ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ
ΙΔΡΥΜΑ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ & ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Πρόοδοι, ράντες και εφαρμογές τους

ΒΑΓΕΝΑΣ ΣΤΥΛ. ΣΠΥΡΙΔΩΝΑΣ (Α.Μ. 14901)
ΜΥΛΩΝΑΣ ΙΩΑΝ. ΘΕΟΔΩΡΟΣ (Α.Μ. 15851)
ΠΑΠΑΔΟΓΚΩΝΑΣ ΠΑΝ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ (Α.Μ. 15875)

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ
ΜΕΓΑΡΙΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Μ Ε Σ Ο Λ Ο Γ Γ Ι 2 0 1 6

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία με τίτλο «ΠΡΟΟΔΟΙ, ΡΑΝΤΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ» εκπονήθηκε από φοιτητές του Τμήματος Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής της Σχολής Διοίκησης και Οικονομίας του Ανώτατου Τεχνολογικού Ιδρύματος Δυτικής Ελλάδας (έδρα Ι.Π. Μεσολογγίου), με σκοπό την ανάλυση και την κατανόηση του χρηματοπιστωτικού συστήματος υπολογισμού του οφειλόμενου τόκου σε χορηγούμενα δάνεια ή αποδιδόμενου τόκου σε κατατεθειμένα κεφάλαια.

Ευχαριστούμε πολύ τον αξιότιμο καθηγητή μας κο Μεγαρίτη Αθανάσιο που μας υπέδειξε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα καθώς επίσης και για την πολύτιμη βοηθειά του.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το βασικότερο συνδετικό κρίκο μεταξύ των επιμέρους κομματιών για την ανάπτυξη μιας σύγχρονης οικονομίας αποτελεί ένα αποτελεσματικό και ανταγωνιστικό χρηματοπιστωτικό σύστημα. Οι τράπεζες και η πραγματική οικονομία βρίσκονται σε συνεχή επαφή και αλληλεπίδραση μεταξύ τους

Το εύρος των τραπεζικών προϊόντων και υπηρεσιών διευκολύνουν τη δημιουργία ενός ανταγωνιστικού περιβάλλοντος, μέσα στο οποίο μπορούν να κινηθούν σε πλεονεκτική θέση οι καταναλωτές, με γνώμονα την οικονομική βελτίωσή τους με αποτέλεσμα την καλυτέρευση του βιοτικού τους επιπέδου. Μέσα από πολλές επιλογές, μπορούν να διασφαλίζουν συμφέροντες όρους δανεισμού για τις ανάγκες τους, αλλά και να συγκρίνουν τις λοιπές υπηρεσίες σε όλα τα επίπεδα.

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τον μηχανισμό υπολογισμού των τόκων επί οφειλόμενων δανείων (επαγγελματικών, στεγαστικών, καταναλωτικών, προσωπικών) καθώς και των τόκων από κατατεθειμένα κεφάλαια.

Ειδικότερα αναφέρεται στις ακολουθίες, στις προόδους, στον ανατοκισμό και στις ράντες καθώς επίσης και στις εφαρμογές τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τις ακολουθίες, τις προόδους (**Κεφάλαιο 1**), τον ανατοκισμό (**Κεφάλαιο 2**), τις ράντες (**Κεφάλαιο 3**) καθώς και τις εφαρμογές τους και τον τρόπο που αυτά σχετίζονται μεταξύ τους (**Κεφάλαιο 4**).

Ως ακολουθία ορίζεται η απεικόνιση ενός συνόλου φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί ακολουθούν ο ένας τον άλλο με λογική σειρά, δηλαδή αυξανόμενοι η μειούμενοι κατά τον ίδιο τρόπο και κατά την ίδια ποσότητα κάθε φορά.

Οι ακολουθίες μπορούν να διαχωριστούν στα εξής είδη: ορισμένες ή αόριστες, ανάλογα με το αν ορίζονται η όχι οι όροι τους και συγκλίνουσες η αποκλίνουσες, οι οποίες ακολουθούνται από κριτήρια, ιδιότητες, και κατηγορίες που μελετώνται στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

Ένας άλλος τρόπος ορισμού των ακολουθιών είναι ο αναδρομικός τύπος κατά τον οποίο μας δίνεται η δυνατότητα γνωρίζοντας τον πρώτο όρο, τον τρόπο που λειτουργεί η ακολουθία, καθώς και τον προηγούμενο να υπολογίσουμε οποιοδήποτε όρο της.

Επίσης, αν καλύπτουν κάποια ορισμένα κριτήρια μπορούν να είναι γνησίως αύξουσες ή γνησίως φθίνουσες, αυτό καλείται μονοτονία της ακολουθίας και φραγμένες, απόλυτα φραγμένες, άνω ή κάτω φραγμένες όπου είναι το φράγμα της ακολουθίας. Η μονοτονία της ακολουθίας, ως γνησίως αύξουσα και μόνο και το φράγμα της επηρεάζουν αντίστοιχα και κάποιες υποκατηγορίες της, τις υπακολουθίες.

Προέκταση και πιο ειδική κατηγορία των ακολουθιών αποτελούν οι πρόοδοι. Αποτελούνται από τρείς κατηγορίες οι οποίες είναι:

1) **Αριθμητική πρόοδος** είναι μια ακολουθία αριθμών κατά την οποία κάθε όρος της προκύπτει με πρόσθεση ενός ίδιου σταθερού αριθμού στον προηγούμενο του

2) **Γεωμετρική πρόοδος** είναι εξίσου ακολουθία αριθμών κατά την οποία κάθε όρος της προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό ενός σταθερού αριθμού διάφορου του μηδενός στον προηγούμενο όρο και τελευταία η

3) **Αρμονική πρόοδος** κατά την όποια πρέπει κάθε όρος να είναι διάφορος του μηδενός.

Και για τις τρεις κατηγορίες το σχετικό κεφάλαιο πραγματεύεται και σχετικά για την κάθε κατηγορία των προόδων όπως ο αρμονικός μέσος για την αρμονική πρόοδο, η μονοτονία, η εύρεση του γενικού όρου η παρεμβολή μέσου και ο υπολογισμός του αθροίσματος των όρων της αριθμητικής προόδου, και ο υπολογισμός των όρων και παρεμβολή των γεωμετρικών ενδιαμέσων στη γεωμετρική πρόοδο.

Στη συνέχεια θα δούμε και θα ασχοληθούμε με τον ανατοκισμό ο οποίος χρησιμοποιείται στα τραπεζικά ή χρηματοοικονομικά μαθηματικά. Βασικές έννοιες των μαθηματικών αυτών αποτελούν το κεφάλαιο το οποίο ορίζεται ως κάθε χρηματικό ποσό το οποίο χρησιμοποιείται για δανεισμό και έχει την ικανότητα παραγωγής. Ο χρόνος είναι το διάστημα κατά το οποίο το κεφάλαιο έχει την δυνατότητα να παράγει και διαιρείται σε πολιτικό, μικτό, και εμπορικό έτος με υποδιαιρέσεις το εξάμηνο, το μήνα και την ημέρα. Ο τόκος ορίζεται σαν η πρόσθετη αμοιβή που δίνει ο οφειλέτης στον δανειστή για όσο διάστημα χρησιμοποιεί το κεφάλαιο μέχρι την αποπληρωμή του και υπολογίζεται με ποικίλους τρόπους. Τελευταία έννοια είναι το επιτόκιο και αποτελεί τον τόκο του κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας για μια χρονική περίοδο, με τρία είδη: το προεξοφλητικό, το νόμιμο και το συμβατικό επιτόκιο.

Μεγάλο κομμάτι των τραπεζικών μαθηματικών αποτελεί ο ανατοκισμός.

Ως ανατοκισμός ορίζεται η διαδικασία κατά την οποία ο δανειστής δεν εισπράττει τον τόκο στο τέλος κάθε περιόδου αλλά τον προσθέτει στο κεφάλαιο με αποτέλεσμα να γίνεται ο ίδιος ο τόκος κεφάλαιο.

Βέβαια ο ανατοκισμός μπορεί να εφαρμοσθεί σε ορισμένες περιπτώσεις και όχι σε κάθε μορφή δανεισμού. Η λειτουργία του, από οικονομική άποψη, αποτελεί καθαρά παραγωγικό παράγοντα και ρυθμίζεται από νομοθετικές πράξεις και διατάξεις έτσι ώστε να είναι αρμονικά παραγωγική και εύρυθμη.

Στο σχετικό κεφάλαιο θα μελετήσουμε ακόμη κάποιες εφαρμογές του όπως στις καταθέσεις και στις τράπεζες, τη χρονική διάρκεια εφαρμογής του ανάλογα με κάθε εφαρμογή, τις προϋποθέσεις εφαρμογής του, και τους κινδύνους που ενέχει.

Η ράντα σαν όρος προέρχεται από τον αγγλικό όρο rent ή annuity και στα ελληνικά σημαίνει χρηματοσειρά ή χρηματοροή. Αποτελείται από τον όρο, την περίοδο, την αρχή και το τέλος της ράντας. Χαρακτηρίζεται από την αρχική αξία η οποία βοηθά στην αξιολόγηση των επενδύσεων, ανάλογα με το χρηματικό της ύψος σε σχέση με το ύψος της σχετικής επένδυσης και την τελική αξία της.

Οι ράντες ανάλογα με το είδος τους, αναλύονται στις εξής κατηγορίες:

1) Σταθερές και μεταβλητές

2) Ληξιπρόθεσμες και προκαταβλητέες

3) Πρόσκαιρες και διηνεκείς

4) Άμεσες και μέλλουσες

5) Ακέραιες και κλασματικές και τέλος στις

6) Βέβαιες και τυχαίες.

Σε κάθε περίπτωση, ανάλογα με το είδος, μπορούμε να τις υπολογίσουμε με διαφορετικό τρόπο καθώς επίσης και όποιο άλλο στοιχείο μας λείπει όπως τον όρο της το επιτόκιο ή την περίοδο της.

Οι ράντες εκτός από τις ευρέως γνωστές εφαρμογές τους όπως τα δάνεια και τα ενοίκια, χρησιμοποιούνται επίσης και σε αξιολόγηση των επενδύσεων για ευκολότερη και σωστότερη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων, καθώς επίσης και στην απόσβεση παγίων στοιχείων, ατομικά η μαζικά, με την βοήθεια της σύνθετης παραγωγικής διάρκειας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΠΡΟΟΔΟΙ

1.1 Ακολουθίες

1.1.1 Ορισμός

Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε απεικόνιση του συνόλου N των φυσικών αριθμών, στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών.Π.χ:3,5,7,…. ή 5,15,25,…Όπως είναι εύκολο να καταλάβει κανείς στις ακολουθίες οι αριθμοί διαδέχονται ο ένας τον άλλον με λογική σειρά. Στην πρώτη περίπτωση ο επόμενος αριθμός προκύπτει αν προσθέσουμε 4 στον προηγούμενο, ενώ στη δεύτερη περίπτωση ο επόμενος αριθμός προκύπτει αν προσθέσουμε στον προηγούμενο 10.

Μία ακολουθία μπορεί να είναι ορισμένη εφόσον είναι γνωστό ποιος πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε κάθε φυσικό αριθμό. Σε μία τέτοια περίπτωση έχουμε:

α) Δίνεται ο νιοστός όρος της ακολουθίας συναρτήσει του n,ώστε για κάθε n $\in$ N

$$\alpha_n = \frac{n}{n+1}$$

να έχουμε την τιμή του αντίστοιχου όρου π.χ. : , n=1,2,3…

Τότε έχουμε : α_1 = = , α_2 = = , $\alpha_3 = \frac{3}{3+1}$ =

Αν πρόκειται για μια τυχαία ακολουθία και όχι μια συγκεκριμένη όπως προηγουμένως, θέλοντας να δηλώσουμε ότι γνωρίζουμε τον νόμο βάσει του οποίου κάθε

n $\in$ N αντιστοιχεί σε έναν και μόνο πραγματικό αριθμό και γράφουμε:

(α_n),n=1,2,3…

$(\alpha_n)_{n\in N}$ n=1,2,3…ή πιο απλά

$(\alpha_n), n \in N$.

Αφού η ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το N και τιμές στο R έχουμε:

$\alpha: N \rightarrow R$ ή

$N \ni n \rightarrow \alpha_n \in R$

β) Ο δεύτερος τρόπος που μπορεί να ορισθεί μια ακολουθία είναι με τον αναδρομικό τύπο. Σε αυτήν την περίπτωση μας δίνεται ο πρώτος όρος της ακολουθίας και ένας νόμος μέσω του οποίου μπορεί να υπολογισθεί ένας τυχαίος όρος της ακολουθίας από τον προηγούμενο του. Τότε με τη γνωστή επαγωγική μέθοδο μπορούμε να υπολογίσουμε όλους τους όρους της ακολουθίας, αφού ο πρώτος όρος είναι γνωστός και με την υπόθεση ότι γνωρίζουμε τον όρο τάξης k μπορούμε να υπολογίσουμε τον όρο

τάξης k+1.Π.χ. δίνεται ακολουθία $\alpha_1=1, \alpha_2=1/2$ και $\alpha_{n+2}=\alpha_{n+1}-2\ \alpha_n+3$, $n \in N$, τότε λέμε

ότι η ακολουθία (α_n) ορίζεται από αναδρομικό τύπο δεύτερης τάξης και με τον ίδιο τρόπο μπορεί να γενικευθεί σε αναδρομικό τύπο τρίτης, τέταρτης τάξης κ.ο.κ.

1.1.2 Μονοτονία και φράγμα ακολουθίας

1.1.2.1 Μονοτονία

- Μία ακολουθία (α_n) λέγεται γνήσια αύξουσα

  όταν $\alpha_{n+1}>\alpha_n$ για κάθε $n \in N$.

Οπότε έχουμε: $(\alpha_n) \uparrow \Leftrightarrow \alpha_{n+1}>\alpha_n \ \forall\, n \in N$.

- Σε μία γνήσια αύξουσα ακολουθία ο τυχαίος αριθμός της ακολουθίας είναι μεγαλύτερος από κάθε προηγούμενο του, οπότε ένας ισοδύναμος ορισμός είναι

$(\alpha_n) \uparrow \Leftrightarrow \forall\, n, m \in N$ με $m>n \Leftrightarrow \alpha_m>\alpha_n$.

- Μία ακολουθία (α_n) λέγεται γνήσια φθίνουσα

  όταν $\alpha_{n+1}<\alpha_n$ για κάθε $n \in N$.

Οπότε έχουμε: $(\alpha_n) \downarrow \Leftrightarrow \alpha_{n+1}<\alpha_n \ \forall\, n \in N$.

- Σε μία γνήσια φθίνουσα ακολουθία ο τυχαίος αριθμός της ακολουθίας είναι μικρότερος από κάθε προηγούμενο του, οπότε ένας ισοδύναμος ορισμός είναι

$(\alpha_n) \downarrow \Leftrightarrow \forall\, n, m \in N$ με $m>n \Leftrightarrow \alpha_m<\alpha_n$.

Αν στους προηγούμενους ορισμούς ισχύει η ισότητα $\alpha_{n+1}=\alpha_n$ για τουλάχιστον μία τιμή του n τότε έχουμε $\alpha_{n+1}\geq\alpha_n$ ή $\alpha_{n+1}\leq\alpha_n$, $n \in N$, οπότε η ακολουθία θα λέγεται αύξουσα ή φθίνουσα αντίστοιχα και σημειώνουμε $a_n \uparrow$ ή $\alpha_n \downarrow$ αναλόγως.

Αν μία ακολουθία ικανοποιεί έναν από τους παραπάνω ορισμούς ονομάζεται μονότονη.

Για να διαπιστώσουμε την μονοτονία μιας ακολουθίας εργαζόμαστε με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

α) Σχηματίζουμε τη διαφορά α_{n-1} - α_n. Αν $\alpha_{n-1} - \alpha_n>0$, ή <0, $\forall\ n \in N$, η (α_n) είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα. Αν στις παραπάνω ανισότητες υπάρχει ένα n που να δίνει ισότητα τότε η (α_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα αντίστοιχα.

β) Αν οι όροι της ακολουθίας διατηρούν πρόσημο μπορούμε να θεωρήσουμε τον λόγο α_{n+1}/α_n και τον συγκρίνουμε με τη μονάδα και με αυτόν τον τρόπο βγάζουμε συμπέρασμα για την μονοτονία.

γ) Για να δείξουμε ένα συγκεκριμένο είδος μονοτονίας ξεκινάμε με αυτό που θέλουμε να δείξουμε και με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε σχέση που ισχύει.

δ) Όταν η ακολουθία μας δίνεται από αναδρομικό τύπο, τότε συνήθως διαπιστώνουμε τη μονοτονία με την χρήση της επαγωγικής μεθόδου.

1.1.2.2 Φράγμα

Μία ακολουθία (α_n) είναι άνω φραγμένη όταν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός Β τέτοιος ώστε $\alpha_n\leq B$, $\forall\ n \in N$. Ο Β λέγεται ένα άνω φράγμα της (α_n). Κάθε $B'>B$ είναι και αυτός ένα άνω φράγμα. Στην περίπτωση που η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα τότε $\alpha_n<\alpha_1$, $\forall\ n \in N$, τότε ένα άνω φράγμα είναι ο πρώτος όρος της ακολουθίας.

Έτσι κατ' αναλογία έχουμε:

- Μία ακολουθία ($α_n$) λέγεται κάτω φραγμένη όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός b τέτοιος ώστε $b \leq a_n$, $\forall$ n $\in$ N. Το b λέγεται κάτω φράγμα της ($α_n$).
- Μία ακολουθία (a_n) λέγεται φραγμένη όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί B,b τέτοιοι ώστε $b \leq α_n \leq B$, $\forall$ n $\in$ N.
- Μία ακολουθία ($α_n$) λέγεται απόλυτα φραγμένη όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός A τέτοιος ώστε $|α_n| \leq A$, $\forall$ n $\in$ N.

1.1.3 Υπακολουθίες πραγματικών αριθμών

Υπακολουθία μιας ακολουθίας ($α_n$) ονομάζεται κάθε ακολουθία (b_n) με $b_{n=}α_{kn}$, n $\in$ N, όπου (k_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

Παράδειγμα 1: Αν από την ακολουθία ($α_n$) λάβουμε τους όρους που έχουν άρτιους δείκτες 2,3,6…2n…άρα τους όρους $α_2,α_4,α_6,…α_{2n}$…σχηματίζεται η ακολουθία $b_n=α_{2n}$.Η b_n είναι υπακολουθία της $α_n$. Με τον ίδιο τρόπο για k_n=2n-1 μπορούμε να σχηματίσουμε την υπακολουθία $b_n=α_{2n-1}$ με τους περιττούς δείκτες, δηλαδή την υπακολουθία $α_1,α_3,α_5…α_{2n-1}$…

Παράδειγμα 2: Αν k_n=3n τότε η (k_n) είναι γνησίως αύξουσα και σχηματίζεται η υπακολουθία ($α_{3n}$) δηλαδή η $α_3,α_6,α_9,…α_{3n}$…Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να σχηματίσουμε τις υπακολουθίες ($α_{3n-1}$) και ($α_{3n-2}$) δηλαδή τις $α_2,α_5,α_8…α_{3n-1}$…και $α_1,α_4,α_7…α_{3n-2…}$αντιστοίχως.

Παράδειγμα 3: Αν $k_n=2^n$, η (k_n) είναι γνησίως αύξουσα και σχηματίζεται η υπακολουθία ($α_2{}^n$), δηλαδή $α_2,α_4,α_8,α_{16}…α_2{}^n$…

Για να σχηματίσουμε τις υπακολουθίες ($α_{2n}$) και ($α_{2n-1}$) του παραδείγματος 1 χρησιμοποιούμε όλους τους όρους της ακολουθίας ($α_n$) για αυτό και λέμε ότι η ακολουθία (α_n) διαχωρίζεται στις υπακολουθίες (α_{2n}) και (α_{2n-1}). Με τον ίδιο τρόπο στο παράδειγμα 2 η ακολουθία (α_n) διαχωρίζεται στις υπακολουθίες (α_{3n}) και (α_{3n-1}) και (α_{3n-2}). Γενικότερα ένας τρόπος να διαχωρίσουμε την ακολουθία (a_n) είναι να θεωρήσουμε

τις υπακολουθίες (α_{rn}),($\alpha_{rn-(r-1)}$),..,(α_{rn-1}), $r \in N$.

Επίσης για τις υπακολουθίες ισχύουν οι εξής προτάσεις:

- Αν η ακολουθία (α_n) είναι φραγμένη τότε κάθε υπακολουθία αυτής (α_{k_n}) είναι φραγμένη. Όμοια αν η ακολουθία (α_n) είναι άνω κάτω φραγμένη τότε κάθε υπακολουθία της (α_{k_n}) είναι άνω κάτω φραγμένη.

- Αν έστω και μία υπακολουθία (α_{k_n}) της ακολουθίας (α_n) δεν είναι φραγμένη τότε και η ακολουθία (α_n) δεν είναι φραγμένη. Όμοια αν έστω και μια υπακολουθία της (α_n) δεν είναι άνω κάτω φραγμένη τότε και η ακολουθία (α_n) δεν είναι άνω κάτω φραγμένη.

- Αν η ακολουθία (α_n) είναι γνησίως αύξουσα, τότε και κάθε υπακολουθία αυτής (α_{k_n}) είναι γνησίως αύξουσα. Όμοια αν έστω και μία υπακολουθία της (α_n) είναι γνησίως φθίνουσα, τότε κάθε υπακολουθία αυτής (α_{k_n}) είναι γνησίως φθίνουσα.

- Αν (k_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία

  φυσικών αριθμών τότε $k_n \geq n$ για κάθε $n \in N$.

1.1.4 Σύγκλιση ακολουθιών στο R

1.1.4.1 Η έννοια της περιοχής

Περιοχή ενός πραγματικού αριθμού x_0 ονομάζουμε κάθε ανοικτό διάστημα (α,b) που περιέχει το x_0. Για την σύγκλιση ακολουθιών ιδιαίτερο ενδιαφέρον x_0

παρουσιάζουν οι περιοχές του x_0 της μορφής (x_0-ε, +ε) όπου ε πραγματικός θετικός αριθμός. Σε μια περιοχή τέτοιας μορφής το x_0 λέγεται κέντρο και ο θετικός ε ακτίνα της περιοχής.

x_0

Αν $\chi \in (x_0$-ε, +ε) τότε x_0-ε< x <x_0+ε⇔-ε< x –x_0<ε⇔| x –x_0|<ε.

Πολλές φορές χρησιμοποιείται η έκφραση "τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην οποιαδήποτε περιοχή του x_0". Με αυτήν την έκφραση εννοούμε ότι "όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός από πεπερασμένου πλήθους όροι, ανήκουν σε οποιαδήποτε περιοχή του x_0". Έτσι αν όλοι οι όροι της (α_n) ανήκουν σε

οποιαδήποτε περιοχή του x_0, θα υπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ώστε ∀ n ∈ N με $n \geq n_0$,

να έχουμε x_0-ε<α_n<x_0+ε, για κάθε ε>0, αφού ισχύει για την οποιαδήποτε περιοχή του x_0.

1.1.4.2 Μηδενικές ακολουθίες

Μία ακολουθία α_n λέγεται μηδενική αν όλοι οι όροι της ανήκουν σε οποιαδήποτε περιοχή του μηδενός. Μια τέτοια ακολουθία θα λέγεται μηδενική ή θα έχει όριο το 0 ή ότι τείνει στο 0 και θα σημειώνουμε:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \,\Psi\, a \to \mathbf{0}$$

Αν θέλαμε να δώσουμε έναν πιο συγκεκριμένο ορισμό θα λέγαμε: μια ακολουθία (α_n) λέγεται μηδενική μόνο όταν για κάθε ε θετικό υπάρχει δείκτης n_o,

που εξαρτάται από το ε, έτσι ώστε $|\alpha_n|$< ε για κάθε n ∈ N με $n \geq n_o$(ε).

Άρα έχουμε:

Παραδείγματα μηδενικών ακολουθιών είναι οι παρακάτω

a_n= , b_n= , c_n=1/n^k, k θετικός ρητός

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ορισμό ότι $\alpha_n \to 0$ ξεκινάμε από την σχέση $|\alpha_n|$<ε και με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε σχέση της μορφής n>f(ε). Σημειώνουμε τον δείκτη n_0(ε)=[f(ε)]+1 ο οποίος είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός από τον οποίο και μετά ισχύει $|\alpha_n|<\varepsilon$. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η (α_n) είναι μηδενική ακολουθία.

1.1.4.3 Συγκλίνουσες ακολουθίες σε πραγματικό αριθμό

Όταν μια ακολουθία α_n έχει την ιδιότητα όλοι της οι όροι να βρίσκονται σε οποιαδήποτε περιοχή του πραγματικού αριθμού α, τότε λέμε ότι η ακολουθία α_n συγκλίνει στο α ή ότι έχει όριο το α και γράφουμε:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \, \Psi \, a_n \to a$

Πιο συγκεκριμένα με έναν ορισμό:

Μια ακολουθία (α_n) λέμε ότι συγκλίνει στο $\alpha \in R$ ή ότι έχει όριο το $\alpha \in R$ ή ότι

τείνει στο πραγματικό αριθμό α, μόνο όταν για κάθε ε θετικό αριθμό υπάρχει δείκτης n_0

που εξαρτάται από το ε, έτσι ώστε $|\alpha_n-\alpha| < \varepsilon$ για κάθε $n \in N$ με $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Γράφουμε:

Αν θέλουμε να αποδείξουμε με τον ορισμό ότι μια ακολουθία (α_n) έχει όριο τον πραγματικό α τότε εργαζόμαστε όπως με τις μηδενικές ακολουθίες αφού

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$

1.1.4.4. Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

- Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο R έχει μόνο ένα όριο.
- Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο R είναι φραγμένη.

Από την ιδιότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει στο R.

- Αν για μια ακολουθία (α_n) έχουμε $\alpha_n \to \alpha$ τότε και κάθε υπακολουθία αυτής έχει όριο το α.

Από την ιδιότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι αν δυο υπακολουθίες της α_n δεν έχουν ίδιο το ίδιο όριο τότε η α_n δεν συγκλίνει στο R. Επίσης αν μια ακολουθία χωρίζεται σε ένα πλήθος υπακολουθιών που όλες έχουν κοινό όριο το α τότε και η ακολουθία α_n έχει όριο το α.

- Αν για μια ακολουθία (α_n) έχουμε $\alpha_n \to \alpha$ τότε $|\alpha_n| \to |\alpha|$.

  Αν $\alpha \neq 0$ το αντίστροφο δεν ισχύει.

  Π.χ. για την $\alpha_n=(-1)^n$ έχουμε ότι $|\alpha_n|=1$ $\forall n \in N$ οπότε

  $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 1$

  όμως η α_n δεν συγκλίνει αφού οι υπακολουθίες της α_{2n} και α_{2n-1} έχουν διαφορετικό όρια

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{2n} = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n-1}$$

  Αν α=0 ισχύει και το αντίστροφο αφού

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} [(-\alpha]_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = 0$$

- Αν για την ακολουθία (α_n) έχουμε $\alpha_n \to \alpha$, τότε $-\alpha_n \to -\alpha$.

- Αν για τις ακολουθίες (α_n),(b_n) έχουμε $|\alpha_n| \leq |b_n|$ για κάθε $n>n_1$ και $b_n \to 0$, τότε και $\alpha_n \to 0$.

- Αν για τις ακολουθίες (α_n),(b_n) έχουμε $\alpha_n \leq b_n$ ή μόνο $\alpha_n < b_n$ για κάθε $n>n_1$ και $\alpha_n \to \alpha$, $b_n \to b$, τότε $\alpha \leq b$.

