ΤΕΙ ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΕΛΕΧΩΝ ΣΥΝΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΩΝ ΟΡΓΑΝΩΣΕΩΝ & ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεμα: << ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΙΣΤΕΩΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΤΙΑ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ>>

Επιμέλεια Πτυχιακής Εργασίας των Σπουδαστων

ΠΑΠΑΘΕΟΔΩΡΟΥ ΑΦΡΟΥΛΑ

ΛΕΦΑ ΜΑΡΙΑ

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ:
ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΣ Γ.

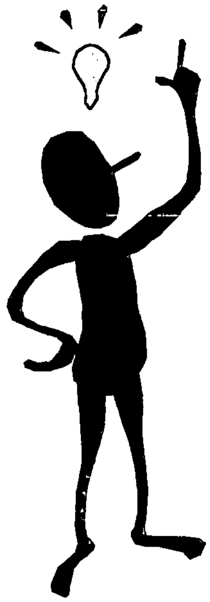
-ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2002-

<u>ΠΤΥΧΙΑΚΗ</u>

ΠΑΠΑΘΕΟΔΩΡΟΥ
ΑΦΡΟΥΛΑ

ΛΕΦΑ
ΜΑΡΙΑ

<< ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΙΣΤΕΩΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΤΙΑ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ >>



- ΜΕΣΟΛΟΓΓΙ 2002 -

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>

<u>ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ</u>

Τα μαθηματικά διακρίνονται σε θεωριτικά ή αφηρημένα μαθηματικά και σε εφαρμοσμένα μαθηματικά.

Θεωριτικά Μαθηματικά είναι το σύνολο των κλάδων της Μαθηματικής Επιστήμης που απασχολείται με την θεωριτική θεμελίωση, διερεύνηση και απόδειξη των νόμων, στους οποίους στηρίζεται η Μαθηματική Επιστήμη.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά είναι το σύνολο των κλάδων των διαφόρων επιστημών (Αστρονομία, Φυσική, Μετερεωλογία, Στατιστική, Οικονομική κ.λ.π), οι οποίες θεμελιώνονται όχι μόνο στους δικούς τους νόμους, αλλά και στους νόμους της Μαθηματικής Επιστήμης. Ένας από τους κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών είναι τα Οικονομικά Μαθηματικά.

Οικονομικά Μαθηματικά. Έννοια και διαίρεση αυτών.

Η κατάρτιση ενός προγράμματος οικονομικής αναπτύξεως μιας χώρας στηρίζεται, βασικά, στις αρχές και τους νόμους της Οικονομικής Επιστήμης. Για να καταστρωθούν όμως τα διάφορα οικονομετρικά υποδείγματα χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά. Ο υπάλληλος μιας τράπεζας, για να υπολογίσει τους τόκους των καταθέσεων, για να υπολογίσει τους τόκους των καταθέσεων, για να προεξοφλήσει συναλλαγματικές, για να χορηγήσει ένα δάνειο, κ.λ.π. χρησιμοποιεί τα μαθηματικά.

Με τον όρο Οικονομικά Μαθηματικά εννοούμε τον τομέα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη των οικονομικών μεγεθών και τη λύση των οικονομικών προβλημάτων. Τα Οικονομικά Μαθηματικά διαιρούνται βασικά σε δύο κλάδους:

α) Ο πρώτος κλάδος ασχολείται με τα προβλήματα, τα οποία δημιουργούνται στις τραπεζικές και οικονομικοεμπορικές συναλλαγές. Στα προβλήματα αυτά, οι βασικοί παράγοντες είναι το χρήμα και ο τόκος. Τα μαθηματικά που ασχολούνται με τέτοια προβλήματα, ονομάζονται ειδικότερα Μαθηματικά των Επιχειρήσεων ή Τραπεζικά Μαθηματικά ή και Εμπορικά Μαθηματικά.

β) ο δεύτερος κλάδος των Μαθηματικών των Οικονομικών Πράξεων ασχολείται με τα προβλήματα των διαφόρων ασφαλίσεων. Τα μαθηματικά που ασχολούνται με τα προβλήματα των διαφόρων ασφαλιστικών οργανισμών, ονομάζονται Ασφαλιστικά Μαθηματικά ή Αναλογιστικά.

Η Οικονομετρία, με την βοήθεια των Μαθηματικών και της Στατιστικής, ασχολείται με όλα τα προβλήματα της Οικονομικής Επιστήμης, εκτός από τα προβλήματα εκείνα που παρουσιάζονται στις οικονοεμπορικές συναλλαγές.

Κεφάλαιο 1

<u>ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ</u>

Βασικός παράγοντας σε κάθε οικονομική πράξη είναι το χρήμα με το οποίο γίνεται η αποτίμηση της αξίας οποιουδήποτε αγαθού.

<u>Χρήμα</u> είναι το γενικό ανταλλακτικό μέσο και το κοινό μέτρο των αξιών όλων των αγαθών.

<u>Νομισματική μονάδα</u> **είναι η μονάδα μετρήσεως του χρήματος.**

<u>Κεφάλαιο</u> καλείται κάθε χρηματικό ποσό, το οποίο όταν δανεισθεί ή αποταμιευθεί έχει παραγωγική ικανότητα.

Το κεφάλαιο λοιπόν είναι ουσιαστικά ένα πλήθος νομισματικών
μονάδων (δηλαδή ένα << χρηματικό ποσό>>) και η χρονική διάρκεια της παραγωγικής ικανότητας του εκφράζεται σε **χρονικές μονάδες. Η χρονική αυτή διάρκεια θα λέγεται <<** χρόνος κεφαλαίου>>.

Μια συνηθισμένη μορφή παραγωγικής ικανότητας ενός κεφαλαίου, είναι η εκχώρηση του με αμοιβή (σε κάποιο άλλο πρόσωπο) για ένα ορισμένο **χρονικό διάστημα. Η πράξη αυτή λέγεται** δανεισμός **του κεφαλαίου και στην περίπτωση αυτή ο χρόνος της παραγωγικής ικανότητας του κεφαλαίου είναι ίσος** με το **<< χρόνο δανεισμού>>.**

Ο ΤΟΚΟΣ ΕΝΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Τόκος καλείται η πρόσθετη αμοιβή, την οποία δίνει ο οφειλέτης στον δανειστή, για το δικαίωμα της χρησιμοποιήσεως ή εκμεταλλεύσεως του κεφαλαίου του.

Ο τόκος ενός κεφαλαίου είναι ανάλογος προς το ύψος του κεφαλαίου.

Σε περίπτωση του δανεισμού ο τόκος αντιπροσωπεύει την αμοιβή του δανειστή για την εκχώρηση του κεφαλαίου του.

Ας σημειώσουμε με I τον τόκο που δίνει ένα κεφάλαιο K σε t χρονικές μονάδες. Το άθροισμα $K+I$, το οποίο προκύπτει από την ενσωμάτωση του τόκου στο κεφάλαιο, χαρακτηρίζεται ως τελική αξία του κεφαλαίου K μετά από χρόνο t και θα σημειώνεται K_t. Έχουμε λοιπόν πάντοτε:

$$\boxed{K_t = K + I}$$

Κεφαλαιοποίηση λέγεται η ενσωμάτωση του τόκου στο κεφάλαιο από το οποίο προέκυψε.

Τα διάφορα συστήματα κεφαλαιοποίησης, με τα οποία θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό, αναφέρονται στον τρόπο υπολογισμού της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου.

ΤΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ

Για να υπολογίσουμε τον τόκο ενός, κεφαλαίου, σε οποιοδήποτε σύστημα κεφαλαιοποίησης, πρέπει να ορίσουμε αυθαίρετα τον τόκο της μιας νομισματικής μονάδας.

Επιτόκιο είναι ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας για μια χρονική περίοδο ή ο συντελεστής μετρήσεως του τόκου.

Είδη επιτοκίων. Έχουμε τρία είδη επιτοκίων:

1) Προεξοφλητικό επιτόκιο.

Το ύψος του προεξοφλητικού επιτοκίου καθορίζεται κάθε φορά από το Διοικητικό Συμβούλιο της Εκδοτικής Τράπεζας (Τράπεζα της Ελλάδος) και αποτελεί το βασικό επιτόκιο υπολογισμού στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές.

2) Νόμιμο επιτόκιο.

Ο Νόμος καθορίζει κάθε φορά ένα ανώτατο επιτόκιο, το οποίο δεν μπορεί κανείς να υπερβεί στις συναλλαγές, διαφορετικά χαρακτηρίζεται ως τοκογλύφος και τιμωρείται από τον Νόμο.

3) Συμβατικό επιτόκιο.

Πολλές φορές, το ύψος του επιτοκίου καθορίζεται συμβατικός μεταξύ του δανειστή και του οφειλέτη αυτό το επιτόκιο λέγεται συμβατικό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2º

ΑΠΛΟΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ. ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΚΑΙ ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ.

2.1 Ο δανειζόμενος ενός κεφαλαίου που τον αφορά για μια ορισμένη χρονική περίοδο, πρέπει να επιστρέψει στο δανειστή το ποσό που δανείστηκε και τον τόκο που έχει ήδη παραχθεί. Είναι όμως ενδεχόμενο, στο τέλος της πρώτης χρονικής περιόδού, να συμβούν δύο πράγματα:

1) ο δανειστής να εισπράξει τον τόκο και να αφήσει το αρχικό κεφάλαιο να τοκισθεί και για δεύτερη, Τρίτη κ.ο.κ περίοδο, δηλαδή ο δανειστής να εισπράττει κάθε χρονική περίοδο μόνο τον τόκο και κατά την λήξη του δανείου να εισπράξει και το κεφάλαιο που δάνεισε.
2) ο δανειστής να αφήσει τον τόκο που έχει παραχθεί στα χέρια του οφειλέτη, με σκοπό να προστεθεί ο τόκος στο αρχικό κεφάλαιο, οπότε την επόμενη περίοδο θα φέρει τόκο το αρχικό κεφάλαιο συν ο τόκος του αρχικού κεφαλαίου. Το ίδιο θα γένει και στις επόμενες χρονικές περιόδους μέχρι τη λήξη του δανείου.

Στην πρώτη περίπτωση, ο τόκος και το κεφάλαιο, σε όλες τις χρονικές περιόδους, παραμένουν τα ίδια και λέμε ότι το δάνειο έγινε με απλό τόκο.

Στην δεύτερη περίπτωση, τόσο ο τόκος όσο και το τοκιζόμενο κεφάλαιο αυξάνουν κάθε χρονική περίοδο και λέμε ότι το δάνειο έγινε με σύνθετο τόκο ή με ανατοκισμό.

Κατά την λύση των διαφόρων προβλημάτων των Μαθηματικών των Επιχειρήσεων γίνονται ορισμένες πράξεις πρακτικής αριθμητικής και άλγεβρας, οι οποίες, επειδή τα συμπλεκόμενα ποσά (κεφάλαιο, τόκος, επιτόκιο) είναι οικονομικά μεγέθη, ονομάζονται οικονομικές πράξεις. Οι οικονομικές πράξεις διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

1) Βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, δηλαδή οικονομικές πράξεις χρονικής διάρκειας τριών μηνών ή το πολύ μέχρι ένα έτος. Τέτοιες οικονομικές πράξεις είναι ο απλός τόκος, η προεξόφληση, κ.λ.π

2) Μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, δηλαδή οικονομικές πράξεις χρονικής διάρκειας πολλών ετών. Τέτοιες οικονομικές πράξεις είναι ο ανατοκισμός, τα μακροπρόθεσμα δάνεια κ.α.

ΠΟΣΟΣΤΑ

ΕΙΔΗ ΠΟΣΩΝ-ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΑ-ΠΟΣΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

Ποσό ή Μέγεθος ονομάζεται κάθε πράγμα που μπορεί να αυξηθεί ή να ελαττωθεί.

π.χ., το βάρος ενός εμπορεύματος, το μήκος ενός υφάσματος, το ύψος και το πλάτος ενός γεωμετρικού σχήματος, οι καταθέσεις σε ένα ταμιευτήριο και ο τόκος τους, κ.λ.π. είναι ποσά.

Μεταβλητό ποσό λέγεται κάθε ποσό που μπορεί να πάρει διάφορες τιμές.

π.χ., η τιμή ενός αγαθού, το βάρος ενός εμπορεύματος, το μήκος ενός υφάσματος, η θερμοκρασία, κ.λ.π. είναι μεταβλητά ποσά.

Σταθερό ποσό λέγεται κάθε ποσό που έχει πάντοτε την ίδια αριθμητική τιμή.

π.χ., ο λόγος μιας περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρο του είναι ένα σταθερό ποσό (π= 3,14159...), η απόσταση από την Αθήνα στην Πάτρα είναι ένα σταθερό ποσό (= 240 km).

Ας εξετάσουμε τώρα το εξής απλό πρόβλημα:

Το 1 μέτρο ενός υφάσματος κοστίζει 400 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τα 2,3,4......μέτρα και πόσο το $^1/_2$, $^1/_4$ του μέτρου;

Ο πίνακας 2.1.1 δείχνει την αντιστοιχία του μήκους του υφάσματος και του κόστους του.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1.1

Μήκος	1	2	3	4	...	1/2
Κόστος	400	800	1200	1600	...	200

Από τον Πίνακα 2.1.1 παρατηρούμε ότι: Αν το μήκος του υφάσματος μεταβληθεί (δηλαδή αυξηθεί ή ελαττωθεί) κατά ορισμένη έννοια, τότε μεταβάλλεται κατά την ίδια έννοια και το κόστος του υφάσματος. Δύο τέτοια ποσά ονομάζονται συμμεταβλητά ή εξαρτημένα ποσά. Ειδικότερα: το κόστος του υφάσματος ονομάζεται εξαρτημένο μεταβλητό, ενώ το μήκος του λέγεται ανεξάρτητο μεταβλητό. Επειδή το κόστος του υφάσματος εξαρτάται από το μήκος του, λέμε ότι το κόστος του υφάσματος είναι συνάρτηση του μήκους του.

Συμμεταβλητά ποσά είναι: η περιφέρεια ενός κύκλου και η ακτίνα του, ο χρόνος εργασίας ενός εργάτη και η αμοιβή του με σταθερό ωρομίσθιο, η τιμή ενός εμπορεύματος και το βάρος του, ο φόρος και το εισόδημα η τιμή και η ζητούμενη ποσότητα ενός αγαθού.

Ποσά ανάλογα. Έστω ότι ένας καθηγητής παίρνει 200 δρχ. για κάθε ώρα ιδιαίτερης διδασκαλίας. Πόσες δραχμές θα πάρει σε 2,3,4... ώρες και πόσες δραχμές θα πάρει σε μισή ώρα, σε ένα τέταρτο της ώρας κ.λ.π. ;

Ο Πίνακας 2.1.2 δείχνει την αντιστοιχεία μεταξύ του χρόνου διδασκαλίας σε ώρες και της αμοιβής του καθηγητή σε δραχμές.

Πίνακας 2.1.2

χρόνος	1	2	3	...	1/2	1/4
αμοιβή	200	400	600	...	100	50

Από τους Πίνακες 2.1.1 και 2.1.2 παρατηρούμε ότι τα ποσά: <<Μήκος>> σε μέτρα και <<κόστος>> σε δραχμές, <<χρόνος>> σε ώρες και <<αμοιβή>> σε δραχμές, έχουν τέτοια σχέση μεταξύ τους, ώστε, όταν η τιμή του ενός ποσού διπλασιασθεί, τριπλασιασθεί, κ.λ.π. και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, τετραπλασιάζεται κ.λ.π.

Επίσης, όταν η τιμή του ενός ποσού (π.χ.του μήκους τολυ υφάσματος ή του χρόνου διδασκαλίας) γίνει το μισό ($^1/_2$) το τέταρτο ($^1/_4$),κ.λ.π, τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού (π.χ κόστους ή αμοιβής), γίνεται το μισό, το τέταρτο, κ.λ.π. Δύο τέτοια ποσά ονομάζονται ανάλογα ποσά. Συνεπώς, το μήκος ενός υφάσματος και το κόστος τους, ο χρόνος εργασίας και η αμοιβή (με σταθερό ωρομίσθιο) είναι ανάλογα ποσά.

Από την παραπάνω ανάλυση συνάγομε τον ακόλουθο ορισμό:

Δύο (συμμεταβλητά) ποσά θα τα λέμε ανάλογα, όταν δούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, να πολλαπλασιάζεται ή να διαιρείται και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.]

Ανάλογα ποσά είναι: το κόστος ενός υφάσματος είναι ανάλογο προς το μήκος του, η αξία ενός εμπορεύματος είναι ανάλογη προς το βάρος του, η περιφέρεια ενός κύκλου είναι ανάλογη προς την ακτίνα του, η αμοιβή ενός προσώπου (με σταθερό ωρομίσθιο) είναι ανάλογη με το χρόνο εργασίας, ο (απλός) τόκος είναι ανάλογος προς το τοκιζόμενο κεφάλαιο (για τον ίδιο χρόνο τοκισμού και το ίδιο επιτόκιο).

Παρατήρηση. Από τον Πίνακα 2.1.1 παίρνουμε δύο τιμές του ποσού <<μήκος>>,π.χ. τις τιμές 2 και 3 και σχηματίζουμε το λόγο τους $^{2}/_{3}$ έπειτα, παίρνουμε τις αντίστοιχες προς αυτές τιμές 800 και 1200 του άλλου ποσού <<κόστος>> και σχηματίζουμε το λόγο τους $^{800}/_{1200} = {}^{8}/_{12} = {}^{2}/_{3}$.

Από τον πίνακα 2.1.2 παίρνουμε πάλι δύο τιμές, έστω 2 και 4, του ποσού <<χρόνος>>. Αυτές έχούν λόγο: $^{2}/_{4} = {}^{1}/_{2}$. Οι αντίστοιχες προς αυτές τιμές 400 και 800 του άλλου ποσού <<αμοιβή>> έχουν λόγο: $^{400}/_{800} = {}^{1}/_{2}$.

Παρατηρούμε ότι: δυο (οποιεσδήποτε) τιμές του ενός ποσού έχουν τον ίδιο λόγο που έχουν και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού.

Ώστε:

Δύο ποσά είναι ανάλογα, αν ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με το λόγο των αντιστοίχων τιμών του άλλου ποσού.

Ποσά αντίστροφα. **Ας εξετάσουμε τώρα το εξής πρόβλημα: Ένας εργάτης για να εκτελέσει ένα έργο χρειάζεται 240 ώρες. Σε πόσες ώρες θα εκτελέσουν το ίδιο έργο 2,3,4,...εργάτες;**

Ο πίνακας 2.1.3 δείχνει την αντιστοιχεία μεταξύ του αριθμού των εργατών και του απαιτούμενου χρόνου για την εκτέλεση του έργου.

Πίνακας 2.1.3

Αριθμός εργατών	1	2	3	4	...
Απαιτούμενος χρόνος σε ώρες	240	120	80	60	...

Από τον πίνακα 2.1.3 παδρατηρούμε ότι, όταν οι τιμές του ποσού <<αριθμός εργατών>> πολλαπλασιασθούν επί 2,3,4... τότε οι αντίστοιχες τιμές του ποσού <<χρόνος>> διαιρούνται δια 2,3,4... Με άλλα λόγια, όταν ο αριθμός των εργατών διπλασιασθεί, τριπλασιασθεί, κ.λ.π., τότε για την εκτέλεση του έργου χρειάζεται ο μισός χρόνος, το ένα τρίτο του χρόνου, κ.λ.π.

Δύο ποσά που έχουν μεταξύ τους τέτοια σχέση, ονομάζονται αντίστροφα ποσά.

Ώστε :

Δύο (συμμεταβλητά) ποσά θα λέμε ότι είναι αντίστροφα, όταν δούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζεται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, να διαιρείται η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό ή όταν διαιρείται μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, να πολλαπλασιάζεται η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.

Αντίστροφα ποσά είναι: Ο αριθμός των τεχνιτών και ο απαιτούμενος χρόνος κατασκευής ενός έργου, η (σταθερή) ταχύτητα ενός κινητού και ο χρόνος που χρειάζεται το κινητό για να διανύσει ορισμένη απόσταση, η ημερήσια κατανάλωση μιας ορισμένης ποσότητας τροφίμων και ο χρόνος που θα επαρκέσουν τα τρόφιμα, η ωριαία παροχή μιας βρύσης και ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει μια δεξαμεν, το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδό, ο αριθμός των στροφών που κάνει ένας τροχός για να διανύσει μια ορισμένη απόσταση και το μήκος της ακτίνας του.

Παρατήρηση. **Από τον πίνακα 2.1.3 παίρνουμε δύο τιμές του ενός ποσού (αριθμός εργατών) π.χ. τις 2 και 3 και σχηματίζουμε το λόγο τους $^{2}/_{3}$. Έπειτα παίρνουμε τις αντίστοιχες τιμές (120 και 80) του άλλου ποσού (χρόνος σε ώρες) σχηματίζουμε το λόγο του $^{120}/_{80}={}^{12}/_{8}$. Συγκρίνοντας τώρα τους δύο λόγους παρατηρούμε ότι:**

$$2/3 \neq 12/8$$

Εάν όμως αντιστρέψουμε τον λόγο 12/8 παρατηρούμε ότι:

2/3 = 8/12

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Δύο ποσά είναι αντίστροφα, αν ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των αντιστοίχων τιμών του άλλου ποσού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

ΑΡΙΘΜΟΙ: ΑΝΑΛΟΓΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΟΥΣ, ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΟΙ.

3.1 Έστω ότι έχουμε τους αριθμούς:

2,3,5

Αν πολλαπλασιάσουμε τους πιο πάνω αριθμούς επί τον ίδιο αριθμό, π.χ επί 5, τότε προκύπτουν οι **αριθμοί**: 10,15,25.

Οι αριθμοί 10,15,25, λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 2,3,5.

Αν τώρα οι αριθμοί 10,15,25 πολλαπλασιασθούν επί τον αριθμό 1/5 τότε προκύπτουν οι αριθμοί:

$10 \times \frac{1}{5} = 2$, $15 \times \frac{1}{5} = 3$, $25 \times \frac{1}{5} = 5$

Οι αριθμοί 2,3,5 λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 10,15,25, διότι προκύπτουν από αυτούς δια πολλαπλασιασμού επί τον ίδιο αριθμό.

Ώστε:

Δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται ανάλογοι προς άλλους, αν γίνονται από αυτούς δια του πολλαπλασιασμού επί τον ίδιο αριθμό.

Π.χ οι αριθμοί 28,40,48 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 7,10,12 γιατί προκύπτουν από αυτούς δια του πολλαπλασιασμού επί τον αριθμό 4, αλλά και οι αριθμοί 7,10,12 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 28,40,48, γιατί γίνονται από αυτούς δια του πολλαπλασιασμού επί τον ίδιο αριθμό ¼.

Από τα πιο πάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι:

Ο αριθμός 28 προκύπτει από τον αριθμό 7 δια πολλαπλασιασμύ επί 4, αλλά και ο 7 προκύπτει από τον 28 δια πολλαπλασιασμού επί ¼.

Οι αριθμοί 7 και 28 λέγονται **ομόλογοι αριθμοί.** Επίσης, οι αριθμοί 10 και 40, καθως και οι 12 και 48 είναι ομόλογοι αριθμοί.

Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύουν οι αναλογίες:

$$\frac{7}{28} = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι:

Αν οι αριθμοί χ, ψ, ω... είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ,... τότε ο λόγος των ομολόγων αριθμών είναι ο ίδιος για όλους.

Δηλαδή, αν χ, ψ, ω είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \lambda$$

Από την σχέση αυτή έχουμε:

$$X=\lambda \cdot \alpha, \quad \psi=\lambda \cdot \beta, \quad \omega=\lambda \cdot \gamma$$

Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με τη μονάδα, τότε οι αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι.**

Π.χ., οι αριθμοί 6 και 1/6 είναι αντίστροφοι, διότι 6 x 1/6 = 1. Επίσης, το κλάσμα 4/8 έχει αντίστροφο το κλάσμα 8/4, διότι 4/8 x 8/4=1.

Αν τώρα δύο ή περισσότεροι αριθμοί είναι ανάλογοι προς τους αντιστρόφους τους, τότε οι αριθμοί αυτοί λέγονται **αντιστρόφως ανάλογοι** προς άλλους ισοπληθείς.

Έστω π.χ οι αριθμοί 3,4,5. Οι αντίστροφοι τους είναι 1/3,1/4,1/5. Οι αριθμοί 12,16,,20 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3,4,5 αλλά αντιστρόφως ανάλογοι προς τους 1/3,1/4,1/5.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΟΥ

3.2. Μερισμός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα.

Μερισμός ενός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ, είναι η εύρεση άλλων αριθμών χ, ψ, ω,... τέτοιων ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \dots \quad \text{με } \chi + \psi + \omega = M$$

Ο αριθμός Μ που θέλουμε να μερίσουμε λέγεται **μεριστέος** αριθμός. Από τις ιδιότητες των αναλογιών, είναι γνωστό ότι:

Αν οι αριθμοί χ, ψ, ω είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{\chi}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\chi+\psi+\omega+\dots}{\alpha+\beta+\gamma+\dots} = \frac{M}{\alpha+\beta+\gamma+\dots} = \lambda$$

Λύνωντας ως προς χ, ψ, ω βρίσκουμε ότι:

$$\chi = \lambda \cdot \alpha \qquad \psi = \lambda \cdot \beta \qquad \omega = \lambda \cdot \gamma$$

Από τα παραπάνω συνάγουμε τον ακόλουθο κανόνα:

$$X = \lambda \cdot \alpha \qquad \psi = \lambda \cdot \beta \qquad \omega = \lambda \cdot \gamma$$

Από τα παραπάνω συνάγουμε τον ακόλουθο κανόνα:

Για να μερίσουμε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα προς άλλους αριθμούς α,β,γ,... διαιρούμε το μεριστέο αριθμό Μ με το άθροισμα α + β + γ +... και με πηλίκο (=λ) πολλαπλασιάζουμε καθένα από τους αριθμούς α,β,γ...

