επομένως η σχέση υπολογισμού της θα είναι η ακόλουθη:

$$\boldsymbol{PV = A_1 \cdot \frac{1}{(1+i)^1} + A_2 \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + A_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n}}$$

όπου:

* PV = παρούσα αξία.
* Α = όρος ή ετήσια καταβολή.

<u>Παράδειγμα</u>

Τι ποσό πρέπει να καταθέσει μια επιχείρηση σε Τράπεζα σήμερα, ώστε να μπορεί να εισπράττει 2.000, 2.200 και 1.900 ευρώ αντίστοιχα για τα επόμενα 3 χρόνια, με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 5%;

<u>Λύση:</u>

Θα εφαρμοσθεί ο προαναφερόμενος τύπος ως εξής:

$$\boldsymbol{PV = 2.000 \cdot \frac{1}{(1+0,05)^1} + 2.200 \cdot \frac{1}{(1+0,05)^2} + 1.900 \cdot \frac{1}{(1+0,05)^3} PV = € \, 5.542}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Δάνεια

Οι τραπεζικές χρηματοδοτήσεις για επενδύσεις σε πάγια περιουσιακά στοιχεία τόσο των επιχειρήσεων όσο και των νοικοκυριών έχουν μεσοπρόθεσμο ή μακροπρόθεσμο χαρακτήρα και συνήθως παίρνουν τη μορφή τοκοχρεολυτικών δανείων, ήτοι δανείων που η αποπληρωμή τους γίνεται με τοκοχρεολυτικές δόσεις. Το ποσό της τοκοχρεολυτικής δόσης συντίθεται από τόκο και χρεολύσιο και με την καταβολή της κάθε φορά, αποπληρώνεται με το τόκο που περιλαμβάνει ένα μέρος των συνολικών τόκων του δανείου και με το υπόλοιπο της, που λέγεται χρεολύσιο, εξοφλείται ένα μέρος του κεφαλαίου του δανείου.

Ο υπολογισμός της τοκοχρεολυτικής δόσης ενός μεσομακροχρόνιου τραπεζικού δανείου καθώς και η σύνταξη του πίνακα εξυπηρέτησης του, δηλαδή του πίνακα που αποτυπώνει την ανάλυση της κάθε δόσης σε τόκο και χρεολύσιο, το σωρευμένο εξοφλημένο κεφάλαιο δανείου καθώς και το υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου με την καταβολή της κάθε δόσης, γίνονται με την εφαρμογή διαφόρων συστημάτων απόσβεσης δανείων.

6.1. Μέθοδος προοδευτικού χρεολυσίου ή Γαλλικό σύστημα.

6.1.1. Υπολογισμός της δόσης (τοκοχρεολύσιο)

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, η εξόφληση του δανείου γίνεται με ίσες δόσεις, που καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου. Οι δόσεις αυτές είναι τοκοχρεολυτικές, δηλαδή αποτελούν άθροισμα του χρεολυσίου (μέρους του κεφαλαίου του δανείου) και του τόκου (μέρους των συνολικών τόκων του δανείου), που εξοφλούνται με κάθε καταβολή. Ο τόκος που περιλαμβάνεται στη δόση κάθε περιόδου, υπολογίζεται επί του ανεξόφλητου ποσού του κεφαλαίου δανείου της προηγούμενης περιόδου. Επειδή δε από περίοδο σε περίοδο το ανεξόφλητο κεφάλαιο του δανείου μειώνεται, έτσι και ο τόκος από περίοδο σε περίοδο μειώνεται, ενώ παράλληλα το χρεολύσιο από περίοδο σε περίοδο αυξάνεται.

Όπως προαναφέραμε το δάνειο εξοφλείται με ίσες τοκοχρεολυτικές δόσεις που καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου. Το σύνολο δηλαδή των δόσεων για η περιόδους ισούται με τελική αξία του δανείου (κεφάλαιο + τόκοι). Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο των δόσεων αυτών δίδεται από το τύπο της τελικής αξίας ακέραιης ληξιπρόθεσμης ράντας, η δε τελική αξία του δανείου δίδεται από τον τύπο του ανατοκισμού.

Άρα θα ισχύει η εξίσωση:

$$\boldsymbol{R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = K_0 \cdot (1+i)^n}$$

Οπότε αν λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς R, θα εξάγουμε τη σχέση υπολογισμού της δόσης του δανείου. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\boldsymbol{R}\cdot[(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}]=\ \boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}\cdot(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}} => \boldsymbol{R}=\frac{\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}\cdot(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}$$

Αν στην συνέχεια προσθέσουμε και αφαιρέσουμε ταυτόχρονα στον αριθμητή του κλάσματος το $K_0 \cdot i$, θα έχουμε:

$$\boldsymbol{R}=\frac{\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}\cdot(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}+\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}$$

Στην συνέχεια βάζουμε κοινό παράγοντα το $K_0 \cdot i$ στον αριθμητή του κλάσματος (εκτός του τελευταίου τμήματος του) και θα έχουμε:

$$\boldsymbol{R}=\frac{\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}\cdot[(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}]+\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}$$

Ακολούθως διασπάμε το κλάσμα σε δυο ομώνυμα και θα έχουμε:

$$\boldsymbol{R}=\frac{\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}\cdot[(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}]}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}+\frac{\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{\boldsymbol{K_0}\cdot\boldsymbol{i}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την αναλυτική σχέση υπολογισμού της τοκοχρεολυτικής δόσης του δανείου, αφού όπως παρατηρούμε η δόση αποτελείται από δυο τμήματα, το πρώτο είναι ο τόκος της και το δεύτερο το χρεολύσιο, δηλαδή το μέρος της που εξοφλεί το κεφάλαιο του δανείου. Αν στην αναλυτική σχέση αυτή θέσουμε στο δεύτερο μέρος κοινό παράγοντα το K_0, τότε θα εξάγουμε την τελική σχέση υπολογισμού της τοκοχρεολυτικής δόσης, δηλαδή:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{K_0}\cdot[\boldsymbol{i}+\frac{\boldsymbol{i}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}]$$

όπου:

* K_0 = το αρχικό κεφάλαιο του δανείου.
* i = το επιτόκιο του δανείου.
* n = η χρονική διάρκεια του δανείου σε έτη.

6.1.2. Υπολογισμός του χρεολυσίου στο τέλος της μ περιόδου

Όπως προαναφέραμε η δόση του δανείου είναι σταθερή κάθε περίοδο τοκοχρεολυτική. Ο τόκος που περιλαμβάνεται στη δόση κάθε περιόδου, υπολογίζεται επί του ανεξόφλητου ποσού του κεφαλαίου δανείου της προηγούμενης περιόδου. Επειδή δε από περίοδο σε περίοδο το ανεξόφλητο κεφάλαιο του δανείου μειώνεται, έτσι και ο τόκος από περίοδο σε περίοδο μειώνεται.

Επειδή όμως το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερό κάθε περίοδο, το χρεολύσιο από περίοδο σε περίοδο αυξάνεται. Δηλαδή κάθε περίοδο το χρεολύσιο αυξάνεται με το *ποσό των τόκων του χρεολυσίου της προηγούμενης περιόδου,* ενώ την ίδια περίοδο ο τόκος του δανείου μειώνεται όπως προαναφέραμε. Άρα αν παραστήσουμε με P_1, P_2, P_3, ..., P_μ τα χρεολύσια των αντίστοιχων περιόδων ενός δανείου, τότε με βάση τη προαναφερόμενη διαδικασία υπολογισμού τους θα ισχύει:

Περίοδοι	***Χρεολύσια***
1	P_1
2	$P_2 = P_1 + P_1 \cdot i = P_1 \cdot (1+i)$
3	$P_3 = P_2 + P_2 \cdot i = P_2 \cdot (1+i) = P_1 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = P_1 \cdot (1+i)^2$
…………	………………………………………………………………………..
μ	$\boldsymbol{P_\mu = P_{\mu-1} + P_{\mu-1} \cdot i = P_{\mu-1} \cdot (1 + i = P_1 \cdot (1+i)^{\mu-1}}$

Αν όμως την σχέση $R = K_0 \cdot [i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}]$ υπολογισμού του τοκοχρεολυσίου την αναλύσουμε σε τόκο και χρεολύσιο, θα έχουμε:

$$\boldsymbol{R = K_0 \cdot [i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}] = K_0 \cdot i + K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}}$$

Το πρώτο τμήμα της αποτελεί το τόκο του τοκοχρεολυσίου και το δεύτερο τμήμα της το χρεολύσιο. Δηλαδή το χρεολύσιο της πρώτης περιόδου θα είναι:

$$\boldsymbol{P_1 = K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}}$$

Επομένως το χρεολύσιο της μ περιόδου με αντικατάσταση του P_1 θα είναι:

$$\boldsymbol{P_\mu = K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{\mu-1}}$$

6.1.3. Υπολογισμός του ποσού του κεφαλαίου δανείου που εξοφλήθηκε στο τέλος της περιόδου μ (E_μ)

Το ποσό του κεφαλαίου του δανείου που εξοφλήθηκε στο τέλος της μ περιόδου είναι ίσο με το άθροισμα των χρεολυσίων από την πρώτη μέχρι και την μ περίοδο. Δηλαδή σύμφωνα με τα προαναφερόμενα θα ισχύει:

$$\boldsymbol{E_\mu = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_\mu =>}$$
$$\boldsymbol{E_\mu = K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} + K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i) + \cdots + K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{\mu-1} =>}$$
$$\boldsymbol{E_\mu = K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} + [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{\mu-1} =>}$$

$$E_\mu = K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^\mu - 1}{i}$$

6.1.4. Υπολογισμός του ποσού του ανεξόφλητου κεφαλαίου δανείου στο τέλος της περιόδου μ (K_μ)

Το ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου στο τέλος της περιόδου μ προκύπτει αν από το αρχικό κεφάλαιο δανείου αφαιρέσουμε το ποσό του κεφαλαίου δανείου που εξοφλήθηκε μέχρι το τέλος της περιόδου μ. Δηλαδή θα ισχύει:

$$K_\mu = K_0 - E_\mu \Rightarrow$$

$$K_\mu = K_0 - K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^\mu - 1}{i}$$

6.1.5. Υπολογισμός του μέρους των τόκων στο τέλος της περιόδου μ (I_μ)

Για να υπολογισθεί ο τόκος της περιόδου μ, πρέπει να τοκισθεί το ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου της προηγούμενης περιόδου με το επιτόκιο του δανείου.

Δηλαδή θα ισχύει:

$$I_\mu = K_{\mu-1} \cdot i \Rightarrow$$

$$I_\mu = \left[\, K_0 - K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^\mu - 1}{i} \,\right] \cdot i$$

6.1.6. Πίνακες εξυπηρέτησης δανείου

Για την καλύτερη παρακολούθηση της εξυπηρέτησης ενός δανείου συντάσσεται ειδικός πίνακας, στον οποίο καταχωρούνται οι περιοδικές μεταβολές του, δηλαδή το τοκοχρεολύσιο, ο τόκος, το χρεολύσιο, το ποσό του κεφαλαίου δανείου που εξοφλήθηκε και το υπόλοιπο του κεφαλαίου δανείου που οφείλεται. Ο πίνακας αυτός λέγεται **πίνακας απόσβεσης του δανείου** και η σύνταξη του εκτός των άλλων διευκολύνει τη λογιστική παρακολούθηση του.

Παράδειγμα 1ο

Μια επιχείρηση σκοπεύει να πάρει τραπεζικό δάνειο ύψους 10.000 ευρώ, διάρκειας 5 ετών με ετήσιο επιτόκιο 8%. Να υπολογισθεί η δόση του δανείου και να συνταχθεί ο πίνακας εξυπηρέτησης του, εφαρμόζοντας το σύστημα του προοδευτικού χρεολυσίου.

Λύση:

Υπολογίζεται η δόση του δανείου ως εξής:

$$R = K_0 \cdot [\, i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}\,] =>$$

$$R = 10.000 \cdot [\, 0,08 + \frac{0,08}{(1+0,08)^5 - 1}\,] =>$$

$$R = € \, 2.505$$

Πίνακας εξυπηρέτησης δανείου

Έτη	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου	Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	2.505	800	1.705	1.705	8.295
2	2.505	664	1.841	3.545	6.455
3	2.505	516	1.988	5.534	4.466
4	2.505	357	2.147	7.681	2.319
5	2.505	186	2.319	10.000	0

Υπολογισμοί πίνακα εξυπηρέτησης δανείου

Έτη	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου	Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1		(10.000 · 0,08)	(2.505 - 800)		(10.000 - 1.705)
2		(8.295 · 0,08)	(2.505 - 664)	(1.705 + 1.841)	(10.000 - 3.545)
3		(6.455 · 0,08)	(2.505 - 516)	(3.545 + 1.988)	(10.000 - 5.534)
4		(4.466 · 0,08)	(2.505 - 357)	(5.534 + 2.147)	(10.000 - 7.681)
5		(2.319 · 0,08)	(2.505 - 186)	(7.681 - 2.319)	(10.000 - 10.000)

Στήλη 2: Το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους (έτη) και υπολογίζεται σύμφωνα με την προαναφερομένη σχέση.

