Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών

Και

Μηχανικών Υπολογιστών, Πανεπιστημίου Πελοποννήσου (Πάτρα)

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 1ης ΤΑΞΗΣ
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

ΤΑΛΙΑΝΗΣ ΗΛΙΑΣ

Α.Μ:2048

Εισηγητής: Δρ. ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΥΓΙΑΣ

ΠΑΤΡΑ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2022

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τις διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης και εφαρμογή στα ηλεκτρικά κυκλώματα. Θα δούμε τι σημαίνει ο όρος διαφορικές εξισώσεις πού εφαρμόζονται όπως στην ηλεκτροδυναμική, στην κλασική μηχανική, στην εξίσωση θερμότητας στην γενική θεωρία της σχετικότητα, στην χημεία ,στην βιολογία, στην οικονομία. Κατόπιν θα εξετάσουμε τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης πότε μια Δ.Ε καλείται ότι έχει κανονική μορφή και με μερικές παραγώγους επίσης δούμε τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που είναι σημαντικές για τα ηλεκτρικά κυκλώματα και πότε είναι ομογενής την μορφή τους και την γενική λύση τους .Τέλος θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις πότε καλούμε λύση του ολοκληρώματος και την ιδιάζουσα λύση . Το δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας είναι αφιερωμένο στα ηλεκτρικά κυκλώματα και πώς συνδέονται οι διαφορικές εξισώσεις. Θα δούμε στην αρχή τί είναι η ένταση του ρεύματος , η ενέργεια ισχύς , τι είναι οι αντίσταση , αυτεπαγωγή με το πηνίο , χωρητικότητα με τον πυκνωτή , σε παράδειγμα θα αναφέρουμε πως συνδέονται σε σειρά και ποιοι οι τύποι εισόδων του κυκλώματος τι είναι η διέγερση του κυκλώματος. Συνεχίζοντας θα εστιάσουμε πολύ στα ηλεκτρικά κυκλώματα πρώτης τάξης και πότε έχουμε την μεταβατική περίοδο , την απόκριση σε αρχικές συνθήκες . Προχωράμε στην εκφόρτωση του πυκνωτή την συνεχή τάση στα άκρα ενός πυκνωτή και ενός πηνίου και έπονται τα σύνθετα κυκλώματα RL και RC . Θα ακολουθήσουν οι στοιχειώδες ομαλοί είσοδοι δηλαδή εκθετική είσοδος πότε έχουμε απόκριση σε παλμό για το ρεύμα και την τάση. Τέλος θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην λειτουργία των κυκλωμάτων με την κρουστική απόκριση και τον αναλυτικό προσδιορισμό της απόκρισης και των ημιτονοειδών διεγέρσεων RC και RL το πρόβλημα αναλύσεως του δικτύου και θα σχολιάσουμε τις παρατηρήσεις σχετικά με τις αρχικές συνθήκες , επίσης πολύ σημαντικές είναι οι ιδιότητες των γραμμικών κυκλωμάτων και πότε χρησιμοποιούμε τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις , την αρχή της επαλληλίας και την ευστάθεια της απόκρισης .Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας θα δούμε σφαιρικά τον μετασχηματισμό Laplace την μορφή του που είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση ,την μιγαδική μεταβλητή του και την μιγαδική συνάρτηση .Θα δούμε πώς συνδέεται ο μετασχηματισμός Laplace με τις εξισώσεις των ηλεκτρικών κυκλωμάτων και θα αναφέρουμε μερικά παραδείγματα , όπως την ωμική αντίσταση R το πηνίο με την αυτοεπαγωγή L τον πυκνωτή με την χωρητικότητα C και το πεδίο S.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Τί είναι οι διαφορικές εξισώσεις :

Στους κλάδους των Θετικών και των Τεχνολογικών επιστημών όπως φυσική, πληροφορικής (τηλεπικοινωνίες), βιολογία, χημεία, ιατρικής ,ακόμα και στο σχεδιασμό μεταξύ αλληλεπιδράσεων για την κατασκευή μιας γέφυρας. Γενικά πολλά φαινόμενα είναι πολύπλοκα και δεν γίνεται να τα καταγράψουμε με ακρίβεια σε μαθηματικό τρόπο , υπάρχουν πολλά προβλήματα και χρησιμοποιούμαι κάποια μαθηματικά μοντέλα που λόγο φυσικών νόμων που επηρεάζουν την διαδικασία των μεταβλητών που συνδέονται με τον ρυθμό μεταβολής τους και έτσι εκφράζουμε με συναρτήσεις και τις παραγώγους .
Ο σκοπός μας είναι οι ανάλυση και αν είναι εφικτό οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης με την μελέτη του προτύπου ώστε να μπορούμε να προβλέψουμε κάποια φαινόμενα όπως σε ένα σύστημα ηλεκτρικού δικτύου πάρα πολλών κυκλωμάτων , την διάδοση του ήχου πάνω από την θάλασσα ακόμα και στην βιολογική ατομική ανάπτυξη .
Για να καταλάβουμε αυτά τα φυσικά φαινόμενα με την χρήση των διαφορικών εξισώσεων από τους επιστήμονες είναι οι εξής
Διαδικασίες:

Α)Συλλογή δεδομένων του προβλήματος μας.

Β)Ορισμός μαθηματικού προτύπου(τις περισσότερες φορές έχει μια διαφορική εξίσωση) που περιγράφει όσο το δυνατόν να είναι πλησιέστερο στο πραγματικό φαινόμενο και να έχει την δυνατότητα να χρησιμοποιούμαι τις μαθηματικές μεθόδους.
Αυτό ονομάζεται δημιουργία προτύπου .