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- *Να μερισθεί ο αριθμός 1000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2,3, και 5.*

Ο χ,ψ,ω είναι οι άγνωστοι αριθμοί που είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 2,3,5, τότε θα έχουμε χ+ψ+ω=1000 και επειδή οι χ, ψ, ω είναι ανάλογοι προς τους 2,3 και 5 θα ισχύσει:

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{\omega}{5} = \frac{\chi + \psi + \omega}{2 + 3 + 5} = \frac{1000}{10} = 100$$

Μερισμός σε μέρη ανάλογα ακεραίων αριθμών.

Πρόβλημα 1°.

Ένας επιχειρηματίας χρησιμοποίησε (στο ίδιο χρονικό διάστημα) τέσσερις υπαλλήλους για την εκτέλεση ενός έργου με τα εξής ημερομήσθια: Α υπάλληλος 550 ευρώ., Β υπάλληλος 650 ευρώ., Γ υπάλληλος 500 ευρώ. και Δ υπάλληλος 700 ευρώ. Ο επιχειρηματίας έδωσε συνολικά 48.000 ευρώ. Πόσες θα πάρει ο κάθε υπάλληλος ;

ΛΥΣΗ

Για να βρούμε το μερίδιο κάθε υπαλλήλου, θα πρέπει να μοιράσουμε το ποσό των 48.000 ευρώ σε μέρη ανάλογα των ημερομισθίων των υπαλλήλων, δηλαδή σε μέρη ανάλογα των αριθμών:

550, 650, 500, 700

Το άθροισμα των ημερομισθίων είναι :

550 + 650 + 500 + 700 = 2400 = Α + Β + Γ + Δ

Το μεριστέο ποσό είναι 48.000 = Μ

Αν τώρα παραστήσουμε με φ, χ, ψ, ω τα τέσσερα μερίδια, θα είναι:

$\varphi + \chi + \psi + \omega = 48.000$ και ισχύει η σχέση:

$$\frac{\varphi}{550} = \frac{\chi}{650} = \frac{\psi}{500} = \frac{\omega}{700} = \frac{\varphi+\chi+\psi+\omega}{550+650+500+700} = \frac{48.000}{2400} = 20$$

Άρα: $\frac{\varphi}{550} = 20$ και φ= 11.000, $\frac{\chi}{650} = 20$ και χ= 13.000

$\frac{\psi}{500} = 20$ και ψ=10.000, $\frac{\omega}{700} = 20$ και ω= 14.00

Ώστε: Ο Α υπάλληλος θα πάρει 11.000 ευρώ.
Ο Β υπάλληλος θα πάρει 13.000 ευρώ.
Ο Γ υπάλληλος θα πάρει 10.000 ευρώ.
Ο Δ υπάλληλος θα πάρει 14.000 ευρώ.

Πρόβλημα 2ο

Ένα φιλανθρωπικό σωματείο θέλει να μοιράσει 15.00 ευρώ σε τρεις πτωχές οικογένειες, ανάλογα με τα άτομα κάθε οικογενείας. Η α΄ οικογένεια έχει 4 άτομα, η β΄ έχει 6 άτομα και η γ΄ έχει 10 άτομα. Πόσα θα πάρει κάθε οικογένεια ;

ΛΥΣΗ

Μεριστέος = 15.000, α = 4, β = 6, γ =10

Για να βρούμε πόσα χρήματα θα πάρει κάθε οικογένεια, θα πρέπει να μερίσουμε τον αριθμό 15.000 σε μέρη ανάλογα των αριθμών 4, 6, 10.

Πρακτικός κανόνας μερισμού:

Για να μερίσουμε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α,β,γ..., πολλαπλασιάζουμε το μεριστέο αριθμό Μ με καθένα από τους αριθμούς α,β,γ,...και το γινόμενο διαιρούμε με το άθροισμα

$$\alpha = \frac{M\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \beta = \frac{M\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \gamma = \frac{M\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκουμε ότι:

Η α΄ οικογένεια θα πάρει: $\frac{15.000 \times 4}{4+6+10}$ **= 3.000** ευρώ.

Η β΄ οικογένεια θα πάρει: $\frac{15.000 \times 6}{4+6+10}$ **= 4.500** ευρώ.

Η γ΄ οικογένεια θα πάρει: $\frac{15.000 \times 10}{4+6+10}$ = **7.500** ευρώ.

Α΄ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ.

3.4 Μερισμός σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών.

Πρόβλημα 1^{o}.

Να μερισθεί ο αριθμός 250.000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.

ΛΥΣΗ

Για να μερίσουμε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών, μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ισοδύναμα ομώνυμα και έπειτα μερίζουμε τον αριθμό Μ ανάλογα προς τους αριθμητές των ομώνυμων κλασμάτων.

*ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^ο^*

Κάποιος θείος που πέθανε άφησε στους ανεψιούς του Α,Β,Γ 600.00 ευρώ. Στην διαθήκη του όρισε ότι: ο Α θα πάρει τα 2/5 των χρημάτων, ο Β το 1/3 και ο Γ τα υπόλοιπα . πόσα χρήματα θα πάρει ο κάθε ανεψιός;

ΛΥΣΗ

Μ = 600.000, α=2/5 β=1/3 γ=;

$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$ Άρα γ= $\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$

Άρα: Ο Α θα πάρει τα $\frac{6}{15}$ των χρημάτων.

Ο Β θα πάρει τα $\frac{5}{15}$ των χρημάτων.

Ο Γ θα πάρει τα $\frac{4}{15}$ των χρημάτων.

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκουμε ότι:

$$\frac{600.000 \times 6}{15}$$

Εφαρμόζοντας τον πρακτικό κανόνα μερισμού βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\frac{400.00 \times 450}{2500}$ =**72.000 ευρώ.**

Ο Β θα πάρει: $\frac{400.000 \times 500}{2500}$ =**80.000 ευρώ.**

Ο Γ θα πάρει: $\frac{400.000 \times 700}{2500}$ =**112.000 ευρώ.**

Ο Δ θα πάρει: $\frac{400.000 \times 850}{2500}$ =**163.000 ευρώ.**

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2^ο^</u>

Τρεις έμποροι συνεταιρίσθηκαν. Ο Α εισέφερε 1.500.000 ευρώ, ο Β 1.200.000 ευρώ και ο Γ 8.000.0000 ευρώ. Στο τέλος του πρώτου έτους, η εταιρεία πραγματοποίησε κέρδη 900.000 ευρώ. Ο Α, ο οποίος εκτελεί και καθήκοντα διαχειριστή της εταιρείας, δικαιούται 10% επί πλέον επί των κερδών. Πόσο κέρδος θα πάρει ο κάθε συνεταίρος;

ΛΥΣΗ

Το κέρδος του πρώτου έτους είναι 900.000 ευρώ. Ο Α, ως διαχειριστής, παίρνει 10% πριν από τη διανομή των κερδών, δηλαδή 900.000 x 0,1 = 90.000 ευρώ. Συνεπώς, το κέρδος που θα διανεμηθεί είναι:

900.000 – 90.000 = 810.000 ευρώ

Το κέρδος των 810.000 θα μοιρασθεί ανάλογα προς τα κεφάλαια συμμετοχής των συνεταίρων: 1.500.000, 1.200.000 και 800.000, ή ανάλογα προς τους αριθμούς: 15 = α, 12 = β και 80 = γ.

Εφαρμόζοντας τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\frac{810.000 \times 15}{107}$ =113.551,40 + 90.000 = 203.551,40

Ο Β θα πάρει: $\frac{810.000 \times 12}{107}$ = 90.841,12

Ο Γ θα πάρει: $\frac{810.000 \times 80}{107}$ = 605.607,48

Σύνολο=900.000.----

3.5 Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τους χρόνους συμμετοχής.

Πρόβλημα 1°

Τρεις έμποροι συνεταιρίσθηκαν με τα ίδια κεφάλαια συμμετοχής. Τα χρήματα του Α έμειναν στην εταιρεία ένα έτος, του Β 10 μήνες και του Γ 8 μήνες. Στο τέλος του έτους βρέθηκε κέρδος 300.000 ευρώ. Πόσα χρήματα πήρε ο κάθε συνεταίρος από το κέρδος;

ΛΥΣΗ

Αφού και οι τρεις συνεταίροι εισέφεραν το ίδιο κεφάλαιο, είναι φανερό ότι το κέρδος των 300.000 ευρώ θα μοιρασθεί ανάλογα προς τους χρόνους που τα κεφάλαια έμειναν στην εταιρία, δηλαδή ανάλογα προς τους αριθμούς 12, 10 και 8 μήνες.

Έχουμε: Μ = 300.000, α = 12, β = 10, γ =8 και

$$\alpha + \beta + \gamma = 12 + 10 + + 8 = 30$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\frac{300.000 \times 12}{30}$ **=120.000 ευρώ.**

Ο Β θα πάρει: $\frac{300.000 \times 10}{30}$ **=100.000 ευρώ.**

Ο Γ θα πάρει: $\frac{300.000 \times 8}{30}$ **= 80.000 ευρώ.**

Σύνολο: = **300.000 ευρώ.**

Μερισμός κέρδους (ή ζημίας) ανάλογα προς τα κεφάλαια και τους χρόνους συμμετοχής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ο.

Ένας έμπορος άρχισε μια επιχείρηση με 80.000 ευρώ. Έξι μήνες αργότερα πήρε και συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 150.000 ευρώ. Ύστερα από 8 ακόμη μήνες πήρε και τρίτο συνεταίρο, ο οποίος εισέφερε 200.000 ευρώ. Δύο έτη μετά την έναρξη της επιχειρήσεως βρέθηκε κέρδος 331.000 ευρώ. Πόσο αναλογεί σε κάθε συνεταίρο;

ΛΥΣΗ

Όπως βλέπουμε, στο πρόβλημα αυτό είναι διάφορα και τα κεφάλαια και οι χρόνοι συμμετοχής. Πρέπει λοιπόν το κέρδος να μοιρασθεί όχι μόνο ανάλογα προς τα κεφάλαια, αλλά και ανάλογα προς τους χρόνους συμμετοχής.

Για να λύσουμε το πιο πάνω πρόβλημα, πρέπει να χωρίσουμε το κέρδος σε μερίδια, ένα μερίδιο θα είναι το κέρδος του 1 ευρώ σε 1 μήνα. Αν ο Α εισέφερε 80.000 ευρώ σε 1 μήνα, θα είχε 80.000 μερίδια. Αφού όμως εισέφερε 80.000 ευρώ σε 24 μήνες (εύκολα βρίσκουμε ότι τα κεφάλαια των Α, Β, και Γ έμειναν στην εταιρεία 24, 18 και 10 μήνες αντιστοίχως) έχει 80.000 x 24 = 1.920.000 μερίδια. Ο Β έχει 150.000 x18 =2.700.000 μερίδια και ο Γ έχει 200.000 x10 = 2.000.000 μερίδια. Επομένως, ολόκληρο το κέρδος θα χωρισθεί σε: 1.920.000+2.700.000+2.000.000 = 6.620.000 μερίδια. Πρέπει λοιπόν να μερίσουμε το κέρδος των 331.000 ευρώ σε μέρη ανάλογα των μεριδίων: 1.920.000, 2.700.000 και 2.000.000 ή σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς: 192, 270, 200.

Έχουμε: Μ = 331.000 και 192 + 270 + 200 = 662.

Εφαρμόζουμε τον πρακτικό κανόνα μερισμού και βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\frac{331.000 \times 192}{662}$ = 96.000 ευρώ.

Ο Β θα πάρει: $\frac{331.000 \times 270}{662}$ =135.000 ευρώ.

Ο Γ θα πάρει: $\frac{331.000 \times 200}{662}$ =100.000 ευρώ.

Σύνολο: 331.000 ευρώ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΕΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

4.1 Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα, μήνες, ημέρες.

Στα προβλήματα του απλού τόκου συμπλέκονται τέσσερα ποσά:

1) **Ο τόκος** (η λέξη τόκος παράγεται από το ρήμα τίκτω που σημαίνει: γεννώ, παράγω), ο οποίος συμβολίζεται με το γράμμα **I** (αρχικό της λέξεως Interest = τόκος).
2) **Το κεφάλαιο**, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα **K.**
3) **Ο χρόνος** , ο οποίος συμβολίζεται: με το **n** όταν εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα και τρίμηνα, με το **μ** όταν εκφράζεται σε μήνες και με το **ν** όταν εκφράζεται σε ημέρες.
4) **Το επιτόκιο,** το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα **i.** Όπως είπαμε στην Εισαγωγή,

Επιτόκιο είναι ο τόκος κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο.

Για τον υπολογισμό του απλού τόκου διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Α΄. Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα και τρίμηνα

Για την εύρεση του γενικού τύπου του απλού τόκου, βασιζόμαστε στον ορισμό του επιτοκίου και σκεφτόμαστε ως εξής:

Κεφάλαιο 1 νομισμ. Μονάδες σε 1 έτος δίνει τόκο: $1 \cdot i$
Κεφάλαιο 1 νομισμ. Μονάδες σε 2 έτη δίνει τόκο: $2 \cdot i$
Κεφάλαιο 1 νομισμ. Μονάδες σε 3 έτη δίνει τόκο: $3 \cdot i$
....
....
Κεφάλαιο 1 νομισμ. Μονάδες σε n έτη δίνει τόκο: $n \cdot i$

Αν τώραέχουμε κεφάλαιο Κ νομισματικών μονάδων, τότε ο συνολικός τόκος θα είναι: $K \cdot n \cdot i$.

Συνεπώς, ο συνολικός τόκος (=I) ενός κεφαλαίου (=K), το οποίο τοκίζεται επί n έτη προς επιτόκιο i, υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο του απλού τόκου:

$$\boxed{I = K \cdot n \cdot i} \qquad (1)$$

Από τον τύπο (1) συμπεραίνουμε ότι: **ο απλός τόκος είναι ανάλογος προς το κεφάλαιο, το χρόνο και το επιτόκιο.** Αυτό σημαίνει ότι, αν ένα από τα ποσά του β΄ μέλους της σχέσεως (1) διπλασιασθεί, τριπλασιασθεί, κλπ. τότε και ο τόκος διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κλπ. Επομένως, για να βρούμε τον τύπο (1) μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σύνθετη μέθοδο των τριών. Πράγματι:

Κεφάλαιο 1 νομισμ. Μονάδες σε 1 έτος φέρει τόκο: $1 \cdot i$
Κεφάλαιο Κ νομισμ. Μονάδες σε 1 έτος φέρει τόκο: $1 \cdot i$;

Άρα: $I = I \cdot \frac{n}{1} \cdot \frac{K}{1}$ ή $I = K \cdot n \cdot I$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1°

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 10.000 ευρώ, το οποίο τοκίσθηκε:
α) προς 5 ¼ % για 3 έτη, β) προς 4 ½ % για ένα έτος και γ) προς 4 ½ % για 2, 3, 4,...έτη.

ΛΥΣΗ

α) K = 10.000, n = 3, I = 0,0525
I = K • n • i = 10.000 x 3 x 0,0525 =1575 ευρώ.

β) K = 10.000, n = 1, I = 0,045,
I = K • n • i = 10.000 x 1 x 0,045 =450 ευρώ.

γ) K = 10.000, n = 2, I = 0,045,
I = 10.000 x 2 x 0,045 =900 ευρώ.

Για n=3 έτη: **I** = 10.000 x 3 x 0,045 =1350 ευρώ.
Για n=4 έτη: **I** = 10.000 x 4 x 0,045 =1800 ευρώ.

Δηλαδή: σε διπλάσια, τριπλάσια, τετραπλάσια κλπ. έτη, το κεφάλαιο φέρει διπλάσιο, τετραπλάσιο, τετραπλάσιο κλπ. τόκο.

Β΄ Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες.

Όταν ο χρόνος τοκισμού εκφράζεται σε μήνες, πρέπει να αντικαταστήσουμε το n του τύπου (1) με το κλάσμα $^{\mu}/_{12}$ του έτους που αντιπροσωπεύουν οι μήνες. Όταν λοιπόν ο χρόνος δίνεται σε μήνες, τότε ο τόκος υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$\boxed{I = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12}}$$

Παράδειγμα 1°

Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 10.000 ευρώ σε 8 μήνες προς 6%, 12%;

ΛΥΣΗ

K = 10.000, μ = 8, i = 6%, i= 12%

Με 6% έχουμε: $I = \frac{10.000 \times 8 \times 0,06}{12}$ =400 ευρώ.

Με 12% έχουμε: $I = \frac{10.00 \times 8 \times 0,12}{12}$ =800 ευρώ.

Γ΄ Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες.

Αν τώρα ο χρόνος δίνεται σε ημέρες, τότε πρέπει να αντικαταστήσουμε το n $\frac{v}{360}$ 365

$$I = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12}$$

Παράδειγμα 1°

Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 10.000 ευρώ σε 8 μήνες προς 6%, 12%;

ΛΥΣΗ

K = 10.000, μ = 8, i = 6%, i= 12%

Με 6% έχουμε: $I = \frac{10.000 \times 8 \times 0{,}06}{12}$ =400 ευρώ.

Με 12% έχουμε: $I = \frac{10.00 \times 8 \times 0{,}12}{12}$ =800 ευρώ.

Γ΄ Όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες.

Αν τώρα ο χρόνος δίνεται σε ημέρες, τότε πρέπει να αντικαταστήσουμε το n

του τύπου (1) με το κλάσμα $\frac{v}{360}$ ή $\frac{v}{365}$ του έτους πολύ αντιπροσωπεύει

τις ημέρες. Στην περίπτωση αυτή ο τόκος υπολογίζεται βάσει των τύπων :

(1β) $$K = \frac{K\,v\,i}{365}$$ για πολιτικό έτος

(1γ) $$K = \frac{K\,\nu\,i}{360}$$ για έτος εμπορικό ή μεικτό

<u>Σημείωση.</u> Για να εφαρμόσουμε το (1β) και (1γ), πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις τοκοφόρες ημέρες. Για των υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών ισχύουν διεθνώς τα εξής:

α) αν θεωρήσουμε ότι όλοι οι μήνες του έτους έχουν 30 ημέρες ο καθένας, τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **εμπορικό έτος.**

β) αν όμως θεωρήσουμε τους μήνες με τις πραγματικές τους ημέρες (30 ή 31 και για το Φεβρουάριο 28 ή 29) για δίσεκτο έτος)και το έτος με 365 ημέρες τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **πολιτικό έτος.**

γ) αν, οι μήνες λογίζονται με τις πραγματικές τους ημέρες (30, 31 28 και 29) τότε λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **μεικτό έτος.**

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°</u>

Πριν εφαρμόσουμε τους τύπους (1β) και (1γ) πρέπει να υπολογίσουμε τις τοκοφόρες ημέρες . για να υπολογίσουμε τις τοκοφόρες ημέρες χρησιμοποιούμε τον Πίνακα VII που βρίσκεται στους Πίνακες Ανατοκισμού – Ραντών – Χρεωλυσίων. Ο Πίνακας VII δίνει αθροιστικώς τον αριθμό των ημερών του έτους, από την 1 Ιανουαρίου ως την 31 Δεκεμβρίου. Για να βρούμε τις τοκοφόρες ημέρες μεταξύ δύο χρονικών διαστημάτων κάνουμε μια απλή αφαίρεση. Ο υπολογισμός τον τοκοφόρων ημερών του πιο πάνω παραδείγματος, με τη βοήθεια του Πίνακα VII, γίνεται ως εξής:

α)	Από την 1 Ιαν. ως τις 10 Απρ. έχουμε 100 ημέρες
	Από την 1 Ιαν. ως τις 27 Απρ. έχουμε 27 ημέρες
Άρα :	Από την 27 Ιαν. ως τις 10 Απρ. έχουμε 73 ημέρες
β)	Από την 1 Ιαν. ως τις 31 Αυγ. έχουμε 243 ημέρες
	Από την 1 Ιαν. ως τις 20 ιουν. έχουμε 171 ημέρες
Άρα:	Από την 20 Ιαν. ως τις 31 Αυγ. έχουμε 72 ημέρες
γ)	Από 1.1.1976 ως 1.4.1976 έχουμε 92 ημέρες.
	Από 1.1.1976 ως 1.2.1976 έχουμε 32 ημέρες.
Άρα:	Από 1.2.1976 ως 1.4.1976 έχουμε 60 ημέρες.

Έχουμε K = 10.000, i = 0,06 α) ν =73, β) ν = 72, γ) ν =60
Εφαρμόζουμε τους τύπους (1β) και (1γ) και βρίσκουμε ότι:

α) Πολιτικό έτος: $I = \frac{10.000 \times 73 \times 0{,}06}{365 = 5 \times 73} = 120$ ευρώ.

β) Μεικτό έτος : $I = \frac{10.000 \times 72 \times 0{,}06}{360 = 5 \times 72} = 120$ ευρώ.

γ) Μεικτό έτος : $I = \frac{10.000 \times 60 \times 0{,}06}{360} = 100$ ευρώ.

4.2 Υπολογισμός του τόκου με τη μέθοδο των σταθερών διαιρετών και των τοκαρίθμων.

Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους του β΄ μέλους των τύπων:

$$I = \frac{K\ v\ i}{360} \quad \text{και} \quad I = \frac{K\ v\ i}{365}$$

Με το επιτόκιο (= i) , τότε προκύπτουν οι τύποι:

$$I = \frac{K\ v\ i}{\frac{360}{i}} \quad \text{και} \quad I = \frac{K\ v\ i}{\frac{365}{i}}$$

Το γινόμενο K • v (=κεφάλαιο x τοκοφόρες ημέρες) συμβολίζεται με το γράμμα N και ονομάζεται **τοκάριθμος.** Το πηλίκο 360/ i (ή 365/ i), το οποίο για ορισμένα επιτόκια είναι αριθμός σταθερός, συμβολίζεται με το γράμμα Δ και ονομάζεται **σταθερός διαιρέτης**. Συνεπώς, οι πιο πάνω τύποι γράφονται:

$$I = \frac{K\ v}{\Delta} \quad \text{ή} \quad I = \frac{N\ (=\text{τοκάριθμος})}{\Delta\ (=\text{σταθερός διαιρέτης})} \qquad (2)$$

Από τον τύπο (2) συμπεραίνουμε ότι: **Για να βρούμε τον τόκο ενός κεφαλαίου, διαιρούμε τον τοκάριθμο του με το σταθερό διαιρέτη,** ο οποίος αντιστοιχεί σε προκαθορισμένο επιτόκιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°

Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 10.000 ευρώ σε 60 ημέρες προς 6%. Έτος μεικτό.

ΛΥΣΗ

$K = 10.000, \quad v = 60, \quad i = 0{,}06$

$K \cdot v = 10.000 \times 60 = 600.000 \text{ , } \Delta = 6.000$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (2) βρίσκουμε:

$$I = \frac{N}{\Delta} = \frac{600.000}{6.000} = 100 \text{ ευρώ.}$$

4.3 Υπολογισμός του τόκου πολλών κεφαλαίων.

Υποθέτουμε ότι κεφάλαια K_1, K_2, K_3,...K_μ τοκίζονται αντιστοίχως επί v_1, v_2, v_3,...v_μ ημέρες με το ίδιο επιτόκιο i. Ο συνολικός τόκος των δοσμένων κεφαλαίων θα αποτελείται από το άθροισμα των τόκων κάθε κεφαλαίου, δηλαδή:

$$I_{ολ} = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_\mu$$

ή

$$I_{ολ} = \frac{K\ v}{\Delta} + \frac{K\ v}{\Delta} + \frac{K\ v}{\Delta} = \frac{N}{\Delta} + \frac{N}{\Delta} \ldots\ldots + \frac{N}{\Delta}$$

Και $$I_{ολ} = \frac{N\ N\ N + \ldots + N}{\Delta} \quad (3)$$

Όπου $N_1, N_2, \ldots N_\mu$ = τοκάριθμοι και Δ = σταθ. διαιρέτης.

Από τον τύπο (3) συμπεραίνουμε ότι: **Για να βρούμε τον τόκο πολλών κεφαλαίων, τα οποία τοκίζονται σε διαφορετικούς χρόνους, με το ίδιο επιτόκιο, διαιρούμε το άθροισμα των τοκαρίθμων τους με το σταθερό διαιρέτη.**

Αν το επιτόκιο δεν παρέχει σταθερό διαιρέτη, τότε στον τύπο (3) πρέπει να αντικαταστήσουμε το Δ με το πηλίκο 360:i (ή 365:i).

Παράδειγμα 1°

Κεφάλαιο 10.500, 20.800, 18.600, 25.400 ευρώ τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί 52, 36, 45, 75 ημέρες προς 9% με μεικτό έτος. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος;

ΛΥΣΗ

K1 = 10.500, K2 = 20.800, K3 = 18.600, K4 = 25.400
v1 = 52, v2 = 36, v3 = 45, v4 = 75
i= 0,09 άρα Δ = 4.000

θα εφαρμόσουμε τον τύπο (3). Βρίσκουμε πρώτα τους τοκάριθμους.

N1 = K1 • v1 = 10.500 x 52 = 546.000
N2 = K2 • v2 = 20.800 x 36 = 748.000
N3 = K3 • v3 = 18.600 x 45 = 837.000
N4 = K4 • v4 = 25.400 x 75 =1.905.000

Άρα: N1 + N2 N3 + N4 = 4.036.800

Ο συνολικός τόκος θα είναι :

$$I_{\text{ολ}} = \frac{4.036.800}{4.000} = 1.009{,}20 \text{ ευρώ.}$$

4.4 Ευρεση του τόκου, του χρόνου, και του επιτοκίου.