Στήλη 3: Ο τόκος βαίνει μειούμενος από δόση σε δόση. Ο τόκος της πρώτης περιόδου υπολογίζεται με επιτόκιο 8% επί του αρχικού κεφαλαίου δανείου (10.000), για τις υπόλοιπες δε περιόδους υπολογίζεται σε κάθε μια με επιτόκιο 8% επί του ανεξόφλητου κεφαλαίου δανείου τη προηγούμενης περιόδου.

Στήλη 4: Το χρεολύσιο αποτελεί σε κάθε περίοδο τη διαφορά δόσης και τόκου, τη διαφορά δηλαδή των στηλών 2 με 3.

Στήλη 5: Το εξοφλημένο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί την αθροιστική σειρά της στήλης 4.

Στήλη 6: Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί κάθε περίοδο τη διαφορά μεταξύ του αρχικού κεφαλαίου δανείου και του αντίστοιχου εξοφλημένου ποσού της στήλης 5. Δηλαδή κάθε περίοδο το άθροισμα των στηλών 5 και 6 αποτελεί το αρχικό κεφάλαιο του δανείου

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Μια επιχείρηση σκοπεύει να πάρει τραπεζικό δάνειο ύψους 10.000 ευρώ, διάρκειας 5 ετών με ετήσιο επιτόκιο 8% και καταβολή δόσης ανά εξάμηνο. Να υπολογισθεί η δόση του δανείου και να συνταχθεί ο πίνακας εξυπηρέτησης του, εφαρμόζοντας το σύστημα του προοδευτικού χρεολυσίου.

<u>Λύση:</u>

Σε τέτοιες περιπτώσεις δανεισμού που η καταβολή της δόσης γίνεται σε χρονικό διάστημα μικρότερο του έτους πρέπει πριν από όλα να υπολογίζεται το ανάλογο επιτόκιο (i') της χρονικής περιόδου της δόσης, που προκύπτει από το ετήσιο επιτόκιο (i) που δίδεται. Δηλαδή στην περίπτωση μας πρέπει να υπολογίσουμε το ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο του ετήσιου επιτοκίου που δίδεται. Ο υπολογισμός γίνεται με τον σχετικό τύπο ως εξής: όπου μ: ο αριθμός των μηνών της δόσης.

Θα έχουμε δηλαδή:

$$\boldsymbol{i' = (1 + i)^{\frac{\mu}{12}} - 1 =>}$$
$$\boldsymbol{i' = (1 + 0,08)^{\frac{6}{12}} - 1 =>}$$
$$\boldsymbol{i' = 3,92\%}$$

Επίσης μετατρέπουμε τα έτη διάρκειας του δανείου σε αντίστοιχο αριθμό εξαμήνων ως εξής:

$$\boldsymbol{\eta' = \eta \cdot \lambda =>}$$
$$\boldsymbol{\eta' = \eta \cdot \frac{12}{\mu} =>}$$
$$\boldsymbol{\eta' = 5 \cdot \frac{12}{6} =>}$$
$$\boldsymbol{\eta' = 10}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η εξαμηνιαία δόση του δανείου θέτοντας στην θέση του επιτοκίου το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο και στη θέση του χρόνου τον αριθμό των εξαμήνων που αντιστοιχούν σε 5 έτη.

Θα έχουμε δηλαδή:

$$\boldsymbol{R = K_0 \cdot [\, i + \frac{i'}{(1 + i')^{n'} - 1}\,] =>}$$
$$\boldsymbol{R = 10.000 \cdot [\, 0,0392 + \frac{0,0392}{(1 + 0.0392)^{10} - 1}\,] =>}$$
$$\boldsymbol{R = € \, 1.228}$$

Πίνακας εξυπηρέτησης δανείου

Έτη	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου	Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
1	1.228	392	836	836	9.164
2	1.228	360	869	1.705	8.295
3	1.228	325	903	2.607	7.393
4	1.228	290	938	3.545	6.455
5	1.228	253	975	4.520	5.480
6	1.228	215	1.013	5.534	4.466
7	1.228	175	1.053	6.587	3.413
8	1.228	134	1.094	7.681	2.319
9	1.228	91	1.137	8.818	1.182
10	1.228	46	1.182	10.000	0

Στήλη 2: Το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους (εξάμηνα) και υπολογίζεται σύμφωνα με την προαναφερομένη σχέση.

Στήλη 3: Ο τόκος βαίνει μειούμενος από δόση σε δόση. Ο τόκος της πρώτης περιόδου υπολογίζεται με το ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο 0,0392 επί του αρχικού κεφαλαίου δανείου (10.000), για τις υπόλοιπες δε περιόδους υπολογίζεται σε κάθε μια με το ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο 0,0392 επί του ανεξόφλητου κεφαλαίου δανείου τη προηγούμενης περιόδου.

Στήλη 4: Το χρεολύσιο αποτελεί σε κάθε περίοδο τη διαφορά δόσης και τόκου, τη διαφορά δηλαδή των στηλών 2 με 3.

Στήλη 5: Το εξοφλημένο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί την αθροιστική σειρά της στήλης 4.

Στήλη 6: Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί κάθε περίοδο τη διαφορά μεταξύ του αρχικού κεφαλαίου δανείου και του αντίστοιχου εξοφλημένου ποσού της στήλης 5. Δηλαδή κάθε περίοδο το άθροισμα των στηλών 5 και 6 αποτελεί το αρχικό κεφάλαιο του δανείου.

Παράδειγμα 3^{ο}

Μια επιχείρηση σκοπεύει να πάρει τραπεζικό δάνειο ύψους 20.000 ευρώ, διάρκειας 3 ετών με ετήσιο επιτόκιο 5% και καταβολή δόσης ανά μήνα. Να υπολογισθεί η δόση του δανείου και να συνταχθεί ο πίνακας εξυπηρέτησης του, εφαρμόζοντας το σύστημα του προοδευτικού χρεολυσίου.

Λύση:

Σε τέτοιες περιπτώσεις δανεισμού που η καταβολή της δόσης γίνεται σε χρονικό διάστημα μικρότερο του έτους πρέπει πριν από όλα να υπολογίζεται το ανάλογο επιτόκιο (i') της χρονικής περιόδου της δόσης, που προκύπτει από το ετήσιο επιτόκιο (i) που δίδεται και επίσης να μετατρέπονται τα έτη διάρκειας του δανείου σε αντίστοιχο αριθμό περιόδων της δόσης του. Δηλαδή στην περίπτωση μας πρέπει να υπολογίσουμε το ισοδύναμο μηνιαίο επιτόκιο του ετήσιου επιτοκίου που δίδεται.

Ο υπολογισμός γίνεται με τον σχετικό τύπο ως εξής:

$$\boldsymbol{i' = (1+i)^{\frac{\mu}{12}} - 1} =>$$
$$\boldsymbol{i' = (1+0,05)^{\frac{1}{12}} - 1} =>$$
$$\boldsymbol{i' = 0,41}\%$$

Επίσης μετατρέπουμε τα έτη διάρκειας του δανείου σε αντίστοιχο αριθμό μηνών ως εξής:

$$\boldsymbol{\eta' = \eta \cdot \lambda} =>$$
$$\boldsymbol{\eta' = \eta \cdot \frac{12}{\mu}} =>$$
$$\boldsymbol{\eta' = 3 \cdot \frac{12}{1}} =>$$
$$\boldsymbol{\eta' = 36}$$

Στην συνέχεια υπολογίζεται η μηνιαία δόση του δανείου θέτοντας στην θέση του επιτοκίου το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο και στη θέση του χρόνου τον αριθμό των εξαμήνων που αντιστοιχούν σε 3 έτη. Θα έχουμε δηλαδή:

$$\boldsymbol{R = K_0 \cdot [\, i + \frac{i'}{(1+i')^{n'} - 1}\,]} =>$$
$$\boldsymbol{R = 20.000 \cdot [\, 0,004074 + \frac{0,004074}{(1+0,004074)^{36} - 1}\,]} =>$$
$$\boldsymbol{R = € \; 598,42}$$

Πίνακας εξυπηρέτησης δανείου

Έτη	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου	Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
1	598,42	81,48	516,94	516,94	19.483,06
2	598,42	79,38	519,04	1.035,98	18.964,02
3	598,42	77,26	521,16	1.557,14	18.442,86
4	598,42	75,14	523,28	2.080,43	17.919,57
5	598,42	73,01	525,41	2.605,84	17.394,16
6	598,42	70,87	527,56	3.133,40	16.866,60
7	598,42	68,72	529,70	3.663,10	16.336,90
8	598,42	66,56	531,86	4.194,96	15.805,04
9	598,42	64,39	534,03	4.728,99	15.271,01
10	598,42	62,22	536,21	5.265,20	14.734,80
11	598,42	60,03	538,39	5.803,59	14.196,41
12	598,42	57,84	540,58	6.344,17	13.655,83
13	598,42	55,64	542,79	6.886,96	13.113,04
14	598,42	53,42	545,00	7.431,95	12.568,05
15	598,42	51,20	547,22	7.979,17	12.020,83
16	598,42	48,97	549,45	8.528,62	11.471,38
17	598,42	46,74	551,69	9.080,30	10.919,70
18	598,42	44,49	553,93	9.634,24	10.365,76
19	598,42	42,23	556,19	10.190,43	9.809,57
20	598,42	39,97	558,46	10.748,88	9.251,12
21	598,42	37,69	560,73	11.309,61	8.690,39
22	598,42	35,41	563,02	11.872,63	8.127,37
23	598,42	33,11	565,31	12.437,94	7.562,06
24	598,42	30,81	567,61	13.005,55	6.994,45
25	598,42	28,50	569,93	13.575,48	6.424,52
26	598,42	26,17	572,25	14.147,72	5.852,28
27	598,42	23,84	574,58	14.722,30	5.277,70
28	598,42	21,50	576,92	15.299,22	4.700,78
29	598,42	19,15	579,27	15.878,49	4.121,51
30	598,42	16,79	581,63	16.460,12	3.539,88
31	598,42	14,42	584,00	17.044,12	2.955,88
32	598,42	12,04	586,38	17.630,50	2.369,50
33	598,42	9,65	588,77	18.219,27	1.780,73
34	598,42	7,25	591,17	18.810,43	1.189,57
35	598,42	4,85	593,57	19.404,01	595,99
36	598,42	2,43	595,99	20.000,00	0,00

6.2. Μέθοδος σταθερού χρεολυσίου ή Αμερικάνικο σύστημα ή Sinking Fund

6.2.1. Γενικά

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο οι δόσεις του δανείου είναι ίσες τοκοχρεολυτικές δόσεις, που καταβάλλονται για την εξόφληση του. Τα δυο όμως τμήματα της τοκοχρεολυτικής δόσης, ο τόκος και το χρεολύσιο, δεν βαίνουν το πρώτο μειούμενο και το δεύτερο αυξανόμενο από περίοδο σε περίοδο, όπως πως είδαμε στο προηγούμενο σύστημα, αλλά παραμένουν σταθερά σε κάθε δόση σε όλη τη διάρκεια του δανείου.

Με βάση τη μέθοδο αυτή ο οφειλέτης του δανείου καταβάλει στο τέλος κάθε περιόδου (π.χ. έτος, εξάμηνο, ..) τους ίδιους τόκους ίσους με $K_0 \cdot i$ και παράλληλα μέρος του κεφαλαίου του δανείου (χρεολύσιο), το οποίο ανατοκιζόμενο από περίοδο σε περίοδο δίδει στο τέλος της τελευταίας περιόδου το κεφάλαιο του δανείου. Διακρίνονται δυο περιπτώσεις ανατοκισμού του χρεολυσίου: α) όταν το χρεολύσιο ανατοκίζεται με επιτόκιο ίδιο με το επιτόκιο έκδοσης του δανείου ($i = t$) και β) όταν το χρεολύσιο ανατοκίζεται με επιτόκιο διαφορετικό με το επιτόκιο έκδοσης του δανείου ($i \neq t$).