Γ)Η τελευταία διαδικασία είναι η λύση και επεξεργασία της διαφορικής εξίσωσης με την ύπαρξη ανάλυσης ευαισθησίας των πειραματικών μετρήσεων .Είναι η αξιοπιστία λύσης του μαθηματικού προβλήματος.
Έστω ότι το πρότυπο είναι αμφισβητήσιμο και πρέπει να διορθωθεί και οι παρατηρήσεις λάθος , η θεωρία δεν μπορεί να αληθεύει ,αυτό σημαίνει ότι η μαθηματική μας λύση δεν ακολουθεί με τις παρατηρήσεις.
Εδώ πρέπει να αναφέρουμε μία σημαντική εξίσωση της κλασικής μηχανικής είναι η εξίσωση της κίνησης του Newton η οποία είναι πολύ ακριβής στις μικρές ταχύτητες ενώ με την ταχύτητα ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι ανακριβής.

1.2 Εφαρμογές:

Ηλεκτροδυναμική:

Οι σύγχρονες ηλεκτρικές συσκευές και τηλεπικοινωνίες έχουν ως αρχή τις εξισώσεις Maxwell με συνδυασμό τον νόμο της δύναμης Λόρεντζ. Οι εξισώσεις Maxwell είναι σύνολο Μ.Δ.Ε σε συνδυασμό με ένα φορτισμένο σωματίδιο σε ένα ηλεκτρικό πεδίο όταν του ασκείται μία δύναμη. Γενικά οι εξισώσεις Maxwell μας περιγράφουν τον τρόπο που τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία σχετίζονται με τις πηγές και μεταξύ τους

Κλασσική μηχανική :

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε μία σημαντική εξίσωση της κλασικής μηχανικής είναι η εξίσωση της κίνησης του Newton η οποία είναι πολύ ακριβής στις μικρές ταχύτητες ενώ με την ταχύτητα ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι ανακριβής. Είναι η διαφορική έκφραση του 2ου νόμου του Newton που η κίνηση ενός σωματιδίου καθορίζεται αν κινηθεί μέσω της επιδράσεις μίας άλλης δύναμης

Εξίσωση θερμότητας:

Η εξίσωση της θερμότητας είναι μια Δ.Ε αλλιώς θερμίδες εξισώσεις. Σκοπός είναι σε ένα μέρος που δέχεται θερμότητα να μπορέσουμε να μοντελοποιήσουμε τον τρόπο αυτό .Είναι από τις πιο ακριβής και καλομελετημένες διαφορικές εξισώσεις. Πρώτος που ασχολήθηκε με αυτό ήταν ο Josheph fourier το 1822.

Γενική θεωρία της σχετικότητα:

Η γενική σχετικότητα έχει γίνει η κεντρική πύλη της θεωρητικής φυσικής και ειδικότερα στην αστροφυσική και την φυσική σωματιδίων υψηλής ενέργειας. Πρώτος που μας διατύπωσε αυτήν την θεωρία είναι Άλμπερτ Αϊνστάιν που μας εξηγεί μέσα από ένα σύνολο 10 Μ.Δ.Ε την επίδραση της βαρύτητας ως αποτέλεσμα η δομή του χωροχρόνου εξαρτάται από τους παρατηρητές που βρίσκονται σε ένα αδρανές σύστημα και εξαρτάται από την ύλη και την ενέργεια .Είναι η εξίσωση της καμπυλότητας του χωροχρόνου με την ενέργεια και την ορμή μέσα σε αυτό.

Χημεία:

Στην χημεία έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στις χημικές αντιδράσεις και στον νόμο του ρυθμού. Πιο αναλυτικά η χημική αντίδραση είναι μια Δ.Ε ,που το ισοζύγιο μάζας συνδέεται με την ταχύτητα αντίδρασης για την εξίσωση ρυθμού για ένα σύστημα που μελετάμε.

Βιολογία:

Ένα από τα προβλήματα στην βιολογία είναι τα πληθυσμιακά μοντέλα και τον χρόνο εξέλιξής του πληθυσμού είτε στον ανθρώπινο , πουλιών η ψαριών σε ένα περιβάλλον ελεύθερο η ελεγχόμενο. Μία εξίσωση που έχει αυτήν την ιδιότητα είναι η εξίσωση του Verhulst που ήθελε την βελτίωση του Μαλθουσιανού μοντέλου. Άλλες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων είναι το μοντέλο του von Bertalanffy για την βιολογική ατομική ανάπτυξη ,την δυναμική replicator και το μοντέλο Hodgkin-Huxley για την δυνατότητα νευρικών αντιδράσεων.

Οικονομία:

Στην οικονομία οι διαφορικές εξισώσεις έχουν την δυνατότητα να εξηγήσουν με την τεχνολογική βοήθεια για την μακροπρόθεσμη οικονομική ανάπτυξη, συσσώρευση του κεφαλαίου ,αύξηση παραγωγικότητας. Ένα μοντέλο είναι το Solow Swan με σύστημα μη γραμμικό που αποτελείται από μια διαφορική εξίσωση .Αυτό το σύστημα έχει πολύ καλά μαθηματικά χαρακτηριστικά που μοντελοποιεί τις εξελίξεις του κατά κεφαλήν αποθέματος κεφαλαίου. Ένα άλλο μοντέλο είναι το Black scholes για την χρηματοπιστωτική αγορά που δίνει μια θεωρητική εκτίμηση της τιμής. Όταν ένας ρητός τύπος δεν καθίσταται δυνατός χρησιμοποιούμαι αυτό το μοντέλο που είναι μια διαφορική εξίσωση που διέπει τη τιμή της επιλογής και επιτρέπει την τιμολόγηση με χρήση μαθηματικών μεθόδων.

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Μια εξίσωση που περιέχει μια ή περισσότερες άγνωστες συναρτήσεις και τις παράγωγους της μέχρι μιας ορισμένης τάξεως ονομάζεται διαφορική εξίσωση. Όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι μιας μεταβλητής τότε η εξίσωση ονομάζεται συνηθής διαφορική εξίσωση, ενῶ όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι πολλών μεταβλητών τότε η εξίσωση ονομάζεται μερική διαφορική εξίσωση. Για λόγους απλότητας λέγοντας διαφορικές εξισώσεις θα εννοούμε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, τις οποίες και εξετάζουμε.