Με τους βασικούς τύπους:

$$I = K \cdot n \cdot i \;, \quad I = \frac{K\,\mu\, i}{12} \;, \quad I = \frac{K\,v\,i}{360} \;, \text{ ή } I = \frac{K\,v\,i}{365}$$

Δεν λύνονται μόνο προβλήματα στα οποία ζητάει ο τόκος ενός κεφαλαίου, αλλά και προβλήματα στα οποία ζητούνται και τα άλλα ποσά, δηλαδή το κεφάλαιο, ο χρόνος και το επιτόκιο. Επομένως, όταν θέλουμε να βρούμε το K ή το v ή το i τότε λύνουμε τους πιο πάνω τύπους ως προς το άγνωστο κάθε φορά ποσό K ή v ή i

Για την εύρεση του κεφαλαίου ή του χρόνου ή του επιτοκίου, παραθέτουμε πιο κάτω όλους τους σχετικούς τύπους, οι οποίοι δεν πρέπει να απομνημονεύονται, γιατί όλοι προκύπτουν από τους πιο πάνω βασικούς τύπους του τόκου.

Διακρίνονται τις εξής περιπτώσεις:

1) Όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη:

α) Το κεφάλαιο βρίσκεται από τον τύπο: $I = \frac{I}{n\ i}$

β) Ο χρόνος βρίσκεται από τον τύπο : $n = \frac{I}{K\ i}$

γ) Το επιτόκιο βρίσκεται από τον τύπο : $i = \frac{I}{K\ n}$

2) Όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες:

α) Το κεφάλαιο βρίσκεται από τον τύπο: $K = \frac{12\ I}{\mu\ i}$

β) Ο χρόνος βρίσκεται από τον τύπο : $\mu = \frac{12\ I}{K\ i}$

γ) Το επιτόκιο βρίσκεται από τον τύπο: $i = \frac{12\ I}{K\ \mu}$

3) Όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες:

α) Κεφάλαιο : $K = \frac{360\ i}{v\ i}$ ή $K = \frac{365\ I}{v\ i}$

β) Χρόνος : $v = \frac{360\ I}{K\ i}$ ή $v = \frac{365\ I}{K\ i}$

γ) Επιτόκιο : $i = \frac{360\ I}{K\ v}$ ή $i = \frac{365\ i}{K\ v}$

Παράδειγμα 1°

Κεφάλαιο 10.000 ευρώ τοκίσθηκε επί 80 ημέρες και έφερε τόκο 100 ευρώ. Με τι επιτόκιο τοκίσθηκε; Έτος μεικτό.

ΛΥΣΗ

$1^{ος}$ τρόπος: $\frac{K\,v\,i}{360} \longrightarrow 100 = \frac{10.000\ 80\ i}{360} \longrightarrow i = 0{,}045$

$2^{ος}$ τρόπος: $\frac{K\,v}{\Delta} \longrightarrow 100 = \frac{10.000\ 80}{\Delta} \longrightarrow \Delta = 8.000$

αλλά: $\Delta = \frac{360}{i}$ άρα $8.000 = \frac{360}{i} \longrightarrow i = 0{,}045$

4.4 Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου όταν είναι γνωστή η τελική αξία.

Στον απλό τόκο, ονομάζουμε τελικό κεφάλαιο ή τελική αξία ενός κεφαλαίου, το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου αυξημένο κατά τον τόκο που εχει παραχρεί στο τέλος μιας χρονικής περιόδου.

Αν παραστήσουμε με το Ko το αρχικό κεφάλαιο και με το Kn την τελική αξία του κεφαλαίου που τοκίσθηκε επί n έτη, τότε, βάσει του πιο πάνω ορισμού, θα πρέπει να ισχύει η ισότητα:

$Kn = Ko + I = Ko + Ko\ n\ i$, διότι $I = Ko\ n\ I$

ή

$Kn = Ko\,(1 + n\,i)$ και $Ko = \frac{Kn}{1 + n\,i}$ (4)

Με τον τύπο (4) βρίσκουμε το αρχικό κεφάλαιο (= Ko) όταν είναι γνωστό το τελικό κεφάλαιο (= Kn).

Αν τώρα ο χρόνος δίνεται σε μήνες, τότε, βάσει του ορισμού, θα είναι:

$$K\mu = Ko + \frac{Ko\ \mu\ i}{12} = \frac{12\ Ko + Ko\ \mu\ i}{12} = \frac{Ko\,(12 + \mu\ i)}{12}$$

Λύνοντας ως προς Ko έχουμε:

$$Ko = \frac{12\ K\mu}{12 + \mu\ i} \quad (4\,\alpha)$$

Αν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες, τότε το αρχικό κεφάλαιο βρίσκεται από τον τύπο:

$$Ko = \frac{360\ Kv}{360+v\ i} \quad ή \quad Ko = \frac{360\ Kv}{360+v\ i} \qquad (4β)$$

Αν, τέλος, εργασθούμε με τους σταθερούς διαιρέτες, θα έχουμε:

$$Kv = Ko + \frac{Ko\ v}{Δ} = \frac{Ko\ Δ+Ko\ v}{Δ} = \frac{Ko(Δ+v)}{Δ}$$

Λύνοντας ως προς Ko έχουμε:

$$Ko = \frac{Kv\ Δ}{Δ+v} \qquad (4γ)$$

Παράδειγμα 1°.

Κεφάλαιο τοκίσθηκε προς 6% επί 4 έτη και έγινε μαζί με τους τόκους του 18.600 ευρώ. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιος ο τόκος του;

ΛΥΣΗ

Ko = ; i =0,06 n = 4, Kn = 18.600, I =;

$Kn = Ko+Ko\ n\ I=Ko\ (1+n\ i\ ).$ $\Longrightarrow$ $18.600 = Ko\ (1 + 4 \times 0,06)$ $\Longrightarrow$

$$Ko = \frac{18.600}{1+4 \times 0,06} = 15.000$$

Άρα το αρχικό κεφάλαιο ήταν 15.000 ευρώ.
Επειδή είναι:
Kn = Ko + I, θα είναι: I= Kn – Ko = 18.600 – 15.000 = 3.600 ευρώ=τόκος.

4.5 Προβλήματα στα οποία δίνεται το κεφάλαιο ελαττωμένο κατά τον τόκο του.

Στις εμπορικές συναλλαγές, υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες ο δανειζόμενος ένα χρηματικό ποσό δεν εισπράττει ολόκληρο το ποσό που δανείζεται, για ο δανειστής (πιστωτής) παρακρατεί συνήθως τον τόκο τουκεφαλαίου που δανείζει, οπότε ο δανειζόμενος εισπράττει ένα κεφάλαιο που είναι ελαττωμένο κατά τον τόκο του. Στις περιπτώσεις αυτές δημιουργούνται τα εξής προβλήματα:

α) Η εύρεση του ελαττωμένου κεφαλαίου.

β) Η εύρεση του αρχικού κεφαλαίου.

γ) Η εύρεση του τόκου που κράτησε ο πιστωτής.

α) Εύρεση του ελαττωμένου κεφαλαίου

Αν συμβολίσουμε με το Κο το αρχικό κεφάλαιο που δανείσθηκε ο οφειλέτης για ν ημέρες προς επιτόκιο i και με το Κ το ελαττωμένο κεφάλαιο, δηλαδή το κεφάλαιο που εισέπραξε ο δανειζόμενος από τον πιστωτή μετάτην αφαίρεση του τόκου, τότε το ελαττωμένο κατά τον τόκο του κεφαλαίου βρίσκεται από την σχέση:

$$Ko - \frac{Ko\ \nu}{\Delta} = K \qquad (5)$$

Όπου Κο > Κ. Αν το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε θέτουμε όπου $\Delta = 360/\,i$ ή $\Delta = 365/\,i$ και ο τύπος (5) τροποποιείται αναλόγως.

β) Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου.

Λύνοντας την εξίσωση (5) ως προς Κο έχουμε:

$$Ko \cdot \Delta - Ko \cdot \nu = K \cdot \Delta \quad \text{ή} \quad Ko\,(\Delta - \nu) = K \cdot \Delta$$

Και $$Ko = \frac{K\ \Delta}{\Delta - \nu} \qquad (6)$$

Ώστε: το αρχικό κεφάλαιο Κο που ελαττώθηκε κατά τον τόκο ν ημερών και έγινε Κ, βρίσκεται αν το γινόμενο του ελαττωμένου κεφαλαίου (=Κ) επί το σταθερό διαιρέτη (=Δ) διαιρερεί με το σταθερό διαιρέτη μείον τον αριθμό των τοκοφόρων ημερών.

Αν τώρα το επιτόκιο υπολογισμού των τόκων δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτην τότε στον τύπο (6) θέτουμε όπου $\Delta = 360/\,i$ ή $\Delta = 365/\,i$ και βρίσκουμε τους ισοδύναμους τύπους:

$$Ko = \frac{360\ K}{360 - \nu\ i} \quad (6\alpha) \qquad \text{και} \qquad Ko = \frac{365\ K}{365 - \nu\ i} \quad (6\beta)$$

γ) Εύρεση του τόκου.

Αφού ισχύει η ισότητα: Κο = Κ + Ι, θα πρέπει να ισχύει και η ισότητα:

$$K + I = \frac{K\ \Delta}{\Delta - \nu} \quad \text{βάσει του τύπου (6).}$$

Εκτελούμε τις πράξεις και έχουμε :

$$I = \frac{K\ \Delta}{\Delta - \nu} - K \quad \text{ή} \quad I = \frac{K\ \Delta - K(\Delta - \nu)}{\Delta - \nu} = \frac{K\ \Delta - K\ \Delta + K\ \nu}{\Delta - \nu}$$

και $I = \dfrac{K\,v}{\Delta - v}$ (7)

Ώστε ο τόκος που κρατάει ο πιστωτής από τον οφειλέτη βρίσκεται από τον τύπο (7).

Αν τώρα το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε ο τόκος υπολογίζεται βάσει των ακόλουθων τύπων:

$I = \dfrac{K\,v\,i}{360 - v\,i}$ για εμπορικό - μεικτό έτος.

$I = \dfrac{K\,v\,i}{365 - v\,i}$ για πολιτικό έτος.

Παράδειγμα 1°.

Στις 19 Φεβρουαρίου ο έμπορος Χ δανείσθηκε ένα χρηματικό ποσό με τη συμφωνία να το εξοφλήσει την 20 Απριλίου του ιδίου έτους. Ο πιστωτής κράτησε προκαταβολικώς τον τόκο του ποσού που δάνεισε προς 8% και ο Χ εισέπραξε 44.400 ευρώ. Ποιο είναι το οφειλόμενο ποσό; Έτος μεικτό.

ΛΥΣΗ

v = 60, i = 0,08 , D = 4.500 , K 44.400 , Ko;

Για την εύρεση του Ko πρέπει να αντικαταστήσουμε τα δεδομένα στον τύπο (6), δηλαδή στον τύπο:

$Ko = \dfrac{K\,\Delta}{\Delta\ v}$, $Ko = \dfrac{44.400 \times 60}{4.500 - 60}$ = 45.000 ευρώ.

Ώστε το οφειλόμενο ποσό είναι 45.000 ευρώ.

4.6 Εύρεση του μέσο επιτοκίου.

Υποθέτουμε ότι κεφάλαια: K1 , K2 , K3,..., Kμ τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί ν1, ν2, ν3,..., νμ ημέρες προς τα διαφορετικά επιτόκια: i1, i2, i3,..., iμ. Ερωτάται: Με ποιο κοινό επιτόκιο πρέπει να τοκισθούν τα δοσμένα κεφάλαια για δώσουν τον ίδιο συνολικό τόκο, τον οποίο θα έδιναν αν τοκίζονταν αντιστοίχως προς τα δοσμένα επιτόκια;

Μέσο ή κοινό επιτόκιο είναι το επιτόκιο με το οποίο πρέπει να τοκίσουμε τα δοσμένα κεφάλαια για τους αντίστοιχους χρόνους, ώστε να εισπράξουμε τον ίδιο συνολικό τόκο που θα εισπράτταμε αν τοκίζαμε τα δοσμένα κεφάλαια προς τα διάφορα επιτόκια.

$$X = \frac{K\ \nu\ i + K\ \nu\ i + \ldots + K\mu\ \nu\mu\ i\mu}{K\ \nu + K\ \nu + \ldots + K\mu\ \nu\mu} \qquad (8)$$

Παράδειγμα.

Κεφάλαιο 15.000 ευρώ, 25.000 ευρώ, 30.000 ευρώ και 45.000 ευρώ τοκίσθηκαν αντιστοίχως επί 60 ημέρες προς 9%, επί 40 ημέρες προς 8%, επί 50 μέρες προς 6% και επί 30 ημέρες προς 5%. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο.

ΛΥΣΗ

$K_1 = 15.000$, $\nu_1 = 60$, $i_1 = 0,09$
$K_2 = 25.000$, $\nu_2 = 40$, $i_2 = 0,08$
$K_3 = 30.000$, $\nu_3 = 50$, $i_3 = 0,06$
$K_4 = 45.000$, $\nu_4 = 30$, $i_4 = 0,05$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τύπο (8) βρίσκουμε.

$$X = \frac{15.000 \times 60 \times 0,09 + 25.000 \times 40 \times 0,08 + 30.000 \times 50 \times 0,06 + 45.000 \times 30 \times 0,05}{15.000 \times 60 + 25.000 \times 40 + 30.000 \times 50 + 45.000 \times 30} = \frac{318.500}{4.750.000} = 0,067.$$

Άρα το μέσο επιτόκιο είναι 6,07%

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗ ΜΕ ΑΠΛΟ ΤΟΚΟ.

5.1 Είναι γεγονός ότι, στις εμπορικές και τραπεζικές συναλλαγές, η εξόφληση μιας χρηματικής υποχρεώσεως δεν γίνεται πάντοτε «τοις μετρητοίς» ή με επιταγή. Κατά την αγορά, λόγου χάρη, εμπορεύματων ο αγοραστής δεν μπορεί συνήθως να καταβάλει αμέσως στον πωλητή το αντίτιμο της αξίας των εμπορευμάτων που αγόρασε. Έτσι, ο πωλητής (πιστωτής), για να εξασφαλίσει την απαίτηση του, υποχρεώνει τον αγοραστή (οφειλέτει) να υπογράψει ένα ειδικό νομικό έγγραφο με το οποίο μπορεί στο μέλλον να εισπράξει από τον οφειλέτη το οφειλόμενο χρηματικό ποσό. Ο Νόμος 5325 του 1932 έχει καθιερώσει δύο τύπους τέτοιων εγγράφων:

α) Το **Γραμμάτιο εις διαταγήν** και β) τη **Συναλλαγματική.**

Το γραμμάτιο συντάσσεται και υπογράφεται από τον οφειλέτη, ο οποίος υπόσχεται να πληρώσει ορισμένο χρηματικό ποσό, σε ορισμένο τόπο και χρόνο. Στο γραμμάτιο υπάρχουν δύο πρόσωπα:

α) Ο **εκδότης,** δηλαδή αυτός που πρέπει να πληρώσει το οφειλόμενο χρηματικό ποσό και β) **ο πιστωτής**, δηλαδή αυτός που θα εισπράξει το χρηματικό ποσό που είναι γραμμένο στο γραμμάτιο.

Στην πράξη σπάνια χρησιμοποείται το γραμμάτιο στη θέση του συνήθως χρησιμοποιείται η συναλλαγματική (για συντομία: συναλλαγματική). Η συν/κη είναι έγγραφο, το οποίο υπογράφει ο πιστωτής ο οποίος στο εξής θα ονομάζεται **εκδότης** και με αυτό δίνει εντολή στον οφειλέτη ο οποίος στο εξής θα ονομάζεται **αποδέκτης** να πληρώσει στον κομιστή του εγγράφου (ή και για λογαριασμό του), σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το ποσό που είναι γραμμένο στη συν/κη.

Το γραμμάτιο και η συναλλαγματική είναι πιστωτικοί τίτλοι, εκδίδονται συνήθως στις αγορές εμπορευμάτων που γίνονται με πίστωση ή για τακτοποίηση αμοιβαίων υποχρεώσεων και χρησιμοποιούνται πλέον σαν μέσο πληρωμών αντικαθιστώντας το χρήμα (χαρτονόμισμα).

Ο Νόμοςξ 5325 έχει εξομοιώσει το γραμμάτιο και τη συν/κή και η διαφορά τους είναι τυπική: Το γραμμάτιο εκδίδεται από τον οφειλέτη και αποτελεί υπόσχεση του να πληρώσει στον πιστωτή του, σε ορεισμένο τόπο και χρόνο, το χρηματικό ποσό που αναγράφεται στο γραμμάτιο, ενώ η συν/κη εκδίδεται από τον πιστωτή (εκδότη), ο οποίος δίνει εντολή στον οφειλέτη (αποδέκτη) να πληρώσει, σε ορισμένο τόπο και χρόνο, το χρηματικό ποσό που αναγράφετε στη συν/κη.

Οι πιο πάνω πιστωτικοί τίτλοι, για να είναι έγκυροι, θα πρέπει να περιέχουν ορεσμένα τυπικά και ουσιαστικά στοιχεία που προβλέπει ο Νόμος 5325/1932, δηλαδή τη λέξη « Συναλλαγματική » ή «Γραμμάτιο εις διαταγήν», την εντολή για πληρωμή ορισμένου χρηματικού ποσού, τη χρονολογία και τον τόπο πληρωμής, το χρηματικό ποσό (αριθμητικώς και ολογράφως), τις υπογραφές του εκδότη και του αποδέκτη και το προβλέπουμε από τον Νόμο χαρτόσημο, το οποίο είναι συνήθως ενσωματωμένο στη συν/κη ή στο γραμμάτιο.

Η μεταβίβαση της συν/κής ή του γραμματίου από ένα έμπορο σε μια τράπεζα ή από ένα πρόσωπο σε άλλο πρόσωπο, γίνεται με ειδική νομική πράξη που ονομάζεται οπισθογράφηση και γίνεται στο πίσω μέρος της συναλλαγματικής.

- **Ονομαστική αξία ενός γραμματίου ή μίας συν/κής, ονομάζεται το ποσό που πρέπει να πληρωθεί κατά τη λήξη του γραμματίου ή συν/κής.**
- **Παρούσα αξία μια συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου, ονομάζεται το ποσό που πρέπει να πληρωθεί σε μι οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από τη λήξη της συναλλαγματικής ή του γραμματίου.**
- **Προεξόφλημα καλείται το ποσό που κρατάει η τράπεζα κατά την προεξόφληση. Ειδηκότερα:**
- **Εξωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας μιας συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου.**
- **Εσωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της παρούσας αξίας μιας συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου.**

Έχουμε τρία είδη προεξοφλήσεων:

1) Εξωτερική προεξόφληση, δηλαδή απλός τόκος της ονομαστικής αξίας μιας συν/κής.
2) Εσωτερική προεξόφληση, δηλαδή απλός τόκος της παρούσας αξίας μιας συν/κής και
3) Προεξόφληση με ανατοκισμό, η οποία εφαρμόζεται σε μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις.

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε τα δύο πρώτα είδη προεξοφλήσεως. Για την θεωρητική θεμελίωση, βασική προϋπόθεση είναι ότι και ότι δύο είδη προεξοφλήσεως ισχύει η θεμελιώδης ισότητα:

Ονομαστική Αξία = Παρούσα Αξία + Προεξόφλημα

Αν παραστήσουμε με τα σύμβολα :

K = ονομαστική αξία συν/κής.

A = παρούσα αξία συν/κής (εξωτερικός)

E = εξωτερικό προεξόφλημα

A_1 = παρούσα αξία (εσωτερικός)

E_1= εσωτερικό προεξόφλημα, τότε η μεν έννοια της εξωτερικής προεξοφλήσεως αποδίδεται με την εξίσωση:

$$A = K - E$$

η δε έννοια της εσωτερικής προεξοφλήσεως αποδίδεται με την εξίσωση:

$$A_1 + E_1 = K.$$

5.2 Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία.

Α΄ Εξωτερικώς, δηλαδή με εξωτερική προεξόφληση. Επειδή το εξωτερικό προεξόφλημα (= Ε) είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας (=Κ), συμπεραίνουμε ότι αυτό θα υπολογισθεί αν εφαρμόσουμε ένα από τους παρακάτω τύπους:

$E = K \cdot n \cdot i$ Όταν ο χρόνος δίνεται σε έτη (9)

$E = \frac{K\ \mu\ i}{12}$ Όταν ο χρόνος δίνεται σε μήνες (9α)

$E = \frac{K\ \nu\ i}{360 \text{ ή } 365}$ Όταν ο χρόνος δίνεται σε ημέρες (9β)

$E = \frac{K\ \nu}{\Delta} = \frac{N}{\Delta}$ Με τους σταθερούς διαιρέτες (9γ)

Β΄Εσωτερικός, δηλαδή με εσωτερική προεξόφληση. Επειδή το εστερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της παρούσας αξίας, δηλαδή:

$E_1 = \frac{A1\ \nu\ i}{360 \text{ ή } 365}$ ή $E_1 = \frac{A1\ \nu}{\Delta}$

Βρίσκουμε πρώτα την παρούσα αξία συναρτήσει της ονομαστικής αξίας κα έπειτα, αφού υπολογίσουμε τον τόκο της, βρίσκουμε το εσωτερικό προεξόφλημα.

Από τη βασική σχέση: $A_1 + E_1 = K$ προκύπτει $A_1 = K - E_1$.

Αντικαθιστώντας το E_1 με ίσο του $\frac{A1\ v}{\Delta}$ έχουμε:

$$A_1 = K - \frac{A1\ v}{\Delta} \text{ ή } A_1 \Delta = K \Delta - A_1 v \text{ ή } A_1 (\Delta + v) = K \Delta$$

Και $A1 = \frac{K\Delta}{\Delta + v}$. Υπολογίζουμε τώρα τον τόκο του τελευταίου ποσού και

έχουμε :

$$A_1 \frac{v}{\Delta} = \frac{K\Delta}{\Delta + v} \cdot \frac{v}{\Delta} = \frac{Kv}{\Delta + v} = E_1$$

Ώστε: $$E_1 = \frac{Kv}{\Delta + v} \quad \textbf{(10)}$$

Με τον τύπο (10) υπολογίζουμε το εσωτερικό προεξόφλημα όταν γνωρίζουμε την ονομαστική αξία. Αν το επιτόκιο δεν είναι κατάλληλο για σταθερό διαιρέτη, τότε εφαρμόζεται ο τύπος:

$$E_1 = \frac{Kvi}{36600 + vi} \quad \text{ή} \quad E_1 = \frac{Kvi}{36500 + vi} \quad (10\alpha)$$

Αν ο χρόνος δίνεται σε μήνες, τότε :

$$E_1 = \frac{K\mu i}{1200 + \mu i} \quad (10\beta)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1º

Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 12.000 ευρώ, προεξοφλήθηκε τρεις μήνες πριν από τη λήξη της προς 8%. Να υπολογισθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα.

ΛΥΣΗ

$K = 12.000$, $\mu = 3$, $i = 0{,}08$, $E = ;$ $E_1 = ;$

$$E = \frac{K \mu i}{12} = \frac{12.000 \times 3 \times 0{,}08}{12} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Αντικαθιστώντας πάλι τα δεδομένα στον τύπο (10 β) βρίσκουμε το εσωτερικό προεξόφλημα:

$$E1 = \frac{K \mu i}{12 + \mu i} = \frac{12.000 \times 3 \times 0{,}08}{12 + 3 \times 0{,}08} = 253{,}30 \text{ ευρώ.}$$

5. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία .

Α΄ Εξωτερικώς. Γνωρίζουμε ότι το εξωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της ονομαστικής αξίας. Επομένως, αν βρούμε την ονομαστική αξία από την παρούσα αξία και υπολογίσουμε τον τόκο της, τότε βρίσκουμε και το εξωτερικό προεξόφλημα.

Ο τύπος είναι:

$$E = \frac{A v}{\Delta - v} \qquad (11)$$

Αν ο χρόνος δίνεται σε μήνες, τότε:

$$E = \frac{A \mu i}{12 - \mu i} \qquad (11\alpha)$$

Β ΄Εσωτερικώς. Αφού το εσωτερικό προεξόφλημα είναι ο τόκος της παρούσας αξίας προκύπτει ότι:

$$E_1 = \frac{A v}{\Delta} \qquad (12)$$

Αν το επιτόκιο δεν δίνει σταθερό διαιρέτη, τότε το εσωτερικό προεξόφλημα υπολογίζεται βάσει του τύπου :

$$E_1 = \frac{A\,v\,i}{360 \text{ ή } 365} \qquad (12α)$$

Αν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες, τότε:

$$E_1 = \frac{A\,\mu\,i}{12} \qquad (12β)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^{O}

Συναλλαγματική που προεξοφλήθηκε 60 ημέρες πριν από τη λήψη της προς 6% έδωσε παρούσα αξία 11.880 ευρώ. Ζητούνται : α) Το εξωτερικό και εσωτερικό προεξόφλημα και β) η ονομαστική αξία της συν/κής.

ΛΥΣΗ

$v = 60$, $i = 0{,}06$, $A = 11.880$, $E = ;$ $E_1 = ;$ $K = ;$

$$E = \frac{A v}{\Delta - v} = \frac{11.880 \times 60}{6.000 - 60} = \frac{2 \times 5940 \times 60}{5.940} = 120 \text{ ευρώ.}$$

$$E1 = \frac{A v}{\Delta} = \frac{11.880 \times 60}{6.000} = \frac{11.880}{100} = 118{,}80 \text{ ευρώ.}$$

Από τις σχέσεις: $K = A + E$ και $A + E_1 = K$, θα βρούμε την ονομαστική αξία της συν/κής.

$K = 11.880 + 120 = 12.000$ και $11.880 + 118{,}80 = 11.998{,}80 = K$.

Εύρεση της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία.

Η εύρεση της παρούσας αξίας μια συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου, όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία, γίνεται κατά τους επόμενους τρόπους:

Α΄ Εξωτερικώς.