6.2.2. Υπολογισμός τοκοχρεολυτικής δόσης

Έτσι ανάλογα και η σχέση υπολογισμού της δόσης (τοκοχρεολυσίου) του δανείου είναι διαφορετική, δηλαδή:

α) Όταν το χρεολύσιο ανατοκίζεται με επιτόκιο ίδιο με το επιτόκιο έκδοσης του δανείου ($i = t$). Σε αυτή την περίπτωση ο τόκος της δόσης θα είναι $I = K_0 \cdot i$, το δε χρεολύσιό της θα είναι $P = K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$. Επομένως η τοκοχρεολυτική δόση του δανείου, ως άθροισμα τόκου και χρεολυσίου θα είναι:

$$R = I + P =>$$

$$R = K_0 \cdot i + K_0 \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} =>$$

$$\boldsymbol{R = K_0 \cdot [\, i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}]}$$

Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση η σχέση υπολογισμού της δόσης του δανείου είναι ίδια με αυτή της μεθόδου του προοδευτικού χρεολυσίου.

β) Όταν το χρεολύσιο ανατοκίζεται με επιτόκιο διαφορετικό με το επιτόκιο έκδοσης του δανείου ($i \neq t$). Σε αυτή την περίπτωση ο τόκος της δόσης θα είναι $I = K_0 \cdot i$, το δε χρεολύσιο της θα είναι $P = K_0 \cdot \frac{t}{(1+t)^n - 1}$. Επομένως η τοκοχρεολυτική δόση του δανείου, ως άθροισμα τόκου και χρεολυσίου θα είναι:

$$R = I + P =>$$

$$\boldsymbol{R = K_0 \cdot i + K_0 \cdot \frac{t}{(1+t)^n - 1}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ένα ποσό € 500.000 το δανείσθηκε μια επιχείρηση για 5 χρόνια με επιτόκιο 6%. Να υπολογισθεί η δόση του δανείου, λαμβάνοντας υπόψη ότι η απόσβεση του θα γίνει με την μέθοδο Sinking Fund με επιτόκιο τοποθέτησης 3%.

<u>Λύση:</u>

Επειδή ισχύει ($i \neq t$), ο υπολογισμός της δόσης θα είναι:

$$\boldsymbol{R = K_0 \cdot i + K_0 \cdot \frac{t}{(1+t)^n - 1}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{R = 50.000 \cdot 0,06 + 50.000 \cdot \frac{0,03}{(1+0,03)^5 - 1}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{R = 3.000 + 9.418} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{R = € \; 12.418}$$

Το ποσό των ***€ 9.418*** αποτελεί το χρεολύσιο της δόσης, το οποίο ανατοκιζόμενο από έτος σε έτος θα σχηματίσει στο τέλος του 5^{ου} έτους το κεφάλαιο του δανείου.

6.2.3. Πίνακες εξυπηρέτησης δανείου

Όπως και στη μέθοδο απόσβεσης του προοδευτικού χρεολυσίου έτσι και σε αυτή την μέθοδο, για την καλύτερη παρακολούθηση της εξυπηρέτησης ενός δανείου συντάσσεται ειδικός πίνακας, στον οποίο καταχωρούνται οι περιοδικές μεταβολές του, δηλαδή το τοκοχρεολύσιο, ο τόκος, το χρεολύσιο, το ποσό του κεφαλαίου δανείου που εξοφλήθηκε και το υπόλοιπο του κεφαλαίου δανείου που οφείλεται. Ο πίνακας αυτός λέγεται **πίνακας απόσβεσης του δανείου** και η σύνταξη του εκτός των άλλων διευκολύνει τη λογιστική παρακολούθηση του.

<u>Παράδειγμα 1^{ο}</u>

Μια επιχείρηση σκοπεύει να πάρει τραπεζικό δάνειο ύψους € 20.000, διάρκειας 5 ετών με ετήσιο επιτόκιο 10%. Να υπολογισθεί η δόση του δανείου και να συνταχθεί ο πίνακας εξυπηρέτησης του, εφαρμόζοντας το σύστημα του σταθερού χρεολυσίου σε δυο περιπτώσεις, α) όταν το επιτόκιο έκδοσης του δανείου είναι ίδιο με το επιτόκιο τοποθέτησης και β) όταν το επιτόκιο τοποθέτησης είναι 5%.

<u>Λύση:</u>

<u>α) Επιτόκιο έκδοσης ίδιο με επιτόκιο τοποθέτησης</u>

Καταρχήν υπολογίζεται η δόση του δανείου ως εξής:

$$\boldsymbol{R = K_0 \cdot \left[\, i + \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]} \Rightarrow$$

$$R = 20.000 \cdot [\,0,1 + \frac{0,1}{(1+0,1)^5 - 1}\,] =>$$
$$R = 20.000 \cdot [\,0,1 + \frac{0,1}{1,6105 - 1}\,] =>$$
$$R = €\,5.275,95$$

Πίνακας εξυπηρέτησης δανείου

Έτη	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου	Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
1	5.275,95	2.000,00	3.275,95	3.275,95	16.724,05
2	5.275,95	2.000,00	3.275,95	6.879,49	13.120,51
3	5.275,95	2.000,00	3.275,95	10.843,39	9.156,61
4	5.275,95	2.000,00	3.275,95	15.203,68	4.796,32
5	5.275,95	2.000,00	3.275,95	20.000,00	0,00

Στήλη 2: Το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους (έτη) και υπολογίζεται σύμφωνα με την προαναφερομένη σχέση.

Στήλη 3: Ο τόκος είναι σταθερός σε κάθε δόση και υπολογίζεται με το ανάλογο επιτόκιο 0,1 επί του αρχικού κεφαλαίου δανείου (20.000).

Στήλη 4: Το χρεολύσιο αποτελεί σε κάθε περίοδο τη διαφορά δόσης και τόκου, και είναι δηλαδή η σταθερή διαφορά των στηλών 2 με 3.

Στήλη 5: Το εξοφλημένο ποσό του κεφαλαίου δανείου της πρώτης σειράς της στήλης αυτής είναι ίσο με το χρεολύσιο της πρώτης σειράς της στήλης 4. Το εξοφλημένο ποσό κάθε επόμενη περιόδου ισούται με το χρεολύσιο της περιόδου και το ανατοκισμένο εξοφλημένο ποσό της προηγούμενης περιόδου.

Στήλη 6: Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί κάθε περίοδο τη διαφορά μεταξύ του αρχικού κεφαλαίου δανείου και του αντίστοιχου εξοφλημένου ποσού της στήλης 5. Δηλαδή κάθε περίοδο το άθροισμα των στηλών 5 και 6 αποτελεί το αρχικό κεφάλαιο του δανείου.

β) Επιτόκιο έκδοσης διαφορετικό με επιτόκιο τοποθέτησης

Καταρχήν υπολογίζεται η δόση του δανείου ως εξής:

$$R = K_0 \cdot i + K_0 \cdot \frac{t}{(1+t)^n - 1}\,] =>$$
$$R = 20.000 \cdot 0,1 + 20.000 \cdot \frac{0,05}{(1+0,05)^5 - 1}\,] =>$$
$$R = 2.000 + 20.000 \cdot \frac{0,05}{1,2763 - 1}\,] =>$$

$\boldsymbol{R = € \; 5.619,50}$

Πίνακας εξυπηρέτησης δανείου

Έτη	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου	Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
1	5.619,50	2.000,00	3.619,50	3.619,50	16.380,50
2	5.619,50	2.000,00	3.619,50	7.419,97	12.580,03
3	5.619,50	2.000,00	3.619,50	11.410,46	8.589,54
4	5.619,50	2.000,00	3.619,50	15.600,48	4.339,52
5	5.619,50	2.000,00	3.619,50	20.000,00	0,00

Στήλη 2: Το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους (έτη) και υπολογίζεται σύμφωνα με την προαναφερομένη σχέση.

Στήλη 3: Ο τόκος είναι σταθερός σε κάθε δόση και υπολογίζεται με το ανάλογο επιτόκιο 0,1 επί του αρχικού κεφαλαίου δανείου (20.000).

Στήλη 4: Το χρεολύσιο αποτελεί σε κάθε περίοδο τη διαφορά δόσης και τόκου, και είναι δηλαδή η σταθερή διαφορά των στηλών 2 με 3.

Στήλη 5: Το εξοφλημένο ποσό του κεφαλαίου δανείου της πρώτης σειράς της στήλης αυτής είναι ίσο με το χρεολύσιο της πρώτης σειράς της στήλης 4. Το εξοφλημένο ποσό κάθε επόμενη περιόδου ισούται με το χρεολύσιο της περιόδου και το ανατοκισμένο εξοφλημένο ποσό της προηγούμενης περιόδου, με επιτόκιο ανατοκισμού το επιτόκιο τοποθέτησης $t = 0,05$.

Στήλη 6: Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί κάθε περίοδο τη διαφορά μεταξύ του αρχικού κεφαλαίου δανείου και του αντίστοιχου εξοφλημένου ποσού της στήλης 5. Δηλαδή κάθε περίοδο το άθροισμα των στηλών 5 και 6 αποτελεί το αρχικό κεφάλαιο του δανείου.

Παράδειγμα 2

Μια επιχείρηση σκοπεύει να πάρει τραπεζικό δάνειο ύψους € 10.000, διάρκειας 5 ετών με ετήσιο επιτόκιο 8% και καταβολή δόσης ανά εξάμηνο. Να υπολογισθεί η δόση του δανείου και να συνταχθεί ο πίνακας εξυπηρέτησης του, εφαρμόζοντας το σύστημα του προοδευτικού χρεολυσίου.

Λύση:

Σε τέτοιες περιπτώσεις δανεισμού που η καταβολή της δόσης γίνεται σε χρονικό διάστημα μικρότερο του έτους πρέπει πριν από όλα να υπολογίζεται το ανάλογο επιτόκιο (i') της χρονικής περιόδου της δόσης, που προκύπτει από το ετήσιο επιτόκιο (i) που δίδεται. Δηλαδή στην περίπτωση μας πρέπει να υπολογίσουμε το ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο του ετήσιου επιτοκίου που δίδεται. Ο υπολογισμός γίνεται με τον σχετικό τύπο ως εξής: όπου μ: ο αριθμός των μηνών της δόσης.

Θα έχουμε δηλαδή:

$$\boldsymbol{i' = (1+i)^{\frac{\mu}{12}} - 1 =>}$$
$$\boldsymbol{i' = (1+0,1)^{\frac{6}{12}} - 1 =>}$$
$$\boldsymbol{i' = 4,88\%}$$

Επίσης μετατρέπουμε τα έτη διάρκειας του δανείου σε αντίστοιχο αριθμό εξαμήνων ως εξής:

$$\boldsymbol{\eta' = \eta \cdot \lambda =>}$$
$$\boldsymbol{\eta' = \eta \cdot \frac{12}{\mu} =>}$$
$$\boldsymbol{\eta' = 5 \cdot \frac{12}{6} =>}$$
$$\boldsymbol{\eta' = 10}$$

Στην συνέχεια υπολογίζεται η εξαμηνιαία δόση του δανείου θέτοντας στην θέση του επιτοκίου το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο και στη θέση του χρόνου τον αριθμό των εξαμήνων που αντιστοιχούν σε 5 έτη.

Θα έχουμε δηλαδή:

$$\boldsymbol{R = K_0 \cdot [\, i + \frac{i'}{(1+i')^{n'} - 1}\,] =>}$$
$$\boldsymbol{R = 10.000 \cdot [\, 0,0488 + \frac{0,0488}{(1+0,0488)^{10} - 1}\,] =>}$$
$$\boldsymbol{R = € \, 2.575,13}$$

<u>Πίνακας εξυπηρέτησης δανείου</u>

Έτη	*Τοκοχρεολύσιο*	*Τόκος*	*Χρεολύσιο*	*Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου*	*Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
1	2.575,13	976,18	1.598,95	1.598,95	18.401,05
2	2.575,13	976,18	1.598,95	3.275,95	16.724,05
3	2.575,13	976,18	1.598,95	5.034,80	14.965,20
4	2.575,13	976,18	1.598,95	6.879,49	13.120,51
5	2.575,13	976,18	1.598,95	8.814,23	11.185,77
6	2.575,13	976,18	1.598,95	10.843,39	9.156,61
7	2.575,13	976,18	1.598,95	12.971,60	7.028,40
8	2.575,13	976,18	1.598,95	15.203,68	4.796,32
9	2.575,13	976,18	1.598,95	17.544,71	2.455,29
10	2.575,13	976,18	1.598,95	20.000,00	0,00

Στήλη 2: Το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους (εξάμηνα) και υπολογίζεται σύμφωνα με την προαναφερομένη σχέση.