- Αν οι ακολουθίες (α_n), (b_n), (c_n) ικανοποιούν

  την $b_n \leq \alpha_n \leq c_n$ για κάθε $n > n_1$ ή μόνο την $b_n < a_n < c_n$, $\forall n > n_1$ και

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha, \text{τότε} \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

- Το γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη ακολουθία δίνει σαν αποτέλεσμα μηδενική ακολουθία. Π.χ. αν $\alpha_n \rightarrow 0$ και b_n φραγμένη τότε $\alpha_n \times b_n \rightarrow 0$

- Αν οι ακολουθίες (α_n), (b_n) συγκλίνουν στο R, με $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $b_n \rightarrow b$, τότε και η (α_n+b_n) συγκλίνει στο R και $\alpha_n+b_n \rightarrow a+b$. Έτσι:

- Αν οι ακολουθίες (α_n), (b_n) συγκλίνουν στο R, με $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $b_n \rightarrow b$, τότε και η (αn˙bn) συγκλίνει στο R και $\alpha_n \dot{} b_n \rightarrow \alpha \dot{} b$. Έτσι:

- Αν η ακολουθία (α_n) με $\alpha_n \neq 0$, $\forall n \in N$, συγκλίνει στο R, με $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\alpha \neq 0$, τότε

  η ακολουθία $(1/\alpha_n)$ συγκλίνει στο $1/\alpha$.

- Αν η ακολουθία (α_n) συγκλίνει στο R με $\alpha_n \rightarrow a$ και η $(b_n) \neq 0$, $\forall n \in N$,

  συγκλίνει στο R με $b_n \rightarrow b \neq 0$, τότε η (α_n/b_n) συγκλίνει στο R και ισχύει

- Αν η ακολουθία (α_n) συγκλίνει στο R με $\alpha_n \rightarrow \alpha$, τότε η ακολουθία $(\sqrt{|\alpha_n|})$ συγκλίνει στο R και

  $\lim_{n \to \infty} \sqrt{|\alpha_n|} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} |\alpha_n|} = \sqrt{|\alpha_n|}$ (όριο τετραγωνικΨς ρΩζας ακολουθιών)

1.1.4.5 Βασικά όρια

Τα παρακάτω όρια χαρακτηρίζονται ως βασικά γιατί τα θεωρούμε γνωστά όταν αντιμετωπίζουμε θέματα σύγκλισης ακολουθιών.

- Αν $α_n=1/n^k$ όπου k θετικός αριθμός τότε $α_n \to 0$.
- Αν $α_n=\sqrt[n]{α}$ όπου α θετικός αριθμός τότε $α_n \to 1$.
- Αν $α_n=ω^n$ με $|ω| < 1$,$ω \in R$ τότε $α_n \to 0$
- Αν για την ακολουθία $(α_n)$ έχουμε $α_n \neq 0$, $\forall \in N$

και

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} \div a_n| = \lambda, με\ \lambda < 1\ τότε \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\ (για\ μηδενικXς\ ακολουθΩες)$$

1.1.5 Κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών στο R

Σε προβλήματα που η μαθηματική τους διατύπωση οδηγεί σε μία ακολουθία πραγματικών αριθμών, αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι να γνωρίζουμε αν η ακολουθία συγκλίνει ή όχι. Γιατί αν γνωρίζουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας θα βρίσκονται πολύ κοντά στο όριο της. Έτσι για να βρούμε την τιμή του ορίου αρκεί να πάρουμε την τιμή ενός όρου της ακολουθίας. Αν μάλιστα η ακολουθία είναι μονότονη τόσο καλύτερη προσέγγιση του ορίου θα έχουμε όσο πιο μεγάλη είναι η τάξη του ορίου που επιλέγουμε. Είναι αναγκαίο λοιπόν να γνωρίζουμε κάποια κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών σε πραγματικό αριθμό.

1.1.5.1 Ικανό κριτήριο σύγκλισης στο R

Αν μια ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, αν είναι αύξουσα συγκλίνει στο ελάχιστον άνω φράγμα, ενώ αν είναι φθίνουσα στο μέγιστο κάτω φράγμα.

1.1.5.2 Ικανό και αναγκαίο κριτήριο σύγκλισης στο R

Το κριτήριο αυτό βασίζεται έννοια της ακολουθίας Cauchy η οποία ορίζεται ως εξής:

Μια ακολουθία (α_n) λέγεται ακολουθία Cauchy μόνο όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει

δείκτης $n_o(\varepsilon)$ που εξαρτάται από το ε, τέτοιος ώστε $\forall\, n \geq n_o(\varepsilon)$ και $\forall m \geq n_o(\varepsilon)$, να

έχουμε
$|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$.
Αυτό που λέει ο παραπάνω ορισμός είναι ότι σε μια ακολουθία Cauchy όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν ο καθένας σε οποιαδήποτε περιοχή του άλλου.
Οπότε τελικά για να συγκλίνει μια ακολουθία στο R πρέπει και αρκεί να είναι ακολουθία Cauchy.

1.1.6 Αποκλίνουσες ακολουθίες

Όταν έχουμε μια ακολουθία (α_n) που όλοι οι όροι της βρίσκονται στο σε οποιαδήποτε περιοχή του $+\infty$ τότε λέμε ότι η ακολουθία α_n αποκλίνει στο $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \; \Psi \; a_n \to +\infty$$

Με τον ίδιο τρόπο αν όλοι οι όροι της α_n βρίσκονται σε οποιαδήποτε περιοχή του $-\infty$ λέμε ότι η α_n αποκλίνει στο $-\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \; \Psi \; a_n \to -\infty$$

Πιο συγκεκριμένα: λέμε ότι αν η ακολουθία (a_n) έχει όριο $+\infty$ μόνο για κάθε $M>0$,

τότε υπάρχει δείκτης $n_0(M)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \in N$ με $n \geq n_0(M)$ να έχουμε $a_n > M$.

Οπότε γράφουμε:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall \mathbf{M} > \mathbf{0} \; \exists \mathbf{n_0}(\mathbf{M}) : \forall\, \mathbf{n} \in \mathbf{N}, \mathbf{n} \geq \mathbf{n_0}\ (\mathbf{M}) \Rightarrow \alpha_n > M$$

Αν η ακολουθία (α_n) έχει όριο $-\infty$ μόνο για κάθε $M>0$ υπάρχει δείκτης $n_0(M)$

τέτοιος ώστε για κάθε $n \in N$ με $n \geq n_0(M)$ να έχουμε $a_n < -M$.

Οπότε γράφουμε:

Από τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε την ισοδυναμία:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff$$

$$\lim_{n\to\infty} [(-a]_n) = -\infty$$

1.1.6.1 Ιδιότητες αποκλινουσών ακολουθιών

Αν για μια ακολουθία (α_n) έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \text{και} \ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

τότε και για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty \ \text{και} \ \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = -\infty \ \text{αντΏστοιχα}$$

Αν για τις ακολουθίες (α_n),(b_n) ισχύει $\alpha_n \leq b_n$ ή μόνο $\alpha_n < b_n$, $\forall n \geq n_1$ τότε:

1. Αν
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

2. Αν
$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

- Έστω ότι για τις ακολουθίες (α_n),(b_n),(c_n) ισχύει $b_n \leq \alpha_n \leq c_n$ ή μόνο $b_n \leq \alpha_n \leq c_n$,

  $\forall n \geq n_1$ και

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \ \text{τότε} \ \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Αντίστοιχα και με το -∞.

Αν για την ακολουθία (α_n) ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

τότε η (α_n) δεν είναι φραγμένη. Με τον ίδιο τρόπο αν για την ακολουθία (α_n) ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

τότε η (α_n) δεν είναι κάτω φραγμένη.

- Αν η ακολουθία (α_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε η ακολουθία (α_n) αποκλίνει στο +∞. Με τον ίδιο τρόπο η ακολουθία (α_n) είναι φθίνουσα και δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε η (α_n) αποκλίνει στο -∞

- Αν
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

όπου α πραγματικός αριθμός ή +∞ ή -∞ και

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b$$

όπου b πραγματικός αριθμός ή +∞ ή -∞, τότε:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

εκτός από τις περιπτώσεις που (α=+∞,b=-∞)και(α=-∞,b=+∞).

Έτσι με την έννοια του ορίου είναι επιτρεπτές οι παρακάτω πράξεις:

α+(+∞)=+∞, (+∞)-α=+∞, α+(-∞)=-∞, α-(+∞)=-∞, (+∞)-α=+∞,

α-(-∞)=+∞, (-∞)-α=-∞, (+∞)+(+∞)=+∞, (-∞)+(-∞)=-∞,

(+∞)-(-∞)=+∞, (-∞)-(+∞)=-∞, όπου α πραγματικός αριθμός.

Με την έννοια του ορίου δεν μπορούμε να ορίσουμε τις εξής πράξεις:

(+∞)+(-∞), (-∞)+(+∞), (+∞)-(+∞), (-∞)-(-∞) και λέμε ότι έχουμε όριο απροσδιόριστης μορφής του αντίστοιχου τύπου.

(όριο αθροίσματος αποκλινουσών ακολουθιών)

Αν
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

όπου α πραγματικός αριθμός ή +∞ ή -∞ και

$\lim_{n\to\infty} b_n = b$

όπου b πραγματικός αριθμός ή +∞ ή -∞, τότε:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = a \times b$$

εκτός από τις περιπτώσεις όπου (α=0,b=+∞ ή -∞) και (α=+∞ ή -∞,b=0). Με βάση αυτήν την ιδιότητα μπορούμε να ορίσουμε τις εξής γενικευμένες πράξεις για τον πολλαπλασιασμό:

$x\cdot(+\infty)=+\infty$, $x\cdot(-\infty)=-\infty$,αν $x>0$, είναι θετικός πραγματικός αριθμός

$x(+\infty)=-\infty$,$x(-\infty)=+\infty$,αν $x<0$,είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός και

$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$.

Αν κάποιος από τους α,b είναι 0 και ο άλλος +∞ ή -∞, τότε το όριο lim $\alpha_n\cdot b_n$ μπορεί να δώσει πραγματικό αριθμό, +∞ ή -∞, ή να μην υπάρχει. Π.χ.:

Αν $\alpha_n=$ $\to 0$, $b_n=n^2\to+\infty$, τότε $\alpha_n\cdot b_n=n\to\infty$.

Αν $\alpha_n=1/n^2\to 0$, $b_n=n\to+\infty$, τότε $\alpha_n\cdot b_n=$ $\to 0$

Αν $\alpha_n=(-1)^n/n\to 0$, $b_n=n\to+\infty$, τότε $\alpha_n\cdot b_n=(-1)^n$, που δεν υπάρχει το όριο της.

Έτσι λέμε ότι οι πράξεις $0\cdot(+\infty)$, $0\cdot(-\infty)$ δεν είναι γενικά επιτρεπτές ή ότι το όριο είναι της αντίστοιχης απροσδιόριστης μορφής.
(όριο γινομένου αποκλινουσών ακολουθιών)

- Έστω ακολουθία (α_n) με $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n \in N$. Αν

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \Psi \ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Τότε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

- Έστω ακολουθία $(\alpha_n) \neq 0$ για κάθε $n \in N$. Αν

- Τότε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$$

Αν

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \, \kappa\alpha\iota \ \ a_n < 0 \, \gamma\iota\alpha \ \kappa\Phi\theta\varepsilon \ \mathbf{n} \ \in \ \mathbf{N}$$

Τότε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$$

Αν

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

και οι όροι της ακολουθίας δεν διατηρούν πρόσημο τότε δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n}$$

Π.χ. η ακολουθία $\alpha_n=(-1)^n/n$ συγκλίνει στο 0, $\alpha_n\to 0$, αλλά οι όροι της δεν διατηρούν πρόσημο, αφού οι άρτιοι αριθμοί α_{2n} είναι θετικοί, ενώ οι περιττοί όροι α_{2n-1} είναι αρνητικοί. Έτσι η ακολουθία $1/\alpha_n=n/(-1)^n$ δεν έχει όριο, αφού οι υπακολουθίες $1/\alpha_{2n}=2n \to +\infty$ και $1/\alpha_{2n-1}=-2n+1\to -\infty$ έχουν διαφορετικό όριο.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η πράξη δεν ορίζεται ή δεν είναι επιτρεπτή. Επειδή οι γενικεύσεις των πράξεων στο R

μαζί με το $+\infty$ ή το $-\infty$ γίνονται με την βοήθεια ορίων, για το μπορούμε να γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση που ο παρανομαστής γίνεται 0 ως όριο ακολουθίας θετικών όρων δίνει $+\infty$, ενώ στην περίπτωση που

γίνεται 0 ως όριο αρνητικών όρων δίνει $-\infty$. Αλλά γενικά η πράξη δεν είναι επιτρεπτή.

- Έστω οι ακολουθίες (α_n) και (b_n) με $b_n\neq 0$, για κάθε $n \in N$. Αν

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *με α πραγματικό αριθμό η* $+\infty$ Ψ $-\infty$ *και*

$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *με* **b πραγματικό αριθμό Ψ** $+\infty$ **Ψ** $-\infty$ **τότε**

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \div b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \div \lim_{n\to\infty} b_n = a \div b$$

- εκτός από τις περιπτώσεις όπου: ($\alpha=+\infty$ ή $\alpha=-\infty$, $b_n=+\infty$ ή $b_n=-\infty$), (α=+∞ ή α=-∞, b=0) και (α=πραγματικός αριθμός, b=0). Άρα για την διαίρεση δεν είναι επιτρεπτές οι παρακάτω πράξεις: +∞ ή -∞/+∞ ή -∞, +∞ ή

-∞/0, , . (όριο πηλίκου αποκλινουσών ακολουθιών)

Εν κατακλείδι μπορούμε να πούμε ότι δεν είναι επιτρεπτές οι παρακάτω πράξεις:

Για την πρόσθεση (+∞)+(-∞), (-∞)+(-∞).

Για την αφαίρεση (+∞)-(+∞), (-∞)-(-∞).

Για τον πολλαπλασιασμό 0˙(+∞ ή -∞).

Για την διαίρεση (+∞ ή -∞)/(+∞ ή -∞), (+∞ ή -∞)/0, 0/0, 1/0.

1.2 Πρόοδος

Οι πρόοδοι είναι μια ειδική κατηγορία των ακολουθιών και χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες: αρμονικές, αριθμητικές και γεωμετρικές.

1.2.1. Αρμονική Πρόοδος

1.2.1.1 Ορισμός

Μια ακολουθία αριθμών $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_n$ είναι αρμονική πρόοδος μόνο όταν $\alpha_n \neq 0 \ \forall \ n \in$

N και υπάρχει αριθμός ω ώστε να ισχύει:

$1/\alpha_{n+1}=1/\alpha_n + \omega, \ \forall \ n \ 1,2\ldots$

Ο τύπος για να υπολογίσουμε τον νιοστό όρο α_n μιας αρμονικής προόδου συναρτήσει του πρώτου όρου της α_1, της διαφοράς της ω και του n είναι ο εξής:

$\alpha_n=\alpha_1/(1+(n-1)\omega\alpha_1)$, $\forall\ n \in N$

1.2.1.2. Αρμονικός μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αρμονικής προόδου μόνο όταν ισχύει:

$\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$

Σε αυτήν την περίπτωση ο β αποκαλείται αρμονικός μέσος των α και γ.

Σαν γενικό ορισμό αποκαλούμε αρμονικό μέσο των ν αριθμών $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu \neq 0$ τον πραγματικό αριθμό

$M_H=\nu/(1/\alpha_1)+(1/\alpha_2)+\ldots+(1/\alpha_\nu)$

Πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει τύπος που να δίνει το άθροισμα Σ_ν των ν πρώτων όρων μιας αρμονικής προόδου.

1.2.1.3 Παρεμβολή Αρμονικών Ενδιάμεσων

Το πρόβλημα της αρμονικής παρεμβολής, όταν μας δίνονται δυο αριθμοί α και β και ο φυσικός μ, έγκειται στο να προσδιορίσουμε τους μ αριθμούς $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\mu$, ώστε οι αριθμοί $\alpha,\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_\mu,\beta$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αρμονικής περιόδου.

Για την λύση του προβλήματος αρκεί να παρεμβάλουμε μ αριθμητικούς

ενδιάμεσους ανάμεσα στους αριθμούς και .

Αποδεικνύεται ότι:

$\omega=\frac{\alpha-\beta}{(\mu+1)\alpha\beta}$,ο τύπος της αρμονικής παρεμβολής.

1.3 Αριθμητική Πρόοδος

1.3.1 Ορισμός

Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών θα ονομάζεται αριθμητική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση ενός σταθερού ω, δηλαδή:

(α_ν) αριθμητική πρόοδος $\Leftrightarrow \exists\ \omega \in R : \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega\ \forall\ \nu \in N$.

Ο τύπος $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega$ και $\alpha_1=\theta$ είναι αναδρομικός τύπος α τάξης που σημαίνει ότι για να υπολογίσουμε τον 5^o όρο θα πρέπει να ξέρουμε τις τιμές των 4 προηγούμενων όρων. Επειδή από τον τύπο $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega$ προκύπτει $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega$, ο ω θα ονομάζεται διαφορά της αριθμητικής προόδου.

Π.χ.: Η ακολουθία -2,1,4,7,10 είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο α_1=-2 και διαφορά ω=3. Άρα $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+3$, $\forall\ \nu \in N$ και $\alpha_1=-2$.

1.3.2 Μονοτονία Αριθμητικής Προόδου

Από τον τύπο $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega$ προκύπτει ότι:$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega$ οπότε

- Αν $\omega>0 \Rightarrow \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu>0 \Rightarrow \alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$, άρα η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα.

  Π.χ.: Η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=-2$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+3$ είναι γνησίως αύξουσα, γιατί ω=3>0. Αληθεύει, αφού η αριθμητική πρόοδος είναι η -2,1,4,7,10, δηλαδή οι όροι της είναι συνεχώς αυξανόμενοι.

- Αν $\omega<0 \Rightarrow \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu<0 \Rightarrow \alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu$, άρα η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως φθίνουσα.

  Π.χ.: Η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=1$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu-2$ είναι γνησίως φθίνουσα γιατί ω=-2<0. Αληθεύει, αφού η αριθμητική πρόοδος είναι η 1,-1,-3,-5,-7, δηλαδή οι όροι της είναι συνεχώς μειούμενοι.

- Αν $\omega=0 \Rightarrow \alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=0 \Rightarrow \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu$, άρα η αριθμητική πρόοδος είναι σταθερή στο R, άρα είναι συγχρόνως και αύξουσα και φθίνουσα στο R.

Π.χ.: Η αριθμητική ακολουθία με $α_1=4$ και $α_{ν+1}=α_ν$ είναι αύξουσα και φθίνουσα, γιατί ω=0. Αληθεύει, αφού η αριθμητική πρόοδος είναι 4,4,4,4,4, δηλαδή οι όροι της παραμένουν σταθεροί.

1.3.3 Είναι η ακολουθία $α_ν= κν+λ$, $λ \in R$ αριθμητική πρόοδος;

Για να είναι η ακολουθία $(α_ν)$ αριθμητική πρόοδος θα πρέπει να υπάρχει πραγματικός αριθμός ω έτσι ώστε $α_{ν+1}=α_ν+ω$, $\forall\ ν \in N$.

Βρίσκουμε τον $α_{ν+1}$. Είναι $α_{ν+1}=κ(ν+1)+λ=κν+κ+λ=(κν+λ)+κ=α_ν+κ$. Οπότε $α_{ν+1}=α_ν+κ$. Άρα η ακολουθία $(α_ν)$ είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο το $α_1=κ1+λ=κ+λ$ και διαφορά ω=κ

Σημείωση

Ο συντελεστής κ=ω δηλώνει την μονοτονία της αριθμητικής προόδου, οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη ενότητα ισχύει ότι:

- Αν $κ>0 \Rightarrow ω>0$ και έτσι η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν $κ<0 \Rightarrow ω<0$ και έτσι η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως γθίνουσα.
- Αν $κ=0 \Rightarrow ω=0$ και έτσι η αριθμητική πρόοδος είναι σταθερή στο R, οπότε η αριθμητική πρόοδος είναι συγχρόνως αύξουσα και φθίνουσα στο R.

1.3.4 Εύρεση του γενικού όρου της αριθμητικής προόδου $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\omega$, $\forall\ \nu \in N$

Θέτουμε διαδοχικά στον παραπάνω τύπο ν=1,2,3,…,ν-1 και παίρνουμε:
$\nu\to 1$: $\alpha_2=\alpha_1+\omega$
$\nu\to 2$: $\alpha_3=\alpha_2+\omega$
$\nu\to 3$: $\alpha_4=\alpha_3+\omega$
………………
$\nu\to \nu-2$: $\alpha_{\nu-1}=\alpha_{\nu-2}+\omega$
$\nu\to \nu-1$: $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\omega$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη βρίσκουμε $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$, $\forall\ \nu \in N$.

1.3.5 Σχέση ανάμεσα σε όρους μια αριθμητικής προόδου

Ας θεωρήσουμε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω. Από τον παραπάνω τύπο για τους α_5 και α_2 έχουμε:

$\alpha_5=\alpha_1+(5-1)\omega= \alpha_1+4\omega$
$\alpha_2=\alpha_1+(2-1)\omega= \alpha_1+\omega$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη έχουμε :$\alpha_5-\alpha_2=3\omega\Rightarrow\alpha_5=\alpha_2+3\omega$

Παρατηρούμε ότι 5=2+3

Υπολογίζουμε τους α_{14} και α_9, τότε έχουμε:

$\alpha_{14}=\alpha_1+(14-1)\omega= \alpha_1+13\omega$
$\alpha_9=\alpha_1+(9-1)\omega= \alpha_1+8\omega$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη έχουμε: $\alpha_{14}-\alpha_9=5\omega\Rightarrow\alpha_{14}=\alpha_9+5\omega$

‘Όπως και πριν παρατηρούμε ότι 14=9+5

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο τυχαίους όρους α_ν και α_μ με $\nu > \mu$. Τότε:
$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$ και
$\alpha_\mu=\alpha_1+(\mu-1)\omega$ με αφαίρεση των δύο σχέσεων έχουμε:
$\alpha_\nu-\alpha_\mu=\alpha_1+(\nu-1)\omega-\{\alpha_1+(\mu-1)\omega\}=\alpha_1+(\nu-1)\omega-\alpha_1-(\mu-1)\omega=$
$\{(\nu-1)-(\mu-1)\}\omega=(\nu-1-\mu+1)\omega=(\nu-\mu)\omega$
Άρα έχουμε $\alpha_\nu=\alpha_\mu+(\nu-\mu)\omega$

1.3.6 Διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου

Έστω ότι α, β , γ είναι τρεις διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, της οποίας η διαφορά είναι ω. Σύμφωνα με τον ορισμό πρέπει να ισχύει :

$\beta= \alpha+ \omega \Rightarrow \beta-\alpha= \omega$

$\gamma= \beta+ \omega \Rightarrow \gamma-\beta= \omega$

Άρα προκύπτει ότι $\beta-\alpha= \gamma-\beta \Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma$

Αντίστροφα αν για τρεις πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι $2\beta=\alpha+\gamma$ τότε καταλήγουμε πάλι στο

$\beta= \alpha+ \omega$ και $\gamma= \beta+ \omega$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι οι τριάδες των αριθμών α, β, γ ή γ, β, α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά ω.

Έτσι ισχύει πως τρεις αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει ότι $2\beta=\alpha+\gamma$.

Ο αριθμός β= $\alpha+\gamma$ ονομάζεται αριθμητικός μέσος των α, γ.

Π.χ.: ο αριθμητικός μέσος των 10, 22 είναι το 16 και ο αριθμητικός μέσος των 12, 19 είναι το $\frac{12+19}{2}$=15,5

Παρατηρήσεις

- Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, θα ισχύει ότι: $2\beta=\alpha+\gamma$ και $2\gamma=\beta+\delta$. Προσθέτοντας τις σχέσεις έχουμε $2\beta+2\gamma=\alpha+\gamma+\beta+\delta$ ή $\beta+\gamma=\alpha+\delta$. Έτσι διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των άκρων είναι ίσο με το άθροισμα των μέσων.

- Αν οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu$ είναι όροι μιας αριθμητικής προόδου, τότε ο αριθμός $M_A=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu)/\nu$ ονομάζεται αριθμητικός μέσος των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu$. Για αυτόν τον αριθμητικό μέσο ισχύει $\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu\} \leq M_A \leq \max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu\}$,

1.3.7 Όροι αριθμητικής προόδου που ισαπέχουν από τα άκρα

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu$ όροι μιας αριθμητικής προόδου. Τότε οι όροι:

- α_1,α_ν ($1^{ος}$ από την αρχή και $1^{ος}$ από το τέλος)
- $\alpha_2,\alpha_{\nu-1}$ ($2^{ος}$ από την αρχή και $2^{ος}$ από το τέλος)
- $\alpha_3,\alpha_{\nu-2}$ ($3^{ος}$ από την αρχή και $3^{ος}$ από το τέλος)

…………………………………………………………..

- $\alpha_\mu,\alpha_{\nu-\mu+1}$ (μ-οστός από την αρχή και μ-οστός από το τέλος)

ισαπέχουν από τα άκρα τα α_1,α_ν της αριθμητικής προόδου.

Παρατηρούμε ότι:
$\alpha_1+\alpha_\nu$
$\alpha_2+\alpha_{\nu-1}=(\alpha_1+\omega) + (\alpha_\nu-\omega)=\alpha_1+\alpha_\nu$
$\alpha_3+\alpha_{\nu-2}=(\alpha_1+2\omega) +(\alpha_\nu-2\omega)=\alpha_1+\alpha_\nu$
……………………………………
$\alpha_\mu+\alpha_{\nu-\mu+1}=\{\alpha_1+(\mu-1)\omega\}+\{\alpha_\nu-(\mu-1)\omega\}=\alpha_1+\alpha_\nu$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι οι όροι μιας αριθμητικής προόδου που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν άθροισμα $\alpha_1+\alpha_\nu$.
Αν έχουμε ν όρους, τότε το άθροισμα των δεικτών των όρων της σταθερής ποσότητας είναι ν+1.

1.3.8 Παρεμβολή αριθμητικών ενδιάμεσων

Έστω ότι θέλουμε ανάμεσα στου αριθμούς α και β να παρεμβάλουμε μ άλλους αριθμούς έτσι ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
Παρεμβάλουμε λοιπόν ανάμεσα στον α και τον β π.χ. τους αριθμούς $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\ldots,\chi_\mu$ ώστε οι αριθμοί $\alpha,_1,\chi_2,\chi_3,\ldots,\chi_\mu,\beta$ να αποτελούν μ+2 όρους αριθμητικής προόδου. Βλέπουμε ότι στην παραπάνω σχέση ο β κατέχει την θέση του μ+2. Έτσι θα ισχύει:

$$\beta= \alpha+\{(\mu+2)-1\}\omega \Leftrightarrow \beta= \alpha+(\mu+1)\omega \Leftrightarrow \omega=\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}.$$

Άρα οι όροι που παρεμβάλλονται είναι:
$\chi_1=\alpha+\omega=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}$

$\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}$

$\chi_2=\alpha+2\omega=\alpha+2$ $\beta-\alpha$

$\chi_3=\alpha+3\omega=\alpha+3$

…………………………

$\chi_\mu= \alpha+\mu\omega = \alpha+\mu \frac{\beta-\alpha}{\mu+1}$

Π.χ.: Αν α_ν είναι μια αριθμητική πρόοδος και θέλουμε να παρεμβάλουμε ανάμεσα στους 7 και 25 άλλους 5 αριθμούς ώστε όλοι οι αριθμοί μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Τότε έχουμε:

Όλοι οι όροι της αριθμητικής προόδου είναι 7:

$7,\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4,\chi_5,25$.

Παρατηρούμε ότι ο 7 έχει την πρώτη θέση και ο 25 την έβδομη, άρα έχουμε $\alpha_1=7$ και $\alpha_7=25$.

Εφόσον η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι ω, τότε $\alpha_7=\alpha_1+6\omega \Rightarrow 25=7+6\omega$

$\Rightarrow 18=6\omega \Rightarrow \omega=18/6 \Rightarrow \omega=3$.

Έτσι οι παρεμβαλλόμενοι όροι είναι:

$\chi_1=\alpha_1+\omega=7+3=10$

$\chi_2=\alpha_1+2\omega=7+6=13$

$\chi_3=\alpha_1+3\omega=7+9=16$

$\chi_4=\alpha_1+4\omega=7+12=19$

$\chi_5=\alpha_1+5\omega=7+15=22$

Οπότε η ακολουθία των αριθμών είναι 7,10,13,16,19,22,25.

1.3.9 Συμμετρικές παραστάσεις όρων αριθμητικής προόδου

Έστω ότι έχουμε μια αριθμητική πρόοδο με όρους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu$ και διαφορά ω.