α) Χωρίς έξοδα. Στην περίπτωση αυτή, για να βρούμε την παρούσα αξία μιας συν/κής από την ονομαστική αξία της, αρκεί να αφαιρέσουμε από την ονομαστική αξία το εξωτερικό προεξόφλημα, δηλαδή βάσει του τύπου:

$$A = K - E = K - \frac{K\,v}{\Delta} \qquad (13)$$

Παράδειγμα 1°.

Ποια είναι η παρούσα αξία συν/κής, ονομαστικής αξίας 6.000 ευρώ, η οποία προεξοφλήθηκε (εξωτερικώς) 75 ημέρες πριν από τη λήξη της προς 12%; (Έτος εμπορικό).

ΛΥΣΗ

A = ; K = 6.000, v = 75, i = 0,12, Δ = 3.000

Οπότε: $A = K - \frac{K\,v}{\Delta} = 6.000 - \frac{6.000 \times 75}{3.000} = 5.850$ ευρώ.

β) **Με έξοδα.** Παριστάνουμε την προμήθεια με το **θ**, τα διάφορα έξοδα με το **ε** και το χαρτόσημο με το **x**. το χαρτόσημο υπολογίζεται εφάπαξ, η προμήθεια και τα έξοδα υπολογίζονται ως ποσοστό « επί τοις εκατό ή τοις χιλίοις» της ονομαστικής αξίας, δηλαδή:

Στα 100 ευρώ έχουμε **θ+ε**
Στα K ευρώ έχουμε x;

$$x = K \bullet \frac{\theta + \varepsilon}{100}$$

Στην προκειμένη περίπτωση, η παρούσα αξία μιας συν/κής θα βρεθεί αν από την ονομαστική αξία αφαιρέσουμε: το προεξόφλημα, την προμήθεια, τα διάφορα έξοδα και το νόμιμο χαρτόσημο. Συνεπώς, η παρούσα αξία θα υπολογισθεί βάσει του τύπου:

$$A = K - \frac{K\,v}{\Delta} - K \bullet \frac{\theta + \varepsilon}{100} - x \qquad (14)$$

Αν το πρόβλημα αναφέρει έτος υπολογισμού το πολιτικό, τότε θέτουμε όπου Δ = 365/i και ο τύπος (14) τροποποιείται ανάλογα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°.

Συναλλαγματική, ονομαστικής αξίας 20.600 ευρώ, προεξοφλείται 45 ημέρες πριν από τη λήξη της, εξωτερικώς, προς 8%. Η τράπεζα κράτησε: προμήθεια ¼ % κατά μήνα και για ολόκληρο μήνα, διάφορα έξοδα 2 ευρώ κατά χιλιάδα και για ολόκληρη χιλιάδα και 30 ευρώ για χαρτόσημο. Ποιο είναι το καθαρό ποσό που εισπράχθηκε;

ΛΥΣΗ

$K = 20.600$, $v = 45$ $i = 0,08$, $\Delta = 4.500$
$\theta = \frac{1}{4}\,\%\times 2$, $\varepsilon = 2‰$, $x = 30$, $A = ;$

εφαρμόζουμε τον τύπο (14) και έχουμε:

$$A = K - \frac{K\ v}{\Delta} - K \cdot \frac{\theta + \varepsilon}{100} - x$$

$$A = 20.600 - \frac{20.600 \times 45}{4.500} - \frac{20.600 \times 0,5}{100} - \frac{20.600 \times 2}{1000} - 30$$

$$= 20.600 - (206 + 103 + 42 + 30) = 20.219 \text{ ευρώ.}$$

Άρα Α= 20.219.

Β΄ Έσωτερικώς.

Ο τύπος στο εσωτερικό είναι:

$$A_1 = \frac{K\ \Delta}{\Delta + v} \qquad \textbf{(15)}$$

<u>**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°.**</u>

Γραμμάτιο, ονομαστικής αξίας 5304 ευρώ προεξοφλείται εσωτερικώς 73 ημέρες προτού λήξει προς 10%. Ποια είναι η παρούσα αξία; Έτος πολιτικό.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$K = 5304$, $v = 73$, $i = 0,10$, $A_1 = ;$

Αν από τον τύπο (15) θέσουμε όπου Δ=165/i τότε ο τύπος θα γίνει:

$$A_1 = \frac{365\ K}{365 + v + i}$$

Άρα: $$A_1 = \frac{365 \times 5304}{365 + 73 \times 0,10} = 5.200 \text{ ευρώ.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ
ΓΡΑΜΜΑΤΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ – ΚΟΙΝΗ ΚΑΙ ΜΕΣΗ ΛΗΞΗ.

6.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί.

Στις εμπορικές συναλλαγές συμβαίνει πολλές φορές, ο οφειλέτης ενός γραμματίου να ζητήσει από τον πιστωτή την αντικατάσταση δύο ή περισσοτέρων γραμματίων διαφόρων λήξεων με ένα **ενιαίο γραμμάτιο**, ή την αντικατάσταση ενός ενιαίου γραμματίου με δύο ή περισσότερα γραμμάτια, τα οποία να είναι οικονομικώς ισοδύναμα με το ενιαίο γραμμάτιο

Η αντικατάσταση των γραμματίων στηρίζεται στην **αρχή της οικονομικής ισοδυναμία** και πρέπει να γίνει χωρίς κέρδος ή ζημία του χρεώστη ή του πιστωτή.

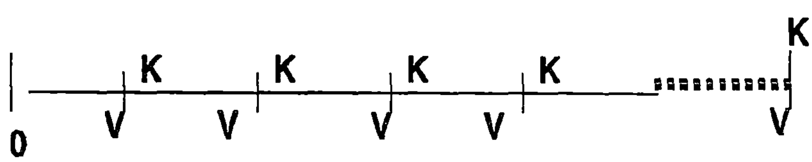
Η χρονική στιγμή κατά την οποία η παρούσα αξία του ενιαίου γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων, ονομάζεται **εποχή ισοδυναμίας.** Εποχή ισοδυναμίας μπορεί να είναι : α) η **ημέρα υπολογισμού**, δηλαδή η ημερομηνία που γίνεται η αντικατάσταση των γραμματίων, ή β) **η κοινή λήξη**, δηλαδή η ημερομηνία λήξεως του ενιαίου γραμματίου που αντικαθιστά τα άλλα γραμμάτια, ή γ) μια οποιαδήποτε ημερομηνία. Στην πράξη, ως εποχή ισοδυναμίας προτιμάται η κοινή λήξη, γιατί παρέχει ευκολία στους υπολογισμούς.

Παρούσα αξία του K= Παρ. αξία του K_1+Παρ. αξία του K_2+Παρ. αξία του K_3+...+Παρ. αξία του K_μ.

Εύρεση της ονομαστικής αξίας του ενιαίου γραμματίου.

6.2 Υποθέτουμε ότι γραμμάτια $K_1, K_2, K_3, \ldots K_\mu$, τα οποία λήγουν αντιστοίχως μετά $v_1, v_2, v_3, \ldots v_\mu$ ημέρες από σήμερα (=0), θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε με ένα ενιαίο γραμμάτιο (=K), το οποίο να λήγει μετά v ημέρες από σήμερα, με επιτόκιο i. Ποια πρέπει να είναι η ονομαστική αξία του K, ώστε να υπάρχει οικονομική ισοδυναμία; Εποχή ισοδυναμίας: α) η ημέρα υπολογισμού, β) η κοινή λήξη και γ) η τυχούσα ημέρα ρ.

Α΄ Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού:



Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία κατά τη χρονική στιγμή 0 (ημέρα υπολογισμού) πρέπει να είναι:

$$K - \frac{K\,v}{\Delta} = K_1 - \frac{K\ \ v}{\Delta} + K_2 - \frac{K\ \ v}{\Delta} + \ldots + K_\mu - \frac{K\ \ v}{\Delta} \quad (16)$$

Λύνοντας ως προς K βρίσκουμε:

$$K = \frac{\Delta(K + K + \ldots + K\mu)}{\Delta - v} - \frac{K v + K v + \ldots + K\mu\, v\mu}{\Delta - v} \quad (16\alpha)$$

Παρατηρήσεις.

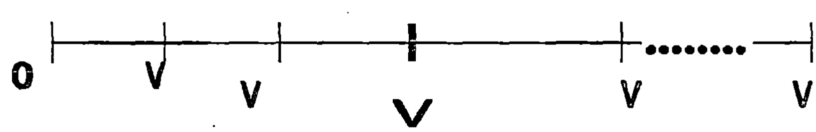
1) Αν η κοινή λήξη (=v) είναι μικρότερη από τις λήξεις των αντικαθισταμένων γραμματίων, τότε η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου (=K) θα είναι μικρότερη από το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων, δηλαδή: αν $v <, v_1, v_2, v_3, \ldots$ τότε: $K < K_1+K_2+K_3 + \ldots$.

2) Αν η κοινή λήξη είναι μεγαλύτερη από όλες τις άλλες λήξεις, τότε $K > K_1 + K_2 + K_3 + \ldots$.

3) Αν η κοινή λήξη βρίσκεται ανάμεσα στις λήξης των άλλων γραμματίων, τότε το K μπορεί να είναι μεγαλύτερο, ίσο ή και μικρότερο από το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθισταμένων γραμματίων.

4) Αν ανάμεσα στα γραμμάτια υπάρχουν μετρητά ή επιταγές, τότε η λήξη τους συμπίπτει με την ημέρα υπολογισμού.

Β΄ Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη:



Για να πραγματοποιηθεί οικονομική ισοδυναμία κατά τη χρονική στιγμή v (=κοινή λήξη) που λήγει το K, πρέπει πάλι η παρούσα αξία του K να ισούται με το άθροισμα των παρουσών αξιών των $K_1, K_2, K_3, \ldots K_\mu$. Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι η παρούσα αξία του K την ημέρα της λήξεως του ισούται με την ονομαστική του αξία.

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση θα είναι:

$$K = K1 - \frac{K\,(v - v)}{\Delta} + K2 - \frac{K\,(v - v)}{\Delta} + K\mu - \frac{K\mu\,(v\mu - v)}{\Delta} \quad (17)$$

Παρατήρηση.

Οι διαφορές $(v_1 - v_2)$, $(v_2 - v)$, κλπ. Λογίζονται αλγεβρικώς. Συνεπώς, αν ένα από τα $K_1.K_2\ldots$ βρίσκεται πριν από την κοινή λήξη (=v) και μεταφερθεί στην κοινή λήξη, πρέπει να αυξηθεί η ονομαστική του αξία κατά τον τόκο των ημερών που μεσολαβούν από τη λήξη του ως την κοινή λήξη. Αν όμως ένα από τα $K_1, K_2, \ldots$ βρίσκεται μετά την κοινή λήξη, τότε πρέπει να ελαττωθεί η ονομαστική του αξία κατά τον τόκο των ημερών που μεσολαβούν από την κοινή λήξη ως την ημέρα λήξεως του γραμματίου.

Γ΄ Εποχή ισοδυναμίας η τυχούσα ημέρα ρ:

Η εξίσωση ισοδυναμίας κατά τη χρονική στιγμή (ημέρα) ρ θα είναι:

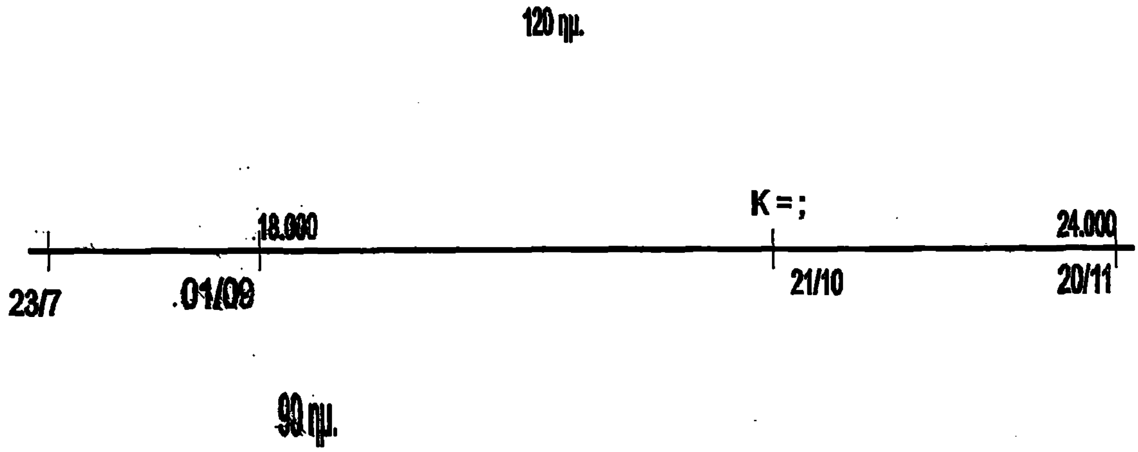
$$K - \frac{K(\nu - \rho)}{\Delta + (\nu - \rho)} = K1 - \frac{K(\nu - \rho)}{\Delta + (\nu - \rho)} + \ldots + K\mu - \frac{K\mu(\nu\mu - \rho)}{\Delta} \quad (18)$$

<u>**Παράδειγμα 1°.**</u>

Έστω ότι έχουμε το γραμμάτιο 18.000 ευρώ και 24.000 ευρώ τα οποία λήγουν αντιστοίχως της 1η Σεπτεμβρίου και την 20η Νοεμβρίου, και θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε στις 23 Ιουλίου με ένα γραμμάτιο που να λήγει την 21η Οκτωβρίου. Ποια είναι η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 6%, το έτος μεικτό και η εποχή ισοδυναμίας:
1) η ημέρα υπολογισμού, 2) η κοινή λήξη και 3) η 21η Σεπτεμβρίου.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ι. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού:



$K_1=18.000$	$K=;$	$K_2= 24.000$	$i=0,06$
$v_1= 40$	$v=90$	$v_2 = 120$	$\Delta= 6.000$

Θα αντικαταστήσουμε τον τύπο:

$$K - \frac{Kv}{\Delta} = K1 - \frac{K\ v}{\Delta} + K2 - \frac{K\ v}{\Delta}$$

$$K- \frac{K\times 90}{6000} = 18.000- \frac{18.000\times 40}{6000} + 24.000 - \frac{24.000\times 120}{6000}$$

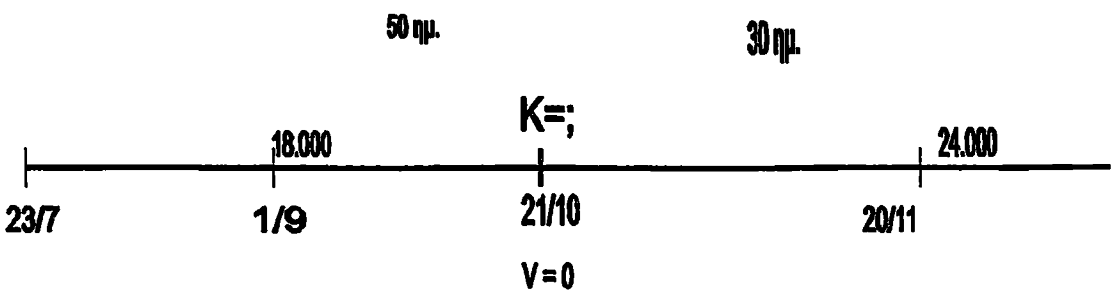
$$K- \frac{K\times 3\times 30}{30\times 200} = 18.000 - \frac{3\times 6000\times 40}{6000} + 24.000 - \frac{4\times 6000\times 120}{6000}$$

$$K- \frac{3K}{200} = 18.000 - 120 + 24.000 - 480=41.400$$

$200K - 3K = 41.400 \times 200$
$197K = 8.280.000$

Ώστε: η ονομαστική αξία του γραμματίου που λήγει την 21η Οκτωμβρίου και αντικατάστησε τα δύο γραμμάτια είναι 42.030,46.

II. Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη:



$K1=18.000$	$K = ;$	$K2 = 24.000$	$i = 0,06$
$v1 = 50$	$v = 0$	$v2 = 30$	$\Delta = 6.000.$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στην εξίσωση:

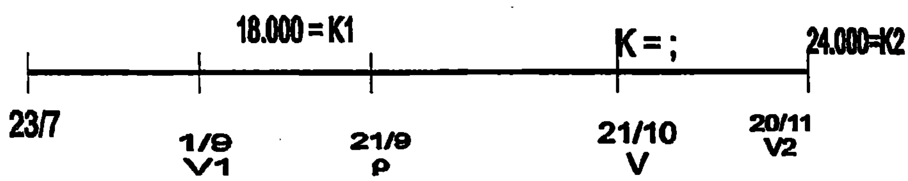
$$K - \frac{K\nu}{\Delta} = K_1 + \frac{K(\nu - \nu)}{\Delta} + K_2 - \frac{K(\nu - \nu)}{\Delta}$$

$$K - \frac{K \times 0}{\Delta} = 18.000 + \frac{18.000 \times 50}{6000} + 24.000 - \frac{4 \times 6000 \times 30}{6000}$$

$$K = 18.000 + \frac{3 \times 6000 \times 50}{6000} + 24.000 - \frac{4 \times 6000 \times 30}{6000}$$

$$K = 18.000 + 150 + 24.000 - 120 \Rightarrow K = 42.030$$

III. Εποχή ισοδυναμίας η $21^{η}$ Σεπτεμβρίου:



Για αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών παίρνουμε την $23^{η}$ Ιουλίου οπότε:

$\nu_1 = 40$ $\rho = 60$ $\nu = 90$ $\nu_2 = 120$

Θα εφαρμόσουμε την παρακάτω εξίσωσηοικονομικής ισοδυναμίας:

$$K - \frac{K(\nu-\rho)}{\Delta} = K_1 - \frac{K(\nu - \rho)}{\Delta} + K_2 - \frac{K(\nu - \rho)}{\Delta}.$$

$$K - \frac{K(90-60)}{6000} = 18.000 - \frac{18.000(40-60)}{6000} + 24.000 - \frac{24.000(120-60)}{6000}$$

$$K - \frac{K \times 30}{6000} = 18.000 + \frac{18.000 \times 20}{6000} + 24.000 - \frac{24.000 \times 60}{6000}$$

Άρα : **K= 42.030,15**

Παρατήρηση.

Για αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών πήραμε, στις περιπτώσεις I και III, την 23η Ιουλίου. Αυτή πρέπει να είναι γνωστή σε κάθε πρόβλημα, αν εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού. Αν όμως εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη, τότε ως αφετηρία υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών παίρνουμε την κοινή λήξη, γιατί μας παρέχει ευκολία στους υπολογισμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ Ή ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Θεμελιώδης ορισμοί.

Έχουμε δύο είδη τόκων:

α) Τον **απλό τόκο**, κατά τον οποίο ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, εισπράττεται από τον πιστωτή και ο τόκος υπολογίζεται πάντοτε πάνω στο αρχικό κεφάλαιο, το οποίο παραμένει το ίδιο σε όλες σε όλες τις χρονικές περιόδους του τοκισμού.

β) Το **σύνθετο τόκο ή ανατοκισμό,** κατά τον οποίο ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, προστίθεται στο τοκιζόμενο κεφάλαιο και παράγει και αυτός τόκο από την επόμενη χρονική περίοδο. Δηλαδή, έχουμε **κεφαλαιοποίηση** του τόκου, γι' αυτό και ο ανατοκισμός ονομάζεται και **σύνθετη κεφαλαιοποίηση.**

Η περίοδος του ανατοκισμού μπορεί να είναι το έτος ή το εξάμηνο ή το τρίμηνο ή και ο μήνας και λέμε ότι ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έτος, κάθε εξάμηνο, κλπ.

Αν ένα κεφάλαιο ανατοκίζεται κατά τις χρονικές περιόδους 1,2,3...,**n**, τότε το κεφάλαιο που αντιστοιχεί στην περίοδο 0 ονομάζεται **αρχικό κεφάλαιο** ή **αρχική αξία** αυτού και θα το συμβολίζουμε με το K_o, ενώ το κεφάλαιο που θα έχει σχηματισθεί στο τέλος της **n** περιόδου (δηλ. το αρχικό κεφάλαιο συν οι τόκοι που έχουν παραχθεί) ονομάζεται **τελικό κεφάλαιο** ή **τελικη αξία κεφαλαίου** ή **ύψος κεφαλαίου** και θα το συμβολίζουμε με το K_n.

Στον ανατοκισμό το αρχικό κεφάλαιο στο τέλος της 1ης περιόδου θα αυξηθεί κατά τον τόκο του, ποότε στη 2η περίοδο θα τοκισθεί το αρχικό κεφάλαιο και ο τόκος της 1ης περιόδου. Στην 3η περίοδο θα τοκισθεί το αρχικό κεφάλαιο αυξημένο κατά τους τόκους της 1ης και της 2ης περιόδου, κ.ο.κ. Συνεπώς, είναι δυνατό από ένα μικρό κεφάλαιο, το οποίο θα ανατοκισθεί για πολλά χρόνια, να παραχθεί ένα τεράστιο τελικό κεφάλαιο. Αν π.χ. ανατοκίσουμε 1 ευρώ για 1000 χρόνια, τότε θα παρχθεί τελικό κεφάλαιο, το οποίο αποτελείται από δεκαοκταψήφιο αριθμό, δηλ. ποσό που υπερβαίνει το ύψος των κεφαλαίων που υπάρχουν σε όλη τη Γη. Γι' αυτό το λόγο α ανατοκισμός απαγορεύθηκε διεθνώς με ειδικούς νόμους από την εποχή του Ιουστιανού (527 565 μ.χ).

Στην Ελλάδα ο ανατοκισμός απαγορεύθηκε με το Νόμο του 1882 και επιτρέπεται μόνο σε μερικές περιπτώσεις. Π.χ στο Ταχυδρομικό Ταμιευτήριο και στα ταμιευτήρια των τραπεζών επιτρέπεται να ανατοκίζονται οι καταθέσεις, ώσπου να φθάσουν σε ορισμένο ποσό, το οποίο καθορίζεται από το πιστωτικό ίδρυμα. Αυτό αποτελεί ένα κίνητρο για να αποταμιεύει το κοινό τις οικονομίες του και να ωφελελίται η εθνική οικονομία.

Εύρεση της τελικής αξίας ενός κεφαλαίου τοκισμένου με ανατοκισμό. Γενικός τύπος ανατοκισμού.

Στα προβλήματα του ανατοκισμού συμπλέκονται ποσά:

1) το **αρχικό κεφάλαιο (=K_o)**, το οποίο αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή 0,
2) το **τελικό κεφάλαιο** ή **τελική αξία (=K_n)**, του κεφαλαίου που θα έχει σχηματισθεί στο τέλος της **n** περιόδου.
3) Το **επιτόκιο (=i)**, το οποίο θεωρείται σταθερό σε όλη τη διάρκεια του ανατοκισμού και
4) ο **χρόνος**, ο οποίος συμβολίζεται: με το **n** αν εκφράζεται σε ακέραιες περιόδους (έτη, εξάμηνα, τρίμηνα) και με το μ/ρ αν εκφράζεται σ κλάσμα της ακεραίας περιόδου.

Ι. Ευρεση του K_n όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ακέραιες περιόδους .

Είπαμε ότι: Σύνθετο τόκο έχουμε όταν ο παραγόμενος τόκος, στο τέλος κάθε περιόδου προστίθεται στο τοκιζόμενο καιφάλαιο και παράγει και αυτός τόκο από την επόμενη χρονική περίοδο, ώστε να λήξει το δάνειο.

Στηριζόμενοι στον παραπάνω ορισμό, ο τύπος του ανατοκισμού προκύπτει ως εξής:

Στο τέλος της $1^{ης}$ περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_1=K_o+K_o \cdot i = K_o (1 + i)$$

Στο τέλος της $2^{ης}$ περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_2=K_1+K_1 \cdot i = K_1 (1 + i)$$

Στο τέλος της $3^{ης}$ περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$K_3=K_2+K_2 \cdot i = K_2 (1 + i)$$

....

....

....

Στο τέλος της ηης περιόδου έχουμε τελικό κεφάλαιο:

$$Kn=Kn\text{-}1+Kn\text{-}1 \cdot i = Kn\text{-}1 (1 + i)$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα κατά μέλη τις πιο ισότητες και έχουμε:

$$K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot Kn = K_o (1 + i)\, K_1 (1 + i)\, K_2 (1 + i)\, Kn\text{-}1 (1 + i)$$
$$= K_o K_1 K_2 \ldots Kn\text{-}1[(1 + i)(1 + i)(1 + i)\ldots(1 + i)]$$

Δηλαδή:

$$K_1 K_2 K_3 \ldots Kn\text{-}1\ Kn = Ko\, K_1 K_2 K_3 \ldots Kn\text{-}1\ (1 + i)^n$$

Και

$$\mathbf{Kn = Ko\,(1 + i)^n \quad (20)}$$

Παρατήρηση $1^η$.

Ο τύπος (20) αποτελεί το γενικό τύπο του ανατοκισμού και βάσει αυτού λύνονται όλα τα προβλήματα του σύνθετου τόκου. Το διώνυμο **$(1 + i)^n$** ονομάζεται **συντελεστής κεφαλαιοποήσεως** ή **ανατοκισμού** και το βρίσκουμε σε ειδικούς πίνακες για διάφορα επιτόκια και χρόνου. Ο τύπος (20) προϋποθέτει ότι το επιτόκιο παραμένει το ίδιο σε όλη τη διάρκεια του ανατοκισμού.

Παρατήρηση $2^η$.

Το **$(1 + i)^n$** είναι η τελική αξία 1 νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί **n** ακέραιες χρονικές περιόδους. Επειδή το **$(1 + i)^n$** είναι δύναμη, όταν αυξάνετι το i ή το **n**, το **$(1 + i)^n$** δεν αυξάνει ανάλογα προς τα i και **n,** αλλά είναι ανάλογο προς το αρχικόκεφάλαιο (=Ko). Πρέπει επίσης να έχουμε υπόψη μας ότι η περίοδος που αναφέρεται το επιτόκιο πρέπει να ταυτίζεται με την περίοδο του ανατοκισμου.