Στήλη 3: Ο τόκος είναι σταθερός σε κάθε δόση και υπολογίζεται με το ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο 0,0488 επί του αρχικού κεφαλαίου δανείου (20.000).

Στήλη 4: Το χρεολύσιο αποτελεί σε κάθε περίοδο (εξάμηνο) τη διαφορά δόσης και τόκου, και είναι δηλαδή η σταθερή διαφορά των στηλών 2 με 3.

Στήλη 5: Το εξοφλημένο ποσό του κεφαλαίου δανείου της πρώτης σειράς της στήλης αυτής είναι ίσο με το χρεολύσιο της πρώτης σειράς της στήλης 4. Το εξοφλημένο ποσό κάθε επόμενης περιόδου (εξάμηνου) ισούται με το χρεολύσιο της περιόδου και το ανατοκισμένο εξοφλημένο ποσό της προηγούμενης περιόδου, με επιτόκιο ανατοκισμού το ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο του δανείου 0,0488.

Στήλη 6: Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί κάθε περίοδο τη διαφορά μεταξύ του αρχικού κεφαλαίου δανείου και του αντίστοιχου εξοφλημένου ποσού της στήλης 5. Δηλαδή κάθε περίοδο (εξάμηνο) το άθροισμα των στηλών 5 και 6 αποτελεί το αρχικό κεφάλαιο του δανείου.

Παράδειγμα 3

Μια επιχείρηση σκοπεύει να πάρει τραπεζικό δάνειο ύψους 30.000 ευρώ, διάρκειας 2 ετών με ετήσιο επιτόκιο 8% και καταβολή δόσης ανά μήνα. Να υπολογισθεί η δόση του δανείου και να συνταχθεί ο πίνακας εξυπηρέτησης του, εφαρμόζοντας το σύστημα του σταθερού χρεολυσίου, λαμβάνοντας υπόψη ότι το επιτόκιο τοποθέτησης είναι 4%.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι στο δάνειο το επιτόκιο έκδοσης είναι διαφορετικό από το επιτόκιο τοποθέτησης ($I \neq t$), οπότε για τον υπολογισμό της δόσης του σύμφωνα με το Αμερικάνικο σύστημα θα έχουμε:

$$\boldsymbol{R = K_0 \cdot i + K_0 \cdot \frac{t}{(1+t)^n - 1}}]$$

Επειδή δε η καταβολή της δόσης θα γίνεται ανά μήνα, πρέπει να μετατρέψουμε τα επιτόκια έκδοσης και τοποθέτησης από ετήσια σε ανάλογα μηνιαία, καθώς και τον αριθμό των ετών της χρονικής διάρκειας σε αριθμό μηνών, οπότε θα έχουμε ως εξής:

α) Μετατροπή του ετήσιου επιτοκίου έκδοσης σε ανάλογο μηνιαίο

Ο υπολογισμός γίνεται με τον σχετικό τύπο ως εξής:

$$\boldsymbol{i' = (1+i)^{\frac{\mu}{12}} - 1 =>}$$
$$\boldsymbol{i' = (1+0,08)^{\frac{1}{12}} - 1 =>}$$

$$\boldsymbol{i'} = \mathbf{0,64\%}$$

β) Μετατροπή του ετήσιου επιτοκίου τοποθέτησης σε ανάλογο μηνιαίο

Ο υπολογισμός γίνεται με τον σχετικό τύπο ως εξής:

$$\boldsymbol{t'} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{t})^{\frac{\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{12}}} - \mathbf{1} =>$$
$$\boldsymbol{t'} = (\mathbf{1} + \mathbf{0,04})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}} - \mathbf{1} =>$$
$$\boldsymbol{t'} = \mathbf{0,33\%}$$

γ) Μετατροπή του αριθμού των ετών της διάρκειας σε αριθμό μηνών

Ο υπολογισμός γίνεται με τον σχετικό τύπο ως εξής:

$$\boldsymbol{n'} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\lambda} =>$$
$$\boldsymbol{n'} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{12} =>$$
$$\boldsymbol{n'} = \mathbf{24}$$

Μετά τα παραπάνω ο προαναφερόμενος τύπος υπολογισμού της δόσης προσαρμόζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K_0} \cdot \boldsymbol{i'} + \boldsymbol{K_0} \cdot \frac{\boldsymbol{t'}}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{t'})^{\boldsymbol{n'}} - \mathbf{1}}] =>$$
$$\boldsymbol{R} = \mathbf{30.000} \cdot \mathbf{0,0064} + \mathbf{30.000} \cdot \frac{\mathbf{0,0033}}{(\mathbf{1} + \mathbf{0,0033})^{\mathbf{24}} - \mathbf{1}}] =>$$
$$\boldsymbol{R} = \mathbf{193,02} + \mathbf{1.203,58} =>$$
$$\boldsymbol{R} = \text{€}\ \mathbf{1.396,60}$$

Πίνακας εξυπηρέτησης δανείου

Έτη	Τοκοχρεολύσιο	Τόκος	Χρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου	Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
1	1.396,60	193,02	1.203,58	1.203,58	28.796,42
2	1.396,60	193,02	1.203,58	2.411,10	27.588,90
3	1.396,60	193,02	1.203,58	3.622,58	26.377,42
4	1.396,60	193,02	1.203,58	4.838,02	25.161,98
5	1.396,60	193,02	1.203,58	6.057,44	23.942,56
6	1.396,60	193,02	1.203,58	7.280,85	22.719,15
7	1.396,60	193,02	1.203,58	8.508,26	21.491,74
8	1.396,60	193,02	1.203,58	9.739,70	20.260,30
9	1.396,60	193,02	1.203,58	10.975,16	19.024,84
10	1.396,60	193,02	1.203,58	12.214,67	17.785,33
11	1.396,60	193,02	1.203,58	13.458,24	16.541,76
12	1.396,60	193,02	1.203,58	14.705,88	15.294,12
13	1.396,60	193,02	1.203,58	15.957,61	14.042,39
14	1.396,60	193,02	1.203,58	17.213,43	12.786,57
15	1.396,60	193,02	1.203,58	18.473,36	11.526,64
16	1.396,60	193,02	1.203,58	19.737,42	10.262,58
17	1.396,60	193,02	1.203,58	21.005,62	8.994,38
18	1.396,60	193,02	1.203,58	22.277,96	7.722,04
19	1.396,60	193,02	1.203,58	23.554,48	6.445,52
20	1.396,60	193,02	1.203,58	24.835,17	5.164,83
21	1.396,60	193,02	1.203,58	26.120,05	3.879,95
22	1.396,60	193,02	1.203,58	27.409,14	2.590,86
23	1.396,60	193,02	1.203,58	28.702,45	1.297,55
24	1.396,60	193,02	1.203,58	30.000,00	0,00

Στήλη 2: Το τοκοχρεολύσιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους (μήνες) και υπολογίζεται σύμφωνα με την προαναφερομένη σχέση.

Στήλη 3: Ο τόκος είναι σταθερός σε κάθε δόση και υπολογίζεται με το ανάλογο μηνιαίο επιτόκιο έκδοσης 0,0064 επί του αρχικού κεφαλαίου δανείου (30.000).

Στήλη 4: Το χρεολύσιο αποτελεί σε κάθε μήνα τη διαφορά δόσης και τόκου, και είναι δηλαδή η σταθερή διαφορά των στηλών 2 με 3.

Στήλη 5: Το εξοφλημένο ποσό του κεφαλαίου δανείου της πρώτης σειράς της στήλης αυτής είναι ίσο με το χρεολύσιο της πρώτης σειράς της στήλης 4. Το εξοφλημένο ποσό κάθε επόμενης περιόδου (μήνα) ισούται με το χρεολύσιο της περιόδου και το ανατοκισμένο εξοφλημένο ποσό της προηγούμενης περιόδου, με επιτόκιο ανατοκισμού το ανάλογο μηνιαίο επιτόκιο του δανείου 0,0033.

Στήλη 6: Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί κάθε περίοδο (μήνα) τη διαφορά μεταξύ του αρχικού κεφαλαίου δανείου και του αντίστοιχου εξοφλημένου ποσού της στήλης 5. Δηλαδή κάθε περίοδο το άθροισμα των στηλών 5 και 6 αποτελεί το αρχικό κεφάλαιο του δανείου.

6.3. Μέθοδος προοδευτικά μειωμένου τοκοχρεολυσίου ή ίσων μερών κεφαλαίου.

6.3.1. Γενικά

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, το κεφάλαιο του δανείου Κ0 διαιρείται με τον αριθμό η των περιόδων που διαρκεί το δάνειο κατά τις οποίες καταβάλλονται οι δόσεις του. Το πηλίκο αυτής της διαίρεσης ονομάζεται χρεολύσιο $P = \frac{K_0}{\eta}$, και καταβάλλεται κάθε περίοδο για την εξόφληση του κεφαλαίου του δανείου.

Εκτός όμως από το χρεολύσιο, ο οφειλέτης του δανείου καταβάλλει ταυτόχρονα και τόκο, που υπολογίζεται κάθε φορά στο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου. Το χρεολύσιο μαζί με τον τόκο αποτελούν αθροιζόμενα την τοκοχρεολυτική δόση του δανείου $R = I + P$. Επειδή δε όπως προαναφέραμε, το χρεολύσιο αποτελεί σταθερό ποσό που καταβάλλεται κάθε περίοδο, ενώ ο τόκος υπολογίζεται κάθε περίοδο στο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου της προηγούμενης περιόδου και επομένως μειώνεται από περίοδο σε περίοδο, το τοκοχρεολύσιο τελικά μειώνεται από περίοδο σε περίοδο.

Όπως γίνεται αντιληπτό, με την μέθοδο αυτή οι δόσεις των πρώτων περιόδων του δανείου είναι μεγαλύτερες σε σχέση με τις επόμενες. Για αυτό το λόγο η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται σε ειδικές περιπτώσεις δανείων που χρηματοδοτούν παραγωγικό εξοπλισμό επιχειρήσεων, όπου τα πρώτα χρόνια είναι περισσότερα παραγωγικά, και έτσι είναι δυνατή η καταβολή μεγαλύτερων δόσεων.

6.3.2. Πίνακες εξυπηρέτησης δανείου

Όπως και στις προηγούμενες μεθόδους απόσβεσης δανείων έτσι και σε αυτή την μέθοδο, για την καλύτερη παρακολούθηση της εξυπηρέτησης ενός δανείου συντάσσεται ειδικός πίνακας, στον οποίο καταχωρούνται οι περιοδικές μεταβολές του, δηλαδή το τοκοχρεολύσιο, ο τόκος, το χρεολύσιο, το ποσό του κεφαλαίου δανείου που εξοφλήθηκε και το υπόλοιπο του κεφαλαίου δανείου που οφείλεται. Ο πίνακας αυτός λέγεται **πίνακας απόσβεσης του δανείου** και η σύνταξη του εκτός των άλλων διευκολύνει τη λογιστική παρακολούθηση του.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Η επιχείρηση Α έλαβε δάνειο € 100.000 με ετήσιο επιτόκιο 5% διάρκειας 5 ετών. Να συνταχθεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

<u>Λύση :</u>

Καταρχήν υπολογίζεται το σταθερό χρεολύσιο που θα καταβάλλεται κάθε έτος με την εφαρμογή της προαναφερόμενης σχέσης, ως εξής:

$$P = \frac{K_0}{\eta} =>$$
$$P = \frac{100.000}{5} =>$$
$$P = € \, 20.$$

<u>Πίνακας εξυπηρέτησης δανείου</u>

Έτη	*Χρεολύσιο*	*Τόκος*	*Τοκοχρεολύσιο*	*Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου*	*Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
1	20.000,00	5.000,00	25.000,00	20.000,00	80.000,00
2	20.000,00	4.000,00	24.500,00	40.000,00	60.000,00
3	20.000,00	3.000,00	23.000,00	60.000,00	40.000,00
4	20.000,00	2.000,00	22.000,00	80.000,00	20.000,00
5	20.000,00	1.000,00	21.000,00	100.000,00	0,00

Στήλη 2: Το χρεολύσιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους (έτη) και υπολογίζεται σύμφωνα με την προαναφερομένη σχέση.