Η γενική ή πεπλεγμένη μορφή μιας συνήθης διαφορικής εξισώσεως είναι η εξής:

$$F\left(x, y, y', y^n, \ldots., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Η διαφορική εξίσωση (1) καλείται γενικά διαφορική εξίσωση n - τάξεως (διότι περιέχει παράγωγους μέχρι n τάξης).Σε μερικές περιπτώσεις μια διαφορική εξίσωση μπορεΐ να γραφεΐ και στην μορφή:

$$y^{(n)} = \left(x, y, y', y^n, \ldots., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) \qquad (2)$$

Η μορφή (2) ονομάζεται κανονική ή λυμένη μορφή της διαφορικής εξισώσεως. Ονομάζουμε λύση της διαφορικής εξισώσεως κάθε πραγματική συνάρτηση y(x) , ορισμένη και n φορές παραγωγίσιμη σε κατάλληλο ανοιχτό διάστημα I ⊂R, έτσι ώστε η συνάρτηση F να ορίζεται και να ισχύει η (1) ή η (2) για κάθε x∈I.

Το x ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή και το y άγνωστη συνάρτηση. Το γράφημά κάθε λύσεως y(x) ονομάζεται ολοκληρωτική καμπύλή της διαφορικής εξισώσεως.

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$y^n = xy' - y^2$$

είναι δευτέρας τάξεως διαφορική εξίσωση σε κανονική (λυμένη) μορφή.

Η διαφορική εξίσωση της ταλάντωσης:

$$\mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2} = -k\ x. \quad m, k > 0$$

Μια διαφορική εξίσωση μπορεί να μην έχει λύση, να έχει μοναδική λύση ή να έχει περισσότερες από μια λύσεις. Στην τελευταία περίπτωση, συνηθώς αναζητάμε μια εκ των λύσεων, έτσι ώστε να ικανοποιούνται κάποιες συνθήκες, οι οποίες συνηθώς αφορούν το φυσικό πρόβλημα από το οποίο προέρχεται η διαφορική εξίσωση .

Καλούμε **τάξη** μιας διαφορικής εξίσωσης την τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση .Μια διαφορική εξίσωση n- τάξης περιγράφεται από μία εξίσωση της μορφής όπως η 1 με F είναι μια συνάρτηση n+2 μεταβλητών που εν γένει εξαρτάται από όλες ή μερικές από αυτές τις παραμέτρους $, y, y', \dots, y^{n}$. Την 1 την ονομάζουμε πλεγμένη μορφή της δ.ε μπορούμε να την λύσουμε ως προς $y^{(n)}$ τότε :

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

Καλείται κανονική μορφή της διαφορικής εξίσωσης .

Ο όρος «συνήθης» διαφορική εξίσωση χρησιμοποιείται σε αντιδιαστολή με τον όρο **διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους**, η οποία είναι μια εξίσωση που περιλαμβάνει μια άγνωστη συνάρτηση πολλών μεταβλητών και κάποια/κάποιες από τις μερικές παραγώγους αυτής .

$$6h_x - 3h_y = 5(x+y)$$

Καλούμε Γραμμική Δ.Ε n-τάξης η οποία είναι της μορφής:

$$y^{(n)}(x) + a\ (x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a(x) \cdot y'(x) + a\ (x) \cdot y(x) = b(x) \qquad (3)$$

Με $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ πραγματικές συναρτήσεις αντίθετα αν δεν είναι της μορφής (3) τότε είναι μη γραμμική .

Έστω η

$$b_0(x) = b_{0,}\ b_1(x) = b_1, \dots, b_{n-1}(x) = a_{n-1} \ \ \forall x$$

Με τα $b_{0,} b_1, \dots, b_{n-1}$ πραγματικές σταθερές , τότε η 3 καλείται γραμμική Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές αντίθετα θεωρείται γραμμική Δ.Ε με μεταβλητούς συντελεστές.

Καλούμε λύση (ή ολοκλήρωμα) της δ.ε. (1) (ή της (2)), κάθε συνάρτηση y = y(x) που την επαληθεύει ταυτότητά. Η γραφική παράσταση της y είναι μια καμπύλη στο επίπεδο που καλείται **ολοκληρωτική καμπύλη** της δ.ε. Τονίζουμε εδώ ότι οι λύσεις μιας δ.ε. (αν υπάρχουν) είναι πάντα **συναρτήσεις** σε αντίθεση με τις λύσεις μιας αλγεβρικής εξίσωσης που είναι αριθμοΐ. Μια Δ.Ε έχει άπειρες λύσεις

$$y' = x$$

Με συνάρτηση $y = \frac{x^2}{2} + c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

όπως προκύπτει εύκολα με απλή ολοκλήρωση. Ομοίως οι λύσεις της δ.ε.

$$y'' = x$$

προκύπτουν εύκολα με δυο ολοκληρώσεις: $y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\ ,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Στα παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε ότι όταν η λύση μιας δ.ε. προέρχεται από *n*-ολοκληρώσεις τότε η λύση εξαρτάται από *n*- αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης. Αν η λύση όλων των δ.ε είναι πρώτης τάξης εξαρτάται από μία σταθερά , μπορεί όμως μια δ.ε να έχει μόνον μια πραγματική λύση τη μηδενική συνάρτηση και να μην εξαρτάται από σταθερά .όπως

$$(y'-1)(y'-y)=0$$

Έχει λύση $(y-c)(y-ce^{x})=0$ πουε ξαρτάται από δυο(και όχι μια) σταθερές.