Παράδειγμα1ο.

Κεφάλαιο 200.000 ευρώ ανατοκίζεται κάθε έτος προς 6%. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί στο ταμιευτήριο στο τέλος των 10 ετών;

ΛΥΣΗ

Ko = 20.000 , n =10, i = 0,06, Kn = ;

$$Kn = Ko\,(1 + i)^n \Longrightarrow Kn = 200.000\,(1 + 0,06)^{10} \quad (\alpha)$$

Την τιμή $(1,06)^{10}$ την βρίσκουμε στου Πίνακες Ανατοκισμού – Ραντών – Χρεωλυσίων ως εξής:Στην πρώτη γραμμή του Πίνακα I εντοπίζουμε πρώτα το επιτόκιο 6% και στην πρώτη στήλη (=n) βρίσκουμε τον αριθμό 10. Στη διασταύρωση τώρα της γραμμής n=10 και της στήλης 0,06 βρίσκουμε τον αριθμό 1,7908 4770, ο οποίος αποτελεί το εξαγόμενο της δυνάμεως $(1,06)^{10}$ =1,7908 4770

Αντικαθιστώντας τώρα το $(1,06)^{10}$ με τον αριθμό 1,79085 στην (α) βρίσκουμε το Kn:

$$Kn = 200.000 \times 1,79085 \Longrightarrow Kn = 358.170$$

Ώστε στο τέλος των 10 ετών θα έχει σχηματισθεί το ποσό των 358.170 ευρώ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΟΟ

ΡΑΝΤΕΣ

8.1 Ορισμοί, κατάταξη και σύμβολα ραντών.

Ορισμοί. Στις τράπεζες και γενικά στις οικονομικοεμπορικές συναλλαγές, συνηθίζεται παρά πολύ η εξόφληση ενός δανείου με δόσεις, οι οποίες καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα, ή ο σχηματισμός ενός κεφαλαίου με καταθέσεις που γίνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα (κάθε μήνα, κάθε εξάμηνο, κ.ο.κ.

Μια σειρά δόσεων για την εξόφληση ενός χρέους, ή οι διάφορες περιοδικές καταθέσεις για το σχηματισμό ενός κεφαλαίου, ονομάζεται ειδικότερα **Ράντα.** [Η λέξη Ράντα προέρχεται από τη λατινική λέξη Reddita.

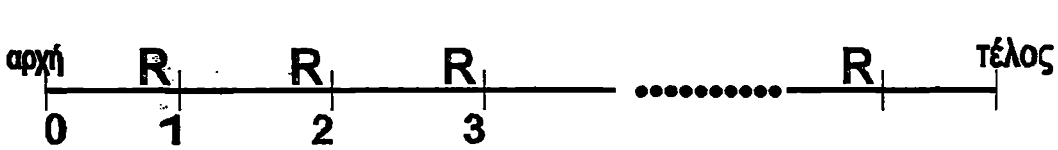
Ώστε :

Ράντα καλείται σειρά κεφαλαίων, τα οποία καταβάλλονται ή καταθέτονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Κάθε χρηματικό ποσό που καταβάλλεται ή καταθέτεται στα ίσα χρονικά διαστήματα λέγεται **όρο** ή **δόση** της ράντας. Η χρονική στιγμή της πληρωμής ή καταθέσεως της δόσης καλείται λήξη. Ο χρόνος ο οποίος περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών λήξεων λέγεται περίοδος της ράντας. Αν ο όρος μιας ράντας καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου, τότε η ράντα λέγεται ληξιπρόθεσμη, ενώ αν ο όρος της ράντας καταβάλλεται στην αρχή κάθε περιόδου, τότε η ράντα λέγεται προκαταβλητέα.

Γι α την καλύτερη κατανόηση των πιο πάνω ορισμών, παραθέτουμε τα επόμενα σχήματα:

Ληξιπρόθεσμη ράντα.



R = όρος της ράντας, 0, 1, 2, 3......,n = περιόδοι ράντας.

Προκαταβλητέα ράντα

αρχή R R R .... R τέλος

Αρχή ράντας λέγεται : στις ληξιπρόθεσμες ράντες, μια περίοδος πριν από την κατάθεση του πρώτου όρου, ενώ στις προκαταβλητέες ράντες η περίοδος καταθέσεως του πρώτου όρου, ενώ στις προκαταβλητέες ράντες η περίοδος καταθέσεως του πρώτου όρου.

Τέλος ράντας είναι : στις ληξιπρόθεσμες ράντες, η περίοδος καταθέσεως του τελευταίου όρου της ράντας, ενώ στις προκαταβλητέες ράντες, μια περίοδος μετά την κατάθεση του τελευταίου όρου της ράντας.

Εποχή υπολογισμού λέγεται η χρονική στιγμή κατά την οποία ζητείται ο υπολογισμός της αξίας των όρων μιας ράντας.

Αρχική ή παρούσα αξία ράντας λέγεται η αξία των όρων μιας ράντας στην αρχή της.

Τελική αξία ράντας λέγεται των όρων μιας ράντας στο τέλος της.

Κατάταξη ραντών. Οι ράντες κατατάσονται:

α) **ανάλογα με τον όρο:**

1. Σε **σταθερές**, όταν όλοι οι όροι της ράντας είναι ίσοι και
2. Σε **μεταβλητές**, όταν οι όροι της ράντας δεν είναι ίσοι.

β) Ανάλογα με τη διάρκεια:

1. Σε **πρόσκαιρες,** όταν το πλήθος των όρων της ράντας είναι ορισμένο,
2. Σε διηνεκείς, όταν το πλήθος των όρων της ράντας είναι άπειρο και
3. Σε **ράντες ζωής**, όταν το πλήθος των όρων μιας ράντας εξαρτάται από τη ζωή ενός ατόμου.

γ) Ανάλογα με την εποχή υπολογισμού:

1. Σε **άμεσες**, όταν η εποχή υπολογισμού της ράντας ταυτίζεται με την αρχή ή τέλος της ράντας.
2. Σε **αρξάμενες,** όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται μετά την αρχή της ράντας και
3. Σε **μέλλουσες,** όταν η εποχή υπολογισμού βρίσκεται πριν από την αρχή της ράντας.

δ) Ανάλογα με το χρόνο πληρωμής των όρων:

1. Σε **ληξιπρόθεσμες** και
2. **Σε προκαταβλητέες**.

ε) Ανάλογα με την περίοδο:

1. Σε ακέραιες και
2. Σε **κλασματικές**. Αν ο όρος μιας ράντας είναι ετήσιος, εξαμηνιαίος, κλπ. και ο ανατοκισμός γίνεται κάθε έτος ή κάθε εξάμηνο, κλπ. τότε η ράντα λέγεται **ακεραία.** Αν όμως ο κάθε όρος μιας ακέραιας ράντας διαιρείται σε ρ ίσους όρους και η ακεραία περίοδος του ανατοκισμού διαιρείται σε κλασματικές περιόδους, τότε η ράντα λέγεται **κλασματική.**

ΣΥΜΒΟΛΑ ΡΑΝΤΩΝ.

Κατά την λύση των διαφόρων προβλημάτων των ραντών χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα:

R = Όρος ή δόση μιας σταθερής ράντας.

$\alpha_{\urcorner}$ = Αρχική αξία **ληξιπρόθεσμης** ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας με επιτόκιο i .

$a_{\urcorner}$ = Αρχική αξία **προκαταβλητέας** ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας με επιτόκιο i .

$S_{\urcorner}$ = Τελική αξία **ληξιπρόθεσμης** ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας με επιτόκιο i .

$\varsigma_{\urcorner}$ = Τελική αξία **προκαταβλητέας** ράντας, n όρων 1 νομισματικής μονάδας με επιτόκιο i .

V αρχ. = Αρχική αξία ράντας n όρων, R νομισμ μονάδων.

V τελ. = Τελική αξία ράντας n| όρων, R νομισμ. μονάδων.

8.2 Ευρεση της αρχικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας.

Ο τύπος για την ληξιπρόθεσμη ράντα είναι:

$$V_{αρχ.} = R\,\alpha_{\rceil} \qquad (21)$$

<u>Παράδειγμα 1°.</u>

Ένα ίδρυμα θέλει να χορηγεί κάθε χρόνο μια υποτροφία 30.000 και επί 10 χρόνια. Η πρώτη υποτροφία θα δοθεί μετά ένα χρόνο. Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα σε μια τράπεζα, με ανατοκισμό προς 4% για να μπορεί να δίνει τις 30.000 ευρώ στο τέλος κάθε χρόνου για την υποτροφία;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα αντιστοιχεί με την αρχική (παρούσα) αξία ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων που ο κάθε όρος αποτελείται από 30.000 ευρώ. Δηλαδή : R = 30.000, n =10, i = 0,04

Αν αντικαταστήσουμε τα δεδομένα στον τύπο (21) θα βρούμε:

$V_{αρχ.} = 30.000\,\alpha_{\rceil} = 30.000 \times 8,110896 = 243.326,88$ ευρώ.

Ώστε : το ίδρυμα πρέπει να καταθέσει σήμερα 243.326,88 ευρώ, για να μπορεί να αποσύρει κάθε χρόνο 30.000 ευρώ για την υποτροφία.

8.3 Εύρεση της αρχικής αξίας προκαταβλητέας ράντας.

Ο τύπος για την εύρεση της αξίας της προκαταβλητέας ράντας είναι:

$$V_{αρχ} = R\, \alpha_{\rceil}\, (1+i) \qquad (22)$$

<u>Παράδειγμα 1°.</u>

Να βρεθεί η αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας ετήσιου όρου 10.000 ευρώ, διάρκειας 20 ετών, προς ετήσιο επιτόκιο 6%.

<u>ΛΥΣΗ</u>

| 10.000 | 10.000 | 10.000 | 10.000 ●●●●●●●●●●●●●●●●● | 10.000

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (22) και έχουμε:

$$V_{αρχ} = R\, \alpha_{\rceil}\, (1+i)$$

$$= 10.000\, \alpha_{\rceil}\, (1{,}06)$$

Στον πίνακα IV, με i =0,06 και n =20, βρίσκουμε $\alpha_{\rceil}$ = 11,46992
Με αντικατάσταση τώρα θα έχουμε:

$$V_{αρχ} = 10.000 \times 11{,}46992 \times 1{,}06 = 121.581{,}15$$

Άρα, πρέπει να καταθέσουμε σήμερα 121.581,15 σε ένα ταμιευτήριο, για να μπορούμε να αποσύρουμε στην αρχή κάθε χρόνου 10.000 και επί 20 χρόνια.

8.4 Εύρεση της τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας.

Ο τύπος για την εύρεση της αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι :

$$V_{\text{τελ.}} = R \cdot S_{\rceil} \qquad (23)$$

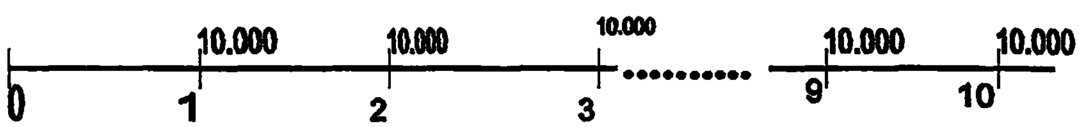
<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°.</u>

Ο εισοδηματίας Ε καταθέτει στο τέλος κάθε έτους 10.000 ευρώ, με ανατοκισμό, με ετήσιο επιτόκιο 6% και αυτό γίνεται επί 10 έτη. Τι ποσό θα έχει σχηματισθεί στο λ/σμό του Ε στο τέλος των 10 ετών;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το ποσό που θα έχει συσσωρευθεί στο λογαριασμό του Ε στο τέλος των 10 ετών, ισοδυναμεί με την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας με τα εξής στοιχεία:

$R = 10.000$, $i = 0{,}06$, $n = 10$



Η τελική αξία της εξεταζόμενης ράντας θα υπολογισθεί βάσει του τύπου:

$$V_{\text{τελ.}} = R \cdot S_{\rceil} \Rightarrow = 10.000 \cdot S_{\rceil}$$

Στον Πίνακα V, με $i = 0{,}06$, και $n = 10$, βρίσκουμε: $S_{\rceil} = 13{,}18079$

Άρα :

$V_{\text{τελ.}} = 10.00 \times 13{,}18079 = 131.807{,}90$

Επομένως, στο τέλος του 10 ου έτους ο λογαριασμός του Ε θα εμφανίζει 131.807,90 ευρώ.

8.5 Εύρεση της τελικής αξίας προκαταβλητέας ράντας.

Ο τύπος για την εύρεση της τελικής αξίας προκαταβλητέας ράντας είναι:

$$V_{\tau\varepsilon\lambda.} = ς_{\rceil}\ R = R \bullet s_{\rceil}\ (1+i) \qquad (24)$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°.</u>

Ο έμπορος Ε καταθέτει σε μια τράπεζα στην αρχή κάθε εξάμηνου 10.000 ευρώ, με εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%. Να βρεθεί το ποσό που θα έχει συσσωρευθεί στο λογαριασμό του Ε μετά 8 έτη και 6 μήνες από τότε που έγινε η πρώτη κατάθεση.

<u>ΛΥΣΗ</u>

R = 10.000, n = 8 x 2 + 1 = 17 εξάμηνα, i = 0,04

Το ποσό που θα έχει σχηματισθεί στο τέλος του 17^{ου} εξαμήνου αποτελεί την τελική αξία προκαταβλητέας ράντας.

$$V_{\tau\varepsilon\lambda.} = ς_{\rceil}\ R = R \bullet s_{\rceil}\ (1+i)$$

$$= 10.000 \times S_{\rceil}\ (1,04)$$
$$= 10.000 \times 23,69571 \times 1,04$$
$$= 246.435,40 \text{ ευρώ.}$$

8.6 Εύρεση του όρου μίας ράντας.

$$R = \frac{V_{\tau\varepsilon\lambda}}{S} \qquad (25)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°

Οφείλει κάποιος 100.000 ευρώ μετά 10 έτη. Τι ποσό πρέπει να πληρώνει στο τέλος κάθε έτους, για να εξοφλήσει το χρέος του, αν το ετήσιο επιτόκιο του ανατοκισμού είναι 4%;

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για ληξιπρόθεσμη ράντα με γνωστά στοιχεία :

Vτελ. = 100.00, n = 10, i = 0,04 και άγνωστο τον όρο, τον οποίο θα υπολογίσουμε με τον τύπο:

$$R = \frac{100.000}{S} = \frac{100.000}{12{,}006107} \quad 8329.$$

Άρα, πρέπει να πληρώνει 8329 ευρώ στο τέλος κάθε έτους και επί 10 έτη, για να εξοφλήσει το χρέος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΔΑΝΕΙΑ ΕΝΙΑΙΑ

βασικές έννοιες και διάκριση δανείων.

Οι διάφοροι οικονομικοί οργανισμοί οικονομικοί, για να καλύψουν τις έκτακτες (ή και τακτικές) δαπάνες τους όταν τα έσοδα τους δεν επαρκούν, συνάπτουν **δάνεια.**

Ο χρόνος που μεσολαβεί από την ημέρα που συνάπτεται το δάνειο ως την ημέρα που πού εξοφλείται λέγεται **διάρκεια του δανείου.**

Τα δάνεια, ανάλογα με τη διάρκεια τους, διακρίνονται σε βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα.

Βραχυπρόθεσμα λέγονται τα δάνεια που διαρκούν τρεις μήνες ή το πολύ ένα έτος. Τα βραχυπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται μεταξύ ιδιωτών και επιχειρήσεων ή μεταξύ επιχειρήσεων και γίνονται με συναλλαγματικές.

Στα βραχυπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο απλός τόκος.

Μακροπρόθεσμα δάνεια που διαρκούν πολλά έτη. Τα μακροπρόθεσμα δάνεια συνάπτονται από μεγάλους οικονομικούς οργανισμός για να καλύψουν συνήθως έκτακτες δαπάνες : κατασκεύη δημόσιων έργων, προμήθεια πολεμικού υλικού, επέκταση εγκαταστάσεων στις δημόσιες και ιδιωτικές επιχειρήσεων. Στα μακροπρόθεσμα δάνεια εφαρμόζεται ο ανατοκισμός. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα μακροπρόθεσμα δάνεια.

Εξόφληση ενός δανείου είναι η επιστροφή του δανεισμένου κεφαλαίου και η πληρωμή των τόκων που έχουν παραχθεί κατά τη διάρκεια του δανείου. Το σύνολο των μαθηματικών πράξεων που γίνονται για την εξόφληση ενός δανείου, ονομάζεται απόσβεση του δανείου. [Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση του λογιστικού όρου **απόσβεση** των στοιχείων του παγίου ενεργητικού, με τον όρο **απόσβεση δανείου**, ο οποίος σημαίνει την εξασφάλιση ενός δανείου με περιοδικές δόσεις. Πιο σωστή όροι είναι οι λέξεις: **χρεωλυσία** και **χρεωλύσιο**.

Τα δάνεια ανάλογα με το πλήθος των δανειστών , διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες :

I. **Δάνεια ενιαία**, όταν ο δανειστής είναι ένα και μόνο πρόσωπο.

II. **Ομολογιακά δάνεια**, όταν οι δανειστές είναι πολλά πρόσωπα. Τα ομολογιακά δάνεια εκδίδονται από το Κράτος και τους μεγάλους οικονομικούς οργανισμούς (ΔΕΗ, ΟΤΕ κλπ.). Επειδή τα ομολογιακά δάνεια αντιπροσωπεύουν πολύ μεγάλα κεφάλαια, τα οποία δεν μπορούν να διαθέτουν από ένα και μόνο πρόσωπο , γι' αυτό το λόγο, το δάνειο (κεφάλαιο) διαιρείται σε τμήματα μικρών ποσών, τα οποία αντιπροσωπεύουν πιστωτικούς τίτλους που ονομάζονται **ομολογίες.** Η διάθεση των ομολογιών στο κοινό γίνεται μέσο των Τραπεζών και του Ταχυδρομικού Ταμιευτηρίου.

Τα ενιαία δάνεια, ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται, διακρίνονται σε πάγια και εξοφλητέα.

Α΄. Πάγια λέγονται τα δάνεια εκείνα, στα οποία δεν υπάρχει χρόνος εξοφλήσεως, αλλά ο οφειλέτης έχει το δικαίωμα να εξοφλήσει οποτεδήποτε το δάνειο είναι όμως υποχρεωμένος να πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε περιόδου (έτος , εξάμηνο, κλπ.). Πάγια δάνεια συνάπτουν συνήθως : οι Κοινότητες, οι Δήμοι κ.ά.

Β΄. Εξοφλητέα λέγονται τα δάνεια εκείνα, στα οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να εξοφλήσει σε προκαθορισμένο χρόνο.

Τα εξοφλητέα δάνεια, ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται, διακρίνονται σε :

α) Εξοφλητέα εφάπαξ, όταν ολόκληρο το δάνειο εξοφλείται με μια πληρωμή.

β) Εξοφλητέα τοκοχρεωλυτικώς, όταν η εξόφληση του δανείου γίνεται με δόσεις.

Στα εξοφλητέα εφάπαξ δάνεια μπορούν να συμβούν τα εξής :

1) Ο οφειλέτης, κατά τη διάρκεια του δανείου, να πληρώνει τους τόκους και κατά τη λήξη του δανείου να επιστρέψει το κεφάλαιο, που δανείσθηκε.
2) Ο οφειλέτης, κατά τη λήξη του δανείου, να πληρώσει και τους τόκους και το κεφάλαιο που δανείσθηκε.
3) Ο οφειλέτης επειδή είναι δύσκολο να εξοικονομήσει ολόκληρο το οφειλόμενο ποσό κατά τη λήξη του δανείου καταθέτει σε μια τράπεζα χρηματικό ποσό με ανατοκισμό, ώστε τα ποσά αυτά μαζί με τους τόκους τους να αναστήσουν το οφειλόμενο ποσό κατά τη λήξη του δανείου. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο οφειλέτης σχηματίζει **εξοφλητικό απόθεμα.**

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΟΣΚΟΓΛΟΥ ΜΙΧΑΛΗ : "Μαθηματικά για τον Τομέα Διοίκησης και Οιοκονομίας " , εκδόσεις Σταμούλη , Αθήνα 1996.

ΘΕΟΔΩΡΟΥ Η. ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΥ : " Οικονομικά μαθηματικά " , εκδόσεις Ευγενίδου , Αθήνα 1995.

ΞΕΠΑΠΑΔΕΑΣ ΑΝ.: " Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά Τομ. II ", εκδόσεις Ηβος , Αθηνα 1997.

ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ Δ. : "Οικονομικά μαθηματικά " , εκδόσεις Σταμούλη , Αθήνα 1993.

ΠΙΝΑΚΑΣ I. $(1 + i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	8%	8,5%	9%	9,5%	10%	10,5%
	0.0800	0.0850	0.0900	0.0950	0.1000	0.1050
1	1.0800000	1.0850000	1.0900000	1.0950000	1.1000000	1.1050000
2	1.1664000	1.1772250	1.1881000	1.1990250	1.2100000	1.2210250
3	1.2597120	1.2772891	1.2950290	1.3129324	1.3310000	1.3492326
4	1.3604890	1.3858587	1.4115816	1.4376609	1.4641000	1.4909020
5	1.4693281	1.5036567	1.5386239	1.5742387	1.6105100	1.6474467
6	1.5868743	1.6314675	1.6771001	1.7237914	1.7715610	1.8204287
7	1.7138242	1.7701422	1.8280391	1.8875516	1.9487171	2.0115737
8	1.8509302	1.9206043	1.9925626	2.0668690	2.1435888	2.2227869
9	1.9990046	2.0838557	2.1718932	2.2632215	2.3579476	2.4561817
10	2.1589250	2.2609834	2.3673636	2.4782276	2.5937424	2.7140808
11	2.3316390	2.4531670	2.5804264	2.7136592	2.8531166	2.9990593
12	2.5181701	2.6616862	2.8126647	2.9714568	3.1384283	3.3139605
13	2.7196237	2.8879295	3.0658045	3.2537452	3.4522711	3.6619263
14	2.9371936	3.1334035	3.3417269	3.5628510	3.7974982	4.0464286
15	3.1721690	3.3997428	3.6424824	3.9013218	4.1772480	4.4713036
16	3.4259426	3.6887209	3.9703058	4.2719474	4.5949728	4.9407904
17	3.7000180	4.0022622	4.3276333	4.6777824	5.0544701	5.4595734
18	3.9960194	4.3424545	4.7171203	5.1221717	5.5599171	6.0328286
19	4.3157009	4.7115631	5.1416611	5.6087780	6.1159088	6.6662756
20	4.6609570	5.1120459	5.6044106	6.1416119	6.7274997	7.3662345
21	5.0338335	5.5465698	6.1088075	6.7250650	7.4002496	8.1396891
22	5.4365402	6.0180283	6.6586002	7.3639461	8.1402746	8.9943565
23	5.8714634	6.5295607	7.2578742	8.0635210	8.9543020	9.9387639
24	6.3411805	7.0845733	7.9110828	8.8295555	9.8497322	10.982334
25	6.8484749	7.6867620	8.6230803	9.6683632	10.834705	12.135479
26	7.3963529	8.3401368	9.3991575	10.586858	11.918176	13.409704
27	7.9880611	9.0490484	10.245082	11.592609	13.109993	14.817723
28	8.6271060	9.8182175	11.167139	12.693907	14.420993	16.373584
29	9.3172744	10.652766	12.172181	13.899826	15.863092	18.092811
30	10.062656	11.558251	13.267678	15.220312	17.449401	19.992556
31	10.867669	12.540702	14.461769	16.666241	19.194341	22.091774
32	11.737082	13.606662	15.763378	18.249534	21.113775	24.411410
33	12.676049	14.763228	17.182027	19.983240	23.225153	26.974605
34	13.690133	16.018103	18.728410	21.881648	25.547668	29.806942
35	14.785343	17.379641	20.413967	23.960404	28.102435	32.936671
36	15.968171	18.856911	22.251224	26.236643	30.912678	36.395021
37	17.245625	20.459748	24.253834	28.729124	34.003946	40.216498
38	18.625274	22.198827	26.436679	31.458390	37.404341	44.439230
39	20.115296	24.085727	28.815980	34.446937	41.144775	49.105350
40	21.724520	26.133014	31.409418	37.719396	45.259252	54.261411
41	23.462482	28.354320	34.236265	41.302739	49.785177	59.958859
42	25.339480	30.764437	37.317579	45.226499	54.763645	66.254539
43	27.366638	33.379414	40.676107	49.523016	60.240064	73.211266
44	29.555970	36.216664	44.336956	54.227703	66.264070	80.893445
45	31.920447	39.295061	48.327282	59.379334	72.890477	89.392785
46	34.474083	42.635162	52.676737	65.020371	80.179525	98.779025
47	37.232009	46.259151	57.417644	71.197306	88.197477	109.15053
48	40.210570	50.191179	62.585231	77.961050	97.017224	120.61166
49	43.427415	54.457429	68.217902	85.367350	106.71895	133.275[illegible]
50	46.901609	59.086310	74.357513	93.477248	117.39084	147.269[illegible]

ΠΙΝΑΚΑΣ I. $(1 + i)^n$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί n χρονικές περιόδους.