- Αν ο ν είναι περιττός αριθμός, τότε υπάρχει ένας «μεσαίος» όρος, που χωρίζει δηλαδή τους όρους της παραπάνω αριθμητικής προόδου σε δυο ισόποσες ομάδες. Ο όρος αυτός κατέχει την $\frac{\nu+1}{2}$ τάξη. Σε αυτήν την περίπτωση ο «μεσαίος» θα συμβολίζεται με α. Οι όροι που βρίσκονται δεξιά του α θα είναι α+ω,α+2ω,α+3ω,…Οι όροι που θα είναι αριστερά του α θα είναι α-ω.α-2ω.α-3ω,….Οπότε οι όροι της αριθμητικής προόδου θα γράφονται έτσι:…,α-3ω,α-2ω,α-ω,α,α+ω,α+2ω,α+3ω,…

- Αν ο ν είναι άρτιος αριθμός, τότε υπάρχουν δύο «μεσαίοι» όροι που χωρίζουν τους όρους της αριθμητικής προόδου σε δύο ισόποσες ομάδες. Οι όροι αυτοί κατέχουν τις $\frac{\nu}{2}$ και $\frac{\nu}{2}$+1 τάξεις. Σε αυτήν την περίπτωση οι «μεσαίοι» όροι θα συμβολίζονται με α-ω και α+ω. Οι όροι που βρίσκονται δεξιά του α+ω θα είναι οι α+3ω,α+5ω,…Οι όροι που βρίσκονται αριστερά της α-ω θα είναι οι α-3ω,α-5ω…Οπότε οι όροι της αριθμητικής προόδου θα γράφονται έτσι: …,α-5ω,α-3ω,α-ω,α+ω,α+3ω,α+5ω,….

Η διαφορά σε αυτήν την περίπτωση είναι 2ω.

1.3.10 Το άθροισμα των όρων αριθμητικής προόδου

Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με ν ∈ Ν. Υπολογίστε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της.

Υπολογίζουμε τον αριθμό:

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{\nu-1} + a_\nu$$

Επειδή ισχύει ότι $a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega, \forall \nu \in \mathbf{N}$

το παραπάνω άθροισμα γράφεται:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \nu = a_1 + (a_1 + \omega) + (a_2 + \omega)$$

Έχοντας κατά νου ότι:

$\alpha_\kappa=\alpha_\nu-(\nu-\kappa)\omega$ για κ ∈ {0,1,2,3,4,..,ν} και γράφοντας το παραπάνω άθροισμα με αναδιάταξη των όρων από το τέλος προς την αρχή έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \nu = a_\nu + (a_\nu - \omega) + (a_\nu - 2\omega) + \cdots + \{a_\nu - (\nu - 2)\omega\} + \{a_\nu - (\nu - 1)\omega\}$$

Αν προσθέσουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$2\sum_{i=1}^{\nu} \nu = [\![(a]\!]_1 + a_\nu) + [\![(a]\!]_1 + a_\nu) + \cdots + [\![(a]\!]_1 + a_\nu) + [\![(a]\!]_1 + a_\nu) = \nu[\![(a]\!]_1 + a_\nu)$$

$$2\sum_{i=1}^{\nu} \nu = \nu[\![(a]\!]_1 + a_\nu)$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \nu = \{[\![(a]\!]_1 + a_\nu) \div 2\}\nu$$

Λόγω της σχέσης $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \nu = \{[\![(a]\!]_1 + a_\nu) \div 2\}\nu = \{\alpha_1 + \{\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\} \div 2\}\nu = \left\{\{2_1^{\alpha} + (\nu - 1)\omega\} \div 2\right\}\nu$$

Οπότε τελικά:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \nu = \{[\![(a]\!]_1 + a_\nu) \div 2\}\nu = \{\{2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\} \div 2\}\nu$$

1.3.11 Βασικά αθροίσματα

Σε αυτήν την ενότητα θα υπολογίσουμε κάποια βασικά αθροίσματα με την βοήθεια του αθροίσματος όρων αριθμητικής προόδου.

<u>Το άθροισμα $S_1 = 1+2+3+\ldots+\nu$ με $\nu \in N$</u>

Η ακολουθία 1,2,3,…,ν αποτελεί αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1=1$, διαφορά ω=1,πλήθος όρων ν και τελευταίο όρο $\alpha_\nu=\nu$. Από το τύπο $S_\nu=\{(\alpha_1+\alpha_\nu)/2\}\nu$ έχουμε

$$S_\nu=\{(\alpha_1+\alpha_\nu)/2\}\nu \Rightarrow S_\nu=\{(1+\nu)/2\}\nu$$

$$\Rightarrow S_\nu=\{\nu(\nu+1)\}/2$$

<u>Β' τρόπος</u>

Θεωρούμε την ταυτότητα $(\nu+1)^2=\nu^2+2\nu+1$. Σε αυτήν την ταυτότητα θέτουμε διαδοχικά όπου ν τους αριθμούς 1,2,3,ν οπότε έχουμε:

Για ν=1: $2^2=1^2+2\cdot1+1$
Για ν=2: $3^2=2^2+2\cdot2+1$
Για ν=3: $4^2=3^2+2\cdot3+1$
………………………
Για ν=ν-1: $\nu^2=(\nu-1)^2+2\cdot(\nu-1)+1$
Για ν=ν: $(\nu+1)^2=\nu^2+2\nu+1$
Προσθέτουμε τις παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$$(\nu+1)^2=1^2+2\{1+2+3+\ldots(\nu-1)+\nu\}+1+1+1+\ldots1+1\Leftrightarrow$$

$$(\nu+1)^2=1+2S_1+\nu \Leftrightarrow 2S_1=(\nu+1)^2-1-\nu \Leftrightarrow 2S_1=\nu^2+2\nu+1-1-\nu \Leftrightarrow$$

$$2S_1=\nu^2+\nu \Leftrightarrow S_1=(\nu^2+\nu)/2 \Leftrightarrow S_1=\nu(\nu+1)/2$$

<u>Το άθροισμα $S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2$ με $\nu \in N$</u>

Θεωρούμε την ταυτότητα $(\nu+1)^3=\nu^3+3\nu^2+3\nu+1$. Σε αυτήν την ταυτότητα θέτουμε διαδοχικά όπου ν τους αριθμούς 1,2,3,ν οπότε έχουμε :

Για $\nu=1$: $2^3=1^3+3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$
Για $\nu=2$: $3^3=2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$
Για $\nu=3$: $4^3=3^3+3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$
……………………………
Για $\nu=\nu-1$: $\nu^3=(\nu-1)^3+3(\nu-1)^2+3(\nu-1)+1$
Για $\nu=\nu$: $(\nu+1)^3=\nu^3+3\nu^2+3\nu+1$

Προσθέτουμε τις παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$$(\nu+1)^3=1^2+3(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)+3(1+2+\ldots+\nu)+1+1+\ldots+1 \Leftrightarrow$$

$$(\nu+1)^3=1+3S_2+3S_1+\nu \Leftrightarrow 3S_2=(\nu+1)^3-(\nu+1)-3S_1 \Leftrightarrow$$

$$3S_2=(\nu+1)^3-(\nu+1)-3\frac{\nu(\nu+1)}{2} \Leftrightarrow 3S_2=\{2(\nu+1)^3-2(\nu+1)-3\nu(\nu+1)\}/2 \Leftrightarrow$$

$$S_2=\{(\nu+1)\{2(\nu+1)^2-2-3\nu\}\}/6 \Leftrightarrow$$

$$S_2=\{(\nu+1)(2\nu^2+4\nu+2-2-3\nu)\}/6 \Leftrightarrow$$

$$S_2=\{(\nu+1)(2\nu^2+\nu)\}/6 \Leftrightarrow$$

$$S_2=\{\nu(\nu+1)(2\nu+1)\}/6$$

Το άθροισμα $S_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3$ με $\nu \in N$

Θεωρούμε την ταυτότητα $(\nu+1)^4=\nu^4+4\nu^3+6\nu^2+4\nu+1$. Σε αυτήν την ταυτότητα θέτουμε διαδοχικά όπου ν τους αριθμούς 1,2,3,ν οπότε έχουμε:

Για ν=1: $2^4=1^4+4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$
Για ν=2: $3^4=2^4+4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$
Για ν=3: $4^4=3^4+4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$
…………………………………..
Για ν=ν-1: $\nu^4=(\nu-1)^4+4(\nu-1)^3+6(\nu-1)^2+4(\nu-1)+1$
Για ν=ν: $(\nu+1)^4=\nu^4+4\nu^3+6\nu^2+4\nu+1$

Προσθέτουμε τις παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$$(\nu+1)^4=1^2+4S_3+6S_2+4S_1+1+1+1+\ldots+1 \Leftrightarrow 4S_3=(\nu+1)^4-1-6S_2-4S_1-\nu \Leftrightarrow$$

$$4S_3=(\nu+1)^4-(\nu+1)-6\frac{\{\nu(\nu+1)(2\nu+1)\}}{6}-4\frac{\nu(\nu+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$4S_3=(\nu+1)^4-(\nu+1)-\nu(\nu+1)(2\nu+1)-2\nu(\nu+1) \Leftrightarrow$$

$$4S_3=(\nu+1)\{(\nu+1)^3-1-\nu(2\nu+1)-2\nu\} \Leftrightarrow$$

$$4S_3=(\nu+1)\{\nu^3+3\nu^2+3\nu+1-1-2\nu^2-\nu-2\nu\} \Leftrightarrow 4S_3=(\nu+1)(\nu^3+\nu^2) \Leftrightarrow$$

$4S_3=\{\nu(\nu+1)\}^2 \Leftrightarrow S_3=\{\nu(\nu+1)/2\}^2 \Leftrightarrow S_3=S_1^{\,2}$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε αθροίσματα της μορφής:

$S_\kappa=1^\kappa+2^\kappa+3^\kappa+\ldots+\nu^\kappa$, $\nu \in N$ θεωρώντας το ανάπτυγμα Newton $(\nu+1)^{\kappa+1}$

1.4 Γεωμετρική Πρόοδος

1.4.1 Ορισμός

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του αφού τον πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

Δηλαδή $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\lambda \Rightarrow \lambda=\alpha_{\nu+1}/\alpha_\nu$. Ο αριθμός λ ονομάζεται λόγος της γεωμετρικής προόδου.

Επίσης η γεωμετρική πρόοδος ονομάζεται και πρόοδος κατά πηλίκο γιατί όπως εύκολα παρατηρεί κάποιος το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων είναι σταθερό και ισούται με λ.

Π.χ.: η ακολουθία 3,12,48,192,… θα είναι γεωμετρική πρόοδος αν ισχύει ότι $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\lambda$ κάτι που ισχύει αφού $12=3\cdot4, 48=12\cdot4, 192=48\cdot4$ και από τον τύπο $\lambda=\alpha_{\nu+1}/\alpha_\nu$ βλέπουμε ότι ο λόγος $\lambda=4$.

Παρατήρηση: Στη γεωμετρική πρόοδο ο α_1 και λ πρέπει να είναι διάφοροι του 0.

1.4.2 Υπολογισμός του ν-οστού όρου της γεωμετρικής περιόδου

Έστω ότι έχουμε γεωμετρική πρόοδο με όρους τους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\lambda$ παίρνουμε:

$$\begin{gathered}\alpha_1=\alpha_1\\ \alpha_2=\alpha_1\cdot\lambda\\ \alpha_3=\alpha_2\cdot\lambda\\ \alpha_4=\alpha_3\cdot\lambda\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{\nu-1}=\alpha_{\nu-2}\cdot\lambda\\ \alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}\cdot\lambda\end{gathered}$$

Πολλαπλασιάζουμε τις παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_{\nu-1} \cdot \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \alpha_1 \cdot \lambda \cdot \alpha_2 \cdot \lambda \cdot \alpha_3 \cdot \lambda \cdot \alpha_{\nu-2} \cdot \lambda \cdot \alpha_{\nu-1} \cdot \lambda \Leftrightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

<u>Β’ τρόπος</u>

$$\alpha_1=\alpha_1$$
$$\alpha_2=\alpha_1 \cdot \lambda$$
$$\alpha_3=\alpha_2 \cdot \lambda=\alpha_1 \cdot \lambda \cdot \lambda=\alpha_1 \cdot \lambda^2$$
$$\alpha_4=\alpha_3 \cdot \lambda=\lambda^2 \cdot \alpha_1 \cdot \lambda=\alpha_1 \cdot \lambda^3$$
....

Άρα $\alpha_\nu=\alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$

1.4.3 Γεωμετρικός μέσος

Έστω ότι έχουμε τους όρους α,β,γ. Για να είναι όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$ και $\frac{\gamma}{\beta}=\lambda$. Άρα $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta^2=\alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow \beta=\sqrt{\alpha.\gamma}$. Σε μια τέτοια περίπτωση ο β ονομάζεται γεωμετρικός μέσος των α,γ.

Γενικότερα ονομάζουμε γεωμετρικό μέσο των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$ τον πραγματικό αριθμό που ισούται με $\sqrt[\nu]{\alpha 1.\alpha 2.\alpha 3 \ldots \alpha\nu}$.

1.4.4 Το άθροισμα των όρων της γεωμετρικής προόδου

Έστω ότι έχουμε την γεωμετρική πρόοδο με όρους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\ldots,\alpha_\nu$.Το άθροισμα των πρώτων όρων θα είναι:

$S_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_\nu \Leftrightarrow$

$S_\nu=\alpha_1+\alpha_1 \cdot \lambda+\alpha_1 \cdot \lambda^2+\alpha_1 \cdot \lambda^3+\ldots+\alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$. Αν πολλαπλασιάσουμε με λ και τα δύο μέρη της σχέσης θα πάρουμε:

$\lambda \cdot S_\nu=\lambda \cdot \alpha_1+\lambda^2 \cdot \alpha_1+\lambda^3 \cdot \alpha_1+\lambda^4 \cdot \alpha_1+\ldots+\lambda^\nu \cdot \alpha_1$.

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$\lambda \cdot S_\nu - S_\nu = (\lambda \cdot \alpha_1 + \lambda^{2\cdot}\alpha_1 + \lambda^{3\cdot}\alpha_1 + + \lambda^{4\cdot}\alpha_1 + \lambda^{\nu\cdot}\alpha_1) - (\alpha_1 + \lambda \cdot \alpha_1 + \lambda^{2\cdot}\alpha_1 + \lambda^{3\cdot}\alpha_1 + \ldots + \lambda^{\nu-1\cdot}\alpha_1) \Leftrightarrow$

$S_\nu(\lambda-1) = \lambda^{\nu\cdot}\alpha_1 - \alpha_1 \Leftrightarrow$

$S_\nu(\lambda-1) = \alpha_1(\lambda^\nu - 1) \Leftrightarrow$

$S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)/(\lambda-1)$.

Π.χ.: Έχουμε μια γεωμετρική πρόοδο με όρους 2,8,32,128,512. Το άθροισμα θα είναι

S_5=2+8+32+128+512. Πολλαπλασιάζουμε με τον λόγο που είναι 4 και έχουμε:

$4S_5$=8+32+128+512+2560. Αφαιρούμε κατά μέλη και παίρνουμε:

$4S_5 - S_5 = (8+32+128+512+2560) - (2+8+32+128+512) \Leftrightarrow$

$3S_5 = 2560 - 2 \Leftrightarrow$

$3S_5 = 2468 \Leftrightarrow$

$S_5 = 2468/3 \Leftrightarrow$

S_5=822,66

Παρατήρηση: Το λ πρέπει να είναι ≠1.

1.4.5 Παρεμβολή γεωμετρικών ενδιάμεσων

Έστω ότι θέλουμε ανάμεσα στους αριθμούς α και το β, που πρέπει να είναι ≠0,να παρεμβάλουμε τους μ αριθμούς ώστε α,χ1,χ2,…,χμ,β να αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου. Ο λόγος λ θα είναι χ1/α,χ2/χ1,β/χμ. Ο λ δηλαδή θα ισούται με $\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$. Ο τύπος αυτός ονομάζεται τύπος γεωμετρικής παρεμβολής και αριθμοί που ζητούνται είναι οι $\chi_1=\alpha\cdot\lambda$,$\chi_2=\alpha\cdot\lambda^2$,$\chi_\mu=\alpha\cdot\lambda^\mu$. Στην γεωμετρική παρεμβολή διακρίνουμε τις εξής 3 περιπτώσεις:

- Αν το μ είναι άρτιος φυσικός αριθμός το μ+1 θα είναι περιττός φυσικός αριθμός, τότε υπάρχει μόνο μια πραγματική λύση για το λ με βάση τον παραπάνω τύπο και θα ισχύει ότι λ>0 αν α˙β>0 και λ<0 αν α˙β<0.

- Αν το μ είναι περιττός φυσικός αριθμός το μ+1 θα είναι άρτιος φυσικός αριθμός, τότε αν α˙β>0 θα έχουμε δύο ετερόσημες πραγματικές λύσεις για το λ.

- Α το μ είναι περιττός πραγματικός αριθμός το μ+1 θα είναι άρτιος φυσικός αριθμός, τότε αν α˙β<0 δεν θα έχουμε πραγματικές λύσεις για το λ.

1.4.6 Παράσταση των όρων της γεωμετρικής προόδου

Όταν μας είναι γνωστό το γινόμενο των διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου και το πλήθος των όρων είναι περιττό, τότε θα συμβολίζουμε τους όρους ως εξής: $\chi/\lambda^\nu,\ldots,\chi/\lambda^2$,χ/λ ,χ ,χ˙λ ,$\chi\cdot\lambda^2$,..,$\chi\cdot\lambda^\nu$. Το χ θα είναι ο μεσαίος όρος της γεωμετρικής προόδου και ο λ ο λόγος της. Αν το πλήθος των όρων είναι άρτιο, τότε θα συμβολίζουμε τους όρους ως εξής: …,χ/λ^5 ,χ/λ^3 ,χ/λ, χ˙λ, $\chi\cdot\lambda^3$, $\chi\cdot\lambda^5$,…Εδώ δεν έχουμε όρο χ, έχουμε δύο μεσαίους όρους και ο λόγος είναι ίσος με λ^2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

2.1 Βασικές έννοιες Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Τα μαθηματικά που ασχολούνται με προβλήματα, όπου οι βασικοί παράγοντες που υπεισέρχονται είναι **το χρήμα και ο τόκος** ονομάζονται **Τραπεζικά Μαθηματικά ή Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά** (Mathematics of Finance). Βασικες έννοιες Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών είναι το ***Κεφάλαιο***, ο ***Χρόνος***, ο ***Τόκος*** και το ***Επιτόκιο***.

2.1.1. Κεφάλαιο (Capital)

Καλείται κάθε χρηματικό ποσό, το οποίο με το δανεισμό ή την αποταμίευση του αποκτά παραγωγική ικανότητα.
(Κατά συνέπεια, τα χρηματικά ποσά που διατηρούμε στο σπίτι μας για τις τρέχουσες ανάγκες μας ή τα δανείζουμε σε φιλικά ή συγγενικά μας πρόσωπα ή ποσά χρημάτων που είναι κρυμμένα μέσα στη γη δεν είναι κεφάλαια από οικονομική άποψη.)

2.1.2. Χρόνος (Time)

Είναι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ένα χρηματικό ποσό έχει παραγωγική ικανότητα. Μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι συνήθως το έτος (Πολιτικό, Μικτό, Εμπορικό) αλλά και οι υποδιαιρέσεις του έτους: το εξάμηνο, ο μήνας και η ημέρα.

Πολιτικό Έτος: θεωρούμε ότι κάθε μήνας περιλαμβάνει τον πραγματικό αριθμό των ημερών του και ότι το έτος αποτελείται από 365 μέρες ή 366 αν είναι δίσεκτο.

Μικτό Έτος: θεωρούμε ότι το έτος έχει 360 μέρες και κάθε μήνας λαμβάνεται με τις πραγματικές του μέρες.

Εμπορικό Έτος: θεωρούμε ότι όλοι οι μήνες έχουν 30 μέρες και το έτος αποτελείται από 360 μέρες.

<u>Παρατήρηση</u>

Για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα εξής:
α) Μέρα Κατάθεσης χρημάτων σε μια τράπεζα ή σε ένα ταχυδρομικό ταμιευτήριο δεν είναι τοκοφόρος ενώ ημέρα ανάληψης είναι τοκοφόρος.

β) Κάθε ποσό που χορηγείται από τράπεζα δίνει τόκο από την ημέρα που έχει χορηγηθεί το δάνειο, ο δε αριθμός των τοκοφόρων ημερών που υπολογίζεται με μια μόνο αφαίρεση.

2.1.3. Τόκος (Interest)

Η πρόσθετη αμοιβή που ο δανειζόμενος (οφειλέτης) δίνει στο δανειστή, για το δικαίωμα της χρησιμοποίησης ή εκμετάλλευσης του κεφαλαίου του, ονομάζεται **τόκος.**

Έχει εφαρμογή σε οικονομικές πράξεις, συνήθως μέχρι τριών μηνών ή το πολύ μέχρι ενός έτους (βραχυπρόθεσμες).

Καθ' όλη την παραγωγική διαδικασία τα ποσά του Κεφαλαίου και του Τόκου παραμένουν σταθερά.

Συμβολισμοί

K	**Κεφάλαιο**	
I	**Τόκος**	
i	**Επιτόκιο**	και είναι ο τόκος του Κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο ή ο τόκος Κεφαλαίου 100 νομισματικών μονάδων σε μια χρονική περίοδο
n	**Χρόνος**	αν ως μονάδα μέτρησης του χρόνου λαμβάνεται το έτος
m	**Χρόνος**	αν ως μονάδα μέτρησης του χρόνου λαμβάνεται ο μήνας
t	**Χρόνος**	αν ως μονάδα μέτρησης του χρόνου λαμβάνεται η μέρα

Για τον υπολογισμό του απλού τόκου διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα και τρίμηνα

$$I = Kni$$

Παρατήρηση

Στην εφαρμογή του τύπου θα πρέπει ο χρόνος και το επιτόκιο να αναφέρονται στην ίδια μονάδα χρόνου. Δηλαδή, αν το επιτόκιο είναι ετήσιο, ο χρόνος θα είναι σε έτη. Αν το επιτόκιο είναι σε εξάμηνα το n θα είναι σε εξάμηνα κ.ο.κ.

Εφαρμογές

Α. Όταν περίοδος παραγωγής τόκου είναι το έτος

Β. Όταν περίοδος παραγωγής τόκου είναι το εξάμηνο

Γ. Όταν περίοδος παραγωγής τόκου είναι το τρίμηνο

Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες	
m: αριθμός μηνών που έχει τοκιστεί το Κεφάλαιο	$I = \frac{Kmi}{12}$

Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μέρες	
Μικτό ή Εμπορικό Έτος	$I = \frac{Kni}{360}$
Πολιτικό Έτος	$I = \frac{Kni}{365}$

Τελική Αξία

$$K_t = K_0 + \mathrm{I}$$

$$K_n = K_0 + K_0 \mathrm{ni} = K_0 (1+\mathrm{ni})$$

$$K_m = K_0 + \frac{\mathrm{K_0 mi}}{12} = K_0 (1+\frac{\mathrm{mi}}{12})$$

$$K_n = K_0 + \frac{\mathrm{K_0 ni}}{360} = K_0 (1+\frac{\mathrm{ni}}{360})$$

$$K_n = K_0 + \frac{\mathrm{K_0 ni}}{365} = K_0 (1+\frac{\mathrm{ni}}{365})$$

Παρατήρηση

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι δυνατόν να υπολογισθεί ένα από τα ποσά K, ν, m, n, i όταν δίνονται τα δυο αλλά και ο τόκος, αρκεί οι παραπάνω τύποι να λυθούν ως προς καθένα από τα ποσά K, ν, m, n, i

Υπολογισμός του απλού τόκου με τη μέθοδο του Σταθερού Διαιρέτη και του Τοκάριθμου

$$I = \frac{K\nu}{\Delta} = \frac{N}{\Delta}$$

Όπου N = Kν → Τοκάριθμος

$\Delta = \frac{360}{i}$ → Σταθερός Διαιρέτης για Μικτό ή Εμπορικό Έτος

$\Delta = \frac{365}{i}$ → Σταθερός Διαιρέτης για Πολιτικό Έτος

Υπολογισμός του απλού τόκου με τη μέθοδο των σταθερών πολλαπλασιαστών

$I = K\nu\Pi = N\Pi$ όπου $\Pi = \frac{360}{i}$ ή $\Pi = \frac{365}{i}$

Υπολογισμός του απλού τόκου με τη μέθοδο ανάλυσης του Κεφαλαίου, του Χρόνου και του Επιτοκίου σε μέρη ανάλογα

Με ανάλυση του Κεφαλαίου

Από τον τύπο $I = \frac{K\nu}{\Delta}$ προκύπτει ότι

- Αν K = Δ => I = ν, δηλαδή, αν το K ίσο με το σταθερό διαιρέτη τότε ο τόκος ισούται με τον αριθμό των ημερών
- Αν K ≠ Δ τότε προσπαθούμε να αναλύσουμε το Κεφάλαιο σε μέρη ανάλογα προς το σταθερό διαιρέτη

Με ανάλυση του χρόνου

- Αν ν = $\frac{\Delta}{100}$ => I = $\frac{K}{100}$
- Αν ν ≠ $\frac{\Delta}{100}$ τότε μερίζουμε το ν σε μέρη ανάλογα του $\frac{\Delta}{100}$

Με ανάλυση του επιτοκίου

Αν το επιτόκιο είναι τέτοιο ώστε να μη μας διευκολύνει στις πράξεις, διαλέγουμε ένα βοηθητικό επιτόκιο που μας διευκολύνει στις πράξεις και έπειτα με τη μέθοδο των ανάλογων μερών βρίσκουμε και τον τόκο με το ζητούμενο επιτόκιο

Υπολογισμός του Κεφαλαίου στον Απλό Τόκο

$$K = \frac{I}{\nu i}$$

$$K = \frac{12I}{mi}$$

$$K = \frac{360I}{\nu i} \text{ ή } K = \frac{365I}{\nu i} \text{ ή } K = \frac{\Delta I}{\nu}$$

Υπολογισμός του Χρόνου στον Απλό Τόκο

$$n = \frac{I}{Ki}$$

$$m = \frac{12I}{Ki}$$

$$\nu = \frac{360I}{Ki} \text{ ή } \nu = \frac{365I}{Ki} \text{ ή } \nu = \frac{\Delta I}{K}$$

Υπολογισμός του Επιτοκίου στον Απλό Τόκο

$$i = \frac{I}{Kn}$$

$$i = \frac{12I}{Km}$$

$$i = \frac{360I}{Kn} \text{ ή } i = \frac{365I}{Kn}$$

Εύρεση του Αρχικού Κεφαλαίου σε συνάρτηση της Τελικής αξίας

$$K_0 = \frac{K_n}{1+ni}$$

$$K_0 = \frac{12\,K_m}{1+mi}$$

$$K_0 = \frac{360\,K_n}{360+ni} \text{ ή } K_0 = \frac{365\,K_n}{365+ni} \text{ ή } K_0 = \frac{\Delta K_n}{\Delta+n}$$

Παρατήρηση

Τα προβλήματα υπολογισμού αρχικής αξίας σε συνάρτηση με την τελική αξία λύνονται και με τη χρήση βοηθητικού κεφαλαίου

Υπολογισμός του Συνολικού Απλού Τόκου πολλών Κεφαλαίων με το ίδιο Επιτόκιο

$$I = I_1 + \ldots + I_m = = \frac{N_1 + \mathrm{I} + N_m}{\Delta}$$

2.1.4. Επιτόκιο (Interest rate)

Είναι ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας για μία χρονική περίοδο. Συνήθως συναντάμε τρία είδη επιτοκίων:

(α) Προεξοφλητικό επιτόκιο (Discount rate).
Το ύψος του προεξοφλητικού επιτοκίου καθορίζεται κάθε φορά από το Διοικητικό Συμβούλιο της Τράπεζας της Ελλάδος και αποτελεί το βασικό επιτόκιο για τις προεξοφλήσεις των συναλλαγματικών και γραμματίων από τις εμπορικές τράπεζες.

(β) Νόμιμο επιτόκιο.
Η Τράπεζα της Ελλάδος καθορίζει κάθε φορά ένα ανώτατο επιτόκιο, το οποίο δεν μπορεί κανείς να υπερβεί στις συναλλαγές, διαφορετικά χαρακτηρίζεται ως τοκογλύφος και τιμωρείται.