Καλούμε γενική λύση της δ.ε. (1) (ή (2)) κάθε λύση της μορφής

$$\mathrm{y(x)} = \varphi(\mathrm{x}, \mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}) \qquad (4)$$

Με $\mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}$ ίναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. **Μερική λύση** της δ.ε. (1) (ή (2)) καλείται κάθε συνάρτηση που ικανοποιεΐ τη δ.ε. και η οποία προκύπτει από τη γενική λύση για συγκεκριμένη επιλογή των σταθερών $\mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}$. Οι λύσεις (2.4) παριστάνουν στο επίπεδο μια n-παραμετρική οικογένεια **ολοκληρωτικών καμπυλών** της δ.ε. Αν οι παραπάνω λύσεις δίνονται σε πλεγμένη μορφή, δηλ. στη μορφή

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}(\mathrm{x}), \mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}) = 0$$

Με $\mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}$ είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές και η συνάρτηση y ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, τότε μιλάμε για το **γενικό ολοκλήρωμα** της δ.ε. (1) ή της (2).

Καλούμε ιδιάζουσα λύση (**ή ιδιάζον ολοκλήρωμα**) της δ.ε. (2) (ή (1)) κάθε λύση της δ.ε. που δεν προκύπτει από τη γενική λύση (ή το γενικό ολοκλήρωμα) της δ.ε. για καμιά επιλογή των παραμέτρων c,…,c_n Το σύνολο των λύσεων μιας δ.ε. καλείται **πλήρης λύση** της δ.ε. (ή

πλήρες ολοκλήρωμα της δ.ε.). Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η γενική λύση και η πλήρης λύση δεν ταυτίζονται πάντα

Καλούμε πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) όταν οι πραγματικοί αριθμοί $x, y, \ldots, y_{n-1}$ όπου η εύρεση μίας λύσης της δ.ε (1) και (2) ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Η εύρεση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης, η οποία ικανοποιεί κάποιες συνθήκες, ονομάζεται πρόβλημα αρχικών τιμών ή πρόβλημα Cauchy και οι συνθήκες οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται ονομάζονται αρχικές συνθήκες ή συνθήκες Cauchy.

Ύπαρξης και μοναδικότητας για δ.ε. 1ης τάξης και 1ου βαθμού

Μια δ.ε. 1ης τάξης περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής

$$F(x,y(x),y'(x))=0, \qquad (3)$$

Όπου η F είναι μια γνωστή πραγματική συνάρτηση που μπορεί όμως να εξαρτάται από κάποιες ή και όλες τις παραμέτρους x,y,y'. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς y' τότε

$$y' = f(x,y(x)) \qquad (4)$$

*την ονομάζουμε **κανονική μορφή της διαφορικής εξίσωσης .***

*Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ϕ καλείται **πλεγμένη** (ή **κανονική**) λύση της (3) (ή της (3)) σε κάποιο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ αν επαληθεύει την (3) (ή τη (4)) για κάθε $x \in I$.΄Εάν πρόβλημα αρχικών τιμών αποτελείται από την (3) (ή τη (4)) μαζί με μια αρχική συνθήκη της μορφής*

$$y(x_0) = y_0$$

Αν δοθεῖ μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών

$$y = g(x,c),$$

τότε μπορούμε να βρούμε τη δ.ε. της οποίας η παραπάνω είναι γενική λύση παραγωγίζοντας και στη συνέχεια απαλείφοντας τη σταθερά από τις σχέσεις

$$\begin{cases} y = g(x,c) \\ y' = g'(x,c) \end{cases}$$

Έστω : y=cx+3

Τότε y'=c

Η δ.ε με γενική λύση y=cx+3 είναι η y=x y'+3.

Η (3) εξηγεί ότι κάθε σημείο (χ,y) , η τιμή f(x,y) είναι λύση στο σημείο της δ.ε και αν θεωρήσουμε ότι το D με f ορίζεται και είναι συνεχής τότε το κάθε σημείο (x,y) $\in D$ ντιστοιχεί ένα ευθύγραμμο τμήμα με κλίση ίση με $f(x, y)$.Το πεδίο κλήσεων της δ.ε είναι ο σχεδιασμός αυτών σε μικρές περιοχές με πυκνά πλήθη σημείων (x,y) $\in D$, από αυτό προκύπτει ως γεωμετρική εικόνα δηλαδή ένα σύνολο τμημάτων.

Κάθε καμπύλη $y = y(x)$ που σε κάθε σημείο της εφάπτεται του πεδίου κλίσεων είναι ***ολοκληρωτική καμπύλη*** *της δ.ε., δηλ. είναι λύση της δ.ε. Αν μάλιστα θεωρήσουμε και* αρχική τιμή $y_0 = y(x_0)$, τότε όλες οι καμπύλές (αν υπάρχουν) που διέρχονται από το σημείο $(x_0,y_0)\in D$ και σε κάθε σημείο τους εφάπτονται του πεδίου κλίσεων είναι **ολοκληρωτικές καμπύλές** της δ.ε. Ένα σημαντικό ερώτημα σ' αυτή την κατεύθυνση είναι το εξής:

• πότε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών έχει λύση και επιπρόσθετα

• αν έχει λύση, υπό ποιες συνθήκες η λύση αυτή είναι μοναδική.

Το ακόλουθο Θεώρημα μας δίνει ικανές συνθήκες (τοπικής) ύπαρξης και μοναδικότητας του προβλήματος αρχικών τιμών.

Picard–Lindelö

Έστω το Π.Α.Τ

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (5)$$

Αν οι συναρτήσεις f κα ι $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ είναι συνέχεις σ' ένα ορθογώνιο T ∂y

κέντρου (x_0 , y_0), τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (5) έχει μοναδική λύση $y = y(x)$ για x σε κατάλληλη περιοχή του x_0 .

αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ορθογώνιο κέντρου (x_0,y_0) , τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών της 5 έχει λύση y=y(x) στην κατάλληλη περιοχή του σημείου χ_0 αλλα δεν είναι και μοναδική.

Μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard.Αρχικά κάνουμε την υπόθεση συνέχειας της f μετέπειτα ολοκληρώνουμε την y'=f(x,y) και έχουμε

$$y(x)=y(x_0)+\int_X^X f(t,y)dt,$$

είναι ισοδύναμη της 5 στην συνέχεια έχουμε:

$$\begin{cases} y_0(x) = y(x_0) \\ y_n(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \quad n = 1, \dots, \end{cases}$$

και αποδεικνύουμε με την επιπλέον συνθήκη συνέχειάς για την f_y ότι υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} y_n(x)= y(x)$. Εστω *f* είναι μια συνεχής συνάρτηση σε διάστημα *I* της πραγματικής ευθείας. Στο εξής με το συμβολισμό

$$\int f(x)dx.$$

θα δηλώνουμε μια **συγκεκριμένη** αντιπαράγωγο της *f*. Πρέπει να θυμόμαστε ότι αν *F*,*G* είναι δυο αντιπαράγωγοι της *f* , τότε $F=G+c$, $c\in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά.

Παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων :

Διαχώριση μεταβλητής:

Έστω η $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 2x}$

$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 2x} \Rightarrow dy = 2xdx$ και $\int dy = \int 2x\, dx \Rightarrow y = x^2 + c$

Έχουμε την εξίσωση: $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$, για $x > 0\ και\ y > 0.$

Για την παραπάνω εξίσωση διαχωρίζουμε τις δύο μεταβλητές , ως ακολούθως: $\frac{dy}{y} = \frac{3y}{x}$,

Οπότε, ολοκληρώνοντας δεξί και αριστερό μέλος παίρνουμε: $\boldsymbol{ln|y| = 3ln|x| + c}$.Πρέπει να ισχύει ότι $x > 0$, $y > 0$, λύση της Δ.Ε είναι: $y = c_1 x^3$, $όπου\ c_1 = e^c > 0.$

Ομογενείς

Είναι της μορφής: $\mathbf{y}' = \mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right)$, **με** $\boldsymbol{x \neq 0}$. **Θέτουμε** $\boldsymbol{\frac{y}{x} = u}$. **άρα :** $\boldsymbol{u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)}$

Έχω την Δ.Ε: $y' = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \gamma\iota\alpha \;\; x \neq 0.$

Η Διαφορική Εξίσωση είναι της μορφής (2.2.2) με : $f(x, y) = e^{2u} + \frac{y}{x} = F(\frac{y}{x})$.

Εδώ κάνουμε την αντικατάσταση (2.3.3) :$xu' + u = e^{2u} + u$,

Άρα: $xu' = e^{2u}$.

Η τελευταία είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, η οποία επίσης γράφεται : $e^{-2u}u' = \frac{1}{x}$,

και μετά από αόριστη ολοκλήρωση ευρίσκουμε: $-\frac{1}{2}e^{-2u} = ln|x| + c$.

Από την τελευταία θέτοντας $u = \frac{y}{x}$ και $c = lnc_1$, λαμβάνουμε το γενικό ολοκλήρωμα

$$-\frac{1}{2}e^{-2\frac{y}{x}} = ln|c_1 x|,$$

από το οποίο προκύπτει η γενική λύση της Δ.Ε.: $y(x) = -\frac{x}{2}ln(-2ln|c_1 x|)$.

Με την ίδια διαδικασία επιλύονται και Δ.Ε. της μορφής: $y'(x) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}, \mu\varepsilon \; x \neq 0$, (2.3.8)

όπου οι συναρτήσεις p(x,y) και q(x,y) είναι ομογενείς ως προς το x και y του ίδιου βαθμού ομογένειας m , δηλαδή ισχύουν

$$p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m p(x, y) \kappa\alpha\iota q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m q(x, y), \qquad (2.3.9)$$

Άρα

$$p(x, y) = x^m p(1, \frac{y}{x}) \;\kappa\alpha\iota\; q(x, y) = x^m p(1, \frac{y}{x}) \quad (2.3.10)$$

και έτσι η 2.8 γράφεται : $y'(x) = \frac{p(1,\frac{y}{x})}{q(1,\frac{y}{x})} = \frac{P(\frac{y}{x})}{Q(\frac{y}{x})}$).

Ακριβής Διαφορικές εξισώσεις:

Θα είναι ακριβής αν και μόνο αν $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ αλλιώς θα υπάρχει μια συνάρτηση $\varphi(x,y)=c$ που θα έχει $\frac{\partial \Phi}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial \Phi}{\partial y}=Q(x,y)$.

Έστω η συνάρτηση :$(y\ cos\ x)dx+(sin\ x-y^2)dy=0$

Ισχύει : $P(x,y)=y\ cosx\ Q(x,y)=-sinx-y^2$

Ελέγχουμε την συνθήκη που υποδεικνύει το αν η εξίσωση είναι τελικά πλήρης ή όχι και θα πρέπει να ισχύει :$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=cos\ x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}\ =cos\ x$

Άρα είναι ακριβής διαφορική εξίσωση.

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση

Γενική μορφή : $\boldsymbol{y'+P(x)y=Q(x)}$

πρέπει να βρούμε την $\boldsymbol{y_0}$ της αντίστοιχης ομογενούς: $\boldsymbol{y_0=e^{-\int P(x)}}$

Και να βρούμε την γενική λύση : $\boldsymbol{y=y_0\int\frac{Q(x)}{y_0}dx}$

Έστω η εξίσωση $y'+x^3y=2x^3$

$P(x)=x^3$ και $Q(x)=\ 2x^3$ και πρέπει :

1) $y_0=e^{-\int\ p(x)dx}$ $=e^{-\int\ x^3dx}=e^{-\frac{x^4}{4}}$
2) $y=y_0\int\frac{Q(x)}{y_0}dx=e^{-\frac{x^4}{4}}\int\frac{2x^3}{e^{-\frac{x^4}{4}}}dx=e^{-\frac{x^4}{4}}\int 2x^3\ e^{\frac{x^4}{4}}dx$