n	11%	11,5%	12%	12,5%	13%	13,5%
	.1100	0.1150	0.1200	0.1250	0.1300	0.1350
1	1.11 0000	1.1150000	1.1200000	1.1250000	1.1300000	1.1350000
2	1.2321000	1.2432250	1.2544000	1.2656250	1.2769000	1.2882250
3	1.3676310	1.3861959	1.4049280	1.4238281	1.4428970	1.4621354
4	1.5180704	1.5456084	1.5735193	1.6018066	1.6304736	1.6595236
5	1.6850581	1.7233533	1.7623417	1.8020324	1.8424352	1.8835593
6	1.8704145	1.9215390	1.9738227	2.0272865	2.0819517	2.1378398
7	2.0761601	2.1425160	2.2106814	2.2806973	2.3526054	2.4264482
8	2.3045377	2.3889053	2.4759631	2.5657845	2.6584441	2.7540187
9	2.5580369	2.6636294	2.7730787	2.8865075	3.0040419	3.1258112
10	2.8394209	2.9699468	3.1058481	3.2473209	3.3945673	3.5477957
11	3.1517572	3.3114906	3.4785499	3.6532361	3.8358610	4.0267481
12	3.4984505	3.6923120	3.8959759	4.1098906	4.3345230	4.5703591
13	3.8832801	4.1169279	4.3634930	4.6236269	4.8980109	5.1873576
14	4.3104408	4.5903746	4.8871121	5.2015802	5.5347523	5.8876508
15	4.7845893	5.1182677	5.4735656	5.8517777	6.2542701	6.6824837
16	5.3108941	5.7068685	6.1303934	6.5832499	7.0673252	7.5846189
17	5.8950925	6.3631583	6.8660406	7.4061561	7.9860775	8.6085425
18	6.5435526	7.0949215	7.6899655	8.3319256	9.0242675	9.7706957
19	7.2633434	7.9108375	8.6127613	9.3734163	10.197422	11.089740
20	8.0623112	8.8205837	9.6462926	10.545093	11.523087	12.586854
21	8.9491654	9.8349509	10.803848	11.863230	13.021088	14.286080
22	9.9335736	10.965970	12.100309	13.346134	14.713830	16.214700
23	11.026267	12.227057	13.552347	15.014400	16.626628	18.403685
24	12.239156	13.633168	15.178628	16.891200	18.788089	20.888182
25	13.585463	15.200983	17.000063	19.002600	21.230541	23.708087
26	15.079864	16.949095	19.040071	21.377925	23.990511	26.908678
27	16.738649	18.898241	21.324879	24.050166	27.109278	30.541350
28	18.579900	21.071539	23.883865	27.056437	30.633484	34.664432
29	20.623689	23.494766	26.749929	30.438491	34.615836	39.344130
30	22.892295	26.196664	29.959920	34.243302	39.115895	44.655588
31	25.410447	29.209280	33.555110	38.523715	44.200961	50.684092
32	28.205597	32.568348	37.581723	43.339179	49.947086	57.526444
33	31.308212	36.313707	42.091530	48.756577	56.440207	65.292514
34	34.752115	40.489784	47.142514	54.851149	63.777434	74.107003
35	38.574848	45.146109	52.799615	61.707542	72.068500	84.111449
36	42.818081	50.337911	59.135569	69.420985	81.437405	95.466494
37	47.528070	56.126771	66.231837	78.098608	92.024267	108.35447
38	52.756158	62.581349	74.179657	87.860933	103.98742	122.98232
39	58.559335	69.778204	83.081216	98.843550	117.50579	139.58494
40	65.000862	77.802698	93.050962	111.19899	132.78154	158.42890
41	72.150956	86.750008	104.21708	125.09887	150.04314	179.81680
42	80.087561	96.726258	116.72313	140.73622	169.54874	204.09207
43	88.897193	107.84978	130.72990	158.32825	191.59008	231.64450
44	98.675884	120.25250	146.41745	178.11928	216.49679	262.91651
45	109.53023	134.08154	163.98759	200.38419	244.64137	298.41024
46	121.57856	149.50092	183.66610	225.43222	276.44475	338.69562
47	134.95220	166.69352	205.70603	253.61124	312.38257	384.41952
48	149.79694	185.86328	230.39075	285.31265	352.99230	436.31616
49	166.27460	207.23755	258.03764	320.97673	398.88130	495.21884
50	184.56481	231.06987	289.00216	361.09882	450.73587	562.07338

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
1	1.1400000	1.1450000	1.1500000	1.1550000	1.1600000	1.1650000
2	1.2996000	1.3110250	1.3225000	1.3340250	1.3456000	1.3572250
3	1.4815440	1.5011236	1.5208750	1.5407989	1.5608960	1.5811671
4	1.6889601	1.7187865	1.7490062	1.7796227	1.8106393	1.8420597
5	1.9254146	1.9680106	2.0113572	2.0554642	2.1003416	2.1459995
6	2.1949726	2.2533721	2.3130607	2.3740611	2.4363963	2.5000894
7	2.5022687	2.5801110	2.6600198	2.7420406	2.8262197	2.9126042
8	2.8525864	2.9542271	3.0590228	3.1670569	3.2784148	3.3931839
9	3.2519484	3.3825901	3.5178762	3.6579507	3.8029612	3.9530592
10	3.7072212	3.8730656	4.0455576	4.2249330	4.4114349	4.6053139
11	4.2262322	4.4346601	4.6523912	4.8797976	5.1172645	5.3651907
12	4.8179047	5.0776858	5.3502499	5.6361663	5.9360269	6.2504472
13	5.4924113	5.8139502	6.1527874	6.5097720	6.8857911	7.2817709
14	6.2613489	6.6569730	7.0757055	7.5187866	7.9875176	8.4832631
15	7.1379377	7.6222341	8.1370613	8.6841985	9.2655204	9.8830015
16	8.1372489	8.7274580	9.3576204	10.030244	10.748004	11.513697
17	9.2764638	9.9929394	10.761263	11.584938	12.467684	13.413457
18	10.575169	11.441916	12.375453	13.380603	14.462514	15.626677
19	12.055692	13.100993	14.231771	15.454597	16.776516	18.205078
20	13.743489	15.000637	16.366536	17.850059	19.460758	21.208916
21	15.667578	17.175730	18.821517	20.616818	22.574480	24.708388
22	17.861038	19.666210	21.644744	23.812425	26.186396	28.785271
23	20.361584	22.517811	24.891456	27.503351	30.376214	33.534841
24	23.212205	25.782893	28.625174	31.766370	35.236414	39.068090
25	26.461914	29.521413	32.918950	36.690157	40.874241	45.514324

ΠΙΝΑΚΑΣ II. $(1+i)^{\mu/12}_{i}$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί 1, 2, 3, ..., 11 δωδέκατα της ακεραίας χρονικής περιόδου.

i%	$(1+i)^{\frac{7}{12}}$	$(1+i)^{\frac{8}{12}}$	$(1+i)^{\frac{9}{12}}$	$(1+i)^{\frac{10}{12}}$	$(1+i)^{\frac{11}{12}}$	i%
1/4 %	1,001457	1,001665	1,001874	1,002082	1,002291	1/4 %
1/2 %	1,002913	1,003340	1,003747	1,004164	1,004582	1/2 %
3/4 %	1,004368	1,004993	1,005619	1,006246	1,006872	3/4 %
1 %	1,005821	1,006655	1,007490	1,008326	1,009162	1 %
1 1/4 %	1,007272	1,008316	1,009260	1,010405	1,011452	1 1/4 %
1 1/2 %	1,008722	1,009975	1,011229	1,012484	1,013741	1 1/2 %
1 3/4 %	1,010171	1,011632	1,013096	1,014562	1,016030	1 3/4 %
2 %	1,011618	1,013289	1,014962	1,016639	1,018318	2 %
2 1/4 %	1,013064	1,014944	1,016827	1,018715	1,020605	2 1/4 %
2 1/2 %	1,014508	1,016597	1,018692	1,020790	1,022893	2 1/2 %
2 3/4 %	1,015950	1,018250	1,020554	1,022864	1,025179	2 3/4 %
3 %	1,017392	1,019901	1,022416	1,024938	1,027465	3 %
3 1/4 %	1,018831	1,021550	1,024277	1,027010	1,029751	3 1/4 %
3 1/2 %	1,020270	1,023199	1,026136	1,029082	1,032037	3 1/2 %
3 3/4 %	1,021707	1,024846	1,027995	1,031153	1,034322	3 3/4 %
4 %	1,023142	1,026491	1,029852	1,033223	1,036606	4 %
4 1/4 %	1,024576	1,028136	1,031708	1,035293	1,038890	4 1/4 %
4 1/2 %	1,026009	1,029779	1,033563	1,037361	1,041173	4 1/2 %
4 3/4 %	1,027440	1,031421	1,035417	1,039429	1,043456	4 3/4 %
5 %	1,028869	1,033061	1,037270	1,041496	1,045739	5 %
5 1/4 %	1,030298	1,034700	1,039122	1,043562	1,048021	5 1/4 %
5 1/2 %	1,031724	1,036338	1,040972	1,045627	1,050303	5 1/2 %
5 3/4 %	,1033150	1,037975	1,042822	1,047692	1,052584	5 3/4 %
6 %	1,034574	1,039610	1,044670	1,049755	1,054865	6 %
6 1/4 %	1,035997	1,041244	1,046518	1,051818	1,057145	6 1/4 %
6 1/2 %	1,037418	1,042876	1,048364	1,053880	1,059425	6 1/2 %
6 3/4 %	1,038838	1,044508	1,050209	1,055941	1,061705	6 3/4 %
7 %	1,040256	1,046138	1,052053	1,058001	1,063984	7 %
7 1/2 %	1,043089	1,049394	1,055738	1,062120	1,068540	7 1/2 %
8 %	1,045916	1,052646	1,059419	1,066235	1,073095	8 %
8 1/2 %	1,048736	1,055892	1,063093	1,070346	1,077648	8 1/2 %
9 %	1,051555	1,059134	1,066767	1,074456	1,082200	9 %
9 1/2 %	1,054375	1,062378	1,070441	1,078567	1,086753	9 1/2 %
10 %	1,057172	1,065602	1,074099	1,082664	1,091297	10 %
11 %	1,062802	1,072090	1,081447	1,090885	1,100402	11 %
12 %	1,068441	1,078578	1,088795	1,099106	1,109507	12 %

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ. $(1 + i)^{\mu/12}$

Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας, η οποία ανατοκίζεται επί 1, 2, 3, ..., 11 δωδέκατα της ακεραίας χρονικής περιόδου.

i%	$(1+i)^{\frac{1}{12}}$	$(1+i)^{\frac{2}{12}}$	$(1+i)^{\frac{3}{12}}$	$(1+i)^{\frac{4}{12}}$	$(1+i)^{\frac{5}{12}}$	$(1+i)^{\frac{6}{12}}$	i%
1/4 %	1.000208	1,000416	1,000624	1,000832	1,001040	1,001249	1/4 %
1/2 %	1,000415	1,000831	1,001247	1,000663	1,002080	1,002496	1/2 %
3/4 %	1,000622	1,001246	1,001879	1,002499	1,003118	1,003743	3/4 %
1 %	1,000829	1,001659	1,002490	1,003322	1,004154	1,004987	1%
1 1/4 %	1,001035	1,002072	1,003110	1,004149	1,005189	1,006230	1 1/4 %
1 1/2 %	1,001241	1,002484	1,003729	1,004975	1,006222	1,007472	1 1/2 %
1 3/4 %	1,001446	1,002895	1,004346	1,005789	1,007254	1,008712	1 3/4 %
2 %	1,001651	1,003305	1,004962	1,006622	1,008285	1,009950	2 %
2 1/4 %	1,001855	1,003715	1,005578	1,007444	1,009314	1,011187	2 1/4 %
2 1/2 %	1,002059	1,004123	1,006192	1,008264	1,010341	1,012422	2 1/2 %
2 3/4 %	1,002263	1,004531	1,006805	1,009083	1,011367	1,013656	2 3/4 %
3 %	1,002466	1,004938	1,007417	1,009901	1,012392	1,014889	3 %
3 1/4 %	1,002668	1,005344	1,008027	1,010718	1,013415	1,016120	3 1/4 %
3 1/2 %	1,002870	1,005750	1,008637	1,011533	1,014437	1,017349	3 1/2 %
3 3/4 %	1,003072	1,006154	1,009245	1,012346	1,015157	1,018577	3 3/4 %
4 %	1,003273	1,006558	1,009853	1,013159	1,016476	1,019803	4 %
4 1/4 %	1,003474	1,006961	1,010459	1,013970	1,017493	1,021028	4 1/4 %
4 1/2 %	1,003674	1,007363	1,011064	1,014780	1,018509	1,022252	4 1/2 %
4 3/4 %	1,003874	1,007764	1,011669	1,015589	1,019524	1,023474	4 3/4 %
5 %	1,004074	1,008164	1,012272	1,016396	1,020537	1,024695	5 %
5 1/4 %	1,004273	1,008564	1,012874	1,017202	1,021549	1,025914	5 1/4 %
5 1/2 %	1,004471	1,008963	1,013475	1,018007	1,022559	1,027131	5 1/2 %
5 3/4 %	1,004669	1,009361	1,014075	1,018810	1,023568	1,028348	5 3/4 %
6 %	1,004867	1,009758	1,014673	1,019612	1,024575	1,029563	6 %
6 1/4 %	1,005064	1,010155	1,015271	1,020413	1,025582	1,030776	6 1/4
6 1/2 %	1,005261	1,010551	1,015868	1,021213	1,026586	1,031988	6 1/2 %
6 3/4 %	1,005458	1,010946	1,016463	1,022011	1,027590	1,033198	6 3/4 %
7 %	1,005654	1,011340	1,017058	1,022809	1,028592	1,034408	7 %
7 1/2 %	1,006044	1,012126	1,018244	1,024399	1,030592	1,036822	7 1/2 %
8 %	1,006434	1,012909	1,019426	1,025985	1,032586	1,039230	8 %
8 1/2 %	1,006821	1,013687	1,020601	1,027584	1,034563	1,041631	8 1/2 %
9 %	1,007207	1,014466	1,021778	1,029142	1,036559	1,044030	9 %
9 1/2 %	1,007593	1,015239	1,022946	1,030721	1,038546	1,046432	9 1/2 %
10 %	1,007974	1,016011	1,024113	1,032280	1,040511	1,048808	10 %
11 %	1,008742	1,017556	1,026448	1,035437	1,044484	1,053608	11 %
12 %	1,009511	1,019101	1,028781	1,038594	1,048457	1,058408	12 %

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^{n} = (1 + i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	8%	8.5%	9%	9.5%	10%	10.5%
	0.0800	0.0850	0.0900	0.0950	0.1000	0.1050
1	0.92592593	0.92165899	0.91743119	0.91324201	0.90909091	0.90497738
2	0.85733882	0.84945529	0.84167999	0.83401097	0.82644628	0.81898405
3	0.79383224	0.78290810	0.77218348	0.76165386	0.75131481	0.74116204
4	0.73502986	0.72157429	0.70842522	0.69557430	0.68301346	0.67073488
5	0.68058320	0.66504543	0.64993139	0.63522767	0.62092133	0.60699989
6	0.63016963	0.61294510	0.59626733	0.58011660	0.56447394	0.54932117
7	0.58349040	0.56492635	0.54703425	0.52978685	0.51315813	0.49712323
8	0.54026889	0.52066945	0.50186629	0.48382361	0.46650739	0.44988526
9	0.50024897	0.47987965	0.46042779	0.44184804	0.42409763	0.40713600
10	0.46319350	0.44228542	0.42241081	0.40351419	0.38554330	0.36844887
11	0.42888287	0.40763634	0.38753286	0.36850611	0.35049391	0.33343789
12	0.39711377	0.37570169	0.35553473	0.33653527	0.31863083	0.30175375
13	0.36769793	0.34626884	0.32617865	0.30733814	0.28966439	0.27308032
14	0.34046105	0.31914179	0.29924647	0.28067410	0.26333126	0.24713151
15	0.31524171	0.29413990	0.27453805	0.25632338	0.23939206	0.22364842
16	0.29189048	0.27109668	0.25186977	0.23408528	0.21762914	0.20239676
17	0.27026896	0.24985869	0.23107318	0.21377651	0.19784468	0.18316449
18	0.25024904	0.23028451	0.21199375	0.19522969	0.17985880	0.16575972
19	0.23171207	0.21224379	0.19448968	0.17829196	0.16350800	0.15000880
20	0.21454821	0.19561640	0.17843090	0.16282371	0.14864363	0.13575457
21	0.19865575	0.18029161	0.16369807	0.14869745	0.13513058	0.12285481
22	0.18394051	0.16616738	0.15018172	0.13579676	0.12284598	0.11118083
23	0.17031529	0.15314966	0.13778139	0.12401530	0.11167816	0.10061613
24	0.15769934	0.14115176	0.12640495	0.11325598	0.10152560	0.91055325D-01
25	0.14601791	0.13009379	0.11596784	0.10343012	0.92296003D-01	0.82403009D-01
26	0.13520177	0.11990211	0.10639251	0.94456734D-01	0.83905457D-01	0.74572859D-01
27	0.12518682	0.11050886	0.97607812D-01	0.86261857D-01	0.76277689D-01	0.67486751D-01
28	0.11591373	0.10185148	0.89548451D-01	0.78777952D-01	0.69343353D-01	0.61073963D-01
29	0.10732752	0.93872334D-01	0.82154543D-01	0.71943335D-01	0.63039412D-01	0.55270573D-01
* 30	0.99377337D-01	0.86518280D-01	0.75371140D-01	0.65701676D-01	0.57308557D-01	0.50018618D-01
31	0.92016053D-01	0.79740350D-01	0.69147835D-01	0.60001531D-01	0.52098688D-01	0.45265718D-01
32	0.85200050D-01	0.73493411D-01	0.63438381D-01	0.54795919D-01	0.47362444D-01	0.40964450D-01
33	0.78888935D-01	0.67735862D-01	0.58200350D-01	0.50041935D-01	0.43056767D-01	0.37071901D-01
34	0.73045310D-01	0.62429366D-01	0.53394814D-01	0.45700397D-01	0.39142516D-01	0.33549232D-01
35	0.67634547D-01	0.57538587D-01	0.48986070D-01	0.41735523D-01	0.35584105D-01	0.30361296D-01
36	0.62624580D-01	0.53030956D-01	0.44941349D-01	0.38114633D-01	0.32349187D-01	0.27476286D-01
37	0.57985723D-01	0.48876457D-01	0.41230595D-01	0.34807884D-01	0.29408352D-01	0.24865417D-01
38	0.53690484D-01	0.45047426D-01	0.37826234D-01	0.31788022D-01	0.26734865D-01	0.22502640D-01
39	0.49713411D-01	0.41518365D-01	0.34702967D-01	0.29030157D-01	0.24304423D-01	0.20364380D-01
40	0.46030936D-01	0.38265774D-01	0.31837585D-01	0.26511559D-01	0.22094930D-01	0.18429303D-01
41	0.42621237D-01	0.35267995D-01	0.29208793D-01	0.24211469D-01	0.20086300D-01	0.16678103D-01
42	0.39464109D-01	0.32505064D-01	0.26797058D-01	0.22110931D-01	0.18260273D-01	0.15093305D-01
43	0.36540842D-01	0.29959585D-01	0.24584457D-01	0.20192631D-01	0.16600248D-01	0.13659100D-01
44	0.33834113D-01	0.27611599D-01	0.22554548D-01	0.18440759D-01	0.15091135D-01	0.12361177D-01
45	0.31327882D-01	0.25448478D-01	0.20692246D-01	0.16840876D-01	0.13719213D-01	0.11186585D-01
46	0.29007298D-01	0.23454819D-01	0.18983712D-01	0.15379795D-01	0.12472012D-01	0.10123606D-01
47	0.26858610D-01	0.21617344D-01	0.17416249D-01	0.14045475D-01	0.11338193D-01	0.91616348D-02
48	0.24869083D-01	0.19923820D-01	0.15978210D-01	0.12826918D-01	0.10307448D-01	0.82910722D-02
49	0.23026929D-01	0.18362968D-01	0.14658909D-01	0.11714080D-01	** 0.93704073D-02	0.75032328D-02
50	0.21321230D-01	0.16924394D-01	0.13448540D-01	0.10697790D-01	0.85185521D-02	0.67902559D-02

Σημείωση: Οι αριθμοί 01, 02 και 03, που υπάρχουν στο τέλος ορισμένων αριθμών του Πίνακα III, δηλώνουν ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί πρέπει να διαιρεθούν με: 10, 100 ή 1000 ή να πολλαπλασιαστούν επί: 10^{-1}, 10^{-2} ή 10^{-3}.

* (0,993773370 - 01) = (0,993773370 $\times 10^{-1}$) = 0,0993773370

** (0,93704073 - 02) = (0,93704073 $\times 10^{-2}$) = 0,0093704073

ΠΙΝΑΚΑΣ III. $U^n = (1 + i)^{-n}$

Παρούσα (αρχική) αξία κεφαλαίου, του οποίου η τελική αξία μετά n χρονικές περιόδους είναι μία νομισματική μονάδα.

n	11%	11.5%	12%	12.5%	13%	13.5%
	0.1100	0.1150	0.1200	0.1250	0.1300	0.1350
1	0.90090090	0.89686099	0.89285714	0.88888889	0.88495575	0.88105727
2	0.81162244	0.80435963	0.79719388	0.79012346	0.78314669	0.77626191
3	0.73119138	0.72139878	0.71178025	0.70233197	0.69305017	0.68393120
4	0.65873095	0.64699442	0.63551808	0.62429508	0.61331873	0.60258256
5	0.59345133	0.58026405	0.56742686	0.55492896	0.54275994	0.53090975
6	0.53464084	0.52041619	0.50663113	0.49327019	0.48031853	0.46776189
7	0.48165842	0.46674098	0.45234922	0.43846239	0.42506065	0.41212502
8	0.43392650	0.41860178	0.40388324	0.38974435	0.37615987	0.36310574
9	0.39092476	0.37542760	0.36061003	0.34643942	0.33288484	0.31991695
10	0.35218449	0.33670637	0.32197324	0.30794616	0.29458836	0.28186516
11	0.31728337	0.30197881	0.28747611	0.27372992	0.26069766	0.24833935
12	0.28584083	0.27083301	0.25667510	0.24331548	0.23070589	0.21880119
13	0.25751426	0.24289956	0.22917420	0.21628043	0.20416451	0.19277638
14	0.23199483	0.21784714	0.20461982	0.19224927	0.18067656	0.16984703
15	0.20900435	0.19537869	0.18269627	0.17088824	0.15989076	0.14964496
16	0.18829221	0.17522745	0.16312167	0.15190066	0.14149625	0.13184578
17	0.16963267	0.15715466	0.14564435	0.13502281	0.12521792	0.11616368
18	0.15282218	0.14094589	0.13003960	0.12002027	0.11081232	0.10234686
19	0.13767764	0.12640887	0.11610678	0.10668469	0.980639980D-01	0.901734430D-01
20	0.12403191	0.11337118	0.10366677	0.948308350D-01	0.867822990D-01	0.794479680D-01
21	0.11174226	0.10167819	0.925596160D-01	0.842940750D-01	0.767984950D-01	0.699982100D-01
22	0.10066871	0.911912020D-01	0.826425150D-01	0.749280670D-01	0.679632700D-01	0.616724320D-01
23	0.906925280D-01	0.817858310D-01	0.737879600D-01	0.666027270D-01	0.601444870D-01	0.543369440D-01
24	0.817049810D-01	0.733505220D-01	0.658821070D-01	0.592024240D-01	0.532252100D-01	0.478739600D-01
25	0.736080910D-01	0.657852210D-01	0.588233100D-01	0.526243770D-01	0.471019560D-01	0.421797000D-01
26	0.663135960D-01	0.590001990D-01	0.525208130D-01	0.467772240D-01	0.416831470D-01	0.371627320D-01
27	0.597419780D-01	0.529149770D-01	0.468935830D-01	0.415797550D-01	0.368877410D-01	0.327424950D-01
28	0.538216020D-01	0.474573780D-01	0.418692710D-01	0.369597820D-01	0.326440180D-01	0.288480130D-01
29	0.484879300D-01	0.425626710D-01	0.373832770D-01	0.328531400D-01	0.288885120D-01	0.254167520D-01
30	0.436828200D-01	0.381727990D-01	0.333779260D-01	0.292027910D-01	0.255650550D-01	0.223936140D-01
31	0.393538920D-01	0.342356940D-01	0.298017200D-01	0.259580360D-01	0.226239420D-01	0.197300560D-01
32	0.354539570D-01	0.307046590D-01	0.266086790D-01	0.230738100D-01	0.200211880D-01	0.173833100D-01
33	0.319405020D-01	0.275378110D-01	0.237577490D-01	0.205100540D-01	0.177178660D-01	0.153156910D-01
34	0.287752270D-01	0.246975880D-01	0.212122760D-01	0.182311590D-01	0.156795270D-01	0.134940010D-01
35	0.259236280D-01	0.221503030D-01	0.189395320D-01	0.162054750D-01	0.138756880D-01	0.118889880D-01
36	0.233546200D-01	0.198657430D-01	0.169102960D-01	0.144048660D-01	0.122793700D-01	0.104748790D-01
37	0.210401980D-01	0.178168100D-01	0.150984790D-01	0.128043260D-01	0.108666990D-01	0.922896860D-02
38	0.189551330D-01	0.159792020D-01	0.134807850D-01	0.113816230D-01	0.961654770D-02	0.813124980D-02
39	0.170766970D-01	0.143311230D-01	0.120364150D-01	0.101169980D-01	0.851021920D-02	0.716409680D-02
40	0.153844120D-01	0.128530250D-01	0.107467990D-01	0.899288720D-02	0.753116750D-02	0.631197960D-02
41	0.138598300D-01	0.115273770D-01	0.959535650D-02	0.799367750D-02	0.666475000D-02	0.556121550D-02
42	0.124863340D-01	0.103384540D-01	0.856728260D-02	0.710549110D-02	0.589800890D-02	0.489974940D-02
43	0.112489490D-01	0.927215630D-02	0.764935950D-02	0.631599210D-02	0.521947690D-02	0.431695980D-02
44	0.101341880D-01	0.831583530D-02	0.682978520D-02	0.561421530D-02	0.461900610D-02	0.380348880D-02
45	0.912989950D-02	0.745814830D-02	0.609802260D-02	0.499041360D-02	0.408761600D-02	0.335109150D-02
46	0.822513470D-02	0.668892220D-02	0.544466300D-02	0.443592320D-02	0.361735930D-02	0.295250350D-02
47	0.741003130D-02	0.599903340D-02	0.486130630D-02	0.394304280D-02	0.320120300D-02	0.260132470D-02
48	0.667570390D-02	0.538029900D-02	0.434045200D-02	0.350492700D-02	0.283292300D-02	0.229191600D-02
49	0.601414770D-02	0.482538030D-02	0.387540360D-02	0.311549070D-02	0.250701150D-02	0.201930930D-02
50	0.541815110D-02	0.432769540D-02	0.346018180D-02	0.276932500D-02	0.221859420D-02	0.177912710D-02

n	14%	14,5%	15%	15,5%	16%	16,5%
	0.1400	0.1450	0.1500	0.1550	0.1600	0.1650
1	0.87719296	0.87336245	0.86956522	0.86580087	0.86206897	0.85836910
2	0.76946753	0.76275197	0.75614367	0.74961114	0.74316291	0.73679751
3	0.67497152	0.66616765	0.65751624	0.64901398	0.64065768	0.63244472
4	0.59208028	0.58180582	0.57175325	0.56191687	0.55229110	0.54287058
5	0.51936857	0.50812735	0.49717674	0.48650811	0.47611302	0.46598333
6	0.45558656	0.44377935	0.43232760	0.42121915	0.41044226	0.39998569
7	0.39963733	0.38758022	0.37593705	0.36469190	0.35382954	0.34333536
8	0.35055906	0.33849801	0.32690178	0.31575057	0.30502546	0.29470846
9	0.30750795	0.29563145	0.28426247	0.27337711	0.26295299	0.25296864
10	0.26974382	0.25819341	0.24718471	0.23669014	0.22668361	0.21714046
11	0.23661738	0.22549642	0.21494323	0.20492653	0.19541691	0.18638666
12	0.20755911	0.19694011	0.18690716	0.17742557	0.16846285	0.15998855
13	0.18206939	0.17200010	0.16252796	0.15361521	0.14522660	0.13732923
14	0.15971000	0.15021842	0.14132866	0.13300018	0.12519534	0.11787917
15	0.14009649	0.13119513	0.12289449	0.11515167	0.10792702	0.10118384
16	0.12289166	0.11458090	0.10686477	0.996984190D-01	0.930405340D-01	0.868530780D-01
17	0.10779970	0.10007066	0.929258910D-01	0.863189780D-01	0.802073570D-01	0.745519990D-01
18	0.945611400D-01	0.873979530D-01	0.808051230D-01	0.747350460D-01	0.691442740D-01	0.639931320D-01
19	0.829483680D-01	0.763300900D-01	0.702653250D-01	0.647056680D-01	0.596071330D-01	0.549297270D-01
20	0.727617270D-01	0.666638350D-01	0.611002830D-01	0.560222230D-01	0.513854590D-01	0.471499810D-01
21	0.638260760D-01	0.582216900D-01	0.531306810D-01	0.485040900D-01	0.442978100D-01	0.404720870D-01
22	0.559877860D-01	0.508486370D-01	0.462005920D-01	0.419948830D-01	0.381877670D-01	0.347399890D-01
23	0.491120930D-01	0.444092900D-01	0.401744280D-01	0.363592060D-01	0.329204890D-01	0.298197330D-01
24	0.430807840D-01	0.387854070D-01	0.349342850D-01	0.314798320D-01	0.283797320D-01	0.255963370D-01
25	0.377901610D-01	0.338737180D-01	0.303776390D-01	0.272552660D-01	0.244652860D-01	0.219711050D-01