Στήλη 3: Ο τόκος υπολογίζεται στο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου της προηγούμενης περιόδου. Έτσι στο πρώτο έτος υπολογίζεται στο αρχικό κεφάλαιο δανείου και είναι: $I = K_0 \cdot i = 100.000 \cdot 0{,}05 = 5.000$. Στο δεύτερο έτος είναι: $I = 80.000 \cdot 0{,}05 = 4.000$, κ.ο.κ.

Στήλη 4: Το τοκοχρεολύσιο αποτελεί σε κάθε έτος το άθροισμα χρεολυσίου και τόκου, είναι δηλαδή το άθροισμα των στηλών 2 με 3.

Στήλη 5: Το εξοφλημένο ποσό του κεφαλαίου δανείου αποτελεί την αθροιστική σειρά της στήλης 2.

Στήλη 6: Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί κάθε περίοδο τη διαφορά μεταξύ του αρχικού κεφαλαίου δανείου και του αντίστοιχου εξοφλημένου ποσού της στήλης 5. Δηλαδή κάθε περίοδο το άθροισμα των στηλών 5 και 6 αποτελεί το αρχικό κεφάλαιο του δανείου.

<u>Παράδειγμα 2^o</u>

Η επιχείρηση Α έλαβε δάνειο € 48.000 με ετήσιο επιτόκιο 5% διάρκειας 3 ετών με εξαμηνιαία δόση. Να συνταχθεί ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

<u>Λύση :</u>

Όπως γνωρίζουμε, στις περιπτώσεις δανείων που η δόση δεν καταβάλλεται ετησίως αλλά σε μικρότερο χρονικό διάστημα, τότε πρέπει να γίνουν ορισμένες προσαρμογές, πριν την εφαρμογή των προαναφερομένου τύπου υπολογισμού του χρεολυσίου.

α) Προσαρμογή επιτοκίου

Πρέπει να υπολογισθεί το ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο με βάση το ετήσιο που δίδεται, από τον γνωστό τύπο ως εξής:

$$\boldsymbol{i' = (1+i)^{\frac{\mu}{12}} - 1 =>}$$
$$\boldsymbol{i' = (1+0,05)^{\frac{6}{12}} - 1 =>}$$
$$\boldsymbol{i' = 2,47\%}$$

β) Μετατροπή του αριθμού των ετών της διάρκειας σε αριθμό εξαμήνων

Ο υπολογισμός γίνεται με τον σχετικό τύπο ως εξής:

$$\boldsymbol{n' = n \cdot \lambda =>}$$
$$\boldsymbol{n' = 3 \cdot 2 =>}$$
$$\boldsymbol{n' = 6}$$

Στην συνέχεια υπολογίζεται το χρεολύσιο της δόσης με το προαναφερόμενο σχετικό τύπο, δηλαδή θα έχουμε:

$$\boldsymbol{P = \frac{K_0}{\eta'} =>}$$
$$\boldsymbol{P = \frac{48.000}{6} =>}$$
$$\boldsymbol{P = € \, 8.000}$$

Δηλαδή το δάνειο θα έχει 6 εξαμηνιαίες δόσεις, από τις οποίες η κάθε μια θα περιλαμβάνει το ίδιο χρεολύσιο των € 8.000.

Πίνακας εξυπηρέτησης δανείου

Έτη	Χρεολύσιο	Τόκος	Τοκοχρεολύσιο	Εξοφλημένο ποσό κεφαλαίου δανείου	Υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(5)
1	8.000,00	1.185,36	9.185,36	8.000,00	40.000,00
2	8.000,00	987,80	8.987,80	16.000,00	32.000,00
3	8.000,00	790,24	8.790,24	24.000,00	24.000,00
4	8.000,00	592,68	8.592,68	32.000,00	16.000,00
5	8.000,00	395,12	8.395,12	40.000,00	8.000,00
6	8.000,00	197,56	8.197,56	48.000,00	0,00

Στήλη 2: Το χρεολύσιο παραμένει σταθερό σε όλες τις περιόδους (εξάμηνα) και υπολογίζεται σύμφωνα με την προαναφερομένη σχέση.

Στήλη 3: Ο τόκος υπολογίζεται στο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου της προηγούμενης περιόδου. Έτσι στο πρώτο εξάμηνο υπολογίζεται στο αρχικό κεφάλαιο δανείου και είναι: $I = K_0 \cdot i = 48.000 \cdot 0{,}0247 = 1.185{,}36$. Στο δεύτερο εξάμηνο είναι: $I = 40.000 \cdot 0{,}0247 = 987{,}80$, κ.ο.κ.

Στήλη 4: Το τοκοχρεολύσιο αποτελεί σε κάθε εξάμηνο το άθροισμα χρεολυσίου και τόκου, είναι δηλαδή το άθροισμα των στηλών 2 με 3.

Στήλη 5: Το εξοφλημένο ποσό του κεφαλαίου δανείου αποτελεί την αθροιστική σειρά της στήλης 2.

Στήλη 6: Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του κεφαλαίου δανείου της στήλης αυτής αποτελεί κάθε εξάμηνο τη διαφορά μεταξύ του αρχικού κεφαλαίου δανείου και του αντίστοιχου εξοφλημένου ποσού της στήλης 5. Δηλαδή κάθε περίοδο το άθροισμα των στηλών 5 και 6 αποτελεί το αρχικό κεφάλαιο του δανείου.

6.4. Εξόφληση τοκοχρεολυτικών δανείων πριν από τη λήξη τους

Σε πολλές περιπτώσεις λήψης μακροχρονίων δανείων μετά την παρέλευση μ δόσεων που έχουν καταβληθεί, είναι πιθανόν το υπόλοιπο δάνειο να εξοφληθεί εφάπαξ με μια καταβολή, είτε επειδή το επιλέγει η δανειζόμενη επιχείρηση, είτε επειδή το επιζητά η χορηγούσα το δάνειο τράπεζα, είτε μετά από κοινή συμφωνία των δύο μερών. Η εξόφληση αυτή μπορεί να γίνει με το αρχικό επιτόκιο που ίσχυε κατά την έκδοση του δανείου ή με ένα διαφορετικό επιτόκιο.

Έτσι το πρόβλημα υπολογισμού του υπόλοιπου εφάπαξ ποσού εξόφλησης του δανείου πριν από τη λήξη του, είναι επί της ουσίας πρόβλημα υπολογισμού της παρούσας αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας, με όρο τη τοκοχρεολυτική δόση του δανείου, επιτόκιο το αρχικό του δανείου ή αυτό που έχει συμφωνηθεί, και διάρκεια το υπόλοιπο χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του δανείου, όπως ίσχυε κατά την έκδοση του.

Επομένως για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων εργαζόμαστε ως εξής:

Αρχικά υπολογίζουμε τη τοκοχρεολυτική δόση με βάση το κεφάλαιο του δανείου, το επιτόκιο που ίσχυε κατά την έκδοση του και την αρχική χρονική διάρκεια του. Ο τύπος που θα εφαρμόζεται για τον υπολογισμό της δόσης, θα είναι ανάλογος με το σύστημα απόσβεσης του δανείου που ίσχυε κατά την έκδοση του. Στην συνέχεια μετά τον υπολογισμό του ποσού της δόσης, με εφαρμογή του τύπου υπολογισμού της παρούσας αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας, υπολογίζουμε το ποσό εξόφλησης του δανείου.

<u>Παράδειγμα</u>

Η επιχείρηση Α είχε πάρει πριν από 10 χρόνια δάνειο € 10.0000 από την τράπεζα Τ διάρκειας 20 ετών με ετήσιο επιτόκιο 5%. Η επιχείρηση επιθυμεί μετά την καταβολή των πρώτων 10 ετήσιων δόσεων, να εξοφλήσει εφάπαξ το υπόλοιπο του δανείου, γεγονός με το οποίο συμφωνεί η εκδούσα το δάνειο τράπεζα θέτοντας ως όρο, η εξόφληση να γίνει με επιτόκιο 6%. Ζητείται να υπολογισθεί το εφάπαξ ποσό αποπληρωμής του δανείου, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει το σύστημα απόσβεσης του προοδευτικού χρεολυσίου.

<u>Λύση:</u>

Αρχικά θα υπολογισθεί η δόση του δανείου με απευθείας εφαρμογή της ανάλογης σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{C} \cdot [\, \boldsymbol{i} + \frac{\boldsymbol{i}}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1}} \,] =>$$
$$\boldsymbol{R} = \mathbf{10.000} \cdot [\, \mathbf{0,05} + \frac{\mathbf{0,05}}{(\mathbf{1} + \mathbf{0,05})^{\mathbf{20}} - \mathbf{1}} \,] =>$$
$$\boldsymbol{R} = \text{€}\, \mathbf{802}$$

Στη συνέχεια με απευθείας εφαρμογή της παρακάτω σχέσης της παρούσας αξίας ετήσιας σταθερής ληξιπρόθεσμης ράντας θα υπολογίσουμε το εφάπαξ ποσό αποπληρωμής του δανείου:

$$\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{A} \cdot \frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{i}}$$

Στον παραπάνω τύπο αν θέσουμε όπου A = 802 το ποσό της δόσης του δανείου, n = τα υπόλοιπα 10 έτη της διάρκειας του δανείου, και i = 6% το επιτόκιο που ορίζει η τράπεζα για την εξόφληση του δανείου, θα έχουμε:

$$\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{A} \cdot \frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{i}} =>$$
$$\boldsymbol{PV} = \mathbf{802} \cdot \frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \mathbf{0,06})^{-\mathbf{10}}}{\mathbf{0,06}} =>$$
$$\boldsymbol{PV} = \text{€}\, \mathbf{5.903}$$

6.5. Δάνεια με τίτλους ή ομολογιακά δάνεια

6.5.1. Γενικά

Πολλές φορές το κράτος ή Νομικά Πρόσωπα Δημοσίου Δικαίου (ΝΠΔΔ) ή μεγάλες ιδιωτικές επιχειρήσεις σχεδιάζουν να δανεισθούν μεγάλα χρηματικά ποσά, προκειμένου να χρηματοδοτήσουν μακροχρόνια επενδυτικά σχέδια τους, ή να αντιμετωπίσουν ελλειμματικούς προϋπολογισμούς (στην περίπτωση των δημοσίων φορέων). Σε τέτοιες περιπτώσεις δεν απευθύνονται σε ένα ή δύο δανειστές (χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς) αλλά σε πολλούς δανειστές, δηλαδή στο κοινό. Τέτοιοι δανεισμοί γίνονται από το κοινό, διότι είναι δύσκολο μόνο ένας ή δυο δανειστές να δανείσουν τέτοια μεγάλα ποσά.

Σε τέτοιες περιπτώσεις το ποσό του δανείου διαιρείται σε μικρά ίσα τμήματα, τα οποία αποτελούν πιστωτικούς τίτλους και λέγονται ομολογίες. Τα δάνεια δε αυτά λέγονται ομολογιακά δάνεια, η δε διάθεση των ομολογιών τους στους ενδιαφερόμενους αγοραστές (δηλ. στο κοινό) γίνεται με δημόσια εγγραφή μέσω των πιστωτικών ιδρυμάτων.

Κάθε ομολογία φέρει αύξοντα αριθμό και αντιπροσωπεύει ένα ορισμένο ποσό, που γράφεται πάνω σε αυτή. Το ποσό αυτό λέγεται **Ονομαστική Αξία της** ομολογίας. Επάνω στην ομολογία αναγράφεται επίσης **το επιτόκιο** του ομολογιακού δανείου, ο χρόνος και τόπος πληρωμής των τόκων στο κάτοχο της, καθώς και οι τυχόν φοροαπαλλαγές ή εγγυήσεις του εκδότη του ομολογιακού δανείου.

Αν η ονομαστική αξία της ομολογίας είναι ίση με το ελάχιστο τμήμα από τα τμήματα στα οποία διαιρέθηκε το συνολικό ποσό του δανείου, τότε λέγεται **απλή** ομολογία. Αν η ονομαστική αξία της ομολογίας είναι πολλαπλάσια της απλής, τότε η ομολογία λέγεται **πολλαπλή** ομολογία. Η τιμή στην οποία διατίθεται στο κοινό η ομολογία λέγεται **τιμή έκδοσης.** Αν η τιμή έκδοσης είναι ίση με την ονομαστική αξία της ομολογίας, τότε λέγεται ότι το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε **στο άρτιο.** Αν η τιμή έκδοσης είναι μεγαλύτερη από τη ονομαστική αξία της ομολογίας, τότε λέγεται ότι το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε **υπέρ το άρτιο.** Αν η τιμή έκδοσης είναι μικρότερη από την ονομαστική αξία της ομολογίας, τότε λέγεται ότι το ομολογιακό δάνειο εκδόθηκε **υπό το άρτιο.** Η τιμή στην οποία εξοφλείται η ομολογία, λέγεται **τιμή εξόφλησης.** Η τιμή εξόφλησης μπορεί να είναι ίση, μεγαλύτερη ή μικρότερη από την ονομαστική αξία της ομολογίας.