θα πρέπει $I=\int 2x^3\ e^{\frac{x^4}{4}}dx$ να το υπολογίσουμε και να κάνουμε αντικατάσταση στην προηγούμενη σχέση και θέτουμε $\frac{x^4}{4}=t$ και θα έχω:

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)dx=dt\Rightarrow\frac{1}{4}4x^3dx=dt\Rightarrow x^3dx=dt\Rightarrow 2x^3dx=2dt$$

Η I γράφεται $\int 2e^tdt=2e^t+c=2e^{\frac{x^4}{4}}+c$ άρα η γενική λύση θα είναι :

$$y=e^{-\frac{x^4}{4}}(2e^{\frac{x^4}{4}}+c)=2e^{-\frac{x^4}{4}}\ e^{\frac{x^4}{4}}+c\ e^{-\frac{x^4}{4}}=2+c\ e^{-\frac{x^4}{4}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

2.1 Εισαγωγή

Μεταβατική περίοδος ονομάζεται όταν στο κύκλωμα υπάρχουν αλλαγές στις συνθήκες λειτουργείας σε αυτήν την περίπτωση παρατηρείται μία μεταβατική περίοδος κατά την οποία τα ρεύματα των κλάδων και οι τάσεις των στοιχείων αλλάζουν από τις παλιές τιμές στις καινούριες. Όταν περάσει η μεταβατική περίοδος το κύκλωμα βρίσκεται σε **μόνιμη κατάσταση .**Αυτό μπορεί να περιγραφτεί με μία διαφορική εξίσωση από δύο μέρη :

i) Την γενική λύση που την χρησιμοποιούμε στην μεταβατική περίοδο.
ii) Την ειδική λύση που την χρησιμοποιούμε στην μόνιμη κατάσταση.

Όπως γνωρίζουμε οι διαφορικές εξισώσεις έχουν πολλές εφαρμογές, στα κυκλώματα όταν έχουμε σταθερούς συντελεστές και τα κυκλώματα περιγράφονται με μια γραμμική εξίσωση τότε τα ονομάζομαι κυκλώματα πρώτης τάξης.

2.1.1 Ηλεκτρικό Φορτίο και Ηλεκτρικό Ρεύμα

Στη φύση υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου: θετικό και αρνητικό φορτίο. Θετικά είναι τα πρωτόνια και αρνητικά τα ηλεκτρόνια. Όλα τα ηλεκτρικά φορτία θεωρούνται ως ακέραια πολλαπλάσια του στοιχειώδους φορτίου ενός ηλεκτρονίου ή ενός πρωτονίου. Ακέραια πολλαπλάσια του φορτίου θεωρούνται όλα τα ηλεκτρικά φορτία είτε είναι ηλεκτρόνια η πρωτόνια. Επίσης κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα ισχύει η λεγόμενη διατήρηση του φορτίου, δηλαδή το καθαρό ηλεκτρικό φορτίο παραμένει σταθερό (δε δημιουργείται ούτε καταστρέφεται). Το φορτίο ενός ηλεκτρονίου είναι ίσο με $q_e = -1.602 \times 10^{19} C.$ Η προκαθορισμένη κίνηση των ηλεκτρονίων ονομάζεται ηλεκτρικό ρεύμα. Η μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού ρεύματος είναι το ampere (A). Το ηλεκτρικό ρεύμα στην φυσική είναι το I για συνεχές ρεύμα ή με i για εναλλασσόμενο ρεύμα. Έστω το φορτίο 1C διέρχεται με σταθερό ρυθμό από ένα δεδομένο σημείο ενός αγωγού για χρονικό διάστημα 1s τότε το ρεύμα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με 1A.Γενικά ισχύει η σχέση:

$$i(A) = \frac{d1}{dt}\left(\frac{C}{s}\right)$$

Τα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι φτιαγμένα από στερεά υλικά με τα ηλεκτρόνια να είναι ο κύριος φορείς του ηλεκτρικού ρεύματος. Σε κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα το χρησιμοποιούμε τα βελάκια για την κατεύθυνση της ροής του ηλεκτρικού ρεύματος . αν υπολογίσουμε και βρούμε ότι το ρεύμα έχει θετική τιμή αυτό σημαίνει ότι το πραγματικό ρεύμα έχει όντως την κατεύθυνση του βέλους, αντίθετα αν έχει αρνητική τιμή το πραγματικό ρεύμα έχει αντίθετη κατεύθυνση.

2.1.2 Ένταση Ρεύματος

Η ένταση του ρεύματος ορίζεται ως ο ρυθμός αλλαγής του φορτίου στη μονάδα του χρόνου. Η μέτρηση της έντασης είναι το Amprere (A στο s.i) .Η μεταβολή του φορτίου ΔQ στη μονάδα του χρόνου το ρεύμα I ισούται με

$$\boldsymbol{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}}$$

2.1.2 Ενέργεια και I ισχύς

Μία πηγή παράγει ενέργεια και ένα φορτίο την καταναλώνει. Ηλεκτρική ισχύς είναι η ενέργεια για τα ηλεκτρόνια που κινούνται και μετατρέπονται σε ωφέλιμη ισχύ. Η ισχύς μετράτε σε Watts, η οποία μονάδα ισούται με joules/second. Επιπλέον η ισχύς υπολογίζεται και ως γινόμενο της τάσης επί του ρεύματος: $p(w) = u(v)i(A)$. Για τις μονάδες ισχύει:$V \cdot A = \frac{J}{C} \cdot \frac{C}{s} = \frac{J}{s} = W$.