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - v^n}{i} = \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.0025 (¼ %)	.004167 ($\frac{5}{12}$ %)	.005 (½ %)	.005833 ($\frac{7}{12}$ %)	.0075 (¾ %)
1	0.9975 0623	0.9958 5062	0.9950 2488	0.9942 0050	0.9925 5583
2	1.9925 2492	1.9875 6908	1.9850 9938	1.9826 3513	1.9777 2291
3	2.9850 6227	2.9751 7253	2.9702 4814	2.9653 3732	2.9555 5624
4	3.9751 2446	3.9586 7804	3.9504 9566	3.9423 4034	3.92[illegible]1 1041
5	4.9627 1766	4.9381 0261	4.9258 6633	4.9136 7722	4.8894 3961
6	5.9478 4804	5.9134 6318	5.8963 8441	5.8793 8083	5.8455 9763
7	6.9305 2174	6.8847 7661	6.8620 7404	6.8394 8384	6.7946 3785
8	7.9107 4487	7.8520 5970	7.8229 5924	7.7940 1874	7.7366 1325
9	8.8885 2357	8.8153 2916	8.7790 6392	8.7430 1780	8.6715 7642
10	9.8638 6391	9.7746 0165	9.7304 1186	9.6865 1314	9.5995 7958
11	10.8367 7198	10.7298 9376	10.6770 2673	10.6245 3667	10.5206 7452
12	11.8072 5384	11.6812 2200	11.6189 3207	11.5571 2014	11.4349 1267
13	12.7753 1555	12.6286 0283	12.5561 5131	12.4842 9509	12.3423 4508
14	13.7409 6314	13.5720 5261	13.4887 0777	13.4060 9288	13.2430 2242
15	14.7042 0264	14.5115 8766	14.4166 2465	14.3225 4470	14.1369 9495
16	15.6650 4004	15.4472 2422	15.3399 2502	15.2336 8156	15.0243 1261
17	16.6234 8133	16.3789 7848	16.2586 3186	16.1395 3427	15.9050 2492
18	17.5795 3250	17.3068 6654	17.1727 6802	17.0401 3350	16.7791 8107
19	18.5331 9950	18.2309 0443	18.0823 5624	17.9355 0969	17.6468 2984
20	19.4844 6828	19.1511 0815	18.9874 1915	18.8256 9315	18.5080 1969
21	20.4334 0477	20.0674 9359	19.8879 7925	19.7107 1398	19.3627 9870
22	21.3799 5488	20.9800 7661	20.7840 5896	20.5906 0213	20.2112 1459
23	22.3241 4452	21.8888 7297	21.6756 8055	21.4653 8738	21.0533 1473
24	23.2659 7957	22.7938 9839	22.5628 6622	22.3350 9930	21.8891 4614
25	24.2054 6591	23.6951 6853	23.4456 3803	23.1997 6732	22.7187 5547
26	25.1426 0939	24.5926 9895	24.3240 1794	24.0594 2070	23.5421 8905
27	26.0774 1585	25.4865 0517	25.1980 2780	24.9140 8852	24.3594 9286
28	27.0098 9112	26.3766 0266	26.0676 8936	25.7637 9968	25.1707 1251
29	27.9400 4102	27.2630 0680	26.9330 2424	26.6085 8295	25.9758 9331
30	28.8678 7134	28.1457 3291	27.7940 5397	27.4484 6689	26.7750 8021
31	29.7933 8787	29.0247 9626	28.6507 9997	28.2834 7993	27.5683 1783
32	30.7165 9638	29.9002 1205	29.5032 8355	29.1136 5030	28.3556 5045
33	31.6375 0262	30.7719 9540	30.3515 2592	29.9390 0610	29.1371 2203
34	32.5561 1234	31.6401 6139	31.1955 4818	30.7595 7524	29.9127 7621
35	33.4724 3126	32.5047 2504	32.0353 7132	31.5753 8549	30.6826 5629
36	34.3864 6510	33.3657 0128	32.8710 1624	32.3864 6445	31.4468 0525
37	35.2982 1955	34.2231 0561	33.7025 0372	33.1928 3955	32.2052 6578
38	36.2077 0030	35.0769 5105	34.5298 5445	33.9945 3808	32.9580 8016
39	37.1149 1302	35.9272 5416	35.3530 8900	34.7915 8716	33.7052 9048
40	38.0198 6336	36.7740 2904	36.1722 2786	35.5840 1374	34.4469 3844
41	38.9225 5697	37.6172 9033	36.9872 9141	36.3718 4465	35.1830 6543
42	39.8229 9947	38.4570 5261	37.7982 9991	37.1551 0653	35.9137 1260
43	40.7211 9648	39.2938 3040	38.6052 7354	37.9338 2588	36.6389 2070
44	41.6171 5359	40.1261 3816	39.4082 3238	38.7080 2904	37.3587 3022
45	42.5108 7640	40.9554 9028	40.2071 9640	39.4777 4221	38.0731 8136
46	43.4023 7048	41.7814 0111	41.0021 8547	40.2429 9143	38.7823 1401
47	44.2916 4137	42.6038 8492	41.7932 1937	41.0038 0258	39.4861 6775
48	45.1786 9464	43.4229 5594	42.5803 1778	41.7602 0141	40.1847 8189
49	46.0655 3580	44.2386 2832	43.3635 0028	42.5122 1349	40.8781 9542
50	46.9461 7037	45.0509 1617	44.1427 8635	43.2598 6428	41.5664 4707

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

ρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.01 (1%)	.01125 (1⅛%)	.0125 (1¼%)	.015 (1½%)	.0175 (1¾%)
1	0.9900 9901	0.9888 7515	0.9876 5432	0.9852 2167	0.9828 0098
2	1.9703 9506	1.9667 4923	1.9631 1538	1.9558 8342	1.9486 9875
3	2.9409 8521	2.9337 4460	2.9265 3371	2.9122 0042	2.8979 8403
4	3.9019 6555	3.8899 8230	3.8780 5798	3.8543 8465	3.8309 4254
5	4.8534 3124	4.8355 8200	4.8178 3504	4.7826 4497	4.7478 5508
6	5.7954 7647	5.7706 6205	5.7460 0992	5.6971 8717	5.6489 9762
7	6.7281 9453	6.6953 3948	6.6627 2585	6.5982 1396	6.5346 4139
8	7.6516 7775	7.6097 3002	7.5681 2429	7.4859 2508	7.4050 5297
9	8.5660 1758	8.5139 4810	8.4623 4498	8.3605 1732	8.2604 9432
10	9.4713 0453	9.4081 0690	9.3455 2591	9.2221 8455	9.1012 2291
11	10.3676 2825	10.2923 1832	10.2178 0337	10.0711 1779	9.9274 9181
12	11.2550 7747	11.1666 9302	11.0793 1197	10.9075 0521	10.7395 4969
13	12.1337 4007	12.0313 4044	11.9301 8466	11.7315 3222	11.5376 4097
14	13.0037 0304	12.8863 6880	12.7705 5275	12.5433 8150	12.3220 0587
15	13.8650 5252	13.7318 8509	13.6005 4592	13.3432 3301	13.0928 8046
16	14.7178 7378	14.5679 9514	14.4202 9227	14.1312 6405	13.8504 9677
17	15.5622 5127	15.3948 0360	15.2299 1829	14.9076 4931	14.5950 8282
18	16.3982 6858	16.2124 1395	16.0295 4893	15.6725 6089	15.3268 6272
19	17.2260 0850	17.0209 2850	16.8193 0759	16.4261 6837	16.0460 5673
20	18.0455 5297	17.8204 4845	17.5993 1613	17.1686 3879	16.7528 8130
21	18.8569 8313	18.6110 7387	18.3696 9495	17.9001 3673	17.4475 4919
22	19.6603 7934	19.3929 0371	19.1305 6291	18.6208 2437	18.1302 6948
23	20.4558 2113	20.1660 3580	19.8820 3744	19.3308 6145	18.8012 4764
24	21.2433 8726	20.9305 6693	20.6242 3451	20.0304 0537	19.4606 8565
25	22.0231 5570	21.6865 9276	21.3572 6865	20.7196 1120	20.1087 8196
26	22.7952 0366	22.4342 0792	22.0812 5299	21.3986 3172	20.7457 3166
27	23.5596 0759	23.1735 0598	22.7962 9925	22.0676 1746	21.3717 2644
28	24.3164 4316	23.9045 7946	23.5025 1778	22.7267 1671	21.9869 5474
29	25.0657 8530	24.6275 1986	24.2000 1756	23.3760 7558	22.5916 0171
30	25.8077 0822	25.3424 1766	24.8889 0623	24.0158 3801	23.1858 4934
31	26.5422 8537	26.0493 6233	25.5692 9010	24.6461 4582	23.7698 7650
32	27.2695 8947	26.7484 4236	26.2412 7418	25.2671 3874	24.3438 5897
33	27.9896 9255	27.4397 4522	26.9049 6215	25.8789 5442	24.9079 6951
34	28.7026 6589	28.1233 5745	27.5604 5644	26.4817 2849	25.4623 7789
35	29.4085 8009	28.7993 6460	28.2078 5822	27.0755 9458	26.0072 5100
36	30.1075 0504	29.4678 5127	28.8472 6737	27.6606 8431	26.5427 5283
37	30.7995 0994	30.1289 0114	29.4787 8259	28.2371 2740	27.0690 4455
38	31.4846 6330	30.7825 9692	30.1025 0133	28.8050 5163	27.5862 8457
39	32.1630 3298	31.4290 2044	30.7185 1983	29.3645 8288	28.0946 2857
40	32.8346 8611	32.0682 5260	31.3269 3316	29.9158 4520	28.5942 2955
41	33.4996 8922	32.7003 7340	31.9278 3522	30.4589 6079	29.0852 3789
42	34.1581 0814	33.3254 6195	32.5213 1874	30.9940 5004	29.5678 0136
43	34.8100 0806	33.9435 9649	33.1074 7530	31.5212 3157	30.0420 6522
44	35.4554 5352	34.5548 5438	33.6863 9536	32.0406 2223	30.5081 7221
45	36.0945 0844	35.1593 1212	34.2581 6825	32.5523 3718	30.9662 6261
46	36.7272 3608	35.7570 4536	34.8228 8222	33.0564 8983	31.4164 7431
47	37.3536 9909	36.3481 2891	35.3806 2442	33.5531 9195	31.8589 4281
48	37.9739 5949	36.9326 3674	35.9314 8091	34.0425 5365	32.2938 0129
49	38.5880 7871	37.5106 4202	36.4755 3670	34.5246 8339	32.7211 8063
50	39.1961 1753	38.0822 1708	37.0128 7575	34.9996 8807	33.1412 0946

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	0.9803 9216	0.9779 9511	0.9756 0976	0.9732 3601	0.9708 7379
2	1.9415 6094	1.9344 6955	1.9274 2415	1.9204 2434	1.9134 6970
3	2.8838 8327	2.8698 9687	2.8560 2356	2.8422 6213	2.8286 1135
4	3.8077 2870	3.7847 4021	3.7619 7421	3.7394 2787	3.7170 9840
5	4.7134 5951	4.6794 5253	4.6458 2850	4.6125 8186	4.5797 0719
6	5.6014 3089	5.5544 7680	5.5081 2536	5.4623 6678	5.4171 9144
7	6.4719 9107	6.4102 4626	6.3493 9060	6.2894 0806	6.2302 8296
8	7.3254 8144	7.2471 8461	7.1701 3717	7.0943 1441	7.0196 9219
9	8.1622 3671	8.0657 0622	7.9708 6553	7.8776 7826	7.7861 0892
10	8.9825 8501	8.8662 1635	8.7520 6393	8.6400 7616	8.5302 0284
11	9.7868 4805	9.6491 1134	9.5142 0871	9.3820 6926	9.2526 2411
12	10.5753 4122	10.4147 7882	10.2577 6460	10.1042 0366	9.9540 0399
13	11.3483 7375	11.1635 9787	10.9831 8497	10.8070 1086	10.6349 5533
14	12.1062 4877	11.8959 3924	11.6909 1217	11.4910 0814	11.2960 7314
15	12.8492 6350	12.6121 6551	12.3813 7773	12.1566 9892	11.9379 3509
16	13.5777 0931	13.3126 3131	13.0550 0266	12.8045 7315	12.5611 0203
17	14.2918 7188	13.9976 8343	13.7121 9772	13.4351 0769	13.1661 1847
18	14.9920 3125	14.6676 6106	14.3533 6363	14.0487 6661	13.7535 1308
19	15.6784 6201	15.3228 9590	14.9788 9134	14.6460 0157	14.3237 9911
20	16.3514 3334	15.9637 1237	15.5891 6229	15.2272 5213	14.8774 7486
21	17.0112 0916	16.5904 2775	16.1845 4857	15.7929 4612	15.4150 2414
22	17.6580 4820	17.2033 5232	16.7654 1324	16.3434 9987	15.9369 1664
23	18.2922 0412	17.8027 8955	17.3321 1048	16.8793 1861	16.4436 0839
24	18.9139 2560	18.3890 3624	17.8849 8583	17.4007 9670	16.9355 4212
25	19.5234 5647	18.9623 8263	18.4243 7642	17.9083 1795	17.4131 4769
26	20.1210 3576	19.5231 1260	18.9506 1114	18.4022 5592	17.8768 4242
27	20.7068 9780	20.0715 0376	19.4640 1087	18.8829 7413	18.3270 3147
28	21.2812 7236	20.6078 2764	19.9648 8866	19.3508 2640	18.7641 0823
29	21.8443 8466	21.1323 4977	20.4535 4991	19.8061 5708	19.1884 5459
30	22.3964 5555	21.6453 2985	20.9302 9259	20.2493 0130	19.6004 4135
31	22.9377 0152	22.1470 2186	21.3954 0741	20.6805 8520	20.0004 2849
32	23.4683 3482	22.6376 7419	21.8491 7796	21.1003 2623	20.3887 6553
33	23.9885 6355	23.1175 2977	22.2918 8094	21.5088 3332	20.7657 9178
34	24.4985 9172	23.5868 2618	22.7237 8628	21.9064 0712	21.1318 3668
35	24.9986 1933	24.0457 9577	23.1451 5734	22.2933 4026	21.4872 2007
36	25.4888 4248	24.4946 6579	23.5562 5107	22.6699 1753	21.8322 5250
37	25.9694 5341	24.9336 5848	23.9573 1812	23.0364 1609	22.1672 3544
38	26.4406 4060	25.3629 9118	24.3486 0304	23.3931 0568	22.4924 6159
39	26.9025 8883	25.7828 7646	24.7303 4443	23.7402 4884	22.8082 1513
40	27.3554 7924	26.1935 2221	25.1027 7505	24.0781 0106	23.1147 7197
41	27.7994 8945	26.5951 3174	25.4661 2200	24.4069 1101	23.4123 9997
42	28.2347 9358	26.9879 0390	25.8206 0683	24.7269 2069	23.7013 5920
43	28.6615 6233	27.3720 3316	26.1664 4569	25.0383 6563	23.9819 0213
44	29.0799 6307	27.7477 0969	26.5038 4945	25.3414 7507	24.2542 7392
45	29.4901 5987	28.1151 1950	26.8330 2386	25.6364 7209	24.5187 1254
46	29.8923 1360	28.4744 4450	27.1541 6962	25.9235 7381	24.7754 4907
47	30.2865 8196	28.8258 6259	27.4674 8255	26.2029 9154	25.0247 0783
48	30.6731 1957	29.1695 4777	27.7731 5371	26.4749 3094	25.2667 0664
49	31.0520 7801	29.5056 7019	28.0713 6947	26.7395 9215	25.5016 5693
50	31.4236 0589	29.8343 9627	28.3623 1168	26.9971 6998	25.7297 6401

ΠΙΝΑΚΑΣ IV. $a_{\overline{n|}i} = \dfrac{1 - U^n}{i} = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$

Αρχική (παρούσα) αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.035 (3½%)	.04 (4%)	.045 (4½%)	.05 (5%)	.055 (5½%)
1	0.9661 8357	0.9615 3846	0.9569 3780	0.9523 8095	0.9478 6730
2	1.8996 9428	1.8860 9467	1.8726 6775	1.8594 1043	1.8463 1971
3	2.8016 3698	2.7750 9103	2.7489 6435	2.7232 4803	2.6979 3338
4	3.6730 7921	3.6298 9522	3.5875 2570	3.5459 5050	3.5051 5012
5	4.5150 5238	4.4518 2233	4.3899 7674	4.3294 7667	4.2702 8448
6	5.3285 5302	5.2421 3686	5.1578 7248	5.0756 9207	4.9955 3031
7	6.1145 4398	6.0020 5467	5.8927 0094	5.7863 7340	5.6829 6712
8	6.8739 5554	6.7327 4487	6.5958 8607	6.4632 1276	6.3345 6599
9	7.6076 8651	7.4353 3161	7.2687 9050	7.1078 2168	6.9521 9525
10	8.3166 0532	8.1108 9578	7.9127 1818	7.7217 3493	7.5376 2583
11	9.0015 5104	8.7604 7671	8.5289 1692	8.3064 1422	8.0925 3633
12	9.6633 3433	9.3850 7376	9.1185 8078	8.8632 5164	8.6185 1785
13	10.3027 3849	9.9856 4785	9.6828 5242	9.3935 7299	9.1170 7853
14	10.9205 2028	10.5631 2293	10.2228 2528	9.8986 4094	9.5896 4790
15	11.5174 1090	11.1183 8743	10.7395 4573	10.3796 5804	10.0375 8094
16	12.0941 1681	11.6522 9561	11.2340 1505	10.8377 6956	10.4621 6203
17	12.6513 2059	12.1656 6885	11.7071 9143	11.2740 6625	10.8646 0856
18	13.1896 8173	12.6592 9697	12.1599 9180	11.6895 8690	11.2460 7447
19	13.7098 3742	13.1339 3940	12.5932 9359	12.0853 2086	11.6076 5352
20	14.2124 0330	13.5903 2634	13.0079 3645	12.4622 1034	11.9503 8248
21	14.6979 7420	14.0291 5995	13.4047 2388	12.8211 5271	12.2752 4406
22	15.1671 2484	14.4511 1533	13.7844 2476	13.1630 0258	12.5831 6973
23	15.6204 1047	14.8568 4167	14.1477 7489	13.4885 7388	12.8750 4239
24	16.0583 6760	15.2469 6314	14.4954 7837	13.7986 4179	13.1516 9895
25	16.4815 1459	15.6220 7994	14.8282 0896	14.0939 4457	13.4139 3266
26	16.8903 5226	15.9827 6918	15.1466 1145	14.3751 8530	13.6624 9541
27	17.2853 6451	16.3295 8575	15.4513 0282	14.6430 3362	13.8980 9991
28	17.6670 1885	16.6630 6322	15.7428 7351	14.8981 2726	14.1214 2172
29	18.0357 6700	16.9837 1463	16.0218 8853	15.1410 7358	14.3331 0116
30	18.3920 4541	17.2920 3330	16.2888 8854	15.3724 5103	14.5337 4517
31	18.7362 7576	17.5884 9356	16.5443 9095	15.5928 1050	14.7239 2907
32	19.0688 6547	17.8735 5150	16.7888 9086	15.8026 7667	14.9041 9817
33	19.3902 0818	18.1476 4567	17.0228 6207	16.0025 4921	15.0750 6936
34	19.7006 8423	18.4111 9776	17.2467 5796	16.1929 0401	15.2370 3257
35	20.0006 6110	18.6646 1323	17.4610 1240	16.3741 9429	15.3905 5220
36	20.2904 9381	18.9082 8195	17.6660 4058	16.5468 5171	15.5360 6843
37	20.5705 2542	19.1425 7880	17.8622 3979	16.7112 8734	15.6739 9851
38	20.8410 8736	19.3678 6423	18.0499 9023	16.8678 9271	15.8047 3793
39	21.1024 9987	19.5844 8484	18.2296 5572	17.0170 4067	15.9286 6154
40	21.3550 7234	19.7927 7388	18.4015 8442	17.1590 8635	16.0461 2469
41	21.5991 0371	19.9930 5181	18.5661 0949	17.2943 6796	16.1574 6416
42	21.8348 8281	20.1856 2674	18.7235 4975	17.4232 0758	16.2629 9920
43	22.0626 8870	20.3707 9494	18.8742 1029	17.5459 1198	16.3630 3242
44	22.2827 9102	20.5488 4129	19.0183 8305	17.6627 7331	16.4578 5063
45	22.4954 5026	20.7200 3970	19.1563 4742	17.7740 6982	16.5477 2572
46	22.7009 1813	20.8846 5356	19.2883 7074	17.8800 6650	16.6329 1537
47	22.8994 3780	21.0429 3612	19.4147 0884	17.9810 1571	16.7136 6386
48	23.0912 4425	21.1951 3088	19.5356 0654	18.0771 5782	16.7902 0271
49	23.2765 6450	21.3414 7200	19.6512 9813	18.1687 2173	16.8627 5139
50	23.4556 1787	21.4821 8462	19.7620 0778	18.2559 2546	16.9315 1790

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

...λική αξία μι... ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικ... ...νάδας.