Τέλος, ανάλογα με το αν αναγράφεται ή όχι επάνω στην ομολογία το όνομα του δικαιούχου της, οι ομολογίες διακρίνονται ως εξής:

1. σε ονομαστικές ομολογίες, όταν δηλαδή αναγράφεται επάνω στο σώμα τους το όνομα του δικαιούχου και στον οποίο πληρώνονται οι τόκοι στην ορισμένη ημερομηνία που και αυτή αναγράφεται επάνω στο σώμα των ομολογιών,
2. σε ομολογίες στον κομιστή, όταν δηλαδή δεν αναγράφεται επάνω στο σώμα τους το όνομα του δικαιούχου και οι τόκοι πληρώνονται, στην ορισμένη ημερομηνία που αναγράφεται επάνω στο σώμα των ομολογιών, στον κομιστή τους,
3. σε μικτές ομολογίες, όταν δηλαδή αναγράφεται επάνω στο σώμα τους το όνομα του δικαιούχου, αλλά οι τόκοι πληρώνονται, στην ορισμένη ημερομηνία που αναγράφεται επάνω στο σώμα των ομολογιών, στον κομιστή τους.

6.5.2. Η σύνταξη του πίνακα απόσβεσης ομολογιακού δανείου

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, η δόση του δανείου είναι τοκοχρεολυτική, δηλαδή αποτελεί άθροισμα του χρεολυσίου (μέρους του κεφαλαίου του δανείου) και το τόκου (μέρους των συνολικών τόκων του δανείου), που εξοφλούνται με κάθε καταβολή, και δεν είναι σταθερή σε κάθε έτος.

Για το πρώτο έτος υπολογίζεται από την εξής σχέση:

$$\boldsymbol{R = N \cdot C \cdot [\, i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}\,]}$$

όπου:

* N = ο αριθμός των ομολογιών του δανείου
* C = η ονομαστική αξία της ομολογίας
* i = το επιτόκιο έκδοσης του δανείου
* n = η χρονική διάρκεια του δανείου σε έτη

Για κάθε επόμενο έτος, η δόση είναι ίση με το άθροισμα της δόσης του πρώτου έτους και το υπόλοιπο χρεολύσιο του προηγούμενου έτους αυξημένο κατά τους τόκους του.

Ο τόκος της κάθε δόσης υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το επιτόκιο έκδοσης με το ανεξόφλητο κεφάλαιο του δανείου της προηγούμενης δόσης, δηλαδή το ποσό του τόκου της κάθε δόσης είναι μικρότερο από το αντίστοιχο της προηγούμενης δόσης, και υπολογίζεται από τον εξής τύπο:

$$\boldsymbol{I = K_\lambda \cdot i}$$

όπου $\boldsymbol{K_\lambda}$: το ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου της προηγούμενης δόσης.

Το διαθέσιμο χρεολύσιο της κάθε δόσης υπολογίζεται αφαιρώντας από το ποσό της δόσης το ποσό του τόκου της, δηλαδή το ποσό του διαθέσιμου χρεολυσίου της κάθε δόσης είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο της προηγούμενης δόσης, και υπολογίζεται από την εξής σχέση:

$$\boldsymbol{P = R - I}$$

Με βάση τα παραπάνω συντάσσεται ο πίνακας εξυπηρέτησης του δανείου, όπου αποτυπώνονται οι δόσεις του, η ανάλυση της κάθε δόσης σε τόκο και χρεολύσιο, το σωρευμένο εξοφλημένο κεφάλαιο δανείου και επίσης το υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου με την καταβολή της κάθε δόσης.

Σύμφωνα με τα παραπάνω συντάσσεται ο πίνακας απόσβεσης του ομολογιακού δανείου.

Παράδειγμα

Έστω ότι ένα δάνειο € 2.000.000 εκδίδεται στο άρτιο με 10.000 ομολογίες, ονομαστικής αξίας € 200, το οποίο πρέπει να αποσβεσθεί σε 4 χρόνια με την προοδευτική μέθοδο με ετήσιο επιτόκιο 7%. Ζητείται να συνταχθεί ο πίνακας απόσβεσης του.

Λύση:

Καταρχήν υπολογίζεται η τοκοχρεολυτική δόση του πρώτου έτους του δανείου και θα έχουμε ως εξής:

$$\boldsymbol{R = N \cdot C \cdot [\, i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}\,] =>}$$

$$\boldsymbol{R = 10.000 \cdot 200 \cdot [\, 0,07 + \frac{0,07}{(1+0,07)^4 - 1}\,] =>}$$

$$\boldsymbol{R = € \, 590.456,23}$$

Πίνακας απόσβεσης δανείου

Έτη	Τοκοχρεολύσιο (R)	Τόκος	Διαθέσιμο Χρεολύσιο για Εξόφληση Ομολογιών	Αριθμός Εξοφλημένων Ομολογιών	Χρεολύσιο που χρησιμοποιήθηκε για Εξόφληση Ομολογιών	Υπόλοιπο Χρεολυσίου στο Τέλος του Έτους	Αριθμός Ομολογιών σε ζωή	Υπόλοιπο Χρέους
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	591.456,23	140.000,00	450.456,23	2.252,00	450.400,00	56,23	7.748,00	1.549.600,00
2	590.516,40	108.472,00	482.044,40	2.410,00	482.000,00	44,40	5.338,00	1.067.600,00
3	590.503,74	74.732,00	515.771,74	2.578,00	515.600,00	171,74	2.760,00	552.000,00
4	590.640,00	38.640,00	552.000,00	2.760,00	552.000,00	0,00	0,00	0,00

Στήλη 2: Το τοκοχρεολύσιο του πρώτους έτους υπολογίζεται σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο. Το τοκοχρεολύσιο για κάθε επόμενο έτος είναι ίσο με το τοκοχρεολύσιο του πρώτου έτους και το ποσό του υπόλοιπου χρεολυσίου του προηγούμενου έτους της στήλης 7 αυξημένου κατά τους τόκους του, όπως

φαίνεται στο κελί του δεύτερου έτους στην εν λόγω στήλη.

Στήλη 3: Ο τόκος του κάθε έτους υπολογίζεται στο υπόλοιπο χρέους της στήλης 9, εκτός από το πρώτο έτος, όπου υπολογίζεται στο αρχικό ποσό του δανείου.

Στήλη 4: Το διαθέσιμο χρεολύσιο για την εξόφληση ομολογιών για κάθε έτος είναι η διαφορά των στηλών 2 και 3.

Στήλη 5: Ο αριθμός εξοφλημένων ομολογιών του κάθε έτους υπολογίζεται διαιρώντας το ποσό του διαθέσιμου χρεολυσίου για την εξόφληση ομολογιών του αντίστοιχου έτους με την ονομαστική αξία της ομολογίας. Καταχωρούμε δε από την παραπάνω διαίρεση τον ακέραιο αριθμό του πηλίκου της.

Στήλη 6: Το χρεολύσιο που χρησιμοποιήθηκε για εξόφληση ομολογιών στο κάθε έτος αποτελεί την αξία των εξοφλημένων ομολογιών του ίδιου έτους της στήλης 5, και υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας ανά έτος τον αριθμό των εξοφλημένων ομολογιών με την ονομαστική αξία της ομολογίας.

Στήλη 7: Το υπόλοιπο χρεολυσίου στο τέλος του έτους για κάθε έτος είναι η διαφορά των στηλών 4 και 6.

Στήλη 8: Ο αριθμός ομολογιών σε ζωή για κάθε έτος αποτελεί τη διαφορά του αριθμού των ανεξόφλητων ομολογιών με τον αριθμό των εξοφλημένων ομολογιών της στήλης 5. Για το πρώτο έτος αφαιρείται ο αριθμός των εξοφλημένων ομολογιών από το συνολικό αριθμό ομολογιών του δανείου.

Στήλη 9: Το υπόλοιπο χρέους για κάθε έτος αποτελεί την αξία των ομολογιών σε ζωή της στήλης 8, και υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των ομολογιών σε ζωή με την ονομαστική αξία της ομολογίας.

6.5.3. Υπολογισμός με αλγεβρικό τρόπο των στοιχείων ομολογιακού δανείου

<u>α) Υπολογισμός τοκοχρεολυσίου</u>

Ο υπολογισμός του τοκοχρεολυσίου της πρώτης περιόδου γίνεται με εφαρμογή της σχέσης

$$\boldsymbol{R = N \cdot C \cdot [\, i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}\,]}$$

<u>β) Υπολογισμός χρεολυσίου στη λ περίοδο (Χλ)</u>

Ο υπολογισμός του διαθέσιμου χρεολυσίου για εξόφληση ομολογιών στην λ περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{P_\lambda = N \cdot C \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{\lambda-1}}$$

όπου:

* N = ο αριθμός των ομολογιών του δανείου
* C = η ονομαστική αξία της ομολογίας

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. το διαθέσιμο χρεολύσιο για εξόφληση ομολογιών στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{P_\lambda = N \cdot C \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{\lambda-1}} =>$$
$$\boldsymbol{P_3 = 10.000 \cdot 200 \cdot \frac{0,07}{(1+0,07)^4 - 1} \cdot (1+0,07)^{3-1}} =>$$
$$\boldsymbol{P_3 = € \, 515.727,34}$$

Σημείωση: Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζει μικροδιαφορά με το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον παραπάνω πίνακα απόσβεσης, επειδή στον πίνακα αυτό λαμβάνουμε τον ακέραιο αριθμό των εξοφλημένων ομολογιών ανά έτος.

γ) Υπολογισμός του ποσού δανείου που εξοφλείτε στη λ περίοδο (E_λ)

Ο υπολογισμός του ποσού δανείου που εξοφλείτε στην λ περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{P_\lambda = N \cdot C \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^\lambda - 1}{i}}$$

όπου:

* N = ο αριθμός των ομολογιών του δανείου
* C = η ονομαστική αξία της ομολογίας

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. το ποσό δανείου που εξοφλείται στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{P_\lambda = N \cdot C \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^\lambda - 1}{i}} =>$$
$$\boldsymbol{P_3 = 10.000 \cdot 200 \cdot \frac{0,07}{(1+0,07)^4 - 1} \cdot \frac{(1+0,07)^3 - 1}{0,07}} =>$$
$$\boldsymbol{P_3 = € \, 1.448.171,74}$$

δ) Υπολογισμός του τμήματος τόκου που καταβάλλεται στη λ περίοδο (I_λ)

Ο υπολογισμός του τμήματος τόκου που καταβάλλεται στη λ περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{I_\lambda = \left(N \cdot C - N \cdot C \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^{\lambda-1} - 1}{i} \right) \cdot i}$$

όπου:

* N = ο αριθμός των ομολογιών του δανείου
* C = η ονομαστική αξία της ομολογίας

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. το τμήμα τόκου που καταβάλλεται στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{I_\lambda = (\,N \cdot C - N \cdot C \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^{\lambda-1} - 1}{i}) \cdot i} =>$$
$$\boldsymbol{I_3 = (\,10.000 \cdot 200 - 10.000 \cdot 200 \cdot \frac{0,07}{(1+0,07)^4 - 1} \cdot \frac{(1+0,07)^{3-1} - 1}{0,07}) \cdot i} =>$$
$$\boldsymbol{I_3 = € \, 74.728,89}$$

<u>Σημείωση:</u> Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζει μικροδιαφορά με το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον παραπάνω πίνακα απόσβεσης, επειδή στον πίνακα αυτό λαμβάνουμε τον ακέραιο αριθμό των εξοφλημένων ομολογιών ανά έτος.

<u>ε) Υπολογισμός του υπόλοιπου ανεξόφλητου δανείου στη λ περίοδο (K_λ)</u>

Ο υπολογισμός του υπόλοιπου ανεξόφλητου δανείου στη *λ* περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{K_\lambda = N \cdot C - E_\lambda}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. το υπόλοιπο ανεξόφλητο δάνειο στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{K_\lambda = N \cdot C - E_\lambda} =>$$
$$\boldsymbol{K_3 = 10.000 \cdot 200 - 1.448.171,74} =>$$
$$\boldsymbol{K_3 = € \, 551.828,26}$$

<u>Σημείωση:</u> Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζει μικροδιαφορά με το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον παραπάνω πίνακα απόσβεσης, επειδή στον πίνακα αυτό λαμβάνουμε τον ακέραιο αριθμό των εξοφλημένων ομολογιών ανά έτος.