(γ) Συμβατικό επιτόκιο.
Πολλές φορές το ύψος του επιτοκίου καθορίζεται συμβατικά μεταξύ του δανειστή και του οφειλέτη· το επιτόκιο αυτό ονομάζεται συμβατικό.

2.2 Ανατοκισμός

Με τον όρο ανατοκισμό καλούμε τη διαδικασία τοκισμού χρημάτων κατά την οποία ο δανειστής στο τέλος κάθε περιόδου δεν εισπράττει τον τόκο, αλλά τον αφήνει στο δανειζόμενο και γίνεται κεφάλαιο, οπότε στην επόμενη χρονική περίοδο τοκισμού θα φέρει τόκο όχι μόνο το αρχικό κεφάλαιο αλλά και ο τόκος αυτού. Ο ανατοκισμός ονομάζεται και σύνθετος τόκος ή σύνθετη κεφαλαιοποίηση. Το ίδιο συνεχίζεται να γίνεται και στις επόμενες χρονικές περιόδους τοκισμού. Ο ανατοκισμός είναι μία μακροπρόθεσμη οικονομική πράξη, δηλαδή έχει χρονική διάρκεια μεγαλύτερη του ενός έτους. Μπορεί να εφαρμοστεί είτε σε χρήματα που δανειστήκαμε, είτε σε χρήματα που δανείσαμε ή που καταθέσαμε στην τράπεζα.

Ο ανατοκισμός επιτρέπεται σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα σε καταθέσεις ταμιευτήριου, για περιορισμένο αριθμό ετών και γενικά μέσα σε πλαίσια του πνεύματος της αποταμίευσης των οικονομιών των πολιτών. Μέσω της αποταμίευσης των πολιτών οφείλεται επίσης και η εθνική οικονομία. Ο ανατοκισμός μεγάλων χρηματικών ποσών και για μεγάλα χρονικά διαστήματα δεν επιτρέπεται από το νόμο, διότι έτσι μπορεί να παραχωθούν τεράστια κεφάλαια που δεν θα ήταν δυνατόν να αποπληρωθούν.

Στα προβλήματα ανατοκισμού θα χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

K_0: Αρχικό κεφάλαιο
K_n: Τελική αξία κεφαλαίου
i: Επιτόκιο ανατοκισμού (συνήθως ετήσιο)
n: Αριθμός χρονικών περιόδων που ανατοκίζεται το αρχικό κεφάλαιο
$(1+i)^n$: συντελεστής ανατοκισμού

<u>Πρόβλημα:</u>

Αρχικό κεφάλαιο τοκίζεται με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο i για n έτη. Να απόδειχθεί ότι η τελική αξία αυτού K_n δίνεται από τον τύπο:

$$K_n = K_0 \times (1 + i)^n$$

Λύση: Στο τέλος του πρώτου έτους η τελική αξία του κεφαλαίου μας K_1 είναι:

$$K_1 = K_0 + K_0 \times 1 \text{ x } i = K_0 \times (1 + i)^1$$

Στο τέλος του δεύτερου έτους η τελική αξία του κεφαλαίου μας K_2 είναι:

$$K_2 = K_1 + K_1 \times 1 \text{ x } i = K_1 \times (1 + i)$$

$$= K_0 \times (1 + i) \times (1 + i) = K_0 \times (1 + i)^2$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο επαγωγικά στο τέλος του nου έτους η τελική αξία του κεφαλαίου μας είναι:

$$K_n = K_0 \times (1 + i)^n$$

Παρατήρηση:

Η εξίσωση $K_n = K_0 \times (1 + i)^n$ του Προβλήματος, η οποία ονομάζεται ***θεμελιώδης εξίσωση του ανατοκισμού***, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στις περιπτώσεις όπου το επιτόκιο i δεν είναι ετήσιο. Στις περιπτώσεις αυτές θα προσέχουμε το n να εκφράζει ακέραιο αριθμό χρονικών περιόδων του επιτοκίου i.

Πρόβλημα 1:

Κεφάλαιο 200 € ανατοκίζεται για 2 έτη με ετήσιο επιτόκιο 4%.
Να βρεθεί η τελική αξία αυτού.

Λύση: $K_2 = K_0 \times (1 + i)^2 = 200 \times (1 + 0{,}04)^2 = 216{,}32$ €

Πρόβλημα 2:

Κεφάλαιο 200 € ανατοκίζεται για 2 έτη με εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%.
Να βρεθεί η τελική αξία αυτού.

Λύση: $K_4 = K_0 \times (1 + i)^4 = 200 \times (1 + 0{,}04)^4 = 233{,}97$ €

Πρόβλημα 3:

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 120.000€, που ανατοκίζονται για 8 έτη και 4 μήνες με 10%.

Λύση: $K_n = K_0 \times (1+i)^{n+\mu/12} = 120.000 \times (1+0{,}10)^{8+4/12} = 120.000 \times 1{,}10^{8} \times 1{,}10^{4/12} = 120.000 \times 2{,}1435887 \times 1{,}0322801 = 265534{,}07$ €

Πρόβλημα 4:

Να βρείτε το ποσό που αν ανατοκισθεί ανά τρίμηνο θα γίνει μετά από 5 έτη και 2 μήνες 333.417,09 €, αν το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%.

Λύση: Αρχικά έχουμε n = 5 έτη + 2 μήνες = 20 τρίμηνα + 2/3 του τριμήνου.

$$K_n = K_0 \times (1+i)^{n} \quad \text{άρα} \quad K_0 = K_n / (1+i)^{n} = K_n \times (1+i)^{-n}$$

Οπότε

$$K_0 = 333.417{,}09 \times (1+0{,}06)^{-(20+2/3)} = 333.417{,}09 \times 1{,}06^{-20} \times 1{,}06^{-2/3}$$

$$= 333.417{,}09 \times 1{,}06^{-20} \times 1{,}06^{-1+1/3} = 333.417{,}09 \times 1{,}06^{-21} \times 1{,}06^{1/3}$$

$$= 333.417{,}09 \times 1{,}06^{-21} \times 1{,}06^{4/12}$$

$$= 333.417{,}09 \times 0{,}2941554 \times 1{,}0196128 = 100.000 \text{ €}$$

Πρόβλημα 5:

Κάποιος κατέθεσε σε μια τράπεζα 1.000 € για 8 έτη και 3 μήνες. Τα πρώτα 3 έτη το ποσό τοκίσθηκε με ανατοκισμό ετήσιο, με επιτόκιο 12 %. Το υπόλοιπο χρονικό διάστημα έγινε ανατοκισμός κάθε εξάμηνο, με ονομαστικό επιτόκιο 20%. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου.

Λύση: $K_1 = 1.000 \times (1+0{,}12)^{3} = 1.000 \times 1{,}404928 = 1.404{,}928$ €

Το υπόλοιπο διάστημα το K_1 τοκίσθηκε με ονομαστικό επιτόκιο 20%

Άρα i = 0,2/2 = 0,10 το κάθε εξάμηνο για χρονικό διάστημα 5 έτη και 3 μήνες, δηλαδή 10 + 1/2 εξάμηνα.

Οπότε η τελική αξία θα είναι :

$$K_n = K_1 \times (1+0{,}10)^{10+1/2} = K_1 \times 1{,}1^{10} \times 1{,}1^{1/2} =$$

$$= 1.404{,}928 \times 2{,}5937423 \times 1{,}0488088 = 3.821{,}8813 \text{ €}$$

Πρόβλημα 6:

Ποιό κεφάλαιο πρέπει να καταθέσουμε με ανατοκισμό, ώστε μετά από 10 έτη να γίνει 3.000€, αν τα 5 πρώτα έτη ο ανατοκισμός είναι 6μηνιαίος, με εξαμηνιαίο επιτόκιο 8% και μετά γίνει ετήσιος με ετήσιο επιτόκιο 10% ;

Λύση: Τα πρώτα 5 έτη θα πάρουμε ένα κεφάλαιο $K_1 = K_0 \text{ x } (1 + 0{,}08)^{10}$ διότι n = 10 εξάμηνα. Αυτό το κεφάλαιο θα ανατοκισθεί με ετήσιο ανατοκισμό τα 5 επόμενα έτη και θα γίνει $K_2 = K_1 \text{ x } (1 + 0{,}10)^5$ οπότε θα πρέπει $K_2 = 3.000$ €

Άρα: $K_0 \times (1 + 0{,}08)^{10} \times (1 + 0{,}10)^5 = 3.000$ € ή

$K_0 = 3.000/ (1 + 0{,}08)^{10} \times (1 + 0{,}10)^5$ ή

$K_0 = 3.000/ 2{,}158925 \times 1{,}61051 = 862{,}82013$ €

Πρόβλημα 7:

Να βρεθεί η τελική αξία κεφαλαίου 180.000€, που ανατοκίζεται κάθε 6 μήνες για 10 έτη με ετήσιο επιτόκιο 8%. Αν στο τέλος των 5 πρώτων ετών προεξοφληθεί το κεφάλαιο που βρέθηκε, ποιά θα είναι η παρούσα αξία του και ποιό το προεξόφλημα;

Λύση: Αν θεωρήσουμε το 8% ετήσιο ανάλογο του εξαμηνιαίου, τότε το εξαμηνιαίο θα

είναι : i /2 = 0,08/2=0,04 και n = 10 έτη = 20 εξάμηνα

$K_n = K_0 \times (1 + i/2)^{20} = 180.000 \times (1 + 0,04)^{20}$

$= 180.000 \times 2,1912 = 394.416$ €

Αν το κεφάλαιο K_n προεξοφληθεί 5 έτη πριν τη λήξη του θα γίνει :

$K = K_n \times (1 + 0,04)^{-10}$ διότι τα 5 έτη = 10 εξάμηνα

$K = 394.416 \times 0,6756 = 266.467,44$ €

Άρα το προεξόφλημα, δηλαδή οι τόκοι των 5 τελευταίων ετών, θα είναι

$E = 394.416 - 266.467,44 = 127.948,56$ €

2.2.1 Σύγκριση απλού τόκου και ανατοκισμού

Ισχύει ότι: >

Γιατί $(1 + i)^n > (1 + ni)$ για t>1

Άρα ο τόκος της κεφαλαιοποίησης με ανατοκισμό είναι μεγαλύτερος από τον τόκο της απλής κεφαλαιοποίησης για t>1.

Για την περίπτωση όπου t=1, ο τόκος της απλής κεφαλαιοποίησης είναι ίσος με τον τόκο κεφαλαιοποίησης του ανατοκισμού.

2.2.2 Οι έννοιες των ανάλογων και ισοδύναμων επιτοκίων.

Στην περίπτωση του απλού τόκου το επιτόκιο i λέγεται ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο.

Στην περίπτωση του απλού τόκου, όταν ο τόκος βρίσκεται κατά τη χρονική περίοδο ίση με 1/m του ενός χρόνου, τότε το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο i διαιρείται δια m. Στην περίπτωση αυτή το επιτόκιο i και το επιτόκιο i/m λέγονται **ανάλογα** επιτόκια.

Ισοδύναμα, λέγονται δύο επιτόκια, αν παράγουν τον ίδιο τόκο ή την ίδια τελική αξία για το ίδιο κεφάλαιο και τον ίδιο συνολικό χρόνο τοκισμού, όταν αντιστοιχούν σε διαφορετικές περιόδους ανατοκισμού.

$$K = K_0 \times (1+i_m)^m \Rightarrow i = (1+i_m)^m - 1 \Rightarrow i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

→ Το επιτόκιο i_m λέγεται επιτόκιο κλασματικής περιόδου. Το επιτόκιο i λέγεται ετήσιο πραγματικό επιτόκιο.

$$J_m = m \times \left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

→ Το επιτόκιο $J_m = i_m \times m$ λέγεται ονομαστικό επιτόκιο συχνότητας. Μας βοηθάει να βρίσκουμε το ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο συχνότητας m, όταν ξέρουμε το ετήσιο πραγματικό επιτόκιο i.

2.2.3 Εύρεση της τελικής αξίας κεφαλαίου, με κλασματικό χρόνο ανατοκισμού.

Έστω ότι ο χρόνος t αποτελείται από n χρονικές μονάδες και $\frac{m}{l}$ μέρη μιας χρονικής μονάδας.

● Εκθετικός τρόπος

$$K = \times (1+i)^{\frac{m}{l}} = \times (1+i)^{n+\frac{m}{l}}$$

● Γραμμική μέθοδος

$$K_n = \times \left(1+\frac{m}{l} i\right)$$

Αν η ακέραια περίοδος είναι ο ένας χρόνος και ο χρόνος είναι n χρόνια και m μήνες, τότε έχουμε:

K

= × $(1+\frac{m}{12}i)$

Αν ο χρόνος είναι n χρόνια και d ημέρες, τότε έχουμε:

K

= × $(1+\frac{d}{360}i)$

2.3 Περιοδικός ανατοκισμός

Ο περιοδικός ανατοκισμός χρησιμοποιείται για συγκεκριμένο (πεπερασμένο) αριθμό περιόδων ανατοκισμού σε ένα χρόνο, π.χ.:

- 4 για τριμηνιαίο ανατοκισμό
- 12 για μηνιαίο ανατοκισμό
- 52 για εβδομαδιαίο ανατοκισμό
- 365 για καθημερινό ανατοκισμό
- 8.750 για ωριαίο ανατοκισμό

Κλπ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Το ποσό των 2.000 ευρώ επενδύεται για πέντε χρόνια σε έναν ανατοκιζόμενο λογαριασμό, που δίνει 6% τόκο ανά τρίμηνο. Να βρεθεί το τελικό ποσό στο λογαριασμό.

ΛΥΣΗ

$A = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$ = 2000 = 2000 × $1{,}015^{20}$ = 2000 × 1,346855 = 2693,71

ΑΣΚΗΣΗ 2

Το ποσό των 5.000 ευρώ επενδύεται για δύο χρόνια σε έναν ανατοκιζόμενο λογαριασμό, που δίνει 1% τόκο ανά μήνα. Να βρεθεί το τελικό ποσό στο λογαριασμό.

ΛΥΣΗ

A = 5000 = 5000 × $1{,}00083^{24}$ = 5000 × 1,020111 = 5100,555

2.4 Συνεχής ανατοκισμός

Τα επιτόκια, μερικές φορές, μετατρέπονται σε επιτόκια συνεχούς ανατοκισμού επειδή ο συνεχής ανατοκισμός είναι καταλληλότερος (π.χ. ευκολότερα διαφοροποιημένος). Ένας βασικός λόγος που χρησιμοποιούμε το συνεχή ανατοκισμό είναι για να απλοποιήσουμε την ανάλυση των ποικίλων επιτοκίων προεξόφλησης.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ας υποθέσουμε ότι στο έτος 0, ένα σεντ κατατίθεται σε ένα λογαριασμό με 1% επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού (δηλ., r = 0, 01). Πόσο θα αξίζει 2110 χρόνια αργότερα;

ΛΥΣΗ
Το ποσό που ένας λογαριασμός έχει αυξηθεί μετά από t χρόνια δίνεται από
A(t) = $A_0 e^{rt}$, η οποία στην περίπτωση αυτή γίνεται: A(t) = $0{,}01 e^{0{,}01t}$

Έτσι μετά από 2110 χρόνια, ο λογαριασμός θα αυξηθεί με
A(2110) = $0{,}01 e^{(0{,}01)2110}$ = $0{,}01 e^{21{,}1}$ = (0,01)(1457516796.05142392) = 14575167.9605142392 €

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ποιο χρηματικό ποσό θα πρέπει να κατατεθεί σε ένα λογαριασμό με 8% επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού (δηλ., r = 0,08), για να αξίζει ένα εκατομμύριο ευρώ σε 30 χρόνια;

ΛΥΣΗ
Το ποσό που ένας λογαριασμός έχει αυξηθεί μετά από t χρόνια δίνεται από
A(t) = $A_0 e^{rt}$, οπότε

A(30) = $A_0 e^{0{,}08(30)}$ = 1.000.000 € => $A_0 = \frac{1.000.000}{e^{2{,}4}} \cong$ 90717,95

ΑΣΚΗΣΗ 3

Με τι επιτόκιο (συνεχούς ανατοκισμού) θα γίνουν οι 3.000 € 300.000 € σε 25 χρόνια;

ΛΥΣΗ

Το ποσό που ένας λογαριασμός έχει αυξηθεί μετά από t χρόνια δίνεται από
A(t) = $A_0 e^{rt}$, οπότε

A(25) = 3.000$e^{r(25)}$ = 300.000 => e^{25r} = $\frac{300.000}{3.000}$ = 100

Λαμβάνοντας το φυσικό λογάριθμο και των δύο πλευρών αυτής της εξίσωσης των αποδόσεων στη συνέχεια:

25r = $\ln 100$ => r = $\frac{\ln 100}{25}$ ≅ 0.18420680743952365

Το επιτόκιο θα πρέπει να είναι 18,42 %

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ποιος είναι ο χρόνος για να διπλασιαστεί μια επένδυση, στο πλησιέστερο δέκατο χιλιοστό του έτους, εάν κερδίζει 5% επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού;

ΛΥΣΗ

Το ποσό που ένας λογαριασμός έχει αυξηθεί μετά από t χρόνια δίνεται από
A(t) = $A_0 e^{rt}$, A(t) = $A_0 e^{0.05t}$ = 2A_0 => $e^{0.05t}$ = 2

Λαμβάνοντας το φυσικό λογάριθμο και των δύο πλευρών αυτής της εξίσωσης των αποδόσεων στη συνέχεια:

$0{,}05t$ = $\ln 2$ => t = $\frac{\ln 2}{0{,}05}$ ≅ 13.862943611198906

Με επιτόκιο 5% συνεχούς ανατοκισμού, θα χρειαστούν περίπου 13.8629 χρόνια σε μια επένδυση για να διπλασιαστεί

2.5 Προϋποθέσεις ανατοκισμού

Ο ανατοκισμός επιτρέπεται με τον τριπλό περιορισμό: α) ότι καθυστερούνται τόκοι τουλάχιστον ενός έτους, β) ότι έγινε ειδική συμφωνία ανατοκισμού ή ασκήθηκε καταψηφιστική αγωγή και γ) ότι η αγωγή ασκήθηκε ή η συμφωνία καταρτίστηκε μετά την πάροδο του έτους (Εφ ΑΘ 2981/1992 ΕΤραπΔ 1993.104, ΠολΠρΘεσ 1096/1994 ΕΤρΑξΧρΔ 1994. 47, ΜονΠρΘεσ 3160/1994 ΕΤρΑξΧρΔ 1994.293).

Εξαίρεση απότελούν οι διατάξεις των άρθρων 110, 111 § 2 και 112 ΕισΝ Α.Κ (ΜονΠρΘεσ 3160/1994 ΕΤρΑξΧρΔ 1994.293). Για απαιτήσεις που συνομολογήθηκαν μεταξύ εμπόρων και πηγάζουν από εμπορική αιτία και για τους δυο τους συμβαλλόμενους, είναι επιτρεπτό για οφειλόμενους τόκους, τουλάχιστο ενός εξαμήνου, να συμφωνηθούν ή ν' απαιτηθούν με αγωγή τόκοι (ΕφΑΘ 2981/1992 ΕΤραπΔ 1993.104, ΠολΠρΘεσ 1096/1994 ΕΤρΑξΧρΔ 1994.47).

Συμφωνία για κεφαλαιοποίηση των μελλοντικών τόκων, που γίνεται εκ των προτέρων και κατά την οποία η έναρξη του ανατοκισμού θα επέλθει αμέσως μόλις συμπληρωθεί στο μέλλον, έτος ή εξάμηνο καθυστέρησης των τόκων, είναι άκυρη ως προς τη ρήτρα του ανατοκισμού, σύμφωνα με τη διάταξη του άρθρου 174 Α.Κ (ΕφΑΘ 2981/1992 ΕΤραπΔ 1993.104). ακυρότητας μόνο της συμφωνίας, καθ' ένα μέρος υπερβάλλει τα προκύπτοντα ως άνω θεμιτά όρια του ανατοκισμού, ώστε να εξακολουθούν να οφείλονται τόκοι τόκων για χρονικά διαστήματα, που αντιστοιχούν σ' εκείνα του ανατοκισμού στις καταθέσεις.

Στην τραπεζική πίστωση επιτρέπεται κατ' εξαίρεση ο ανατοκισμός τόκων που οφείλονται σε πιστωτικά ιδρύματα (ΕφΑΘ 3050/1992 Αρμ 1993.319 = ΕΕμπΔ 1994.39). Αν οι τόκοι επιδικάστηκαν μ' επιτόκιο υπερημερίας και όχι με το συμφωνημένο στη σύμβαση πίστωσης δεν υπόκεινται σε ανατοκισμό (ΕφΑΘ 3050/1992 Αρμ 1993.319 = ΕΕμπΔ 1994.39).

Τόκοι από τραπεζικές πιστώσεις. Στη διάταξη του άρθρ. 3 § 2 Ν.Δ 588/1948, όπως ισχύει, σήμερα (ύστερα από τα άρθρα 4 § 2 Ν. 128/1975 και 2 Ν. 1046/1980) με την οποία εξουσιοδοτείται η ΝΕ να καθορίζει και να μεταβάλλει ακόμη και αναδρομικά (με έγκριση όμως, στην τελευταία περίπτωση του Υπουργικού Συμβουλίου), μεταξύ άλλων και το ύψος του τόκου και των λοιπών επιβαρύνσεων για οποιοδήποτε σκοπό από τις τράπεζες ή άλλα πιστωτικά ιδρύματα παρεχόμενες ή παρασχεθείσες πιστώσεις, όπως και στην ΑΝΕ 275/1980, που εκδόθηκε μέσα στα όρια της εν λόγω νομοθετικής εξουσιοδότησης, εμπίπτει και η τοκοφορία από πίστωση του τιμήματος σε περίπτωση πώλησης ακινήτου από τράπεζα ή πιστωτικό οργανισμό με τέτοια πίστωση είτε όλου είτε του μέρους (ΑΠ 182/1990 ΝοΒ 1991.908 = ΕΕΝ 1990.685).

Επιπλέον, όσον αφορά τον εκτοκισμό, έχει νομοθετική εξουσιοδότηση ΝΕ. Οι αποφάσεις της ΝΕ έχουν ισχύ κανόνα δικαίου. Από 8.12.1980 δεν ισχύουν οι περιορισμοί των άρθρων 111, 112 § 2 ΕισΝΑΚ (ΕφΘεσ 2970/1991 ΕλλΔνη 1992.1245).

Τα πιστωτικά ιδρύματα που λειτουργούν στην Ελλάδα, μπορούν, χωρίς κανένα χρονικό ή άλλο περιορισμό, να εισπράττουν τόκους επί τόκων και μάλιστα πάνω στους καθυστερούμενους τόκους από τη στιγμή που οι τελευταίοι έγιναν απαιτητοί και ανεξάρτητα από το αν η σχετική δανειακή σύμβαση προβλέπει ή όχι την καταβολή τόκων (ΕφΑΘ 10257/1996 ΕΤρΑξΧρΔ 1997.762 = ΔΕΕ 1997.603 = ΕΕμπΔ 1998.339).

Όσον αφορά την επιδίκαση των τόκων επί του απαιτούμενου κεφαλαίου, αρκεί ν' αναφέρεται η λέξη «νομιμοτόκως» και ο προσδιορισμός του χρόνου έναρξης αυτών, χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστεί το ορισμένο ποσό αυτών. Όταν όμως, ζητούνται και οι τόκοι των τόκων, πρέπει οι κεφαλαιοποιημένοι τόκοι ν' αναγράφονται κατά ποσό ορισμένο στη διαταγή πληρωμής, διαφορετικά αυτή είναι άκυρη κατά το άρθρο 630 ΚΠολΔ, σε συνδυασμό με το στοιχείο της βλάβης κατά το άρθρο 159 περ. 3 ΚΠολΔ (ΕφΘεσ 44/1998 ΔΕΕ 1998.725).

Αξίζει ν' αναφερθεί ότι, σύμφωνα με το άρθρο 27 § 1 Ν 2076/1992, τα πιστωτικά ιδρύματα υποχρεούνται να παύουν τον εκτοκισμό δανείων μετά τη συμπλήρωση χρονικού διαστήματος δώδεκα μηνών, που έχει σαν συνέπεια οι λογισθέντες τόκοι επί των δανείων αυτών να παραμένουν ανείσπρακτοι. Μετά την πάροδο του δωδεκαμήνου, ο εκτοκισμός των καθυστερούμενων τόκων επιτρέπεται να γίνεται μόνο εξωλογιστικά, ή εφόσον πρόκειται για δάνειο που εξυπηρετείται με ανοιχτό ή αλληλόχρεο λογαριασμό, λογιστικά με ισόποση πίστωση του λογαριασμού (ΕφΔωδ 262/1997 ΕπισκΕΔ 1998.757).

2.6 Διαταγή πληρωμής

Με τη διαταγή διατάσσεται ο οφειλέτης να καταβάλει στον αιτούντα ορισμένο χρηματικό ποσό ως κεφάλαιο, νομιμότοκα. Είναι εκτελεστός τίτλος μόνο για το κεφάλαιο αυτό και για τους επί αυτού νόμιμους τόκους. Αν δεν έχει επιδικάσει και τόκους επί των τόκων δεν αποτελεί ως προς αυτούς, εκτελεστό τίτλο.

Ο ανατοκισμός δεν επιτρέπεται όταν τα πιστωτικά ιδρύματα έχουν εξοπλίσει την απαίτησή τους με διαταγή πληρωμής ή δικαστική απόφαση, διότι πλέον ο τόκος που οφείλεται είναι τόκος υπερημερίας και όχι δικαιοπρακτικός (ΕφΘεσ 2383/1993 ΕΤρΑξΧρΔ 1994.90 = ΕΕμπΔ 1994.212 = Αρμ 1994.148).

Όσον αφορά την επιδίωξη είσπραξης τόκων επί καθυστερούμενων τόκων, αν η εκδοθείσα διαταγή πληρωμής δεν περιλαμβάνει σχετική διάταξη για την καταβολή τόκων λόγω ανατοκισμού, τότε δεν απότελεί εκτελεστό τίτλο ως προς αυτούς (ΑΠ 489/1997 ΝοΒ 1999.35).

Αναγκαστική εκτέλεση μπορεί να γίνει με βάση εκτελεστό τίτλο. Εκτελεστοί τίτλοι είναι οι διαταγές πληρωμής που εκδίδουν Έλληνες δικαστές (ΕφΘεσ 1813/1997 ΕΤρΑξΧρΔ 1997.776).

Από το συνδυασμό των διατάξεων 904,623,624,626,627-631 ΚΠολΔ, συνάγεται ότι, η διαταγή πληρωμής που εκδόθηκε με βάση το κατάλοιπο αλληλόχρεου λογαριασμού τράπεζας απότελεί εκτελεστό τίτλο μόνο για το κεφάλαιο και τους τόκους για τα οποία εκδόθηκε και όχι για τους τόκους από ανατοκισμό. Ο Ν. 1083/1980 και η εκδοθείσα κατ' εξουσιοδότηση αυτού απόφαση ΝΕ 289/1980, που ρυθμίζουν τον εκτοκισμό των τόκων που οφείλονται στις τράπεζες και τους άλλους πιστωτικούς οργανισμούς δεν τροποποίησαν τις διατάξεις της αναγκαστικής εκτέλεσης (ΑΠ 96/1996 ΕΕμπΔ 1997.46 = ΝοΒ 1997.780).

Έπειτα, εξαίρεση εισάγουν τ' άρθρα 40,57 και 65 του Ν.Δ. της 17.7./13.8.1923 σύμφωνα με τα οποία η αναγκαστική εκτέλεση που ενεργείται με βάση τις διατάξεις του, μπορεί να γίνει με μόνη την επίδοση επιταγής προς πληρωμή, παρά την έλλειψη εκτελεστού τίτλου (ΑΠ 96/1996 ΕΕμπΔ 1997.46 = ΝοΒ 1997.780).

Εν κατακλείδι, η διαταγή πληρωμής που απέκτησε ισχύ δεδικασμένου αποκλείει την ύστερη άσκηση νέας αγωγής για την ίδια απαίτηση και αποτελεί προδικαστικό ζήτημα για την ύστερη επιδίωξη αξίωσης του ανατοκισμού. Η απαίτηση τόκου των τόκων αποτελεί δικαίωμα που δεν ταυτίζεται με τη νομική βάση κύριας οφειλής. Ο τίτλος που επιδικάζει κεφάλαιο και τόκους δεν αποτελεί εκτελεστικό τίτλο και για τους τόκους (ΠολΠρΑΘ 464/1989 ΑΝ 1990.35).