Η ισχύ του ηλεκτρικού ρεύματος ή **ηλεκτρική ισχύ το πηλίκο της ηλεκτρικής ενέργειας που προσφέρεται σε χρόνο t, προς το χρόνο t**.:

$$\boldsymbol{P(W) = \frac{W(J)}{t(s)}}$$

2.1.3 Αντίσταση

Ένας αγωγός, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια συγκρούονται με τα άτομα του αγωγού και ως εκ τούτου χάνουν ένα μέρος της κινητικής τους ενέργειας το οποίο μετατρέπεται σε θερμότητα. Η εφαρμοζόμενη τάση στα άκρα του αγωγού αναπληρώνει το ποσό της ενέργειας που χάνεται και επιταχύνει εκ νέου τα ηλεκτρόνια. Αντίσταση ονομάζεται η ιδιότητα των υλικών να αντιτίθενται στην κίνηση των ηλεκτρονίων. Στους μεταλλικούς αγωγούς ισχύει ο νόμος του Ohm:

$$I = \frac{V}{R}$$

δηλαδή το ρεύμα I που διαρρέει έναν αγωγό είναι ανάλογο της εφαρμοζόμενης τάσης στα άκρα του αγωγού V αν ο αγωγός έχει αντίσταση R . Η σχέση ρεύματος και τάσης σε ένα στοιχείο μπορεί να μην είναι απαραίτητα γραμμική. Στην περίπτωση αυτή το στοιχείο αντιπροσωπεύει μία μη γραμμική αντίσταση. Παράδειγμα ενός τέτοιου στοιχείου με μη γραμμική σχέση μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι η δίοδος. Η αντίσταση ενός αγωγού μήκους l (m) και διατομής ( ) 2 S m είναι ανάλογη του μήκους του αγωγού και αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του. Δηλαδή η αντίσταση ενός αγωγού σε μία συγκεκριμένη θερμοκρασία δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{R = \rho \frac{\mathrm{l}}{S}}$$

Όπου ρ είναι μία σταθερά που ονομάζεται ειδική αντίσταση (resistivity) και είναι χαρακτηριστική του υλικού του αγωγού. Όλες οι ηλεκτρικές συσκευές που καταναλώνουν ενέργεια θεωρείται ότι έχουν μία αντίσταση στο κύκλωμά τους. Η ισχύς σε μία αντίσταση δίνεται από τη σχέση¨

$$p = ui = i^2 R = \frac{u^2}{R}$$

και είναι πάντα θετική. Η ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{w = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} u^2 dt}$$

2.1.4 Αυτεπαγωγή

Η ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα μαγνητικό πεδίο από το στοιχείο του κυκλώματος **ονομάζεται πηνίο**. Όταν το ρεύμα είναι εναλλασσόμενο, το πηνίο αποθηκεύει ενέργεια για ένα διάστημα της περιόδου και στη συνέχεια την επιστρέφει στην πηγή σε άλλο διάστημα της περιόδου. Όταν το πηνίο απομακρυνθεί από την πηγή, τότε το μαγνητικό πεδίο εξαφανίζεται και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατό να αποθηκευτεί ενέργεια σε ένα πηνίο αν αυτό δεν είναι συνδεδεμένο με μία πηγή. Πηνία είναι τοποθετημένα σε κυκλώματα ηλεκτρικών μηχανών, μετασχηματιστών και σε πλήθος άλλων συσκευών. Οι σχέσεις για την ενέργεια και για την ισχύ σε ένα πηνίο είναι οι εξής:

$$p = ui = L\frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} L i^2\right]$$

$$w_L = \int_{t1}^{t2} p dt = \int_{t1}^{t2} L i dt = \frac{1}{2} L\left[{i_2}^2 - {i_1}^2\right]$$

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο ενός πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$W_L = \frac{1}{2} L i^2$$

2.1.5 Χωρητικότητα

Ο πυκνωτής είναι το στοιχείο του ηλεκτρικού κυκλώματος που μπορεί να αποθηκεύει ενέργεια σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο χάνεται αν το πηνίο δεν είναι συνδεδεμένο με μια πηγή ,γιατί το πηνίο αυτό είναι αδύνατον να αποθηκεύσει ενέργεια. Όταν όμως η τάση είναι εναλλασσόμενη ο πυκνωτής έχει την δυνατότητα να αποθηκεύσει την ενέργεια μόνο για ένα μικρό χρονικό διάστημα και έπειτα το επιστρέφει στην πηγή σε ένα άλλο διάστημα της περιόδου .Η κατανάλωση της ενέργειας που έχει αποθηκευτεί ξοδεύεται όταν ο φορτισμένος πυκνωτής συνδεθεί με ένα άλλο στοιχείο.

Η σχέση του φορτίου είναι :

$$q = Cv$$

Οι σχέσεις ισχύς και ενέργειας στον πυκνωτή είναι :

$$\boldsymbol{p = vi = Cv\frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt}\left[\frac{1}{2}Cv^2\right]}$$

$$\boldsymbol{W_c = \int_{t_1}^{t_2} pdt = \int_{t_1}^{t_2} Cvdt = \frac{1}{2}[{v_2}^2 - {v_1}^2]}$$

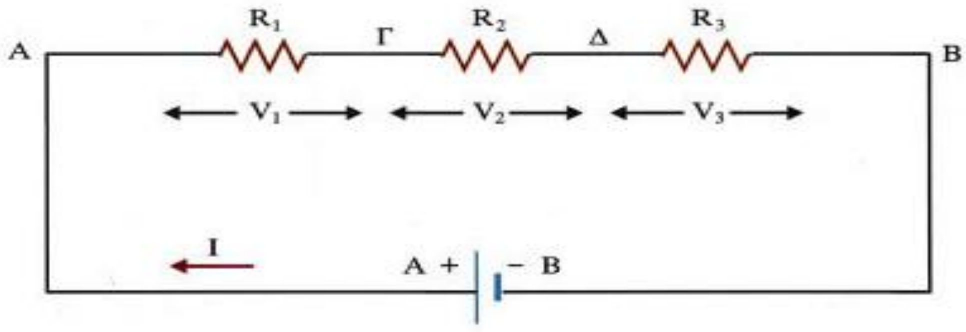
Η τελική σχέση είναι:

$$\boldsymbol{W_c = \frac{1}{2}Cv^2}$$

2.2 Σύνδεση Σε Σειρά

Στα ηλεκτρικά κυκλώματα υπάρχουν δύο ειδών συνδέσεις.