<u>στ) Υπολογισμός του αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν στη *λ* περίοδο (ν_λ)</u>

Ο υπολογισμός του αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν στη λ περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{\nu_\lambda = \frac{P_\lambda}{C}}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. ο αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{\nu_\lambda = \frac{P_\lambda}{C}} =>$$
$$\boldsymbol{\nu_3 = \frac{P_3}{C}} =>$$

$$\boldsymbol{\nu_3} = \frac{\mathbf{515.727,34}}{\mathbf{200}} =>$$
$$\boldsymbol{\nu_3} = \text{€}\ \mathbf{2.579}$$

Σημείωση: Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζει μικροδιαφορά με το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον παραπάνω πίνακα απόσβεσης, επειδή στον πίνακα αυτό λαμβάνουμε τον ακέραιο αριθμό των εξοφλημένων ομολογιών ανά έτος.

ζ) Υπολογισμός του συνολικού αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν μέχρι και την *λ* περίοδο (M_λ)

Ο υπολογισμός του συνολικού αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν μέχρι και την λ περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{M_\lambda} = \frac{\boldsymbol{E_\lambda}}{\boldsymbol{C}}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. ο αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{M_\lambda} = \frac{\boldsymbol{E_\lambda}}{\boldsymbol{C}}$$
$$\boldsymbol{M_3} = \frac{\boldsymbol{E_3}}{\boldsymbol{C}} =>$$
$$\boldsymbol{M_3} = \frac{\mathbf{1.448.171,74}}{\mathbf{200}} =>$$
$$\boldsymbol{M_3} = \text{€}\ \mathbf{7.241}$$

η) Υπολογισμός του αριθμού των ανεξόφλητων ομολογιών στην *λ* περίοδο (N_λ)

Ο υπολογισμός του αριθμού των ανεξόφλητων ομολογιών στην λ περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{N_\lambda} = \frac{\boldsymbol{K_\lambda}}{\boldsymbol{C}}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. ο αριθμός των ανεξόφλητων ομολογιών στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{N_\lambda} = \frac{\boldsymbol{K_\lambda}}{\boldsymbol{C}} =>$$
$$\boldsymbol{N_3} = \frac{\boldsymbol{K_3}}{\boldsymbol{C}} =>$$
$$\boldsymbol{N_3} = \frac{\mathbf{551.828,26}}{\mathbf{200}} =>$$
$$\boldsymbol{N_3} = \text{€}\ \mathbf{2.759}$$

Παράδειγμα

Έστω ότι ένα δάνειο €1.000.000 εκδίδεται στο άρτιο με 2.000 ομολογίες, ονομαστικής αξίας € 500, το οποίο πρέπει να αποσβεσθεί σε 10 χρόνια με την προοδευτική μέθοδο με ετήσιο επιτόκιο 5%. Ζητούνται να υπολογισθούν αλγεβρικά τα εξής:

1) το τοκοχρεολύσιο του πρώτου έτους,
2) το χρεολύσιο στο τέλος του τέταρτου έτους,
3) το ποσό του δανείου που θα εξοφληθεί στο τέλος του πέμπτου έτους,
4) το τμήμα του τόκου που θα εξοφληθεί στο τέλος του πέμπτου έτους,
5) το ποσό του υπόλοιπου χρέους στο τέλος του πέμπτου έτους,
6) ο αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τέλος του τέταρτου έτους
7) ο συνολικός αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τέλος του πέμπτου έτους.

Λύση:

1) Τοκοχρεολύσιο πρώτου έτους

$$R = N \cdot C \cdot [\, i + \frac{i}{(1+i)^n - 1}] =>$$
$$R = 2.000 \cdot 500 \cdot [\, 0{,}05 + \frac{0{,}05}{(1+0{,}05)^{10} - 1}] =>$$
$$R = 1.000.000 \cdot [\, 0{,}05 + \frac{0{,}05}{1{,}6289 - 1}] =>$$
$$R = 1.000.000 \cdot 0{,}1295 =>$$
$$\boldsymbol{R = € \; 129.504{,}57}$$

2) Χρεολύσιο στο τέλος του τέταρτου έτους

$$P_\lambda = N \cdot C \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{\lambda - 1} =>$$
$$P_4 = 2.000 \cdot 500 \cdot \frac{0{,}05}{(1+0{,}05)^{10} - 1} \cdot (1+0{,}05)^{4-1} =>$$
$$P_4 = 1.000.000 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}6289 - 1} \cdot 1{,}05^3 =>$$
$$P_4 = 1.000.000 \cdot 0{,}0795 \cdot 1{,}1576 =>$$
$$\boldsymbol{P_4 = € \; 92.036{,}48}$$

3) Ποσό του δανείου που θα εξοφληθεί στο τέλος του πέμπτου έτους

$$E_\lambda = N \cdot C \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^\lambda - 1}{i} =>$$
$$E_5 = 2.000 \cdot 500 \cdot \frac{0{,}05}{(1+0{,}05)^{10} - 1} \cdot \frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} =>$$
$$E_5 = 1.000.000 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}6289 - 1} \cdot \frac{1{,}2763 - 1}{0{,}05} =>$$
$$E_5 = 1.000.000 \cdot 0{,}0795 \cdot 5{,}5256 =>$$
$$\boldsymbol{E_5 = € \; 439.312{,}96}$$

4) Τμήμα του τόκου που θα εξοφληθεί στο τέλος του πέμπτου έτους

$$I_\lambda = (N \cdot C - N \cdot C \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^{\lambda-1} - 1}{i}) \cdot i =>$$
$$I_5 = \left(2.000 \cdot 500 - 2.000 \cdot 500 \cdot \frac{0{,}05}{(1+0{,}05)^{10} - 1} \cdot \frac{(1+0{,}05)^{5-1} - 1}{0{,}05} \right) \cdot 0{,}05 =>$$
$$I_5 = \left(1.000.000 - 1.000.000 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}6289 - 1} \cdot \frac{1{,}2155 - 1}{0{,}05} \right) \cdot 0{,}05 =>$$
$$I_5 = (1.000.000 - 1.000.000 \cdot 0{,}0795 \cdot 4{,}3101) \cdot 0{,}05 =>$$
$$\boldsymbol{I_5 = € \ 32.866,27}$$

5) Ποσό του υπόλοιπου χρέους στο τέλος του πέμπτου έτους

$$K_\lambda = N \cdot C - E_\lambda =>$$
$$K_5 = 2.000 \cdot 500 - 439.312{,}96 =>$$
$$\boldsymbol{K_3 = € \ 560.687,04}$$

6) Αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τέλος του τέταρτου έτους

$$\nu_\lambda = \frac{P_\lambda}{C} =>$$
$$\nu_4 = \frac{92.036{,}48}{500} =>$$
$$\boldsymbol{\nu_4 = 184}$$

7) Συνολικός αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τέλος του πέμπτου έτους

$$M_\lambda = \frac{E_\lambda}{C}$$
$$M_5 = \frac{439.312{,}96}{500} =>$$
$$\boldsymbol{M_5 = € \ 879}$$

6.6. Απόσβεση ομολογιακών δανείων σε τιμή διαφορετική από το άρτιο, με την προοδευτική μέθοδο

6.6.1. Η σύνταξη του πίνακα απόσβεσης ομολογιακού δανείου

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο όπως ακριβώς ισχύει και στην απόσβεση δανείων στο άρτιο, η δόση του δανείου είναι τοκοχρεολυτική, δηλαδή αποτελεί άθροισμα του χρεολυσίου (μέρους του κεφαλαίου του δανείου) και το τόκου (μέρους των συνολικών τόκων του δανείου), που εξοφλούνται με κάθε καταβολή, και δεν είναι σταθερή σε κάθε έτος.

Στην περίπτωση όμως της απόσβεσης ομολογιακών δανείων σε τιμή διαφορετική από το άρτιο ισχύουν οι εξής διαφορές:

Οι ομολογίες εξοφλούνται στην τιμή εξόφλησης (C') και όχι στην ονομαστική αξία τους. Το επιτόκιο επομένως βάσει του οποίου υπολογίζονται οι τόκοι αντιστοιχεί στην τιμή εξόφλησης, άρα είναι διαφορετικό του επιτοκίου έκδοσης του ομολογιακού δανείου. Το διαφορετικό αυτό επιτόκιο είναι το πραγματικό επιτόκιο του δανείου, που θα το παριστάνουμε με i' και θα δίδεται από την σχέση:

$$\boldsymbol{i'} = \frac{\boldsymbol{C} \cdot \mathbf{i}}{\boldsymbol{C'}}$$

Επομένως για το πρώτο έτος η δόση του δανείου υπολογίζεται από την εξής σχέση:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{C'} \cdot [\ \boldsymbol{i'} + \frac{\boldsymbol{i'}}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{i'})^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1}}$$

όπου:

* N = ο αριθμός των ομολογιών του δανείου
* C' = η τιμή εξόφλησης της ομολογίας
* i' = το πραγματικό επιτόκιο του δανείου
* n = η χρονική διάρκεια του δανείου σε έτη

Για κάθε επόμενο έτος, η δόση είναι ίση με το άθροισμα της δόσης του πρώτου έτους και το υπόλοιπο χρεολύσιο του προηγούμενου έτους αυξημένο κατά τους τόκους του. Ο τόκος της κάθε δόσης υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το επιτόκιο έκδοσης με το ανεξόφλητο κεφάλαιο του δανείου της προηγούμενης δόσης, δηλαδή το ποσό του τόκου της κάθε δόσης είναι μικρότερο από το αντίστοιχο της προηγούμενης δόσης, και υπολογίζεται από τον εξής τύπο:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{K_\lambda} \cdot \boldsymbol{i'}$$

όπου:

* K_λ = το ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου της προηγούμενης δόσης.

Το διαθέσιμο χρεολύσιο της κάθε δόσης υπολογίζεται αφαιρώντας από το ποσό της δόσης το ποσό του τόκου της, δηλαδή το ποσό του διαθέσιμου χρεολυσίου της κάθε δόσης είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο της προηγούμενης δόσης, και υπολογίζεται από την εξής σχέση:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}$$

Με βάση τα παραπάνω συντάσσεται ο πίνακας εξυπηρέτησης του δανείου, όπου αποτυπώνονται οι δόσεις του, η ανάλυση της κάθε δόσης σε τόκο και χρεολύσιο, το σωρευμένο εξοφλημένο κεφάλαιο δανείου και επίσης το υπόλοιπο ανεξόφλητο κεφάλαιο δανείου με την καταβολή της κάθε δόσης. Σύμφωνα με τα παραπάνω συντάσσεται ο πίνακας απόσβεσης του ομολογιακού δανείου.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι ένα δάνειο € 2.000.000 εκδόθηκε σε 10.000 ομολογίες, ονομαστικής αξίας 200€, το οποίο πρέπει να αποσβεσθεί σε 4 χρόνια με την προοδευτική μέθοδο με ετήσιο επιτόκιο 7% και τιμή εξόφλησης της ομολογίας € 240. Ζητείται να συνταχθεί ο πίνακας απόσβεσης του.