2.7 Παραγραφή

Οι απαιτήσεις από κεφαλαιοποιηθέντες τόκους δεν υπάγονται στην πενταετή παραγραφή του άρθρου 250 αρ. 11 Α.Κ, διότι με την κεφαλαιοποίηση που γίνεται με τον ανατοκισμό, οι οφειλόμενοι τόκοι χάνουν τη νομική τους αυτοτέλεια και ενσωματώνονται στο κεφάλαιο, με συνέπεια να υπάγονται στην 20ετή παραγραφή του άρθρου 249 Α.Κ. Σε 20ετή παραγραφή υπόκεινται οι αξιώσεις από τα τέλη χαρτοσήμου ΦΚΕ και ΕΦΤΕ. Η αναγραφή των τόκων ως αυτοτελές κονδύλιο στην επιταγή προς πληρωμή, δεν συνεπάγεται την ανάκτηση από αυτούς της νομικής τους αυτοτέλειας, ούτε την υπαγωγή τους στην 5ετή παραγραφή, διότι γίνεται καθαρά για τεχνικούς ή λογιστικούς λόγους και προς πληρέστερη ενημέρωση των υπόχρεων ως προς το ακριβές ύψος της οφειλής τους και την αιτία, από την οποία πηγάζει (ΕφΠατρ 753/1998 ΔΕΕ 1999.195).

Οι τόκοι υπόκεινται σε 5ετή παραγραφή που ξεκινά από το τέλος του έτους εντός του οποίου δημιουργήθηκαν. Όταν όμως, συμφωνηθεί εκ των προτέρων ότι οι μη εισπραττόμενοι τόκοι θα κεφαλαιοποιούνται, τότε οι κεφαλαιοποιηθέντες τόκοι υπόκεινται σε 20ετή παραγραφή. Λόγοι διακοπής της παραγραφής (ΕφΑΘ 1140/1996 ΔΕΕ 1996.502).

2.8 Συνταγματικότητα

Δεν είναι αντισυνταγματική η ΑΝΕ 289/1980 που ορίζει ότι ο εκτοκισμός των οφειλόμενων σε τράπεζες και λοιπούς πιστωτικούς οργανισμούς τόκων, μπορεί να γίνει από την πρώτη ημέρα καθυστέρησης άνευ οποιουδήποτε χρονικού ή άλλου περιορισμού. Μπορεί να συναφτεί, όμως, αντίθετη συμφωνία μεταξύ των συμβαλλόμενων (ΕφΑΘ 1140/1996 ΔΕΕ 1996.502).

2.9 Κίνδυνοι από τον ανατοκισμό

Οι κίνδυνοι από τον επανειλημμένο τοκισμό του ίδιου ποσού, που κατά αποτέλεσμα ισοδυναμεί με τη συνομολόγηση υπέρμετρων τόκων[1], αφορούν πρωτίστως τον οφειλέτη και καθιστούν στοιχειώδη την ανάγκη προστασίας του από ενδεχόμενη εκμετάλλευση του από μέρους του δανειστή, δεδομένου μάλιστα ότι ο δανειστής είναι εκείνος που υπαγορεύει συνήθως το καθεστώς της σύμβασης.

Ειδικότερα ο κίνδυνος συνίσταται στην αοριστία της τελικής οικονομικής επιβάρυνσης του οφειλέτη αν μάλιστα ληφθεί υπόψη ότι ο εκτοκισμός των δεδουλευμένων τόκων είναι δυνατόν να επαναλαμβάνεται καθ' όλη την διάρκεια της καθυστέρησης κατά μικρότερα ή μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα. Οδυνηρή συνέπεια για τον οφειλέτη είναι ο αιφνιδιασμός του από την ανατροπή των προβλέψεων και του προϋπολογισμού της υποχρέωσής του, την οποία σαφώς επιφέρει η συνεχής αναμόρφωση της επιβάρυνσης.

Εξάλλου, η αοριστία της τελικής οφειλής ενδέχεται να θίξει και τους επόμενους στην τάξη ενυπόθηκους δανειστές του οφειλέτη, στην υπόθεση που η εξασφαλιστική ενέργεια του άρθρου 1289 Α.Κ καλύπτει όχι μόνο τους τόκους της απαίτησης αλλά κατά την ίδια τάξη και το ποσό που θα προκύψει από τον εκτοκισμό τους. Το άρθρο 1289 Α.Κ εφαρμόζεται σαφώς επί των καθυστερούμενων τόκων τους οποίους μάλιστα ασφαλίζει κατά την ίδια τάξη, αλλά με τους χρονικούς περιορισμούς που θέτει.

2.10 Επιτόκιο του ανατοκισμού

Το επιτόκιο στον ανατοκισμό προσδιορίζεται από τα μέρη. Όταν η κεφαλαιοποίηση των τόκων υλοποιείται με το συνυπολογισμό τους στο αρχικό κεφάλαιο, τότε ταυτίζεται με το επιτόκιο με το οποίο υπολογίζονται οι οφειλόμενοι τόκοι επί του συγκεκριμένου κεφαλαίου. Όταν όμως τηρείται ξεχωριστός λογαριασμός τόκων, τότε είναι δυνατόν να συμφωνηθεί διαφορετικό ύψος επιτοκίου ανατοκισμού.

Αν τα μέρη παρέλειψαν να προσδιορίσουν το επιτόκιο του ανατοκισμού και δεν έχει ανατεθεί η άρση της αοριστίας της παροχής στην τράπεζα, το επιτόκιο είναι το ίδιο με το επιτόκιο που υπολογίστηκαν οι ανατοκιζόμενοι τόκοι.

Εξαιτίας του εμφανούς κινδύνου που ενέχει ο ελεύθερος προσδιορισμός του επιτοκίου από τα μέρη, το άρθρο 30 του ν. 2789/2000 και το νεότερο άρθρο 42 § 1 του ν. 2912/2001 εισήγαγαν όρια τα οποία η συνολική οφειλή δεν επιτρέπεται να υπερβεί μετά τον υπολογισμό του ανατοκισμού, συνυπολογιζομένων των συμβατικών τόκων που και αυτοί δε δύνανται να υπερβαίνουν το 50% του ληφθέντος κεφαλαίου. Ως βάση υπολογισμού δηλαδή εκλαμβάνεται το αρχικώς ληφθέν κεφάλαιο ή το άθροισμα των κεφαλαίων των περισσότερων δανείων ή προκειμένου περί αλληλόχρεου λογαριασμού

[1] Σταθόπουλος, Γενικό Ενοχικό Δίκαιο, 1983, 423.

το ποσό της οφειλής όπως διαμορφώθηκε ένα έτος μετά τη λήψη του ποσού της τελευταίας πιστώσεως δανείου προσαυξημένων των ποσών αυτών με τους συμβατικούς τόκους μέχρι 50% του ληφθέντος κεφαλαίου κατ' ανώτατο όριο. Αν οι τόκοι υπερβαίνουν το 50% του ληφθέντος κεφαλαίου, το υπερβάλλον ποσό δεν υπολογίζεται προκειμένου για τον καθορισμό της βάσης. Έτσι, σε συμβάσεις που έχουν συναφθεί μέχρι 31.12.1985 ή σε περίπτωση αλληλόχρεων λογαριασμών αν η λήψη της τελευταίας πιστώσεως έγινε μέχρι την ημερομηνία αυτή, η συνολική οφειλή (υπόλοιποι τόκοι και ανατοκισμός) δε δύναται να ξεπερνά το τετραπλάσιο του αρχικού κεφαλαίου με τους συμβατικούς τόκους μέχρι 50%. Αν τα παραπάνω περιστατικά συνέβησαν μέχρι 31.12.1990, η οφειλή δεν πρέπει να υπερβεί το τριπλάσιο του αρχικού κεφαλαίου και του 50% των συμβατικών τόκων και αν έλαβαν χώρα μέχρι 31.12.2000, το διπλάσιο.

2.11 Δικονομικά ζητήματα

Εφόσον η απαίτηση της τράπεζας για ανατοκισμό στηρίζεται σε συμφωνία, θα πρέπει στην αγωγή ν' αναφέρεται συγκεκριμένα η συμφωνία αυτή και το σχετικό αίτημα. Το αίτημα δε αυτό δεν είναι η κεφαλαιοποίηση των οφειλόμενων και καθυστερούμενων τόκων τουλάχιστον ενός έτους ή εξαμήνου, ώστε στη συνέχεια να παράγουν και αυτοί τόκο, αλλά η καταψήφιση του εναγομένου στην πληρωμή των καθυστερούμενων τόκων εντόκως από την επίδοση της αγωγής έως την εξόφληση.

Και τούτο διότι, ενόψει των περιορισμών που καθορίζουν τ' άρθρα του Α.Κ. και του ΕισΝΑΚ, τόσο η συμφωνία περί ανατοκισμού όσο και η αγωγή δεν ανατρέχουν στο παρελθόν, στο χρόνο δηλαδή από τον οποίο οι τόκοι έγιναν απαιτητοί, κάτι που θα μπορούσε να έχει επαχθέστατες συνέπειες για τον οφειλέτη, αλλά ο ανατοκισμός αρχίζει μόνο από τη συμφωνία ή την επίδοση της περί ανατοκισμού αγωγής[2].

Η δικαστική απόφαση θα πρέπει να επιδικάζει ρητά τους τόκους επί των τόκων προσδιορίζοντας το επιτόκιο και τη συχνότητα ανατοκισμού.

2.12 Η νέα νομοθετική ρύθμιση για τον ανατοκισμό

Τη νέα ρύθμιση για τον τραπεζικό ανατοκισμό περιέχει σήμερα το άρθρο 12 του ν. 2601/1998 «ενισχύσεις ιδιωτικών επενδύσεων για την οικονομική και περιφερειακή ανάπτυξη της χώρας και άλλες διατάξεις», όπως έχει συμπληρωθεί και περαιτέρω τροποποιηθεί από τ' άρθρα 30 του ν. 2789/2000 και 42 του ν. 2912/2001. Πρόκειται για κακότεχνες ρυθμίσεις, που αντιμετωπίζουν αποσπασματικά τα προβλήματα του ανατοκισμού, με αποτέλεσμα να τυγχάνει ακόμη εφαρμογής και η απόφαση της Ν.Ε. σε ορισμένα σημεία.

Ως προς τον χρονικό διάστημα του ανατοκισμού, είναι βέβαια φανερό ότι δεν μπορεί να υπολογίζεται σε ημερήσια βάση, διότι κάτι τέτοιο θα υπερχρέωνε τον οφειλέτη. Η ελευθερία του καθορισμού της συχνότητας του ανατοκισμού περιορίζεται με βάση τις αρχές της καλής πίστης, των χρηστών ηθών και της μη καταχρηστικής άσκησης δικαιώματος. Εξάλλου, δεν θα ήταν αβάσιμο να υποστηρίξει κανείς ότι οι ρήτρες που τίθενται στις συμβάσεις για την χρονική συχνότητα του ανατοκισμού θα πρέπει να ταυτίζονται με τις ρήτρες για τον ανατοκισμό των καταθέσεων, που ορίζουν οι τράπεζες ή να καθορίζουν μεγαλύτερα διαστήματα ανατοκισμού. Σε κάθε περίπτωση

---

[2] ΕφΑθ 9104/1999, ΔΕΕ 2000, ΣΕΛ. 630, απ 1289/2000, ΔΕΕ 2001, σελ. 503

πάντως είναι απαραίτητο να προσδιορίζεται με σαφήνεια η συχνότητα του ανατοκισμού που με τη σειρά της συντελεί στον ποσοτικό προσδιορισμό της παροχής του οφειλέτη, προκειμένου ν' αποφευχθεί η αοριστία της παροχής.

Πέρα όμως από τις γενικές αυτές αρχές, το αρ. 12 § 1 ορίζει για τις συμβάσεις δανείων, ότι εφόσον υπάρχει συμφωνία των μερών, ο ανατοκισμός είναι τουλάχιστον εξάμηνος, με την έννοια ότι δεν μπορεί να συμφωνείτε για μικρότερα χρονικά διαστήματα. Αν τέτοια συμφωνία εκλείπει, ισχύουν όσα ορίζουν τ' άρθρα 296 Α.Κ. και 110 και 111 ΕισΝΑΚ (αρ. 12 § 1 εδ. β΄), δηλαδή, ο εξάμηνος κατά βάση ανατοκισμός.

Στις συμβάσεις αλληλόχρεου λογαριασμού θα πρέπει καταρχήν να επισημανθεί ότι οι απαιτήσεις από τόκους εισέρχονται στον τρέχοντα λογαριασμό χάνοντας την αυτοτέλειά τους και κεφαλαιοποιούνται και ανατοκίζονται σύμφωνα με το αρ. 112 ΕισΝΑΚ. Αυτό σημαίνει ότι, εφόσον δεν προβλέπεται κάτι άλλο στη σύμβαση, ο λογαριασμός κλείνει περιοδικά και οι τόκοι ανατοκίζονται ανά εξάμηνο. Ο ανά εξάμηνο ανατοκισμός ισχύει και στην περίπτωση του οριστικού κλεισίματος του λογαριασμού, εφόσον δεν έχει συμφωνηθεί κάτι άλλο. Αυτά προκύπτουν από το αρ.12 § 1 εδ. β', το οποίο παραπέμπει στις διατάξεις του ΕισΝΑΚ. Αν όμως υπάρχει συμφωνία των μερών, τότε θα πρέπει να γίνει ο εξής διαχωρισμός. Αν συμφωνηθεί μεγαλύτερο του εξάμηνου διάστημα κλεισίματος του λογαριασμού και ανατοκισμού, ισχύει η εν λόγω συμφωνία. Αν όμως συμφωνηθεί κλείσιμο ανά τρίμηνο, όπως επιτρέπεται κατά το αρ. 112 ΕισΝΑΚ, ο ανατοκισμός ισχύει κατ' ελάχιστο όριο ανά εξάμηνο κατ' εξαίρεση από την παραπάνω ρύθμιση (αρ. 12 § 1 2η περίοδος).

Στη δεύτερη παράγραφο του άρθρου 12 ορίζεται ότι «οι υφιστάμενες συμφωνίες περί ανατοκισμού για συμβάσεις που έχουν καταρτισθεί πριν από την έναρξη ισχύος του νόμου αυτού εξακολουθούν να ισχύουν». Ενώ δηλαδή για τις συμβάσεις που συνήφθησαν μετά την έναρξη ισχύος του νόμου, δεν επιτρέπεται να συμφωνηθεί ανατοκισμός ανά διαστήματα μικρότερα του εξαμήνου, σε όσες συμβάσεις προηγήθηκαν του εν λόγω νόμου εξακολουθούν να ισχύουν τυχόν συμφωνίες για ανατοκισμό (π.χ. ανά τρίμηνο). Στη συνέχεια εισάγεται μία καινοτόμος ρύθμιση που προβληματίζει. Σύμφωνα με αυτή, αν στις παραπάνω συμβάσεις δεν υπάρχουν τέτοιες συμφωνίες, εισάγεται αυτοδίκαιος ανατοκισμός ανά εξάμηνο κατ' ελάχιστο όριο.

Ειδικά δε για στεγαστικά δάνεια ορίζεται ότι ισχύει ο εξάμηνος ανατοκισμός μετά δωδεκάμηνο από την έναρξη ισχύος του νόμου, ενώ για τις πιστώσεις μέσω πιστωτικών δελτίων (καρτών) ισχύει ο εξάμηνος ανατοκισμός από την πρώτη ανανέωσή τους. Η ρύθμιση αυτή ευνοεί τις τράπεζες σε βάρος των πελατών τους, οι οποίοι βρίσκονται ήδη σε δυσμενή οικονομική θέση. Η επιβολή ανατοκισμού είναι θέμα ιδιαίτερων συμφωνιών, των συνθηκών που διέπουν τις εν λόγω συμβάσεις, των αρχών του αστικού δικαίου για την καλή πίστη και την κατάχρηση δικαιώματος. Η ανατροπή αυτού του καθεστώτος αποκλειστικά σε βάρος του ενός συμβαλλόμενου μέρους είναι αδικαιολόγητη.[3]

Πάντως, ο εξάμηνος ανατοκισμός των καθυστερούμενων τόκων των παλιών πιστωτικών συμβάσεων δεν μπορεί παρά να ενεργεί μόνο για το μέλλον, από τη θέση δηλαδή σε ισχύ της σχετικής διάταξης του άρθρου 12 του ν. 2601/1998 και όχι αναδρομικά από την κατάρτιση της σύμβασης, επειδή κάτι τέτοιο θα αποτελούσε ανεπίτρεπτη ανατροπή άρδην των όσων ο Άρειος Πάγος με τις υπ' αριθμούς 8/1998 και 9/1998 αποφάσεις της Ολομέλειάς του ενομολόγησε και ταυτόχρονα θα ενείχε αντίθεση με την ακροτελεύτια διάταξη της § 7, σύμφωνα με την οποία η ισχύς των διατάξεων του

[3] Σπ. Ψυχομάνης, ο.π., σελ. 130

εν λόγω άρθρου αρχίζει από τη δημοσίευση του νόμου στην Εφημερίδα της Κυβερνήσεως[4].

Αλλά και στις οφειλές για καθυστερούμενους τόκους από συμβάσεις δανείων και πιστώσεων που έχουν καταγγελθεί ή οι εξ αυτών λογαριασμοί έχουν κλείσει από την έναρξη της ισχύος του ν. 1083/1980 μέχρι τη δημοσίευση του παρόντος νόμου, εξακολουθούν να ισχύουν οι υφιστάμενες συμφωνίες περί ανατοκισμών, κι αν δεν υπάρχουν τέτοιες, εισάγεται αυτοδίκαιος ανατοκισμός ανά εξάμηνο (αρ. 12 § 3).

Η διάταξη της παραγράφου 4 επιδιώκει να διατηρηθούν όσα έχουν κριθεί τελεσίδικα ή ρυθμίστηκαν με συμβιβασμό ή με αναγνώριση χρέους ή άλλη συμφωνία μεταξύ των πιστωτικών ιδρυμάτων και των οφειλετών τους, αναφορικά με τις πιστωτικές συμβάσεις, μέχρι τη δημοσίευση του νόμου. Με αυτό τον τρόπο αποκλείεται η επιβολή του αυτοδίκαιου εξάμηνου ανατοκισμού των προηγούμενων παραγράφων στα ανεξόφλητα υπόλοιπα των περιπτώσεων αυτών. Αν ωστόσο οι συμφωνίες αυτές ή οι αποφάσεις έχουν στηριχθεί στις θέσεις της εσφαλμένης νομολογίας του Α.Π, μπορούν ν' ανατραπούν λόγω πλάνης ή με άσκηση αναιρέσεως για παράβαση νόμου αντίστοιχα. Όταν πρόκειται για συμβάσεις δανείων ή πιστώσεων σε συνάλλαγμα σε φυσικά ή νομικά πρόσωπα που δεν έχουν την κατοικία ή την έδρα τους στην Ελλάδα ή για συμβάσεις με αντικείμενο παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα ή για συμβάσεις δανείων ή πιστώσεων μεταξύ πιστωτικών ή χρηματοδοτικών ιδρυμάτων, επιτρέπονται συμφωνίες περί ανατοκισμού χωρίς κανένα χρονικό ή άλλο περιορισμό ή παραπομπές σε σχετικούς όρους πρότυπων συμβάσεων. Ο Διοικητής της Τράπεζας της Ελλάδος μπορεί με πράξεις του να επεκτείνει την εφαρμογή της παραπάνω διάταξης και σε άλλες u949 ειδικής φύσεως χρηματοοικονομικές συναλλαγές (άρθρο 12 § 5).

Με την παράγραφο 6 καταργείται ρητά η διάταξη του αρ. 8 § 6 του ν. 1083/1980 και με την 7 ορίζεται ότι η ισχύς των διατάξεών του αρχίζει από τη δημοσίευση του νόμου στην Εφημερίδα της Κυβερνήσεως, μ' εξαίρεση τις συμβάσεις καταναλωτικής πίστης, για τις οποίες η ισχύς των διατάξεων αρχίζει μετά εξάμηνο από τη δημοσίευσή του.

[4] ΕφΑθ 4285/2000, ΔΕΕ 2000, σελ. 883-884

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΡΑΝΤΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ράντα τα είδη, της κατηγορίες της και τις εφαρμογές της.

3.1 Βασικές έννοιες

Ο όρος ράντα προέρχεται από τον λατινικό όρο **reditta** και στην αγγλική γλώσσα **rent** ή **annuity**. Στην ελληνική γλώσσα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί με τον όρο χρηματοσειρά ή χρηματοροή, εξηγώντας παρακάτω τι ακριβώς σημαίνει. Είναι δηλαδή ένα σύνολο χρηματικών ποσών που είναι ίσα και καταβάλλονται σε μορφή κατάθεσης η ανάληψης σε ίσα χρονικά διαστήματα. Οι πιο γνώστες σε εμάς μορφές ράντας είναι το ενοίκιο που καταβάλλουμε ή εισπράττουμε στην καθημερινότητά μας, οι ασφαλιστικές εισφορές που κρατούνται από μισθούς καθώς και οι δόσεις που πληρώνουμε σε δάνειο που έχουμε συνάψει.

Η ράντα αποτελείται από τέσσερα «κομμάτια», τον όρο, την περίοδο, την αρχή, και το τέλος της.

- **Όρος** είναι το καταβεβλημένο χρηματικό ποσό κατάθεσης ή ανάληψης κάθε φοράς.
- **Περίοδος** είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών όρων αυτής, δηλαδή ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την επόμενη καταβολή της.
- **Αρχή ράντας** είναι η αρχή της πρώτης περιόδου της, δηλαδή ο χρόνος που ξεκινάει από την πρώτη καταβολή του όρου της ράντας και
- **Τέλος ράντας** είναι ουσιαστικά η τελευταία καταβολή του όρου της ράντας.

3.2 Αρχική και τελική αξία ράντας

Επίσης, η αρχική αξία(A) της που είναι το άθροισμα των πραγματικών αξιών των όρων της και βοηθάει στην αξιολόγηση των επενδύσεων και φυσικά την τελική αξία(S) της που είναι το άθροισμα των τελικών αξίων των όρων της.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα που θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τον υπολογισμό της αρχικής και τελικής αξία ράντας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Στο τέλος κάθε έτους και για τρία συνεχή έτη καταθέτουμε 50,150,450 ευρώ αντίστοιχα, το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού είναι 3%. Ψάχνουμε την τελική και αρχική αξία της ράντας.

ΛΥΣΗ

Η τελική αξία της ράντας όπως είδαμε παραπάνω είναι το άθροισμα των τελικών αξιών των όρων της, οπότε για να την υπολογίσουμε πρέπει να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα. Ο πρώτος όρος είναι 50 ευρώ με ανατοκισμό για δυο χρόνια. Ο δεύτερος 150 ευρώ με ανατοκισμό για ένα χρόνο υπόλοιπο για τρία χρόνια, και ο τρίτος είναι 450 ευρώ που απλά προστίθεται στο λογαριασμό αφού αντιστοιχεί στο τρίτο έτος.

Επομένως έχουμε την τελική αξία:

$$S = 50 \cdot (1 + 0{,}03)^2 + 150 \cdot (1 + 0{,}03) + 450 = 53 + 154{,}5 + 450 = \mathbf{657}$$

Για να βρούμε την αρχική αξία (Α) πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα των πραγματικών αξιών των όρων της ράντας στην αρχή της. Άρα αρχική αξία:

$$A = \frac{50}{1 + 0{,}03} + \frac{150}{(1 + 0{,}03)^2} + \frac{450}{(1 + 0{,}03)^3} = \frac{50}{1{,}03} + \frac{150}{1{,}06} + \frac{450}{1{,}09} = 48{,}54 + 141{,}50 + 412{,}84 = \mathbf{602,88}$$

Ο τρόπος αυτός γενικά χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της αρχικής και τελικής αξίας κάθε ράντας.

3.3 Αξιολόγηση επενδύσεων με τη χρήση-βοήθεια της αρχικής αξίας της ράντας

Όπως αναφέραμε προηγουμένως η αρχική αξία μιας ράντας χρησιμοποιείται επίσης και για την αξιολόγηση των επενδύσεων με σκοπό να μας ενημερώσει για το αν μια επένδυση που θέλουμε να κάνουμε είναι συμφέρουσα η μη, κάνοντας με αυτό τον τρόπο της αποφάσεις μας γρηγορότερες, ευκολότερες και σωστότερες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σκεφτόμαστε να επενδύσουμε 15.000€ σε μια επιχείρηση η οποία υπολογίζουμε ότι θα μας αποφέρει κέρδος σε δυο συναπτά έτη από σήμερα. 10.000 ευρώ στο τέλος του πρώτου έτους και 10.200 ευρώ στο τέλος του δεύτερου έτους με επιτόκιο ανατοκισμού 2%. Να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας και στη συνέχεια να γίνει η αξιολόγηση της επένδυσης αυτής.

ΛΥΣΗ

Πρέπει να υπολογίσουμε την αρχική αξία:

$$(A) = \frac{10.000}{1 + 0{,}02} + \frac{10.200}{(1 + 0{,}02)^2} = \frac{10000}{1{,}02} + \frac{10200}{1{,}0404} = 9.803{,}91 + 9{,}807{,}62 = \mathbf{19.611,61}$$

Αν η αρχική αξία (Α) είναι μικρότερη της επένδυσης τότε αυτή είναι μη συμφέρουσα. Σε αυτό το παράδειγμα η αρχική αξία (Α)=19611,61>15.000, άρα η επένδυση είναι συμφέρουσα.

Με βάση την αρχική αξία (Α) διακρίνουμε και τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Αν **Α<15.000** τότε η επένδυση είναι μη συμφέρουσα

Αν **Α=15.000** τότε η επένδυση μας είναι αδιάφορη αφού δεν θα έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά.

Στην περίπτωση που η αρχική αξία της ράντας είναι ίση με την επένδυση, τότε το επιτόκιο (i) που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της ονομάζεται επιτόκιο επένδυσης.

3.4 Βασικές κατηγορίες ράντων

Οι ράντες ανάλογα με το είδος τους διακρίνονται σε κάποιες βασικές κατηγορίες τις οποίες θα αναφέρουμε και θα αναλύσουμε παρακάτω.

Πρώτη βασική κατηγορία ράντας είναι οι σταθερές και μεταβλητές ράντες. Σταθερή είναι η ράντα στην οποία όλοι οι όροι, τα καταβεβλημένα χρηματικά ποσά δηλαδή, είναι ίσα μεταξύ τους, και μεταβλητή είναι εκείνη η ράντα στην οποία δεν είναι όλοι οι όροι ίσοι μεταξύ τους.

Δεύτερη σημαντική κατηγορία είναι οι ληξιπρόθεσμες και οι προκαταβλητέες ράντες, όπου κάθε είδος εξαρτάται από το πότε γίνεται η καταβολή των όρων της ράντας. Στις ληξιπρόθεσμες οι όροι της ράντας καταβάλλονται στο τέλος της κάθε περιόδου. Αντίθετα στις προκαταβλητέες η καταβολή των όρων γίνεται στην αρχή της περιόδου.

Τρίτη βασική κατηγορία είναι οι **πρόσκαιρες** και οι **διηνεκείς** ράντες. Πρόσκαιρες είναι οι ράντες στις οποίες το πλήθος των όρων είναι πεπερασμένο και διηνεκείς, οι ράντες οι οποίες το πλήθος των όρων τους είναι άπειρο.

Στην τέταρτη κατηγορία ανήκουν οι **άμεσες**, οι **μέλλουσες** και οι **αρξάμενες** ράντες οι οποίες είναι οι ράντες που ο πρώτος όρος καταβάλλεται στην πρώτη περίοδο τους, ο πρώτος όρος καταβάλλεται μέσα στις επόμενες περιόδους τους, και ο πρώτος όρος καταβάλλεται πριν από ορισμένες περιόδους τους αντίστοιχα.

Πέμπτη κατηγορία ραντών είναι οι **ακέραιες** και οι **κλασματικές**, όπου στις ακέραιες, η περίοδος ανατοκισμού της ράντας συμπίπτει με την ίδια την περίοδο της, και κλασματική είναι η ράντα που δεν είναι ακέραια.