n	.0025 (1/4 %)	.004167 (5/12 %)	.005 (1/2 %)	.005833 (7/12 %)	.0075 (3/4 %)
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0025 0000	2.0041 6667	2.0050 0000	2.0058 3333	2.0075 0000
3	3.0075 0625	3.0125 1736	3.0150 2500	3.0175 3403	3.0225 5625
4	4.0150 2502	4.0250 6952	4.0301 0013	4.0351 3631	4.0452 2542
5	5.0250 6258	5.0418 4064	5.0502 5063	5.0586 7460	5.0755 6461
6	6.0376 2523	6.0628 4831	6.0755 0188	6.0881 8354	6.1136 3135
7	7.0527 1930	7.0881 1018	7.1058 7939	7.1236 9794	7.1594 8358
8	8.0703 5110	8.1176 4397	8.1414 0879	8.1652 5285	8.2131 7971
9	9.0905 2697	9.1514 6749	9.1821 1583	9.2128 8349	9.2747 7856
10	10.1132 5329	10.1895 9860	10.2280 2641	10.2666 2531	10.3443 3940
11	11.1385 3642	11.2320 5526	11.2791 6654	11.3265 1306	11.4219 2194
12	12.1663 8277	12.2788 5549	12.3355 6237	12.3925 8520	12.5075 8636
13	13.1967 9872	13.3300 1739	13.3972 4018	13.4648 7537	13.6013 9325
14	14.2297 9072	14.3855 5913	14.4642 2639	14.5434 2048	14.7034 0370
15	15.2653 6520	15.4454 9896	15.5365 4752	15.6282 5710	15.8136 7923
16	16.3035 2861	16.5098 5520	16.6142 3026	16.7194 2193	16.9322 8183
17	17.3442 8743	17.5786 4627	17.6973 0141	17.8169 5189	18.0592 7394
18	18.3876 4815	18.6518 9063	18.7857 8791	18.9208 8411	19.1947 1849
19	19.4336 1727	19.7296 0684	19.8797 1685	20.0312 5593	20.3386 7888
20	20.4822 0131	20.8118 1353	20.9791 1544	21.1481 0493	21.4912 1897
21	21.5334 0682	21.8985 2942	22.0840 1101	22.2714 6887	22.6524 0312
22	22.5872 4033	22.9897 7330	23.1944 3107	23.4013 8577	23.8222 9614
23	23.6437 0843	24.0855 6402	24.3104 0323	24.5378 9386	25.0009 6336
24	24.7028 1770	25.1859 2053	25.4319 5524	25.6810 3157	26.1884 7069
25	25.7645 7475	26.2908 6187	26.5591 1502	26.8308 3759	27.3848 8411
26	26.8289 8619	27.4004 0713	27.6919 1059	27.9873 5081	28.5902 7075
27	27.8960 5865	28.5145 7549	28.8303 7015	29.1506 1036	29.8046 9778
28	28.9657 9880	29.6333 8622	29.9745 2200	30.3206 5558	31.0282 3301
29	30.0382 1330	30.7568 5866	31.1243 9461	31.4975 2607	32.2609 4476
30	31.1133 0883	31.8850 1224	32.2800 1658	32.6812 6164	33.5029 0184
31	32.1910 9210	33.0178 6646	33.4414 1666	33.8719 0233	34.7541 7361
32	33.2715 6983	34.1554 4090	34.6086 2375	35.0694 8843	36.0148 2991
33	34.3547 4876	35.2977 5524	35.7816 6686	36.2740 6045	37.2849 4113
34	35.4406 3563	36.4448 2922	36.9605 7520	37.4856 5913	38.5645 7819
35	36.5292 3722	37.5966 8268	38.1453 7807	38.7043 2548	39.8538 1253
36	37.6205 6031	38.7533 3552	39.3361 0497	39.9301 0071	41.1527 1612
37	38.7146 1171	39.9148 0775	40.5327 8549	41.1630 2630	42.4613 6149
38	39.8113 9824	41.0811 1945	41.7354 4942	42.4031 4395	43.7798 2170
39	40.9109 2674	42.2522 9078	42.9441 2666	43.6504 9562	45.1081 7037
40	42.0132 0405	43.4283 4199	44.1588 4730	44.9051 2352	46.4464 8164
41	43.1182 3706	44.6092 9342	45.3796 4153	46.1670 7007	47.7948 3026
42	44.2260 3265	45.7951 6547	46.6065 3974	47.4363 7798	49.1532 9148
43	45.3365 9774	46.9859 7866	47.8395 7244	48.7130 9018	50.5219 4117
44	46.4499 3923	48.1817 5357	49.0787 7030	49.9972 4988	51.9008 5573
45	47.[illegible] 8408	49.3825 1088	50.3241 6415	51.2889 [illegible]	53.2901 1215
46	48.6819 7924	50.5882 7134	51.5757 8498	52.5880 8575	54.6897 8799
47	[illegible]	51.7990 5581	52.8336 6390	53.8948 [illegible]	56.0999 6140
48	[illegible]	53.0148 8521	54.0978 3222	55.2092 [illegible]	57.5207 1111
49	52.[illegible]	54.2257 8056	55.3683 2138	56.5312 [illegible]	58.9521 1644
50	[illegible]	55.4617 [illegible]	[illegible].4451 5299	[illegible]	60.3042 5732

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.01 (1%)	.01125 (1⅛%)	.0125 (1¼%)	.015 (1½%)	.0175 (1¾%)
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0100 0000	2.0112 5000	2.0125 0000	2.0150 0000	2.0175 0000
3	3.0301 0000	3.0338 7656	3.0376 5625	3.0452 2500	3.0528 0625
4	4.0604 0100	4.0680 0767	4.0756 2695	4.0909 0338	4.1062 3036
5	5.1010 0501	5.1137 7276	5.1265 7229	5.1522 6693	5.1780 8939
6	6.1520 1506	6.1713 0270	6.1906 5444	6.2295 5093	6.2687 0596
7	7.2135 3521	7.2407 2986	7.2680 3762	7.3229 9419	7.3784 0831
8	8.2856 7056	8.3221 8807	8.3588 8809	8.4328 3911	8.5075 3045
9	9.3685 2727	9.4158 1269	9.4633 7420	9.5593 3169	9.6564 1224
10	10.4622 1254	10.5217 4058	10.5816 6637	10.7027 2167	10.8253 9945
11	11.5668 3467	11.6401 1016	11.7139 3720	11.8632 6249	12.0148 4394
12	12.6825 0301	12.7710 6140	12.8603 6142	13.0412 1143	13.2251 0371
13	13.8093 2804	13.9147 3584	14.0211 1594	14.2368 2960	14.4565 4303
14	14.9474 2132	15.0712 7662	15.1963 7988	15.4503 8205	15.7095 3253
15	16.0968 9554	16.2408 2848	16.3863 3463	16.6821 3778	16.9844 4935
16	17.2578 6449	17.4235 3780	17.5911 6382	17.9323 6984	18.2816 7721
17	18.4304 4314	18.6195 5260	18.8110 5336	19.2013 5539	19.6016 0656
18	19.6147 4757	19.8290 2257	20.0461 9153	20.4893 7572	20.9446 3468
19	20.8108 9504	21.0520 9907	21.2967 6893	21.7967 1636	22.3111 6578
20	22.0190 0399	22.2889 3519	22.5629 7854	23.1236 6710	23.7016 1119
21	23.2391 9403	23.5396 8571	23.8450 1577	24.4705 2211	25.1163 8938
22	24.4715 8598	24.8045 0717	25.1430 7847	25.8375 7994	26.5559 2620
23	25.7163 0183	26.0835 5788	26.4573 6695	27.2251 4364	28.0206 5490
24	26.9734 6485	27.3769 9790	27.7880 8403	28.6335 2080	29.5110 1637
25	28.2431 9950	28.6849 8913	29.1354 3508	30.0630 2361	31.0274 5915
26	29.5256 3150	30.0076 9526	30.4996 2802	31.5139 6896	32.5704 3969
27	30.8208 8781	31.3452 8183	31.8808 7337	32.9866 7850	34.1404 2238
28	32.1290 9669	32.6979 1625	33.2793 8429	34.4814 7867	35.7378 7977
29	33.4503 8766	34.0657 6781	34.6953 7659	35.9987 0085	37.3632 9267
30	34.7848 9153	35.4490 0769	36.1290 6880	37.5386 8137	39.0171 5029
31	36.1327 4045	36.8478 0903	37.5806 8216	39.1017 6159	40.6999 5042
32	37.4940 6785	38.2623 4688	39.0504 4069	40.6882 8801	42.4121 9955
33	38.8690 0853	39.6927 9829	40.5385 7120	42.2986 1233	44.1544 1305
34	40.2576 9862	41.1393 4227	42.0453 0334	43.9330 9152	45.9271 1527
35	41.6602 7560	42.6021 5987	43.5708 6963	45.5920 8789	47.7308 3979
36	43.0768 7836	44.0814 3417	45.1155 0550	47.2759 6921	49.5661 2949
37	44.5076 4714	45.5773 5030	46.6794 4932	48.9851 0874	51.4335 3675
38	45.9527 2361	47.0900 9549	48.2629 4243	50.7198 8538	53.3326 2365
39	47.4122 5085	48.6198 5906	49.8662 2921	52.4806 8366	55.2669 6206
40	48.8863 7336	50.1668 3248	51.4895 5708	54.2678 9391	57.2341 3390
41	50.3752 3709	51.7312 0934	53.1331 7654	56.0819 1232	59.2357 3124
42	51.8789 8946	53.3131 8545	54.7973 4125	57.9231 4100	61.2723 5654
43	53.3977 7936	54.9129 5879	56.4823 0801	59.7919 8812	63.3446 2278
44	54.9317 5715	56.5307 2957	58.1883 3686	61.6858 6794	65.4531 5367
45	56.4810 7472	58.1667 0028	59.9156 9108	63.6142 0096	67.5985 8286
46	58.0458 8547	59.8210 7566	61.6646 3721	65.5684 1398	69.7815 5908
47	59.6263 4432	61.4910 6276	63.4354 4518	67.5519 4018	72.0027 3687
48	61.2226 0777	63.1858 7097	65.2283 8824	69.5652 1929	74.2627 8425
49	62.8348 3385	64.8967 1201	67.0437 4310	71.6086 9758	76.5623 8298
50	64.4631 8218	66.6268 0002	68.8817 8989	73.6828 2804	78.9022 2468

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.02 (2%)	.0225 (2¼%)	.025 (2½%)	.0275 (2¾%)	.03 (3%)
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000
2	2.0200 0000	2.0225 0000	2.0250 0000	2.0275 0000	2.0300 0000
3	3.0604 0000	3.0680 0625	3.0756 2500	3.0832 5625	3.0909 0000
4	4.1216 0800	4.1370 3639	4.1525 1563	4.1680 4580	4.1836 2700
5	5.2040 4016	5.2301 1971	5.2563 2852	5.2826 6706	5.3091 3581
6	6.3081 2096	6.3477 9740	6.3877 3673	6.4279 4040	6.4684 0988
7	7.4342 8338	7.4906 2284	7.5474 3015	7.6047 0876	7.6624 6218
8	8.5829 6905	8.6591 6186	8.7361 1590	8.8138 3825	8.8923 3605
9	9.7546 2843	9.8539 9300	9.9545 1880	10.0562 1880	10.1591 0613
10	10.9497 2100	11.0757 0784	11.2033 8177	11.3327 6482	11.4638 7931
11	12.1687 1542	12.3249 1127	12.4834 6631	12.6444 1585	12.8077 9569
12	13.4120 8973	13.6022 2177	13.7955 5297	13.9921 3729	14.1920 2956
13	14.6803 3152	14.9082 7176	15.1404 4179	15.3769 2107	15.6177 9045
14	15.9739 3815	16.2437 0788	16.5189 5284	16.7997 8639	17.0863 2416
15	17.2934 1692	17.6091 9130	17.9319 2666	18.2617 8052	18.5989 1389
16	18.6392 8525	19.0053 9811	19.3802 2483	19.7639 7948	20.1568 8130
17	20.0120 7096	20.4330 1957	20.8647 3045	21.3074 8892	21.7615 8774
18	21.4123 1238	21.8927 6251	22.3863 4871	22.8934 4487	23.4144 3537
19	22.8405 5863	23.3853 4966	23.9460 0743	24.5230 1460	25.1168 6844
20	24.2973 6980	24.9115 2003	25.5446 5761	26.1973 9750	26.8703 7449
21	25.7833 1719	26.4720 2923	27.1832 7405	27.9178 2593	28.6764 8572
22	27.2989 8354	28.0676 4989	28.8628 5590	29.6855 6615	30.5367 8030
23	28.8449 6321	29.6991 7201	30.5844 2730	31.5019 1921	32.4528 8370
24	30.4218 6247	31.3674 0338	32.3490 3798	33.3682 2199	34.4264 7022
25	32.0302 9972	33.0731 6996	34.1577 6393	35.2858 4810	36.4592 6432
26	33.6709 0572	34.8173 1628	36.0117 0803	37.2562 0892	38.5530 4225
27	35.3443 2383	36.6007 0590	37.9120 0073	39.2807 5467	40.7096 3352
28	37.0512 1031	38.4242 2178	39.8598 0075	41.3609 7542	42.9309 2252
29	38.7922 3451	40.2887 6677	41.8562 9577	43.4984 0224	45.2188 5020
30	40.5680 7921	42.1952 6402	43.9027 0316	45.6946 0831	47.5754 1571
31	42.3794 4079	44.1446 5746	46.0002 7074	47.9512 1003	50.0026 7818
32	44.2270 2961	46.1379 1226	48.1502 7751	50.2698 6831	52.5027 5852
33	46.1115 7020	48.1760 1528	50.3540 3445	52.6522 8969	55.0778 4128
34	48.0338 0160	50.2599 7563	52.6128 8531	55.1002 2765	57.7301 7652
35	49.9944 7763	52.3908 2508	54.9282 0744	57.6154 8391	60.4620 8181
36	51.9943 6719	54.5696 1864	57.3014 1263	60.1999 0972	63.2759 4427
37	54.0342 5453	56.7974 3506	59.7339 4794	62.8554 0724	66.1742 2259
38	56.1149 3962	59.0753 7735	62.2272 9664	65.5839 3094	69.1594 4927
39	58.2372 3841	61.4045 7334	64.7829 7906	68.3874 8904	72.2342 3275
40	60.4019 8318	63.7861 7624	67.4025 5354	71.2651 4499	75.4012 5973
41	62.6100 2284	66.2213 6521	70.0876 1737	74.2280 1898	78.6632 9753
42	64.8622 2330	68.7113 4592	72.8398 0781	77.2692 8950	82.0231 9645
43	67.1594 6777	71.2573 5121	75.6608 0300	80.3941 9496	85.4838 9234
44	69.5026 5712	73.8606 4161	78.5523 2308	83.6050 2532	89.0484 0911
45	71.8927 1027	76.5225 0605	81.5161 3116	86.9041 7379	92.7198 6139
46	74.3305 6447	79.2442 6243	84.5540 3443	90.2940 3557	96.5014 5722
47	76.8171 7576	82.0272 5834	87.6678 8530	93.7771 2465	100.3965 0095
48	79.3535 1928	84.8728 7165	90.8595 8243	97.3559 9556	104.4083 5798
49	81.9405 8986	87.7825 1126	94.1310 7199	101.0332 8544	108.5406 4785
50	84.5794 0145	90.7576 1776	97.4843 4879	104.3117 0879	112.7968 6729

ΠΙΝΑΚΑΣ V. $s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Τελική αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων 1 νομισματικής μονάδας.

n	.035 (3½ %)	.04 (4 %)	.045 (4½ %)	.05 (5 %)	.055 (5½ %)
1	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000	1.0000 000
2	2.0350 000	2.0400 000	2.0450 000	2.0500 000	2.0550 000
3	3.1062 250	3.1216 000	3.1370 250	3.1525 000	3.1680 250
4	4.2149 429	4.2464 640	4.2781 911	4.3101 250	4.3422 664
5	5.3624 659	5.4163 226	5.4707 097	5.5256 313	5.5810 910
6	6.5501 522	6.6329 755	6.7168 917	6.8019 128	6.8880 510
7	7.7794 075	7.8982 945	8.0191 518	8.1420 085	8.2668 938
8	9.0516 868	9.2142 263	9.3800 136	9.5491 089	9.7215 730
9	10.3684 958	10.5827 953	10.8021 142	11.0265 643	11.2562 595
10	11.7313 932	12.0061 071	12.2882 094	12.5778 925	12.8753 538
11	13.1419 919	13.4863 514	13.8411 788	14.2067 872	14.5834 982
12	14.6019 616	15.0258 055	15.4640 318	15.9171 265	16.3855 907
13	16.1130 303	16.6268 377	17.1599 133	17.7129 828	18.2867 981
14	17.6769 864	18.2919 112	18.9321 094	19.5986 320	20.2925 720
15	19.2956 809	20.0235 876	20.7840 543	21.5785 636	22.4086 635
16	20.9710 297	21.8245 311	22.7193 367	23.6574 918	24.6411 400
17	22.7050 157	23.6975 124	24.7417 069	25.8403 664	26.9964 027
18	24.4996 913	25.6454 129	26.8550 837	28.1323 847	29.4812 048
19	26.3571 805	27.6712 294	29.0635 625	30.5390 039	32.1026 711
20	28.2796 818	29.7780 786	31.3714 228	33.0659 541	34.8683 180
21	30.2694 707	31.9692 017	33.7831 368	35.7192 518	37.7860 755
22	32.3289 022	34.2479 698	36.3033 780	38.5052 144	40.8643 097
23	34.4604 137	36.6178 886	38.9370 300	41.4304 751	44.1118 467
24	36.6665 282	39.0826 041	41.6891 963	44.5019 989	47.5379 983
25	38.9498 567	41.6459 083	44.5652 101	47.7270 988	51.1525 882
26	41.3131 017	44.3117 446	47.5706 446	51.1134 538	54.9659 805
27	43.7590 602	47.0842 144	50.7113 236	54.6691 264	58.9891 094
28	46.2906 273	49.9675 830	53.9933 332	58.4025 828	63.2335 105
29	48.9107 993	52.9662 863	57.4230 332	62.3227 119	67.7113 535
30	51.6226 773	56.0849 378	61.0070 697	66.4388 475	72.4354 780
31	54.4294 710	59.3283 353	64.7523 878	70.7607 899	77.4194 293
32	57.3345 025	62.7014 687	68.6662 452	75.2988 294	82.6774 979
33	60.3412 101	66.2095 274	72.7562 263	80.0637 708	88.2247 603
34	63.4531 524	69.8579 085	77.0302 565	85.0669 594	94.0771 221
35	66.6740 127	73.6522 249	81.4966 180	90.3203 074	100.2513 638
36	70.0076 032	77.5983 138	86.1639 658	95.8363 227	106.7651 888
37	73.4578 693	81.7022 464	91.0413 443	101.6281 389	113.6372 742
38	77.0288 947	85.9703 363	96.1382 048	107.7095 458	120.8873 242
39	80.7249 060	90.4091 497	101.4644 240	114.0950 231	128.5361 271
40	84.5502 777	95.0255 157	107.0303 231	120.7997 742	136.6056 141
41	88.5095 375	99.8265 363	112.8466 876	127.8397 630	145.1189 228
42	92.6073 713	104.8195 978	118.9247 885	135.2317 511	154.1004 636
43	96.8486 293	110.0123 817	125.2764 040	142.9933 387	163.5759 891
44	101.2383 313	115.4128 770	131.9138 422	151.1430 056	173.5726 685
45	105.7816 729	121.0293 920	138.8499 651	159.7001 559	184.1191 653
46	110.4840 314	126.8705 677	146.0982 135	168.6851 637	195.2457 194
47	115.3509 725	132.9453 904	153.6726 331	178.1194 218	206.9842 339
48	120.3882 566	139.2632 060	161.5879 016	188.0253 929	219.3683 668
49	125.6018 456	145.8337 343	169.8593 572	198.4266 626	232.4336 270
50	130.9979 102	152.6670 837	178.5030 283	209.3479 957	246.2174 764

ΠΙΝΑΚΑΣ VI. $P_{\overline{n}|i} = \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

Χρεωλύσιο 1 νομισματικής μονάδας. Ποσό που πρέπει να καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου για να εξοφλείται δάνειο 1 νομισματικής μονάδας.

n	$\frac{1}{4}\%$	$\frac{1}{3}\%$	$\frac{5}{12}\%$	$\frac{1}{2}\%$	$\frac{7}{12}\%$	$\frac{2}{3}\%$	n
1	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1.0000 0000	1
2	0.4993 7578	0.4991 6805	0.4989 6050	0.4987 5312	0.4985 4591	0.4983 3887	2
3	0.3325 0139	0.3322 2469	0.3319 4829	0.3316 7221	0.3313 9643	0.3311 2095	3
4	0.2490 6445	0.2487 5347	0.2484 4291	0.2481 3279	0.2478 2310	0.2475 1384	4
5	0.1990 0250	0.1986 7110	0.1983 4026	0.1980 0997	0.1976 8024	0.1973 5105	5
6	0.1656 2803	0.1652 8317	0.1649 3898	0.1645 9546	0.1642 5260	0.1639 1042	6
7	0.1417 8928	0.1414 3491	0.1410 8133	0.1407 2854	0.1403 7653	0.1400 2531	7
8	0.1239 1035	0.1235 4895	0.1231 8845	0.1228 2886	0.1224 7018	0.1221 1240	8
9	0.1100 0462	0.1096 3785	0.1092 7209	0.1089 0736	0.1085 4365	0.1081 8096	9
10	0.0988 8015	0.0985 0915	0.0981 3929	0.0977 7057	0.0974 0299	0.0970 3654	10
11	0.0897 7840	0.0894 0402	0.0890 3090	0.0886 5903	0.0882 8842	0.0879 1905	11
12	0.0821 9370	0.0818 1657	0.0814 4082	0.0810 6643	0.0806 9341	0.0803 2176	12
13	0.0757 7595	0.0753 9656	0.0750 1866	0.0746 4224	0.0742 6730	0.0738 9385	13
14	0.0702 7510	0.0698 9383	0.0695 1416	0.0691 3609	0.0687 5962	0.0638 8474	14
15	0.0655 0777	0.0651 2491	0.0647 4378	0.0643 6436	0.0639 8666	0.0636 1067	15
16	0.0613 3642	0.0609 5223	0.0605 6988	0.0601 8937	0.0598 1068	0.0594 3382	16
17	0.0576 5587	0.0572 7056	0.0568 8720	0.0565 0579	0.0561 2632	0.0557 4880	17
18	0.0543 8433	0.0539 9807	0.0536 1387	0.0532 3173	0.0528 5165	0.0524 7363	18
19	0.0514 5722	0.0510 7015	0.0506 8525	0.0503 0253	0.0499 2198	0.0495 4361	19
20	0.0488 2288	0.0484 3511	0.0480 4963	0.0476 6645	0.0472 8556	0.0469 0696	20
21	0.0464 3947	0.0460 5111	0.0456 6517	0.0452 8163	0.0449 0050	0.0445 2176	21
22	0.0442 7278	0.0438 8393	0.0434 9760	0.0431 1380	0.0427 3251	0.0423 5374	22
23	0.0422 9455	0.0419 0528	0.0415 1865	0.0411 3465	0.0407 5329	0.0403 7456	23
24	0.0404 8121	0.0400 9159	0.0397 0472	0.0393 2061	0.0389 3925	0.0385 6062	24
25	0.0388 1298	0.0384 2307	0.0380 3603	0.0376 5186	0.0372 7055	0.0368 9210	25
26	0.0372 7312	0.0368 8297	0.0364 9581	0.0361 1163	0.0357 3043	0.0353 5220	26
27	0.0358 4736	0.0354 5702	0.0350 6978	0.0346 8565	0.0343 0460	0.0339 2664	27
28	0.0345 2347	0.0341 3299	0.0337 4572	0.0333 6167	0.0329 8082	0.0326 0317	28
29	0.0332 9093	0.0329 0033	0.0325 1307	0.0321 2914	0.0317 4853	0.0313 7123	29
30	0.0321 4059	0.0317 4992	0.0313 6270	0.0309 7892	0.0305 9857	0.0302 2166	30
31	0.0310 6449	0.0306 7378	0.0302 8663	0.0299 0304	0.0295 2299	0.0291 4649	31
32	0.0300 5569	0.0296 6496	0.0292 7791	0.0288 9453	0.0285 1482	0.0281 3875	32
33	0.0291 0806	0.0287 1734	0.0283 3041	0.0279 4727	0.0275 6791	0.0271 9231	33
34	0.0282 1620	0.0278 2551	0.0274 3873	0.0270 5586	0.0266 7687	0.0263 0176	34
35	0.0273 7533	0.0269 8470	0.0265 9809	0.0262 1550	0.0258 3691	0.0254 6231	35
36	0.0265 8121	0.0261 9065	0.0258 0423	0.0254 2194	0.0250 4376	0.0246 6970	36
37	0.0258 3004	0.0254 3957	0.0250 5336	0.0246 7139	0.0242 9365	0.0239 2013	37
38	0.0251 1843	0.0247 2808	0.0243 4208	0.0239 6045	0.0235 8316	0.0232 1020	38
39	0.0244 4335	0.0240 5311	0.0236 6736	0.0232 8607	0.0229 0925	0.0225 3687	39
40	0.0238 0204	0.0234 1194	0.0230 2644	0.0226 4552	0.0222 6917	0.0218 9739	40
41	0.0231 9204	0.0228 0209	0.0224 1685	0.0220 3631	0.0216 6046	0.0212 8928	41
42	0.0226 1112	0.0222 2133	0.0218 3637	0.0214 5622	0.0210 8087	0.0207 1031	42
43	0.0220 5724	0.0216 6762	0.0212 8295	0.0209 0326	0.0205 2836	0.0201 5843	43
44	0.0215 2855	0.0211 3912	0.0207 5474	0.0203 7541	0.0200 0110	0.0196 3180	44
45	0.0210 2339	0.0206 3415	0.0202 5005	0.0198 7117	0.0194 9740	0.0191 2875	45
46	0.0205 4022	0.0201 5118	0.0197 6743	0.0193 8894	0.0190 1571	0.0186 4772	46
47	0.0200 7762	0.0196 8880	0.0193 0537	0.0189 2733	0.0185 5465	0.0181 8732	47
48	0.0196 3433	0.0192 4572	0.0188 6263	0.0184 8503	0.0181 1291	0.0177 4626	48
49	0.0192 0915	0.0188 2077	0.0184 3801	0.0180 6087	0.0176 8932	0.0173 2334	49
50	0.0188 0099	0.0184 1285	0.0180 3044	0.0176 5376	0.0172 8278	0.0169 1749	50

ΠΙΝΑΚΑΣ VII.

Αριθμός ημερών του έτους, για τον υπολογισμό των τοκοφόρων ημερών.

ΗΜΕΡΑ	Ι	Φ	Μ	Α	Μ	Ι	Ι	Α	Σ	Ο	Ν	Δ	ΗΜΕΡΑ
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	..	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30	..	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31	..	90	...	151	...	212	243	...	304	...	365	31

Σημείωση: Για τα δίσεκτα έτη, κάθε αριθμός του πίνακα, από την 1η Μαρτίου και έπειτα, πρέπει να αυξάνεται κατά μία μονάδα.