<u>Λύση:</u>

Καταρχήν υπολογίζεται το πραγματικό επιτόκιο απόσβεσης του δανείου ως εξής:

$$i' = \frac{C \cdot \mathrm{i}}{C'} \Rightarrow$$
$$i' = \frac{200 \cdot 0,07}{240} \Rightarrow$$
$$i' = 0,06$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η τοκοχρεολυτική δόση του πρώτου έτους του δανείου ως εξής:

$$R = N \cdot C' \cdot [\, i' + \frac{i'}{(1+i')^n - 1} \Rightarrow$$
$$R = 10.000 \cdot 240 \cdot [\, 0,06 + \frac{0,06}{(1+0,06)^4 - 1} \Rightarrow$$
$$R = €\, 689.978,19$$

<u>Πίνακας απόσβεσης δανείου</u>

Έτη	Τοκοχρεολύσιο (R)	Τόκος	Διαθέσιμο Χρεολύσιο για Εξόφληση Ομολογιών	Αριθμός Εξοφλημένων Ομολογιών	Χρεολύσιο που χρησιμοποιήθηκε για Εξόφληση Ομολογιών	Υπόλοιπο Χρεολυσίου στο Τέλος του Έτους	Αριθμός Ομολογιών σε ζωή	Υπόλοιπο Χρέους
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	689.978,17	140.000,00	549.978,17	2.291,00	549.840,00	138,17	7.709,00	1.850.160,00
2	690.124,39	107.926,00	582.198,39	2.425,00	582.000,00	198,39	5.284,00	1.268.160,00
3	690.188,13	73.976,00	616.212,13	2.567,00	616.080,00	132,13	2.717,00	652.080,00
4	690.118,00	38.038,00	652.080,00	2.717,00	652.080,00	0,00	0,00	0,00

Στήλη 2: Το τοκοχρεολύσιο του πρώτους έτους υπολογίζεται σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο (2). Το τοκοχρεολύσιο για κάθε επόμενο έτος είναι ίσο με το τοκοχρεολύσιο του πρώτου έτους και το ποσό του υπόλοιπου χρεολυσίου του προηγούμενου έτους της στήλης 7 αυξημένου κατά τους τόκους του, όπως φαίνεται στο κελί του δεύτερου έτους στην εν λόγω στήλη.

Στήλη 3: Ο τόκος του κάθε έτους υπολογίζεται στο υπόλοιπο χρέους της στήλης 9, εκτός από το πρώτο έτος, όπου υπολογίζεται στο συνολικό ποσό του χρέους, δηλαδή στο σύνολο του αριθμού των ομολογιών (10.000) επί την τιμή εξόφλησης της ομολογίας (240€).

Στήλη 4: Το διαθέσιμο χρεολύσιο για την εξόφληση ομολογιών για κάθε έτος είναι η διαφορά των στηλών 2 και 3.

Στήλη 5: Ο αριθμός εξοφλημένων ομολογιών του κάθε έτους υπολογίζεται διαιρώντας το ποσό του διαθέσιμου χρεολυσίου για την εξόφληση ομολογιών του αντίστοιχου έτους με την τιμή εξόφλησης της ομολογίας. Καταχωρούμε δε από την παραπάνω διαίρεση τον ακέραιο αριθμό του πηλίκου της.

Στήλη 6: Το χρεολύσιο που χρησιμοποιήθηκε για εξόφληση ομολογιών στο κάθε έτος αποτελεί την αξία των εξοφλημένων ομολογιών του ίδιου έτους της στήλης 5, και υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας ανά έτος τον αριθμό των εξοφλημένων ομολογιών με την τιμή εξόφλησης της ομολογίας.

Στήλη 7: Το υπόλοιπο χρεολυσίου στο τέλος του έτους για κάθε έτος είναι η διαφορά των στηλών 4 και 6.

Στήλη 8: Ο αριθμός ομολογιών σε ζωή για κάθε έτος αποτελεί τη διαφορά του αριθμού των ανεξόφλητων ομολογιών με τον αριθμό των εξοφλημένων ομολογιών της στήλης 5. Για το πρώτο έτος αφαιρείται ο αριθμός των εξοφλημένων ομολογιών από το συνολικό αριθμό ομολογιών του δανείου.

Στήλη 9: Το υπόλοιπο χρέους για κάθε έτος αποτελεί την αξία των ομολογιών σε ζωή της στήλης 8, και υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των ομολογιών σε ζωή με την τιμή εξόφλησης της ομολογίας.

6.6.2. Υπολογισμός με αλγεβρικό τρόπο των στοιχείων ομολογιακού δανείου

α) Υπολογισμός τοκοχρεολυσίου

Ο υπολογισμός του τοκοχρεολυσίου της πρώτης περιόδου γίνεται με την σχέση:

$$\boldsymbol{R = N \cdot C' \cdot [\, i' + \frac{i'}{(1+i')^{n}-1}\,]}$$

β) Υπολογισμός του αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν στη λ περίοδο (ν_λ)

Ο υπολογισμός του αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν στη λ περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{\nu_\lambda = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^{n}-1} \cdot (1+i')^{\lambda-1}}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. ο αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{\nu_\lambda = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^{n}-1} \cdot (1+i')^{\lambda-1} =>}$$
$$\boldsymbol{\nu_3 = 10.000 \cdot \frac{0,06}{(1+0,06)^{4}-1} \cdot (1+0,06)^{3-1} =>}$$
$$\boldsymbol{\nu_3 = 10.000 \cdot 0,2286 \cdot 1,1236 =>}$$
$$\boldsymbol{\nu_3 = 2.568}$$

<u>Σημείωση:</u> Το αποτέλεσμα αυτό παρουσιάζει μικροδιαφορά με το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον παραπάνω πίνακα απόσβεσης, επειδή στον πίνακα αυτό λαμβάνουμε τον ακέραιο αριθμό των εξοφλημένων ομολογιών ανά έτος.

γ) Υπολογισμός του συνολικού αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν μέχρι και την *λ* περίοδο (M_λ)

Ο υπολογισμός του συνολικού αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν μέχρι και την *λ* περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{M_\lambda = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^n - 1} \cdot \frac{(1+i')^\lambda - 1}{i'}}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. ο αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{M_\lambda = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^n - 1} \cdot \frac{(1+i')^\lambda - 1}{i'}} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{M_3 = 10.000 \cdot \frac{0,06}{(1+0,06)^4 - 1} \cdot \frac{(1+0,06)^3 - 1}{0,06}} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{M_3 = 10.000 \cdot 0,2286 \cdot 2,06} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{M_3 = 4.709}$$

δ) Υπολογισμός του αριθμού των ανεξόφλητων ομολογιών στην *λ* περίοδο (N_λ)

Ο υπολογισμός του αριθμού των ανεξόφλητων ομολογιών στην λ περίοδο γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{N_\lambda = N - N \cdot \frac{i'}{(1+i')^n - 1} \cdot \frac{(1+i')^\lambda - 1}{i'}}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα π.χ. ο αριθμός των ανεξόφλητων ομολογιών στο τρίτο έτος υπολογίζεται με τη χρήση της παραπάνω σχέσης ως εξής:

$$\boldsymbol{N_\lambda = N - N \cdot \frac{i'}{(1+i')^n - 1} \cdot \frac{(1+i')^\lambda - 1}{i'}} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{N_3 = 10.000 - 10.000 \cdot \frac{0,06}{(1+0,06)^4 - 1} \cdot \frac{(1+0,06)^3 - 1}{0,06}} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{N_3 = 10.000 - 10.000 \cdot 0,2286 \cdot 2,06} \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{N_3 = 5.291}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω ότι ένα δάνειο € 500.000 εκδίδεται σε 1.000 ομολογίες, ονομαστικής αξίας 500€, το οποίο θα εξοφληθεί σε 10 χρόνια με την προοδευτική μέθοδο με ετήσιο επιτόκιο 8% και τιμή εξόφλησης της ομολογίας € 530. Ζητούνται τα εξής:

1) το τοκοχρεολύσιο του πρώτου έτους,

2) ο αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τέλος του τέταρτου έτους,

3) ο συνολικός αριθμός των ομολογιών που θα έχουν εξοφληθεί στο τέλος του τρίτου έτους,

4) ο αριθμός των ανεξόφλητων ομολογιών στο τέλος του δεύτερου έτους.

Λύση:

1) Τοκοχρεολύσιο του πρώτου έτους

Επειδή το δάνειο θα εξοφληθεί σε τιμή ομολογίας διαφορετικά από το άρτιο, ο υπολογισμός του τοκοχρεολυσίου του πρώτου έτους θα γίνει με εφαρμογή της γνωστής σχέσης:

$$\mathbf{R = N \cdot C' \cdot [\, i' + \frac{i'}{(1+i')^{n}-1}\,]}$$

Καταρχήν υπολογίζεται το πραγματικό επιτόκιο απόσβεσης του δανείου σύμφωνα με την προαναφερόμενη σχέση ως εξής:

$$\boldsymbol{i' = \frac{C \cdot \mathrm{i}}{C'}}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η τοκοχρεολυτική δόση του πρώτου έτους του δανείου με την απευθείας εφαρμογή της προαναφερόμενης σχέσης ως εξής:

$$\mathbf{R = N \cdot C' \cdot [\, i' + \frac{i'}{(1+i')^{n}-1}\,] =>}$$
$$\mathbf{R = 1.000 \cdot 530 \cdot [\, 0,0755 + \frac{0,0755}{(1+0,0755)^{10}-1}\,] =>}$$
$$\mathbf{R = 530.000 \cdot 0,1460 =>}$$
$$\mathbf{R = 77.379.93}$$

2) Αριθμός των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τέλος του τέταρτου έτους

Ο υπολογισμός του αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τέλος του τέταρτου έτους γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{\nu_\lambda = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^{n}-1} \cdot (1+i')^{\lambda-1} =>}$$
$$\boldsymbol{\nu_4 = 1.000 \cdot \frac{0,0755}{(1+0,0755)^{10}-1} \cdot (1+0,0755)^{4-1} =>}$$
$$\boldsymbol{\nu_4 = 1.000 \cdot 0,0705 \cdot 1,2439 =>}$$
$$\boldsymbol{\nu_4 = 88}$$

3) Συνολικός αριθμός των ομολογιών που θα έχουν εξοφληθεί στο τέλος του τρίτου έτους

Ο υπολογισμός του συνολικού αριθμού των ομολογιών που θα εξοφληθούν στο τέλος του τρίτου γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$\boldsymbol{M_\lambda = N \cdot \frac{i'}{(1+i')^{n}-1} \cdot \frac{(1+i')^{\lambda}-1}{i'} =>}$$

$$M_3 = 1.000 \cdot \frac{0,0755}{(1+0,0755)^{10}-1} \cdot \frac{(1+0,0755)^3-1}{0,0755} =>$$
$$M_3 = 1.000 \cdot 0,0705 \cdot 3,2321 =>$$
$$M_3 = 228$$

4) Αριθμός των ανεξόφλητων ομολογιών στο τέλος του δεύτερου έτους

Ο υπολογισμός του αριθμού των ανεξόφλητων ομολογιών στο τέλος του δεύτερου έτους γίνεται με τη χρήση της παρακάτω σχέσης:

$$N_\lambda = N - N \cdot \frac{i'}{(1+i')^n-1} \cdot \frac{(1+i')^\lambda-1}{i'} =>$$
$$N_2 = 1.000 - 1.000 \cdot \frac{0,0755}{(1+0,0755)^{10}-1} \cdot \frac{(1+0,0755)^2-1}{0,0755} =>$$
$$N_2 = 1.000 - 1.000 \cdot 0,0705 \cdot 2,0755 =>$$
$$N_2 = 854$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Πετράκης Π., *«Αξιολόγηση και Χρηματοοικονομική Διοίκηση»,* Τόμος Α', Εκδοτικές Επιχειρήσεις "Το Οικονομικό", Αθήνα, 1999,

- Κορλίρας Π., *«Νομισματική Θεωρία»,* Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα, 2000,

- Μωυσιάδη Χ., *«Ανώτερα Μαθηματικά»,* Εκδόσεις Χριστοδουλίδη, Θεσσαλονίκη, 2004,

- Κιντής Α., *«Μαθηματικά: Οικονομικο-Διοικητικών Επιστημών»,* Τόμοι Α'-Β', Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, 2002,

- Θαλασσινός Λ. - Κόκοτος Δ., *«Μαθηματικά για Οικονομολόγους»,* Εκδόσεις Διονίκιος, Αθήνα, 2009,

- Αποστολόπουλος Θ., *«Οικονομικά Μαθηματικά και Στοιχεία Τραπεζικών Εργασιών»,* Έκδοση Ευγενίδειου Ιδρύματος, Αθήνα, 1980,

- Βόσκογλου Μ., *«Εφαρμοσμένα Μαθηματικά»,* Μακεδονικές Εκδόσεις, Αθήνα, 2002,

- Κατοπόδη Ε. - Κικίλα Π., *«Οικονομικά Μαθηματικά»,* Μακεδονικές Εκδόσεις, Αθήνα, 1994,

- Παπαμιχαήλ Δ., *«Οικονομικά Μαθηματικά»,* Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Αθήνα, 1993,

- Ξεπαπαδέας Α., *«Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά»,* Εκδόσεις Σμπίλιας, Αθήνα, 1989,

- Αλεξανδρής Ν., *«Οικονομικά Μαθηματικά»,* Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς, 1985,

- Αποστολόπουλος Θ., *«Οικονομικά Μαθηματικά και Στοιχεία Τραπεζικών Εργασιών»,* Αθήνα, 1998,