Τέλος, είναι οι **βέβαιες** και οι **τυχαίες**. Βέβαια καλείται η ράντα στην οποία η καταβολή των όρων δεν εξαρτάται από την πραγματοποίηση ή μη κάποιου γεγονότος και τυχαία καλείται η ράντα στην οποία η καταβολή των όρων εξαρτάται από την πραγματοποίηση ή μη κάποιου γεγονότος.

Στην συνέχεια ακολουθούν κάποια θεωρητικά παραδείγματα των κατηγοριών αυτών για την καλύτερη κατανόηση τους.

3.4.1 Ράντες σταθερές, ακέραιες, πρόσκαιρες, ληξιπρόθεσμες και άμεσες

Ράντα σταθερή, ακέραια, ληξιπρόθεσμη και άμεση

Καταβάλλει κάποιος για n συνεχείς χρονικές περιόδους του επιτοκίου i, στο τέλος κάθε περιόδου R ευρώ.

(1) Η αρχική αξία της ράντας δίνεται από τον τύπο:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \text{ όπου } U = \frac{1}{1+i}$$

(2) Η τελική αξία της ράντας δίνεται από τον τύπο:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω i επιτόκιο ανατοκισμού. Αν καταβάλλει κάποιος για n συνεχείς χρονικές περιόδους του επιτοκίου i το ποσό R στο τέλος κάθε περιόδου, τότε να βρεθεί η αρχική και τελική αξία της ράντας.

ΛΥΣΗ

Για να βρούμε την αρχική αξία της ράντας αρκεί να βρούμε με ανατοκισμό την πραγματική αξία κάθε όρου της ράντας στην αρχή της, και στη συνέχεια να τις αθροίσουμε. Η πραγματική αξία του πρώτου όρου είναι:

$$A_1 = \frac{R}{1+i} = R \cdot U,$$

όπου:

$$U = \frac{1}{1+i}$$

Για τον υπολογισμό της αξίας του δεύτερου όρου ακολουθούμε τον ίδιο τύπο ως εξής:

$$A_2 = \frac{R}{(1+i)^2} = R \cdot U^2$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται όλες οι πραγματικές αξίες οι οποίες χρειάζονται. Στη συνέχεια και αφού έχουμε υπολογίσει τις πραγματικές αξίες τις προσθέτουμε οπότε:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = (R \cdot U) + R \cdot U^2 + \cdots + R \cdot U^n$$

Ψ

$$A = R \cdot (U + U^2 + \cdots + U^n) = R \cdot U \cdot \frac{(U^n - 1)}{(U - 1)} = R \cdot \frac{1 - U^n}{i}$$

<u>Τελική αξία</u>

Για να βρούμε την τελική αξία της ράντας πρέπει με ανατοκισμό να βρούμε την τελική αξία κάθε όρου της ράντας στο τέλος της, και στη συνέχεια να τις προσθέσουμε.

Για τον πρώτο όρο έχουμε: $S_1 = R \cdot (1+i)^{n-1}$

Για τον δεύτερο όρο έχουμε: $S_2 = R \cdot (1+i)^{n-2}$

Για τον (n-1) όρο είναι: $S_{n-1} = R\cdot(1+i)$ και για την τελική αξία του νιοστού όρου έχουμε: $S_n = R$. Άρα η τελική αξία της ράντας είναι:

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = R\cdot(1+i)^{n-1} + \cdots + R\cdot(1+i) + R$$

Ψ

$$S = R + R\cdot(1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1} = R\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

Ψ

$$S = R\cdot\frac{[[(1+i)]^{n}]-1}{i}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Καταθέτει κάποιος με ανατοκισμό για τρία συνεχή έτη και στο τέλος κάθε έτους το ίδιο πάντα ποσό, 400 ευρώ. Αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι ετήσιο 3%, τότε να βρεθεί η αξία των καταθέσεων στην αρχή του πρώτου έτους και στο τέλος του τρίτου.

Αυτό το πρόβλημα αποτελεί παράδειγμα ετήσιας, πρόσκαιρης, άμεσης ακεραίας, σταθερής και ληξιπρόθεσμης ράντας, και ψάχνουμε την αρχική και τελική τους αξία, δηλαδή R=400, n=3, i=0,03 και ψάχνουμε την αρχική A και τελική S αξία της, επομένως:

$$A = R\cdot\frac{1-U^n}{i} = 400\cdot\frac{1-U^3}{0{,}03}$$

Από τον πίνακα 3 (Α΄ ΜΕΡΟΣ) παρατηρούμε ότι για τρία έτη και επιτόκιο 0,03 η ποσότητα της αρχικής αξίας που μας ενδιαφέρει αντιστοιχεί σε 2,8286

$$A = 400\cdot 2{,}8286 = \mathbf{1.131,44}$$

Η τελική της αξία είναι:

Από τον πίνακα 2 (Α΄ ΜΕΡΟΣ):

S = 400 · 3,09090000

S=1236.36

3.4.2 Ράντες σταθερές, ακέραιες, πρόσκαιρες, προκαταβλητέες και άμεσες

Ράντα σταθερή, ακέραια, προκαταβλητέα και άμεση

Καταβάλλει κάποιος για n συνεχείς περιόδους του επιτοκίου i , στην αρχή κάθε περιόδου, R ευρώ.

(1) Η αρχική αξία της ράντας δίνεται από τον τύπο:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1 + i) \; \mu\varepsilon \; U = \frac{1}{1 + i}$$

(2) Η τελική αξία της ράντας δίνεται από τον τύπο:

$$S = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \cdot (1 + i)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού. Αν καταβάλλει κάποιος για n συνεχείς χρονικές περιόδους του επιτοκίου i στην αρχή κάθε περιόδου το ίδιο ποσό R, τότε να βρεθεί η αρχική και τελική αξία της ράντας.

ΛΥΣΗ:

Για να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας αρκεί να βρούμε με ανατοκισμό την πραγματική αξία κάθε όρου της στην αρχή της και στη συνέχεια να προσθέσουμε όλες

$$A_1 = R$$

αυτές τις πραγματικές αξίες, η πραγματική αξία του πρώτου όρου είναι:

Η πραγματική αξία του δεύτερου όρου είναι:

$$A_2 = \frac{R}{(1+i)} = R \cdot U$$

Η πραγματική αξία του n-οστού όρου είναι:

$$A_n = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} = R \cdot U^{n-1}$$

Άρα η αρχική πραγματική αξία της ράντας είναι:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = R + (R \cdot U) + \cdots + (R \cdot U^{n-1})$$

Ψ

$$A = R \cdot (1 + U + \cdots + U^{n-1}) = R \cdot \frac{U^n - 1}{U - 1}$$

Ψ

Για τον υπολογισμό της τελικής αξίας της ράντας ακολουθούμε τη συνήθη διαδικασία δηλαδή υπολογίζουμε την τελική αξία κάθε όρου στο τέλος της και στη συνέχεια προσθέτουμε αυτές τις αξίες:

Πρώτος όρος:

$$S_1 = R \cdot (1+i)^n$$

Δεύτερος όρος:

$S_2 = R \cdot (1+i)^{n-1}$

n-οστός όρος:

$S_n = R \cdot (1+i)$

Άρα η τελική αξία της ράντας είναι:

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = R \cdot (1 + i)^n + R \cdot (1 + i)^{n-1} + \cdots + R \cdot (1 + i)$$

Εναλλακτικά:

$$S = R \cdot (1+i) \cdot [1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1}]$$

ψ

$$S = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Καταθέτει κάποιος με ανατοκισμό στην αρχή κάθε έτους και για τρία συνεχή έτη το ίδιο ποσό 500€. Το επιτόκιο ανατοκισμού είναι ετήσιο 4%. Να βρεθεί η αξία των καταθέσεων στην αρχή του πρώτου έτους και στο τέλος του τρίτου.

ΛΥΣΗ

Αρχική αξία ράντας:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1+i) = 500 \cdot \frac{1 - U^3}{0{,}04} \cdot (1 + 0{,}04)$$

Από τον πίνακα 3 (Α΄ ΜΕΡΟΣ) για την ποσότητα που μας ενδιαφέρει, για επιτόκιο 0,04% και για τρία έτη καταλήγουμε στο 2,77509103 επομένως:

$$A = 500 \cdot 2{,}77509103$$

$$A = \mathbf{1387,5}$$

Τελική αξία ράντας:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = 500 \cdot \frac{(1 + 0{,}04)^3 - 1}{0{,}04} \cdot (1 + 0{,}04) = \mathbf{1,623.23}$$

3.4.3 Ράντες σταθερές, ακέραιες, πρόσκαιρες, ληξιπρόθεσμες μέλλουσες.

Ράντα σταθερή, ακέραια, ληξιπρόθεσμη και μέλλουσα

Καταβάλλει κάποιος μετά από r χρονικές περιόδους του επιτοκίου i , για n συνεχείς χρονικές περιόδους του i , στο τέλος κάθε περιόδου R ευρώ.

(1) Η αρχική αξία της ράντας δίνεται από τον τύπο:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1+i)^{-r} \text{ όπου } U = \frac{1}{1+i}$$

(2) Η τελική αξία της ράντας δίνεται από τον τύπο:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού. Αν καταβάλλει κάποιος μετά από r χρονικές περιόδους του i από σήμερα, στο τέλος κάθε περιόδου και για n συνεχείς χρονικές περιόδους του i το ίδιο ποσό R, να βρεθεί η αρχική και τελική αξία της ράντας.

ΛΥΣΗ

Για να βρούμε την αρχική αξία πρέπει να βρούμε την πραγματική αξία A_1 όλων των όρων της ράντας στο τέλος της r περιόδου και στην συνέχεια βρίσκουμε την πραγματική αξία A του A_1 στην αρχή της πρώτης περιόδου.

Άρα:

$$A_1 = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \quad και \quad A = \frac{A_1}{(1+i)^r}$$

επομένως καταλήγουμε στον τύπο:

$$A = R \cdot \frac{\frac{1 - U^n}{i}}{(1+i)^r}$$

και

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1 + i)^{-r}$$

Τελική αξία ράντας:

$$S = R \cdot (1 + i)^{n-1} + R \cdot (1 + i) + R = R \cdot [1 + (1 + i) + \cdots + (1 + i)^{n-1}]$$

ή S

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Η εφαρμογή αυτή αποτελεί πρόβλημα ράντας ετήσιας, σταθερής, ακεραίας, πρόσκαιρης ληξιπρόθεσμης και μέλλουσας.

Κάνει κάποιος κατάθεση μετά από τρία έτη από σήμερα και για δυο συνεχή έτη στο τέλος κάθε έτους το ίδιο ποσό, 350€. Να βρεθεί η αξία των καταθέσεων σήμερα και στο τέλος του πέμπτου έτους από σήμερα με επιτόκιο ανατοκισμού 2%.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1 + i)^{-r} = 350 \cdot \frac{1 - U^2}{0{,}02} \cdot (1 + 0{,}02)^{-3}$$

Από τον πίνακα 3 (Α΄ ΜΕΡΟΣ) η ποσότητα που μας ενδιαφέρει για επιτόκιο 0,02 και για 2 έτη αντιστοιχεί σε 1,94156094

Άρα:

$$A = 350 \cdot 1{,}94156094 \cdot 0{,}94 = \mathbf{640{,}35}$$

και

$$S = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = 350 \cdot \frac{(1 + 0{,}02)^2 - 1}{0{,}02} = \mathbf{700}$$

3.4.4 Ράντα σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, προκαταβλητέα και μέλλουσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού. Αν καταβάλλει κάποιος μετά από χρονικές περιόδους του i από σήμερα για n συνεχείς χρονικές περιόδους του i και στην αρχή κάθε περιόδου το ίδιο ποσό R τότε να βρεθεί η αρχική και τελική αξία της ράντας.

ΛΥΣΗ

Όπως στο Πρόβλημα 4, για να βρούμε την αρχική αξία της ράντας βρίσκουμε την πραγματική αξία των όρων όλων, της ράντας στο τέλος της περιόδου και στη συνέχεια βρίσκουμε την πραγματική αξία Α του A_1 στην αρχή της πρώτης περιόδου.

Επομένως:

$$A_1 = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1 + i)$$

και

$$A = \frac{A_1}{(1 + i)^r}$$

Με αντικατάσταση καταλήγουμε στον εξής τύπο:

$$A = \frac{R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1 + i)}{(1 + i)^r} = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1 + i)^{1-r}$$

Για τον υπολογισμό της τελικής αξίας έχουμε:

$$S = R \cdot ([1 + i)]^n + \cdots + R(1 + i) = R \cdot [(1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^n]$$

$$= R \cdot \; 1 + \; i \; - \; 1 \cdot 1 \; i$$

ή S

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Γίνεται κατάθεση μετά από πέντε έτη από σήμερα και για τρία συνεχή έτη στην αρχή κάθε έτους το ίδιο ποσό των 700€ με επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Να βρεθεί η αξία των καταθέσεων σήμερα και στο τέλος του έκτου έτους από σήμερα.

ΛΥΣΗ

Τα δεδομένα μας για την ράντα αυτή είναι $R = 700, n = 3, r = 5, i = 0{,}03$.

Αρχική αξία:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1 + i)^{1-r} = 700 \cdot \frac{1 - U^3}{0{,}03} \cdot (1 + 0{,}03)^{1-5} = 100 \cdot \frac{1 - U^3}{0{,}03} \cdot (1 + 0{,}03)^{-4}$$

ή A$= 700 \cdot 2{,}82861135 \cdot 1{,}12 = \mathbf{2.217{,}6312984}$

Τελική αξία:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i) = 700 \cdot \frac{(1+0{,}03)^3 - 1}{0{,}03} \cdot (1+0{,}03) = 700 \cdot 3{,}0709 \cdot 1{,}03$$

ή S$= \mathbf{2.214{,}11}$

3.4.5 Ράντα σταθερή, ακέραια, διηνεκής, ληξιπρόθεσμη, άμεση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Δίδεται το επιτόκιο ανατοκισμού i. Αν καταβάλλει κάποιος συνεχώς στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου του i το ίδιο ποσό R, να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας.

ΛΥΣΗ

Για να μπορέσουμε να βρούμε την αρχική της αξία πρέπει να υπολογίσουμε με ανατοκισμό την πραγματική αξία κάθε όρου της σήμερα και στη συνέχεια να αθροίσουμε όλες τις υπολογισμένες αξίες.

Άρα: η πραγματική αξία του πρώτου όρου είναι:

$$A_1 = R \cdot \frac{1}{1+i} = R \cdot U$$

Η πραγματική αξία του δεύτερου όρου είναι:

$$A_2 = R \cdot \frac{1}{(1+i)^2} = R \cdot U^2$$

Και του νιοστού (n) όρου είναι:

$$A_n = R \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = R \cdot U^n$$

Επομένως η αρχική αξία της ράντας είναι:

$$A = \lim_{n \to \infty} (A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$$

Επειδή $U < 1$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} U^n = 0.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} R \cdot U \cdot \frac{U^n - 1}{U - 1} = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{U}{1 - U}.$$

Με την αντικατάσταση

$$U = \frac{1}{1 + i}$$

καταλήγουμε στον τύπο:

$$A = R \cdot \frac{1}{i}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Αφορά ληξιπρόθεσμη διηνεκή ράντα.

Ένας οργανισμός καταθέτει συνέχεια και στο τέλος κάθε μήνα το ίδιο πάντα ποσό των 20.000€ για την πληρωμή των τόκων ενός δανείου. Αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι 4% μηνιαίο τότε να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας, δηλαδή η αξία των καταθέσεων αυτών σήμερα.

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας τον τύπο:

$$A = R \cdot \frac{1}{i} = 20.000 \cdot \frac{1}{0{,}04} = \mathbf{500.000}$$

3.4.6 Ράντα σταθερή, ακέραια, πρόσκαιρη, προκαταβλητέα, διηνεκής και άμεση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Δίδεται το επιτόκιο ανατοκισμού. Αν καταβάλλει κάποιος συνέχεια και στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου του i το ίδιο ποσό R, να βρεθεί η αρχική αξία της ράντας αυτής.

ΛΥΣΗ

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε πραγματικές αξίες με ανατοκισμό του κάθε όρου της σήμερα και τις προσθέτουμε.

Άρα: Πραγματική αξία πρώτου όρου:

$A_1 = R$

Πραγματική αξία δεύτερου όρου:

$A_2 = \frac{R}{1+i} = R \cdot U^2$

Πραγματική αξία νιοστού (n) όρου:

$A_n = \frac{R}{1+i^{n-1}} = R \cdot U^{n-1}$

Άρα η αρχική αξία της ράντας είναι:

$$A = \lim_{n\to\infty}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$$

Επειδή $U < 1$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} U^n = 0.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} R\cdot\frac{U^n-1}{U-1}=\lim_{n\to\infty} R\cdot\frac{1}{1-U}.$$

Με την αντικατάσταση

$$U=\frac{1}{1+i}$$

καταλήγουμε στον τύπο:

$$A=R\cdot\left[\frac{1}{i}\right]\cdot(1+i).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Ένας οργανισμός καταθέτει συνέχεια και στην αρχή κάθε μήνα το ίδιο ποσό για την πληρωμή τόκων δανείου που αντιστοιχεί σε 25.000€. Αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι 4% μηνιαίο. Να βρεθεί η αξία των καταθέσεων σήμερα.

ΛΥΣΗ

$A=R\cdot\frac{1}{i}\cdot(1+i)$*με αντικατΦσταση του **τύ**που Χχουμε*

$$=25.000\cdot\frac{1}{0{,}04}\cdot(1+0{,}04)$$

$$\mathbf{=650.000}$$

3.4.7 Κλασματικές ράντες

Κλασματικές Ράντες

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού και έστω η χρονική περίοδος που «χωράει» λ φορές στη χρονική περίοδο του επιτοκίου i. Για την εύρεση της αρχικής και τελικής αξίας της ράντας, βρίσκουμε το ισοδύναμο επιτόκιο i_λ του επιτοκίου i που έχει χρονική περίοδο ίση με τη χρονική περίοδο της ράντας. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού και μια ράντα τέτοια ώστε η περίοδος της να χωράει λ φορές στην χρονική περίοδο του επιτοκίου i. Τότε για την εύρεση της αρχικής και τελικής αξίας της βρίσκουμε το ισοδύναμο επιτόκιο i_λ του επιτοκίου i που έχει χρονική περίοδο ίση με την χρονική περίοδο της ράντας. Ο τύπος που αντιπροσωπεύει τα παραπάνω είναι ο εξής:

$$1 + i = (1 + i_\lambda)^\lambda$$

$$i_\lambda = (1 + i)^{\frac{1}{\lambda}} - 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Καταθέτει κάποιος στην αρχή κάθε μήνα 300€. Ποιο είναι το ποσό που θα έχει συγκεντρωθεί στο τέλος 2 ετών από σήμερα αν το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού είναι 7%;

ΛΥΣΗ

$$1 + i = (1 + i_\lambda)^\lambda \rightarrow$$

$$1 + 0{,}07 = (1 + i_\lambda)^{12} \rightarrow$$

$$i_\lambda = (1 + 0{,}07)^{\frac{1}{12}} - 1 \rightarrow$$

$$i_\lambda = 1{,}00565415 - 1 \rightarrow$$

$$i_\lambda = \mathbf{0{,}00565415}$$

Τώρα με το νέο επιτόκιο που υπολογίσαμε για τον ένα χρόνο θα υπολογίσουμε την αξία των καταθέσεων στο τέλος του δεύτερου έτους που είναι ίση με την τελική αξία της ράντας προκαταβλητέας :

$$S = R \cdot \frac{\mathbf{[}(1+i_\lambda)^n - \mathbf{1]}}{i_\lambda} \cdot (1+i_\lambda)$$

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}}{i_\lambda} \cdot (1+i_\lambda)$$

$$S = 300 \cdot \frac{(1+0.07)^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}}{\mathbf{0.00565415}} \cdot (1+0{,}00565415)$$

$$S = \mathbf{7.470{,}17}$$

3.5 Εύρεση του αριθμού n των όρων της ράντας και τακτοποίησης της

Για τον υπολογισμό του n των όρων μιας ράντας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους του ανατοκισμού, μια από τις τρεις. Ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που δεν είναι και τότε μπορούμε να κάνουμε τακτοποίηση των όρων της ράντας. Στην τακτοποίηση ουσιαστικά αλλάζουμε κάποια στοιχεία της ράντας για να μετατρέψουμε τον αριθμό σε ακέραιο.

Στο παρακάτω παράδειγμα θα δούμε τον υπολογισμό, με διάφορες μεθόδους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Προκειμένου να συγκεντρώσει ο κος Μεγαρίτης 40.000€ καταθέτει στην αρχή κάθε έτους 400€ με επιτόκιο ετήσιο 3%,σε πόσα έτη θα συγκεντρώσει ο κος Μεγαρίτης το ποσό που θέλει;

ΛΥΣΗ

Ο υπολογισμός θα γίνει με διαφόρους τρόπους:

- Πρώτος τρόπος υπολογισμού

Αφού το ετήσιο ποσό κατατίθεται στην αρχή κάθε έτους έχουμε να κάνουμε με τελική αξία προκαταβλητέας ράντας

Επομένως:

$$R\cdot((1+i)\uparrow n-1)/i\cdot(1+i)=S\rightarrow 400\cdot((1+0{,}03)\uparrow n-1)/0{,}03\cdot(1+0{,}03)=40.000\rightarrow(1+0{,}03)\uparrow n-1=4$$

- Δεύτερος τρόπος υπολογισμού

Έστω ότι ο κος Μεγαρίτης θα μαζέψει 40.000€ μετά από n χρόνια. Τότε:

$$400\cdot\frac{(1+0{,}03)^n-1}{0{,}02}\cdot(1+0{,}03)=40.000\rightarrow\frac{40.000}{400\cdot 1{,}03}=\frac{(1+0{,}03)^n-1}{0{,}03}\rightarrow 97{,}087378641=\frac{(1+0{,}03)^n-1}{0{,}03}$$

Από αναζήτηση στον πίνακα 2 (Α΄ ΜΕΡΟΣ) παρατηρούμε ότι:

$$\textit{και}$$
$$\frac{(1+0{,}03)^{47}-1}{0{,}03}=\mathbf{100{,}39650095}$$

Επομένως μπορεί να γίνει υπολογισμός του αριθμού n των όρων μιας ράντας με τη μέθοδο της παρεμβολής ή με την απλή μέθοδο των τριών.

- Με την απλή μέθοδο των τριών έχουμε:

Με τη βοήθεια των πινάκων του παραρτήματος και πάλι:

$$100{,}39650095-96{,}50145723=\mathbf{3{,}89504372}$$

για διαφορά ενός έτους και 97,087378641-96,50145723=0,585921411 για διαφορά χ=;

$$X=1\cdot\frac{0{,}585921411}{3{,}89504372}$$

$X = \mathbf{0,150427429}$

Άρα $\chi = 46 + 0{,}150427429 = \mathbf{46,150427429}$

Στη συνέχεια ακολουθεί ο υπολογισμός του με τη μέθοδο του τύπου της παρεμβολής

- Ο τύπος της παρεμβολής έχει ως εξής:
-

$$\chi = \chi_1 + \frac{\chi_2 - \chi_1}{\psi_2 - \psi_1} \cdot (\psi - \psi_1)$$

όπου

$\chi 1 = 46$,

$\chi 2 = 47,$

$\psi 1 = 96{,}50145723$,

$\psi 2 = 100{,}39650095,$

$\psi = 97{,}087378641$ και

$\chi = n$.

$$\chi = 46 + \frac{47 - 46}{100{,}39650095 - 96{,}50145723} \cdot (97{,}087578641 - 96{,}50145723)$$

$$\chi = 46 + \frac{1}{3{,}89504372} \cdot 0{,}586121411$$

$\chi = 46 + 0{,}150478776$

$\chi = \mathbf{46,1504787776}$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός n των όρων της ράντας δεν είναι ακέραιος και επομένως θα πρέπει να γίνει τακτοποίηση της ράντας όπως αναφέραμε προηγουμένως.

Παρακάτω θα δούμε πως και με ποιούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό.

- **1η μέθοδος τακτοποίησης**

Αν ο κος Μεγαρίτης καταθέτει στην αρχή κάθε έτους 400€ για 46 συνεχή έτη, τότε στο τέλος των 46 ετών θα συγκεντρώσει ποσό ίσο με την τελική αξία της προκαταβλητέας ράντας των καταθέσεων:

$$S = 400 \cdot \frac{(1+0{,}03)^{\mathbf{46}} - \mathbf{1}}{0{,}0\mathbf{3}} \cdot (1+0{,}03)$$

$$S = 400 \cdot 95{,}50145723 \cdot 1{,}0\mathbf{3}$$

$$S = \mathbf{39.346,60}$$

Είναι το ποσό που θα έχει καταφέρει να συγκεντρώσει

Εμείς όμως θέλουμε 40.0000 για αυτό τον λόγο βρίσκουμε την πραγματική αξία στην αρχή του 46κτου. έτους με την διαφορά των δυο ποσών.

$40.000 - 39.346{,}60 = \mathbf{653,40.}$

Μας ενδιαφέρει το ποσό που πρέπει να δώσει τον τελευταίο χρόνο για να συγκεντρώσει τις 40.000€.

Άρα:

$$A = \frac{A\mathbf{1}}{(1+i)^n} \rightarrow \quad A = \frac{653{,}4\mathbf{0}}{(1+0{,}0\mathbf{3})^{\mathbf{1}}}$$

$A = 634,36$

για να συγκεντρωθεί το ποσό των 40.000 κος Μεγαρίτης πρέπει για 46 χρόνια να καταθέτει μηνιαίως 400 ευρώ και το 47 έτος να καταθέσει το σύνηθες ποσό των 400 ευρώ προσαυξημένο κατά 634,36 άρα 400+634,36=1.034,36 ευρώ.

- **2η μέθοδος τακτοποίησης**

Βλέπουμε ότι ο αριθμός 46,15 βρίσκεται ανάμεσα στα 46 έτη και στα 47 έτη. Επομένως μας δίνεται η δυνατότητα να αλλάξουμε εξαρχής το ποσό της κατάθεσης των 400 €. Άρα χρησιμοποιώντας την τελική αξία της προκαταβλητέας και μέλλουσα ράντας με n=46 και R το τροποποιημένο ποσό της κατάθεσης στην αρχή κάθε έτους για 46χρόονια έχουμε:

$$R \cdot \frac{(1+0{,}03)^{46}-1}{0{,}03} \cdot (1+0{,}03) = 40.000$$

$$R \cdot 96{,}50145723 \cdot 1{,}03 = 40.000$$

$$R = 401{,}22$$

Αυτό είναι το ποσό που θα πρέπει να κατατίθεται στην αρχή κάθε έτους για σαράντα χρόνια για να συγκεντρωθεί το ποσό των 40.000€

Υπολογισμός με τον ίδιο τρόπο για n=47 χρόνια για να μπορέσουμε να βρούμε το ποσό της κατάθεσης έχουμε:

$$R * \frac{(1+0{,}03)^{47}-1}{0{,}03} \cdot (1+0{,}03) = 40.000$$

$$R = \frac{40.000}{100,39650095} \cdot 1,03$$

$$R = 386,81$$

Το ποσό που θα πρέπει να κατατίθεται στην αρχή κάθε έτους και για 47 έτη για να συγκεντρωθεί το ποσό των 40.000 ευρώ.

3.6 Υπολογισμός επιτοκίων στις ράντες.

Για να υπολογίσουμε τα επιτόκιο στις ράντες μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο της παρεμβολής η και την από ή μέθοδο των τριών που συναντήσαμε σε άλλο κεφάλαιο.

Ακολουθεί μια εφαρμογή ούτος ώστε να μπορέσουμε να κατανοήσουμε πως υπολογίζονται τα επιτόκια

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Ο κος Δημητριάδης σύναψε δάνειο 25.000€. Για την εξόφληση του, συμφώνησε να δίνει στο τέλος κάθε έτους και για δέκα έτη 3.500 €. Πόσο ήταν το επιτόκιο ανατοκισμού τη στιγμή που υπογράφτηκε το δάνειο;

ΛΥΣΗ

Έχουμε αρχική αξία και η εφαρμογή αναφέρεται σε ράντα, σταθερή, ετήσια, ληξιπρόθεσμη, ακέραια επομένως:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i}$$

με αντικατάσταση καταλήγουμε:

$$25.000 = 3.500 \cdot \frac{1 - U^5}{i}$$

$$\frac{1-U^{10}}{i}=\frac{25.000}{3.500}$$

$$\frac{1-U^{10}}{i}=\mathbf{7,142857143}$$

Με την βοήθεια του πίνακα 4 του παραρτήματος παρατηρούμε ότι η ποσότητα που υπολογίσαμε βρίσκεται μεταξύ των ποσοτήτων 7,18883022 και 7,10547143 για επιτόκια 0,0650% και 0,0675% αντίστοιχα

Δηλαδή:

$$\frac{1-U^{10}}{0{,}0650}=\mathbf{7,18883022}$$

και

$$\frac{1-U^{10}}{0{,}0675}=\mathbf{7,10547143}$$

Έστω

$\chi 1=0{,}065,$

$\chi 2=0{,}0675,$

$\psi 1=7{,}10547143,$

$\psi 2=7{,}18883022,$

$\psi=7{,}142857143$.

Αναζητούμε το χ όπου $\chi=i$

Έχουμε:

$$\chi=\chi 1+\frac{\chi 2-\chi 1}{\psi 2-\psi 1}\cdot(\psi-\psi 1)$$

$$\chi = 0{,}065 + \frac{0{,}0675 - 0{,}065}{7{,}18883022 - 7{,}10547143} \cdot (7{,}142857143 - 7{,}10547143)$$

Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στο εξής:

$X = 0{,}065 + (0{,}299940 \cdot 0{,}0373857)$

$X = 0{,}065 + 0{,}011213$

$X = \mathbf{0{,}076213471}$

Στο ίδιο επιτόκιο θα καταλήγαμε και με τη χρήση της μεθόδου των τριών

$7{,}18883022 - 7{,}10547143 = 0{,}083358779$

$7{,}142857143 - 7{,}10547143 = 0{,}037385713$

Κάνοντας τους υπολογισμούς καταλήγουμε στο $\chi = \mathbf{0{,}011212291}$

Άρα το ζητούμενο επιτόκιο είναι$= 0{,}065 - 0{,}011212291 = \mathbf{0{,}053787709}$

3.7 Άλλες εφαρμογές ράντων.

Οι ράντες όπως είδαμε χρησιμοποιούνται κυρίως για τα δάνεια. Η εφαρμογή τους όμως δεν περιορίζεται μόνο εκεί καθώς αποτελούν χρήσιμο είδος και για την εφαρμογή τους στις επιχειρήσεις γενικώς, αλλά και ειδικότερα σε αποσβέσεις περιουσιακών στοιχείων, επενδυτικές αποφάσεις και άλλες δραστηριότητες.

Ας δούμε καλύτερα την εφαρμογή των ραντών στις αποσβέσεις περιουσιακών στοιχείων για παράδειγμα.

Τα πάγια περιουσιακά στοιχεία μιας επιχείρησης αποτελούν τα κτίρια της, τα μηχανήματά της τα έπιπλα της, τα μεταφορικά της μέσα και γενικότερα ο εξοπλισμός που την βοηθάει να παράγει εμπορεύματα, να τα διαχειριστεί μέσω ανθρώπων και να τα μεταφέρει. Όλα τα πάγια χρησιμοποιούνται ανάλογα με τις ανάγκες τις επιχείρησης στην οποία ανήκουν και συνεπώς ανάλογα τη χρήση τους φθείρονται και μειώνεται η αξία τους. Η μείωση αυτή της αξίας τους καλείται απόσβεση παγίων στοιχείων ενεργητικού.

Η χρήση των ραντών στην απόσβεση μας βοηθάει στο να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ποσό της απόσβεσης στην οποία υπόκειται κάποιο πάγιο στοιχείο.

3.7.1 Απόσβεση παγίων-στοιχείων με τη χρήση της ράντας.

Για παράδειγμα, έστω ότι το αρχικό κόστος απόκτησης και χρήσης-εγκατάστασης ενός παγίου στοιχείου είναι A, η διάρκεια της ζωής του είναι n και S η τελική αξία του δηλαδή η αξία του αφού έχει υποστεί την απόσβεση μετά από n χρόνια και D η αξία προς απόσβεση όπου $D = A - S$

Πρόκειται για ράντα ληξιπρόθεσμη, πρόσκαιρη, ακέραια και μέλλουσα όπου η τελική της αξία είναι στην ουσία η αποσβεστέα αξία άρα:

$$D = A - S$$

$$R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A - S$$

$$R = (A - S) \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Ακολουθεί εφαρμογή για την ευκολότερη κατανόηση της χρήσης των ραντών στις αποσβέσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Για να αποκτήσει μια επιχείρηση ένα μηχάνημα κατέβαλε το ποσό των 6.000 €. Η αξία του μετά το πέρας 12 ετών κατέληξε να είναι 700 ευρώ. Το ετήσιο επιτόκιο απόσβεσης είναι 6%. Να υπολογιστεί το ετήσιο ποσό απόσβεσης του μηχανήματος.

ΛΥΣΗ

Τα δεδομένα μας είναι η αρχική αξία A=6.000, η τελική αξία S=700, η χρονική διάρκεια ζωής του μηχανήματος είναι n=12 έτη και το επιτόκιο απόσβεσης i=6%. Τέλος, η αξία προς απόσβεση (A-S) είναι 6.000-700=5.300. Επομένως:

$$R = (A - S) \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$R = 5.300 \cdot \frac{0{,}06}{(1+0{,}06)^{12} - 1}$$

$$R = 5.300 \cdot 0{,}059277029$$

$$R = \mathbf{314{,}16}$$

Κάποιες φορές δεν είναι εύκολο να υπολογίσουμε αυτή την αξία για διαφορετικά μηχανήματα η γενικώς είδη εξοπλισμού της επιχείρησης αφού δεν υφίστανται όλα την ίδια χρήση και συνεπώς την ίδια φθορά. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε συνεπώς να υπολογίσουμε την συνολική αποσβεστέα αξία των παγίων μιας επιχείρησης σε αυτή την περίπτωση πρέπει να υπολογίσουμε τη σύνθετη παραγωγική διάρκεια παγίων στοιχείων.

3.7.2 Σύνθετη παραγωγική διαδικασία.

Η σύνθετη παραγωγική διάρκεια παγίων στοιχείων είναι χρονική διάρκεια που αποτελείται από το χρόνο που παίρνει η αποσβεστέα αξία να γίνει ίση με την συνολική ετήσια δαπάνη απόσβεσης αυτών. Για αυτό το λόγο συμβολίζουμε τη συνολική ετήσια δαπάνη R_s και τη συνολική αποσβεστέα αξία R_d τότε ισχύει:

$$R_s \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R_d$$

Η σύνθετη παραγωγική διάρκεια δίδεται από το n της σχέσης αυτής το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε με ποικίλους τρόπους όπως είδαμε παραπάνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Μια βιοτεχνία έτοιμων ενδυμάτων διαθέτει τα εξής πάγια περιουσιακά στοιχεία:
α) κτιριακές εγκαταστάσεις αρχικής αξίας 600.000 ευρώ, υπολειμματικής αξίας 80.000 ευρώ, 15ετούς παραγωγικής διάρκειας
β) αυτόματες μηχανές κοπής και ραφής υφασμάτων αρχικής αξίας 1.100.000 ευρώ, υπολειμματικής αξίας 400.000 ευρώ, 10ετής παραγωγικής διάρκειας
γ) άλλους εξοπλισμούς αρχικής αξίας 950.000 ευρώ, υπολειμματικής αξίας 70.000 ευρώ, 20ετούς παραγωγικής διάρκειας.
Να υπολογιστεί η σύνθετη παραγωγική διάρκεια εάν το ετήσιο επιτόκιο είναι 5%.

ΛΥΣΗ

Η συνολική αποσβεστέα αξία είναι:

$$R_d = 600.000 - 80.000 + 1.100.000 - 400.000 + 950.000 - 70.000$$

$$R_d = 520.000 + 700.000 + 880.000$$

$$R_d = \mathbf{2.100.000}$$

Η συνολική ετήσια δαπάνη απόσβεσης είναι:

$$R_s = 520.000 \cdot \frac{0,05}{(1+0,05)^{15} - 1} + 700.000 \cdot \frac{0,05}{(1+0,05)^{10} - 1} + 880.000 \cdot \frac{0,05}{(1+0,05)^{20} - 1}$$

Από τους πίνακες των παραρτημάτων έχουμε:

$$R_s = 520.00 \cdot 0,04634229 + 700.000 \cdot 0,07950457 + 880.000 \cdot 0,03024259$$

$R_s = 24.097,99 + 55.653,19 + 26.613,47$

$R_s = \mathbf{106.364,49}$

Από τον τύπο της σύνθετης παραγωγικής διάρκειας με αντικατάσταση έχουμε:

$$R_d = R_s \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$2.100.000 = 106.364{,}49 \cdot \left[\frac{(1+0{,}05)^n - 1}{0{,}05}\right]$$

$$\frac{(1+0{,}05)^n - 1}{i} = \frac{2.100.000}{106.363{,}49} = \mathbf{19,74}$$

Πλέον πρέπει να υπολογίσουμε το n που είναι και η σύνθετη παραγωγική διάρκεια που ζητείται

Από τον πίνακα 3 του παραρτήματος παρατηρούμε ότι στο δεδομένο επιτόκιο ο αριθμός 19,743616 βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς 19,598632 και 21,578564 για δεκατέσσερα και δεκαπέντε έτη αντίστοιχα

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παρεμβολής έχουμε:

$\chi_1 = 14$, $\chi_2 = 15$, $\psi_1 = 19{,}598632$, $\psi_2 = 21{,}578564$, $\psi = 19{,}743431$

Επομένως:

$$\chi = \chi 1 + \frac{\chi_2 - \chi 1}{\psi 2 - \psi 1} \cdot (\psi - \psi 1)$$

$$\chi = 14 + \frac{15 - 14}{21{,}578564 - 19{,}598632} \cdot (19{,}743431 - 19{,}598632) = \mathbf{14,08}$$

3.7.3 Εφαρμογή ραντών στον επιχειρηματικό και γενικώς στον οικονομικό τομέα.

Στον επιχειρηματικό τομέα και οικονομικό τομέα οι επενδύσεις που γίνονται ενέχουν μεγάλο κίνδυνο και συνεπώς πρέπει να υπολογίζονται όσο το δυνατόν με μεγαλύτερη ακρίβεια αφού κρίνουν ουσιαστικά την ανάπτυξη καθώς και το γενικότερο μέλλον της επιχείρησης. Αυτός είναι ένας λόγος για τον οποίο θα πρέπει να δούμε αν μια επένδυση είναι συμφέρουσα ή όχι. Η αξιολόγηση και λήψη επενδυτικών αποφάσεων γίνεται με βάση τον προϋπολογισμό κεφαλαίου δηλαδή προϋπολογίζουμε τι μέρος του αρχικού κεφαλαίου θα επενδυθεί και τι απόδοση θα έχει μελλοντικά για την επιχείρηση.

Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να αποφασίσουμε για το αν οι επενδύσεις είναι συμφέρουσες ή μη ή ακόμη και πότε θα αρχίσουν να αποδίδουν. Τέτοιες είναι η μέθοδος της καθαρής παρούσας αξίας, η μέθοδος του εσωτερικού συντελεστή απόδοσης, το κριτήριο του χρόνου και το κριτήριο του χρόνου επανάκτησης του αρχικού κεφαλαίου και άλλα.

3.7.4 Μέθοδος καθαρής παρούσας αξίας.

Η μέθοδος αυτή χαρακτηρίζεται από τον υπολογισμό του αθροίσματος των πραγματικών αξιών όλων των ταμειακών ροών που δίνονται για την επένδυση που πρόκειται να γίνει. επομένως υπολογίζουμε την καθαρή παρούσα αξία, το άθροισμα των ροών της επένδυσης.

Με τον τύπο της καθαρής παρούσας αξίας έχουμε:

$$A_k = \frac{K_1}{(1+i)^1} + \frac{K_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{K_n}{(1+i)^n} - K_0$$

Όπου i είναι το ισχύον επιτόκιο κόστους κεφαλαίου, $K_1, K_2, .., K_n$ είναι οι καθαρές ταμειακές ροές, έσοδα –έξοδα δηλαδή, n είναι η χρονική διάρκεια της επένδυσης και K_0 είναι το αρχικό κόστος επένδυσης.

Στη συνέχεια και αφού υπολογίσουμε την καθαρά παρούσα αξία είμαστε σε θέση να κρίνουμε και να αξιολογήσουμε μια επένδυση αν είναι συμφέρουσα η μη. Αυτό συμβαίνει με τους εξής τρόπους:

1)Αν A_κ (καθαρά παρούσα αξία)>0 τότε η επένδυση είναι συμφέρουσα

2)ΑνA_κ<0 τότε η επένδυση είναι μη συμφέρουσα και αν γίνει θα επιφέρει ζημία για τον όποιο επενδυτή.

Υπάρχει η πιθανότητα να πρέπει να επιλέξουμε και συνεπώς αξιολογήσουμε δύο ή περισσότερες επενδύσεις που θέλουμε να κάνουμε, τότε θα επιλέξουμε αυτή η μεταξύ αυτών με την μεγαλύτερη καθαρά παρούσα αξία ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο υπολογισμού που προαναφέραμε.

Οι δυο επόμενες εφαρμογές βοηθούν στην ευκολότερη εμπέδωση του τύπου της παρούσας αξίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Η διεύθυνση μιας βιομηχανίας, για να βελτιστοποιήσει την παραγωγή της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο μηχανολογικών εξοπλισμών. Ο πρώτος κοστίζει 3.000.000 ευρώ με ετήσιο κόστος συντήρησης και λειτουργίας 400.000 ευρώ. Η απόδοσή του προβλέπει έσοδα 1.400.000 ευρώ ετησίως για τα επόμενα πέντε χρόνια. Ο δεύτερος τύπος μηχανήματος έχει αρχικό κόστος 4.300.000, κόστος συντήρησης και λειτουργίας 800.000 ευρώ και η απόδοση του προβλέπει έσοδα της τάξης των 2.100.000 ευρώ ετησίως για τα επόμενα πέντε χρόνια. Αν το ετήσιο επιτόκιο απόσβεσης είναι 7% και η αξία μετά το πέρας της απόσβεσης- υπολειμματική αξία στο τέλος της πενταετίας είναι ίδια και για τους δυο τύπους, να αποφασιστεί ποιος από τους δυο τύπους των μηχανημάτων είναι πιο σύμφορος προς αγορά για την επιχείρηση.

ΛΥΣΗ

Για να δούμε τι συμφέρει περισσότερο την επιχείρηση, πρέπει όπως είπαμε και πριν να υπολογίσουμε την καθαρά παρούσα αξία για κάθε μηχάνημα ξεχωριστά για τα πέντε έτη που είναι ο χρόνος της επένδυσης άρα:

Για το πρώτο μηχάνημα έχουμε:

$K_{1,2,3,4,5} = 1.400.000 - 400.000 = 1.000.000, K_O = 3.000.000, i = 0{,}07, n = \mathbf{5}$

$$A_k = \frac{1.000.000}{(1+0{,}07)^1} + \frac{1.000.000}{(1+0{,}07)^2} + \frac{1.000.000}{(1+0{,}07)^3} + \cdots + \frac{1.000.000}{(1+0{,}07)^5} - 3.000.00$$

ή $A_k = \mathbf{1.100.200}$

Για τον δεύτερο τύπο μηχανήματος έχουμε:

$K_{1,2,3,4,5} = 2.100.000 - 800000 = 1300000, K_O = 4300000, i = 0{,}07, n = 5$

$$A\kappa = \frac{1300000}{(1+0{,}07)^1} + \cdots .. + \frac{1.300.000}{(1+0{,}07)^5} - 4300000 = 1.030.260$$

Και οι δυο προτάσεις θα φέρουν κέρδος στην επιχείρηση όπως παρατηρούμε από το αποτέλεσμα αφού οι παρούσες αξίες και των δυο μηχανημάτων είναι μεγαλύτερες του μηδενός. Όμως η παρούσα αξία του πρώτου τύπου μηχανήματος είναι μεγαλύτερη από αυτή του μηχανήματος Β. Επομένως η επένδυση στο μηχάνημα Α θα αποφέρει καλύτερα αποτελέσματα στην παραγωγή της βιομηχανίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Ένας επιχειρηματίας σκέφτεται να επενδύσει 4.500.000 ευρώ αγοράζοντας ένα ξενοδοχείο σε τουριστική πόλη. Τα έξοδα επισκευής και ανακαίνισης του ξενοδοχείου είναι 750.000 ευρώ, τα ετήσια έσοδα για τα επόμενα δώδεκα έτη είναι περίπου 900.000 ευρώ. Αν επιτόκιο κόστους είναι 13,5% και στη δεκαετία υπολογιστούν έξοδα συντήρησης της εγκατάστασης ύψους ενός εκατομμυρίου, να αποδειχτεί αν η επένδυση είναι συμφέρουσα ή μη.

ΛΥΣΗ

$K_0 = 4500000 + 750000 = 5.250.000$

Άλλα έξοδα είναι: $1.000.000 \cdot (1+0{,}135)^{-10}$

Έσοδα= $900.000 \cdot \dfrac{1-(1+0{,}135)^{-12}}{0{,}135}$

Άρα:

$$A_K = 900000 \cdot \frac{1-(1+0{,}135)^{-12}}{0{,}135} - 1000000 \cdot (1+0{,}135)^{-10} - 5250000$$

Εκτελώντας τις πράξεις: $A_K = -323.872,80$

Αφού η καθαρά παρούσα αξία είναι αρνητική, η επένδυση, αν γίνει, θα είναι ζημιογόνα για τον επενδυτή που θα επιχειρήσει να την κάνει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Ποια είναι η αρχική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας διάρκειας δέκα ετών και όρου και επιτοκίου 1000€ και 6,5% αντίστοιχα;

ΛΥΣΗ

Αφού πρόκειται για αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω τύπο:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} = 1000 \cdot \frac{1 - U^{10}}{0{,}065}$$

$$A = 1000 \cdot 7{,}18883022$$

$$A = \mathbf{7.188,83}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν σήμερα δανειστούμε 7.188,83€ με 6,5% επιτόκιο μπορούμε σε δέκα χρόνια να το εξοφλήσουμε καταβάλλοντας στο τέλος κάθε έτους 1000€.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ποιός είναι ο όρος μιας ληξιπρόθεσμης ράντας στην οποία έχουμε επιτόκιο 7% και αρχική αξία 13000 και 15 όρους.

ΛΥΣΗ

Αφού η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη και μας δίνεται η αρχική αξία της θα εργαστούμε ως εξής:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i}$$

$$13000 = R \cdot 1 - \frac{U^{15}}{0,07}$$

$$13000 = R \cdot 9,107$$

$$R = \mathbf{1427,33}$$

Δηλαδή αν δανειστούμε σήμερα το ποσό των 13000€ με επιτόκιο 0,7%, θα είμαστε ικανοί να το εξοφλήσουμε σε 15 έτη καταβάλλοντας στο τέλος κάθε έτους 1427,33€.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ποια είναι η τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας δεκαετούς διάρκειας, όρου 1500€ και επιτοκίου 9%;

ΛΥΣΗ

Έχουμε να κάνουνε με τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας άρα:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = 1500 \cdot \frac{(1+0{,}09)^{10} - 1}{0{,}09}$$

$$S = 1500 \cdot 15{,}19292972$$

$$S = 22789{,}39$$

Δηλαδή αν καταθέτουμε στο τέλος κάθε έτους 1500€ με επιτόκιο 9% για δεκα έτη θα συγκεντρώσουμε το ποσό των 22789,39€.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Καταθέτει κάποιος στο τέλος κάθε έτους και για τρία συνεχή έτη 5000€ με επιτόκιο ανατοκισμού 6%. Από το τέταρτο έτος και για τέσσερα ακόμη έτη, τις καταθέσεις τις κάνει 10.000€ με το ίδιο επιτόκιο ανατοκισμού. Ποιά είναι η αρχική αξία της ράντας;

ΛΥΣΗ

Αφού οι όροι καταβάλλονται στο τέλος κάθε έτους η ράντα αυτή είναι ληξιπρόθεσμη και η αρχική της αξία βρίσκεται από τον τύπο.

Παρατηρούμε όμως ότι η ράντα αυτή αποτελείται από επτά όρους, τρείς των 5000€ και τέσσερις των 10.000€, επομένως η αρχική αξία της θα είναι:

$$A = 10000 \cdot \frac{1 - U^7}{0{,}06} - 5000 \cdot \frac{1 - U^3}{0{,}6}$$

Από τον πίνακα 3 (Β΄ ΜΕΡΟΣ) υπολογίζουμε τις ποσότητες U^3, U^7 και έχουμε:

$$A = 10000 \cdot 5{,}58238144 - 5000 \cdot 2{,}67301195$$

$$A = 55823{,}1 - 13365{,}05$$

$$A = 42458{,}05$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

Βρείτε τον όρο μιας ληξιπρόθεσμης ράντας 20 όρων, ετήσιου επιτοκίου 6% και τελικής αξίας 60.000.

ΛΥΣΗ

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Από τον πίνακα 2 (Β΄ΜΕΡΟΣ) υπολογίζουμε την ποσότητα $(1+0{,}06)^{20}$ και λύνουμε την σχέση ως προς R:

$$60000 = R \cdot 36{,}785$$

$$R = 1631{,}07$$

Για να συγκεντρωθεί το ποσό των 60.000 € σε είκοσι έτη με επιτόκιο ετήσιο ανατοκισμού 6%θα πρέπει στο τέλος κάθε έτους να καταβάλλεται το ποσό των 1.631,07 ευρώ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

Μια ράντα ληξιπρόθεσμη έχει αρχική αξία 9.000 ευρώ και αποτελείται από έντεκα ετήσιους όρους των 1.500€ ο καθένας. Να υπολογιστεί το επιτόκιο.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας την αρχική αξία της ληξιπρόθεσμης έχουμε:

$$A = R \cdot \frac{1-U^n}{i}$$

$$9000 = 1500 \cdot \frac{1-U^{11}}{i}$$

Λύνοντας ως προς το κλάσμα μας έχουμε:

$$\frac{1-U^{11}}{i} = 6$$

Από τον πίνακα 3 (Β΄ ΜΕΡΟΣ), για την ποσότητα αυτή παρατηρούμε ότι βρίσκεται μεταξύ των 6,06974954 και 5,93769913 με επιτόκια 11,50% και 12% αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό του επιτοκίου χρησιμοποιούμε την απλή μέθοδο των τριών. Επομένως:

Υπολογίζοντας τις διαφορές των επιτοκίων

$6{,}06974954 - 5{,}93769913 = \mathbf{0{,}13205041}$ αντιστοιχεί σε διαφορά επιτοκίου **-0,05**

Και

$6 - 5{,}93769913 = \mathbf{0{,}06230087}$ που αντιστοιχεί σε άγνωστη διαφορά

$$i = 0{,}05 * \frac{0{,}06230087}{0{,}13205041} = \mathbf{0{,}023589809}$$

Άρα το επιτόκιο είναι: $12 - 0{,}023589809 = 11{,}97\%$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7

Να υπολογιστεί το επιτόκιο μια ληξιπρόθεσμης ράντας όταν έχει τελική αξία 43.148€ και αποτελείται από 14 όρους ετήσιους των 2.500€.

ΛΥΣΗ

Από την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας έχουμε:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$43.148 = 2.500 \cdot \frac{(1+i)^{14} - 1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^{14} - 1}{i} = 17{,}2592$$

Από τον πίνακα 2 (Α΄ ΜΕΡΟΣ), παρατηρούμε ότι το 17,2592>17,0863 και 17,2592<17,3787 με επιτόκια 3% και 3,25%.

Άρα με την απλή μέθοδο των τριών έχουμε:

$17{,}3787 - 17{,}0886 = \mathbf{0,2924}$ με διαφορά επιτοκίου **0,25%**

Και

$17{,}2592 - 17{,}086 = \mathbf{0,1729}$ με αγνωστη διαφορά

Άρα: $0{,}25 \cdot \frac{0{,}1729}{0{,}2924} = \mathbf{0,1478}$

Άρα το επιτόκιο είναι $3 + 0{,}1478 = \mathbf{3,1478\%}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8

Χρωστάει κάποιος 20.000 ευρώ που πρέπει να τα εξοφλήσει με επιτόκιο 6% και με την καταβολή στο τέλος κάθε έτους 1.400€ αρχίζοντας σήμερα. Πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να το εξοφλήσει;

ΛΥΣΗ

Αφού οι όροι καταβάλλονται στο τέλος κάθε έτους έχουμε να κάνουμε με ράντα ληξιπρόθεσμη έχοντας την αρχική της αξία άρα:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i}$$

$$20.000 = 1.400 \cdot \frac{1 - U^n}{i}$$

$$\frac{1 - U^n}{i} = \frac{20.000}{1.400} = \mathbf{14,2857}$$

Από τον πίνακα 3 (Β΄ ΜΕΡΟΣ) διαπιστώνουμε ότι για επιτόκιο 6% ο αριθμός 14,2857 είναι μεγαλύτερος από την ποσότητα 14,2302 για 33 χρόνια και μικρότερος από την ποσότητα 14,3681 που αντιστοιχεί σε 34 χρόνια.

Επομένως με την παρεμβολή:

$14,3681 - 14,2302 = \mathbf{0,1379}$ για ένα έτος 360μέρες
Και
$14,2857 - 14,2302 = 0,0555$

$$n = 360 \cdot \frac{0,0555}{0,1379}$$

$n = \mathbf{144,8}$

Ο χρόνος που απαιτείται είναι 33 έτη και 144 μέρες άρα για 33 έτη θα καταβάλλει το ποσό των 1.400€ και στο τέλος του $33^{ου}$ έτους μετά από 210 μέρες περίπου θα καταβάλλει το ποσό των: $1.400 \cdot \frac{144,88}{360} = \mathbf{563,42}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9

Να υπολογιστεί η αρχική αξία μιας ράντας προκαταβλητέας που αποτελείται από 13 όρους των 3.250 ο καθένας και επιτόκιο ανατοκισμού 4,25%.

ΛΥΣΗ

Η αρχική αξία της προκαταβλητέας ράντας υπολογίζεται από τον τύπο

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1 + i)$$

$$A = 3.250 \cdot \frac{1 - U^{13}}{0{,}0425} \cdot (1 + 0{,}0425)$$

$$A = 3.250 \cdot 9{,}8325 \cdot 1{,}1{,}0425$$

$$A = \mathbf{33.313,74}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 10

Να υπολογιστεί η τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας που αποτελείται από 15 ετήσιους όρους 5.000€ ο καθένας και επιτόκιο ανατοκισμού 5%.

ΛΥΣΗ

$$S = R \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \cdot (1 + i)$$

$$S = 5.000 \cdot \frac{(1+0{,}05)^{15} - 1}{0{,}05} \cdot (1+0{,}05)$$

$$S = 5.000 \cdot 21{,}57856359 \cdot 1{,}05$$

$$S = \mathbf{113.287,46}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 11

Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να κατατεθεί σήμερα σε μια τράπεζα με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 2,5% για να μπορούμε στο τέλος κάθε έτους και για 6 συνεχή έτη να αποσύρουμε 240.000€ από το λογαριασμό.

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας

Άρα:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i}$$

$$A = 240.000 \cdot \frac{1 - U^6}{0{,}025}$$

$A = 240.000 \cdot 5{,}5081253$

$A = \mathbf{1.321.950,10}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 12

Μια βιομηχανία για την ανανέωση του μηχανολογικού της εξοπλισμού μετά από είκοσι χρόνια από σήμερα πρέπει να έχει καταθέσει 200.000€.Τι ποσό πρέπει να καταθέτει με ανατοκισμό στην αρχή κάθε έτους για είκοσι συνεχή έτη έτσι ώστε στο τέλος του εικοστού έτους να έχει μαζέψει 200.000€;Το επιτόκιο ανατοκισμού είναι 2%.

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε όρο από τελική αξία προκαταβλητέας και μέλλουσας ράντας
Άρα:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

$$200.000 = R \cdot \frac{(1+0{,}02)^{20} - 1}{0{,}02} \cdot (1+0{,}02)$$

$$200.000 = R \cdot 24{,}29736980 \cdot 1{,}02$$

$R = \mathbf{8.069,94}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 13

Καταθέτει κάποιος με ανατοκισμό 200€ στην αρχή κάθε εξαμήνου και για πέντε συνεχή εξάμηνα με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2,5%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συγκεντρωθεί στο λογαριασμό στο τέλος του πέμπτου εξαμήνου.

ΛΥΣΗ

Άσκηση τελικής αξίας προκαταβλητέας ράντας

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

$$S = 200 \cdot \frac{(1+0{,}025)^5 - 1}{0{,}025} \cdot (1+0{,}025)$$

$$S = 200 \cdot 5{,}25632852 \cdot 1{,}025$$

$$S = \mathbf{1.077,54}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 14

Καταθέτει κάποιος 2.000€ στην αρχή κάθε έτους με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3% και αυτό συνεχίζεται για πέντε έτη. Το κεφάλαιο που έχει σχηματιστεί στο τέλος του πέμπτου έτους το τοποθετεί στο ίδιο ταμιευτήριο για άλλα τέσσερα έτη με ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συγκεντρωθεί στο λογαριασμό μετά από τέσσερα έτη.

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε τελική αξία ράντας προκαταβλητέας

Άρα:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

$$S = 2.000 \cdot \frac{(1+0{,}03)^5 - 1}{0{,}03} \cdot (1+0{,}03)$$

$$S = 2.000 \cdot 5{,}30913581 \cdot 1{,}03$$

$$S = \mathbf{10.936{,}82}$$

Εκτελώντας ανατοκισμό για τέσσερα χρόνια με 8% επιτόκιο έχουμε:

$$K_4 = 10.936{,}82 \cdot (1+0{,}08)^4$$

Ψ

$K_4 = 10.936,82 \cdot 1,36048896$

$K_4 = \mathbf{14.882,70}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 15

Καταθέτει κάποιος με ανατοκισμό 500 € στο τέλος κάθε τριμήνου για 2 έτη με τριμηνιαίο επιτόκιο 2,5 %.Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συγκεντρωθεί στο τέλος των δυο ετών.

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας
Άρα:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S = 500 \cdot \frac{(1+0{,}025)^8 - 1}{i}$$

$$S = 500 \cdot 8{,}73611590$$

$$S = 4.368{,}05$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 16

Να υπολογιστεί η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας και μέλλουσας ράντας διάρκειας είκοσι ετών, ετήσιου όρου 8.000€ και με ετήσιο επιτόκιο 7,5% της οποίας ο πρώτος όρος καταβλήθηκε στην αρχή του έκτου έτους.

ΛΥΣΗ

$$A_1 = R \cdot \frac{1 - U^n}{i} \cdot (1+i)$$

$$A_1 = 8.000 \cdot \frac{1 - U^{20}}{0,075} \cdot (1 + 0,075)$$

$$A_1 = 8.000 \cdot 10,19449136 \cdot 1,075$$

$$A_1 = \mathbf{87.672,62}$$

$$A = \frac{A_1}{(1+i)^r}$$

$$A = \frac{87.672,62}{(1 + 0,075)^6}$$

$$A = \frac{87.672,62}{1,54330153}$$

$$A = \mathbf{56.808,40}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 17

Καταθέτει κάποιος σήμερα 60.000€ και συμφωνεί να εισπράττει στο τέλος κάθε έτους και για δέκα έτη το ποσό των 8.000€. Να βρεθεί το επιτόκιο της κατάθεσης.

ΛΥΣΗ

Αφού η είσπραξη συμφωνήθηκε να γίνεται στο τέλος κάθε έτους η ράντα αυτή είναι ληξιπρόθεσμη με αρχική αξία 60.000€.

Άρα:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^{10}}{i}$$

$$60.000 = 8.000 \cdot \frac{1 - U^{10}}{i}$$

$$\frac{1 - U^{10}}{i} = \mathbf{7,5}$$

Από τον πίνακα 3 (Α΄ ΜΕΡΟΣ), παρατηρούμε ότι η ποσότητα αυτή βρίσκεται μεταξύ της 7,53762583 για 5,5% επιτόκιο και 7,44805352 για επιτόκιο 5,75%.

Άρα:

Με τη μέθοδο της παρεμβολής έχουμε:

$$\chi_1 = 0{,}055$$

$$\chi_2 = 0{,}0575$$

$$\psi_1 = 7{,}44805352$$

$\psi_2 = 7{,}53762583$

$\psi = 7{,}5$

$$\chi = 0{,}055 + \frac{0{,}0575 - 0{,}055}{7{,}53762583 - 7{,}44805352} \cdot (7{,}5 - 7{,}44805352)$$

$X = 0{,}055 + 0{,}027910411 \cdot 0{,}051194648$

$X = 0{,}055 + 0{,}001449848$

$\chi = 0{,}056449848 \; \Psi \; \chi = n = \mathbf{5{,}64\%}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 18

Κατέθεσε κάποιος 5.000€ με επιτόκιο 4,75% και συμφώνησε να παίρνει στο τέλος κάθε έτους 800€. Για πόσα έτη μπορεί να παίρνει αυτά τα χρήματα;

ΛΥΣΗ

Ληξιπρόθεσμη ράντα με αρχική αξία 5.000€.

Άρα:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^n}{i}$$

$$5.000 = 800 \cdot \frac{1 - U^n}{0{,}0475}$$

$$\frac{1 - U^n}{i} = \mathbf{6,25}$$

Από τον πίνακα 3 (Α΄ ΜΕΡΟΣ) των ποσοτήτων παρατηρούμε ότι ο αριθμός 6,25 βρίσκεται μεταξύ 5,83916556 για 7 χρόνια και 6,52903633 για 8 χρόνια.

Επομένως χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παρεμβολής έχουμε:

$$\chi_1 = 7$$

$$\chi_2 = 8$$

$$\psi_1 = 5{,}83916556$$

$$\psi_2 = 6{,}52903633$$

$$\psi = 6{,}25$$

$$\chi = 7 + \frac{8-7}{6{,}52903633 - 5{,}83916556} \cdot (6{,}25 - 5{,}83916556)$$

$$\chi = 7 + 14{,}495468477 \cdot 0{,}4108344$$

$$\chi = \mathbf{12{,}95}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 19

Ένα εργοστάσιο παρασκευής παπουτσιών διαθέτει κτιριακές εγκαταστάσεις αρχικού κόστους 200.000 € με εικοσαετή παραγωγική διάρκεια υπολειμματικής αξίας 30.000€. Ο μηχανολογικός εξοπλισμός στοίχισε αρχικά 1.050.000€ με παραγωγική διάρκεια 16 έτη και υπολειμματική αξία 230.000€. Να υπολογιστεί η σύνθετη παραγωγική διάρκεια των παγίων, αν το επιτόκιο απόσβεσης είναι 6,75%.

ΛΥΣΗ

$$R_s = 200.000 - 30.000 + 1.050.000 - 230.000$$

$$R_s = 170.000 + 820.000$$

$$R_s = \mathbf{990.000}$$

$$R_d = 170.000 \cdot \frac{(1+i)^{20} - 1}{0{,}0675} + 820.000 \cdot \frac{(1+i)^{16} - 1}{0{,}0675}$$

$$R_d = 4.261{,}33 + 30.020{,}90$$

$$R_d = \mathbf{34.282{,}23}$$

Σύνθετη παραγωγική διάρκεια

$$R_s = R_d \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{0{,}0675}$$

$$990.00 = 34.283{,}23 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{0{,}0675}$$

Η ποσότητα αυτή από τον πίνακα 3 (Β΄ ΜΕΡΟΣ) βρίσκεται μεταξύ του 27,314312 για 16 χρόνια και του 30,15801858 για 17 χρόνια, άρα με την μέθοδο της παρεμβολής έχουμε:

$x = n = 16 + 0{,}351633044 \cdot 1{,}563622$

$x = n = 16{,}54982116$

$\mu X\rho\varepsilon\varsigma = 0{,}54982116 \cdot 360 = 197{,}935661$

Αρα 16 χρόνια και 197 μέρες είναι η συνθετη παραγωγική διάρκεια.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 20

Για τον εξοπλισμό των εργαστηρίων του ένα Ι.Ε.Κ. αγόρασε ηλεκτρονικούς υπολογιστές συνολικής αξίας 58.000€. Αν η υπολειμματική τους αξία μετά από 5έτη είναι 16.000€ και το ετήσιο επιτόκιο 4,5%, να βρεθεί το ετήσιο ποσό της απόσβεσης.

ΛΥΣΗ

$58.000 - 16.000 = 42.000$

$$R = 42.000 \cdot \frac{0.045}{(1+i)^n - 1}$$

$R = 42.000 \cdot 0{,}18279164$

$R = \mathbf{7.677,24}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 21

Καταθέτει κάποιος στο τέλος κάθε έτους και για πέντε έτη 1.800€ με ανατοκισμό προς τέσσερα της εκατό. Από το έκτο έτος συνεχίζει τις καταθέσεις αλλά αυτή τη φορά τις κάνει 3.000€ και για διάστημα έξι ακόμη ετών με το ίδιο επιτόκιο. Να υπολογιστεί η αρχική και η τελική αξία της ράντας.

ΛΥΣΗ

Για την αρχική αξία έχουμε:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^{11}}{0{,}04} - R \cdot \frac{1 - U^{5}}{0{,}04}$$

$$A = (3.000 \cdot 8{,}76047671) - (1.200 \cdot 4{,}45182233)$$

$$A = \mathbf{20.939{,}25}$$

Για τη τελική αξία έχουμε:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^{11}-1}{0,04} - R \cdot \frac{(1+i)^{5}}{0,04} = (3.000 \cdot 13,48635141) - (1.200 \cdot 5,41632250)$$

$$= \mathbf{33.959,47}$$

ή S

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 22

Μη μπορώντας κάποιος σήμερα να εξοφλήσει ένα χρέος 22.000€ συμφωνεί να το εξοφλήσει με ανατοκισμό προς 6,75% ετησίως και πληρώνοντας στην αρχή κάθε έτους, αρχίζοντας από σήμερα, 3.900€. Μετά από πόσο χρόνο θα εξοφλήσει το χρέος του;

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για πρόβλημα αρχικής αξίας προκαταβλητέας ράντας. Επομένως:

$$A = R \cdot \frac{1-U^n}{0,0675} \cdot 1,0675$$

$$22.000 = 3.900 \cdot \frac{1-U^n}{0,0675} \cdot 1,0675$$

$$\frac{1-U^n}{0,0675} = \frac{22.000}{4.163,25} = \mathbf{5,284333153}$$

Αν δούμε τον πίνακα 3 (Β΄ ΜΕΡΟΣ) θα παρατηρήσουμε ότι η ποσότητα 5,284333153 βρίσκεται μεταξύ των ποσοτήτων 4,80355056 για έξι χρόνια και 5,43658132 για επτά χρόνια.

Άρα εφαρμόζοντας την μέθοδο της παρεμβολής έχουμε :

$\textit{Για}\ \chi_1 = 6, \psi_1 = 4{,}80355056, \psi = 5{,}284333153$

$\textit{και για}\ \chi_2 = 7\ \psi_2 = 5{,}43658132$

$$X = n = 6 + \frac{1}{0{,}63303076} \cdot 0{,}47978097$$

$X = n = 6{,}7579\ \textit{οπου}\ 0{,}7579 \cdot 360 = \mathbf{272}\ \boldsymbol{\mu X\rho\varepsilon\varsigma}$

άρα θα εξοφλήσει το χρέος του σε 6 χρόνια και 272 μέρες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 23

Να υπολογιστούν η αρχική και τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας που αποτελείται από έντεκα ετήσιους όρους με αξία 2.850 € ο καθένας και με επιτόκιο ανατοκισμού 4,75%.

ΛΥΣΗ

Η αρχική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας είναι:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^{11}}{0{,}0475} \cdot 1{,}0475$$

$$A = 2.850 \cdot 8{,}451656101 \cdot 1{,}0475$$

$$A = \mathbf{25.126{,}71}$$

Και η τελική της αξία έχει ως εξής:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^{11} - 1}{0{,}0475} \cdot 1{,}0475$$

$$S = 2.850 \cdot 14{,}022661545 \cdot 1{,}0475$$

$$S = \mathbf{41.862{,}70}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 24

Ένας έμπορος δανείστηκε ποσό το οποίο θα εξοφλήσει σε 8 ετήσιες δόσεις των 4.400€ η κάθε μια και η πρώτη δόση θα καταβληθεί στο τέλος του τέταρτου έτους από την αρχή του δανεισμού. Να υπολογιστεί το ποσό του δανείου αν το επιτόκιο ανατοκισμού είναι 6%.

ΛΥΣΗ

Η ράντα αυτή είναι ληξιπρόθεσμη μέλλουσα και θέλουμε να υπολογίσουμε το αρχικό πόσο του δανείου, ουσιαστικά την αρχική της αξία.

Επομένως:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^8}{0{,}06} \cdot (1 + i)^{-r}$$

$$A = 4.400 \cdot 6{,}20979381 \cdot (1 + 0{,}06)^{-3}$$

$$A = \mathbf{22.940{,}98}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 25

Ένας μηχανικός αυτοκινήτων για την αγορά εξοπλισμού του συνεργείου του δανείστηκε 30.000€. Το δάνειο πρόκειται να εξοφληθεί σε ίσες διμηνιαίες ληξιπρόθεσμες δόσεις σε 5 έτη, με διμηνιαίο επιτόκιο 4%. Να βρεθεί η διμηνιαία δόση.

ΛΥΣΗ

Τα πέντε έτη είναι 30 δίμηνα άρα:

$$A = R \cdot \frac{1 - U^{30}}{i}$$

$$30.000 = R \cdot \frac{1 - U^{30}}{0{,}04}$$

$$R = \frac{30.000}{17{,}29203330}$$

$$R = \mathbf{1.734,90}$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η πτυχιακή αυτή εργασία πραγματεύεται με τον ανατοκισμό, τις ράντες αλλά και τις προόδους-ακολουθίες.

Παρατηρώντας κανείς την ενότητα που μελετά τις ράντες μπορεί εύκολα να καταλάβει την χρησιμότητα και την πρακτικότητα τους, αφού ουσιαστικά είναι τα χρηματικά ποσά που καταβάλλονται ή εισπράττονται σε καταθέσεις ή αναλήψεις. Είναι λοιπόν προφανής η σημασία των ραντών αφού παίζουν μεγάλο ρόλο στην καθημερινότητα μας. Από το ενοίκιο που πρέπει να πληρώσουμε, μέχρι και τις δόσεις του δανείου. Επίσης οι ράντες είναι χρήσιμες και για τις επιχειρήσεις, αφού υπολογίζουν τις αποσβέσεις άλλες δραστηριότητες. ‘Όπως είναι εύκολο να καταλάβει κανείς η σημασία των ραντών δεν ήταν ποτέ μεγαλύτερη από ότι είναι τα τελευταία χρόνια λόγω της οικονομικής κρίσης.

Οι ράντες χωρίζονται σε κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία έχουμε τις σταθερές και τις μεταβλητές ράντες. Στις σταθερές ράντες τα καταβεβλημένα ποσά είναι ίσα, ενώ στις μεταβλητές δεν είναι. Στην δεύτερη κατηγορία έχουμε τις ληξιπρόθεσμες και τις προκαταβλητέες ράντες. Οι ληξιπρόθεσμες πληρώνονται στο τέλος της κάθε περιόδου ενώ οι προκαταβλητέες στην αρχή της περιόδου. Στην τρίτη κατηγορία έχουμε τις πρόσκαιρες και διηνεκείς ράντες. Στις πρόσκαιρες το πλήθος των όρων είναι πεπερασμένο, ενώ στις διηνεκείς το πλήθος των όρων είναι άπειρο. Στην τέταρτη κατηγορία συναντάμε τις άμεσες, τις μέλλουσες και τις αρξάμενες ράντες. Στις άμεσες ράντες ο πρώτος όρος καταβάλλεται στην πρώτη περίοδο, στις μέλλουσες καταβάλλεται στις επόμενες περιόδους και στις αρξάμενες καταβάλλεται πριν από ορισμένες περιόδους. Στην πέμπτη κατηγορία είναι οι ακέραιες και οι κλασματικές. Ακέραια ονομάζεται η ράντα όπου η περίοδος ανατοκισμού συμπίπτει με την ίδια την περίοδο της, ενώ στην κλασματική δεν συμπίπτει. Τέλος στην έκτη κατηγορία έχουμε τις βέβαιες και τυχαίες ράντες. Βέβαια ονομάζεται η ράντα που η καταβολή των όρων δεν εξαρτάται από την πραγματοποίηση η μη πραγματοποίηση κάποιου γεγονότος. Τυχαία ράντα είναι εκείνη που η καταβολή των όρων εξαρτάται από την πραγματοποίηση η μη κάποιου γεγονότος.

Ο ανατοκισμός όπως και οι ράντες βοηθούν στην κατανόηση και τον υπολογισμό δανείων, καταθέσεων κλπ. Η βασική διαφορά όμως με τον ανατοκισμό είναι ότι ο τόκος δεν υπολογίζεται από το αρχικό κεφάλαιο, αλλά στο ποσό που προκύπτει στο τέλος της κάθε περιόδου. Π.χ. ένα ομόλογο διαρκείας 3 ετών με ονομαστική αξία 100€ και επιτόκιο 5% θα έχει μετά το τέλος της πρώτης χρόνιας αξία 105 και μετά το τέλος της δεύτερης χρονιάς αξία ίση με 105+105.0,05=105+5,25=110,25. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το ποσό της τρίτης χρονιάς. Ο ανατοκισμός είναι μια μακροπρόθεσμη οικονομική πράξη μεγαλύτερη του ενός έτους.

Ο ανατοκισμός αποτελεί βασικό εργαλείο των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Ο ανατοκισμός δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί σε δανεισμούς καθώς υπάρχει κίνδυνος τα συνεχώς αυξανόμενα ποσά να μην δυνατόν να καταβληθούν. Βασικές έννοιες στον ανατοκισμό είναι το αρχικό κεφάλαιο, ο χρόνος, ο τόκος και το επιτόκιο.

Μελετώντας την ενότητα Πρόοδοι-Ακολουθίες καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για ένα πολύ σημαντικό κομμάτι των μαθηματικών. Επίσης όπως και οι ράντες και ο ανατοκισμός είναι πολύ χρήσιμα και στην καθημερινότητα μας αφού αποτελούν σημαντικό εργαλείο για την κατανόηση των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Όταν μιλάμε για ομόλογα ή για καταθέσεις και θέλουμε να υπολογίσουμε την μελλοντική τους αξία είναι απαραίτητη η γνώση στις ακολουθίες.

Οι ακολουθίες είναι η απεικόνιση του συνόλου N των φυσικών αριθμών, στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών. Οι όροι της ακολουθίας διαδέχονται ο ένας τον άλλον με λογική σειρά. Υπάρχουν δύο είδη ακολουθών. Η πρώτη κατηγορία είναι η ορισμένη ακολουθία, όπου είναι γνωστό ποιος πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε κάθε φυσικό αριθμό. Η δεύτερη κατηγορία είναι η ακολουθίες που υπολογίζονται με τον αναδρομικό τρόπο. Εδώ γνωρίζουμε τον πρώτο όρο της ακολουθίας και ένας νόμος μέσω του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε έναν τυχαίο όρο της ακολουθίας από τον προηγούμενο του.

Οι πρόοδοι αποτελούν μια ειδική υποκατηγορία των ακολουθιών και χωρίζονται με την σειρά τους σε τρεις κατηγορίες. Την αρμονική, την αριθμητική και την γεωμετρική. Αριθμητική πρόοδος ονομάζεται η ακολουθία αριθμών που ο κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με την πρόσθεση ενός σταθερού ω. Η γεωμετρική πρόοδος ονομάζεται η ακολουθία που ο κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο αφού τον πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακας 1: $(1+i)^n$

ΕΤΗ	3%	7,5%
1	1,03	1,07500000
7	1,22987387	1,54330153

Πίνακας 2 $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Α’ ΜΕΡΟΣ

ΈΤΗ	2%	2,5%	3%	3,25%	4%	4,75%
2	2,02	2,025	2,03	2,0325	2,04	2,0475
3	3,0604	3,075625	3,0909	3,09855625	3,1216	3,1447562
5	5,20404016	5,25632852	5,30913581	5,33573526	5,41632256	5,4981034
8	8,58296905	8,73611590	8,89233605	8,97161647	9,21422626	9,4641439
11	12,16871542	12,48346631	12,80779569	12,97364212	13,48635141	14,0226154
13	14,68033152	15,14044179	15,61779045	15,86313226	16,62683768	17,4339024
14	15,97393815	16,51895284	17,08632416	17,37868406	18,29191119	19,2620128
15	17,29341692	17,93192666	18,598991389	18,94349129	20,02358764	21,1769584
20	24,97736980	25,54465761	26,87037449	27,56424382	29,77807858	32,2056345
46	74,33056447	84,55403443	96,50145723	103,21676682	126,87056772	156,935828
47	76,81717576	87,66788530	100,39650095	107,57131174	132,94539043	165,390280

Β’ ΜΕΡΟΣ

ΈΤΗ	5%	6%	6,75%	7%	9%
10	12,57789254	13,18079494	13,65437212	13,81644796	15,19292972
15	21,57856359	23,27596988	24,65040105	25,12902201	29,36091622
16	23,65749177	25,67252808	27,31430312	27,88805355	33,00339868
17	25,84036636	28,21287976	30,15801858	30,84021730	36,97370456
20	33,06595410	36,78559120	39,89357101	40,99549232	51,16011964

Πίνακας 3 $\frac{1 - U^n}{i}$

Α' ΜΕΡΟΣ

ΈΤΗ	2%	2,5%	3%	4%	4,25%	4,75%	5,5%	5,75%
2	1,94156094	1,92742415	1,91346970	1,88609467	1,87935982	1,86601808	1,84631971	1,8398359
3	2,88388327	2,85602356	2,82861135	2,77509103	2,76197585	2,73605545	2,69793338	2,6854240
5	4,71345951	4,64582850	4,57970719	4,45182233	4,42072895	4,35956090	4,27028448	4,2411674
6	5,60143089	5,50812536	5,41719144	5,24213686	5,19974000	5,11652592	4,99553031	4,9561866
7	6,47199107	6,34939060	6,23028296	6,00205467	5,94699280	5,83916556	5,68296712	5,6323278
8	7,32548144	7,17013717	7,01969219	6,73274487	6,66378206	6,52903633	6,33456599	6,2717048
10	8,98258501	8,75206393	8,53020284	8,11089578	8,01088700	7,81634767	7,53762583	7,4480535
11	9,78684805	9,51420871	9,25262411	8,76047671	8,64353669	8,41656102	8,09253633	7,9887031
13	11,34837375	10,98318497	10,63495533	9,98564785	9,83251310	9,53656998	9,11707853	8,9834096
30	22,39645555	20,93029259	19,60044135	17,29203330	16,77901717	15,82041827	14,533745	14,141023

Β' ΜΕΡΟΣ

ΈΤΗ	6%	6,5%	6,75%	7%	7,5%	11,5%	12%
3	2,67301195	2,64847551	2,63634915	2,62431604	2,60052574	2,42261939	2,40183127
6	4,91732433	4,84101356	4,80355056	4,76653966	4,69384642	4,17029403	4,11140732
7	5,58238144	5,48451977	5,43658132	5,38928940	5,29660132	4,63703501	4,56375654
8	6,20979381	6,08875096	6,02958438	5,97129851	5,85730355	5,05563678	4,96763977
10	7,36008705	7,18883022	7,10547143	7,02358154	6,86408096	5,76777074	5,65022303
11	7,88687458	7,68904246	7,59294748	7,49867434	7,31542415	6,06974954	5,93769913
15	9,71224899	9,40266885	9,25349371	9,10791401	8,82711975	6,99670784	6,81086449
20	11,46992122	11,01850725	10,80302147	10,59401425	10,19449136	7,70981586	7,46944362
32	14,23022961	13,33392925	12,98282123	12,64655532	12,01547757	8,42865516	8,11159436

33	**14,36811411**	**13,45908850**	**13,09866157**	**12,75379002**	**12,10742099**	**8,45619297**	**8,13535211**

Πίνακας 4: $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$

ΕΤΗ	4,5%	6%	7%
4	**0,18279164**	**0,22859149**	**0,22522812**
12	**0,06466619**	**0,05927703**	**0,05590199**
16	**0,4401537**	**0,03895214**	**0,03585765**
22	**0,02754565**	**0,02304557**	**0,02040577**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ανδρεαδάκης Στ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Στ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Αν., ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΪΑ ΠΙΘΑΝΟΤΉΤΩΝ - Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου, σσ. 121-141, ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

- Βελέντζας, Γ., Μιχελουδάκης Σ., Σκαλίδης Λ. (2003). Νομολογία τραπεζικού, αξιογραφικού και χρηματιστηριακού δικαίου, σσ. 84 – 86, 122 – 134, Αθήνα.

- Γεωργακόπουλος, Λ., Χρυσάνθης, Χ. (2001). Τραπεζική νομοθεσία, σσ. 1418-1421.

- Γεωργιάδης, Α. (2000). Νέες Μορφές Συμβάσεων της Σύγχρονης Οικονομίας, Leasing- Factoring – Forfaiting - Franchising, δ' έκδοση, εκδόσεις Σακκούλα

- Καρακώστα, Γ. (2001). Γενικοί όροι των τραπεζικών συναλλαγών, Εκδόσεις Αντ. Ν. Σακκούλα, σσ. 43 – 46, 66 – 71, Αθήνα-Κομοτηνή.

- Κούγιας Γιάννης, Δημήτρης Γεωργίου, (2004), Χρηματο-οικονομικά μαθηματικά, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

- Μηλιράκης Π. (1994). Τραπεζικό δίκαιο, το σύγχρονο νομισματικό – πιστωτικό σύστημα, οι σύγχρονες τραπεζικές μορφές χρηματοδότησης, εκδοτικές Επιχειρήσεις «το οικονομικό», σσ. 105 – 138, 140 – 163, Αθήνα.

- Μιχαλόπουλος Γ. (1990). Νόμιμος καθορισμός και ανατοκισμός, εκδόσεις Σακκούλα, σσ. 115 – 117, 133 – 134, Αθήνα – Κομοτηνή.

- Ρόκας, Ν. (2002). Στοιχεία τραπεζικού δικαίου, Εκδόσεις Αντ. Ν. Σακκούλα, Αθήνα-Κομοτηνή.

- Φραγκάκης Ν. (1997). Προστασία καταναλωτή και τραπεζικές υπηρεσίες, εκδόσεις Σακκούλα, σσ. 81 – 85, Αθήνα – Κομοτηνή.

- Ψυχομάνης, Σ. (1999). Τραπεζικό δίκαιο, Δίκαιο τραπεζικών συμβάσεων, δ' έκδοση, εκδόσεις Σακκούλα, Θεσσαλονίκη.

- Ψυχομάνης, Σ. Τραπεζικό δίκαιο – δίκαιο τραπεζικών συμβάσεων, ε' έκδοση αναθεωρημένη και συμπληρωμένη, εκδόσεις Σακκούλα, σσ. 132 – 152, Αθήνα – Θεσσαλονίκη.

ΠΗΓΕΣ ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΑΔΥΚΤΙΟ

- Δρ. Δασίλας Απ., (2012-2013), Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά, Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο:

  http://accounting.teicm.gr/userfiles/files/%CE%A7%CE%A1%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%9F%CE%9F%CE%99%CE%9A%CE%9F%CE%9D%CE%9F%CE%9C%CE%99%CE%9A%CE%91%20%CE%9C%CE%91%CE%98%CE%97%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%99%CE%9A%CE%91.pdf

  (τελευταία πρόσβαση στις 25/5/2016)

- Δ/νση Β'/θμιας Εκπ/σης Φλώρινας – Κέντρο ΠΛΗ.ΝΕ.Τ. – (Πρόοδοι), Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο:

  http://dide.flo.sch.gr/Exercises/Math-Proodoi.pdf

  (τελευταία πρόσβαση στις 25/5/2016)

- Τόγκας Α., ΜΑΣ 012 Απειροστικός Λογισμός Ι- Σημειώσεις στις ακολουθίες, Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο:

  http://www.math.upatras.gr/~tasos/akolouthies_MAS012.pdf

  (τελευταία πρόσβαση στις 25/5/2016)