Α) **Σε σειρά** όπου το ρεύμα που διαρρέει τα στοιχεία είναι ίδιο και βρίσκεται πάνω στον ίδιο κλάδο



Η ολική τάση είναι $v = v_1 + v_2 + v_3$ όπου i το ηλεκτρικό ρεύμα, και στις αντιστάσεις ισχύει $v = iR_1 + iR_2 + iR_3 = i(R_1 + R_2 + R_3) = iR_{i\sigma}$ (με $R_{i\sigma}$ η αντίσταση που προκείπτει από την αντικατάσταση των τριών αντιστάσεων)

Για όλες τις αντιστάσεις σε σειρά ισχίου:

$$R_{i\sigma} = R_1 + R_2 + \ldots\ldots$$

Αν είναι πηνία :

$$v = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + L_3)\frac{dI}{dT} = L_{i\sigma}\frac{d\iota}{d\tau}$$

Για όλα τα πηνία σε σειρά ισχουν:

$$L_{i\sigma} = L_1 + L_2 + \ldots\ldots$$

Αν είναι πυκνωτές:

$$v = \frac{1}{C_1}\int idt + \frac{1}{C_2}\int idt + \frac{1}{C_3}\int idt = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\int idt = \frac{1}{c_{i\sigma}}\int idt$$

Για όλους τους πυκνωτές ισύει:

$$\frac{1}{c_{i\sigma}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots\ldots$$

2.3 Τύποι Εισόδων κυκλωμάτων

Όπως γνωρίζουμε στα ηλεκτρικά κύκλωμα οι είσοδοι τους είναι οι ιδανικές πηγές τάσης και το ρεύμα τα οποία έχουν μια δεδομένη συνάρτηση χρόνου αλλά αυτές οι συναρτήσεις είναι ανεξάρτητες από την συνδεσιμότητα του κυκλώματος αυτού. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα στην καθημερινότητα μας όπως από ένα σήμα ψηφιακό σε αναλογικό σε έναν υπολογιστή που μπορεί να δεχτεί ένα σήμα ασθενές που για αυτό μπορεί να λειτουργήσει από την είσοδο τάσης .Επειδή σε πολλές περιπτώσεις όταν δεν επικρατούν οι ιδανικές συνθήκες τότε μας βοηθούν τα μοντέλα τα οποία τα οποία είναι η αντίσταση σε σειρά η παράλληλα με ιδανική πηγή.
Μία είσοδος επιβάλλει σε ένα σημείο του κυκλώματος τάση ή ρεύμα που είναι συνάρτηση του χρόνου. Η απόκριση του κυκλώματος, δηλαδή η εξέλιξη των τάσεων και των ρευμάτων των στοιχείων που το απαρτίζουν ως συνάρτηση του χρόνου εξαρτάται προφανώς από το είδος της εισόδου (εισόδων) που εφαρμόζονται στο κύκλωμα. Οι είσοδοι αυτές λέγονται και διεγέρσεις του κυκλώματος. Οι είσοδοι επίσης μπορούν να ταξινομηθούν σε περιοδικές και απεριοδικές συναρτήσεις του χρόνου.Οι **είσοδοι μπορούν να ταξινομηθούν σε ομαλές και μη ομαλές (ανώμαλες) συναρτήσεις. Οι ομαλές είσοδοι περιγράφονται από συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου ενώ οι μη ομαλές περιγράφονται από μη συνεχείς συναρτήσεις**

2.4 Ενέργεια Αποθηκευμένη σε μαγνητικό πεδίο

Το μαγνητικό πεδίο μπορεί να είναι μόνιμου μαγνήτη ηλεκτρομαγνήτης. Και τα δύο μαγνητικά πεδία αποθηκεύουν κάποια ενέργεια. Ο μόνιμος μαγνήτης δημιουργεί πάντα τη μαγνητική ροή και δεν διαφέρει από τους άλλους εξωτερικούς παράγοντες. Αλλά ο ηλεκτρομαγνήτης δημιουργεί τα μεταβλητά μαγνητικά του πεδία με βάση το πόσο ρεύμα μεταφέρει. Η διάσταση αυτού του ηλεκτρομαγνήτη είναι υπεύθυνη για τη δημιουργία της αντοχής του μαγνητικού πεδίου και επομένως της ενέργειας που αποθηκεύεται σε αυτόν τον ηλεκτρομαγνήτη. Αρχικά θεωρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο οφείλεται ηλεκτρομαγνήτη δηλ. ένα πηνίο πολλών αριθ. στροφές. Αυτό το πηνίο ή πηνίο μεταφέρει ρεύμα I όταν συνδέεται μέσω μιας μπαταρίας ή πηγής τάσης μέσω ενός διακόπτη. Ας υποθέσουμε ότι η τάση της μπαταρίας είναι V volts, η τιμή του **επαγωγέα είναι L** Henry, και το ρεύμα θα κυκλοφορήσω σε σταθερή κατάσταση. Όταν ο διακόπτης είναι ενεργοποιημένος, ένα ρεύμα θα ρέει από το μηδέν μέχρι τη σταθερή του τιμή. Αλλά λόγω της αυτεπαγωγής εμφανίζεται μια επαγόμενη τάση η οποία είναι:

$$E = -L\frac{dI}{dt}$$

η εργασία που γίνεται λόγω αυτού του ρεύματος που διέρχεται μέσω αυτού του επαγωγέα είναι U. Καθώς το ρεύμα αρχίζει από τη μηδενική του τιμή και ρέει έναντι του επαγόμενου emf E, η ενέργεια θα αυξηθεί σταδιακά από τη μηδενική τιμή στο U. dU = Wdt, όπου W είναι η μικρή ισχύς και W = - E.I. Έτσι, η ενέργεια που αποθηκεύεται στον επαγωγέ δίνεται από:

$$dU = Wdt = -EIdt = L\frac{dI}{dt}Idt = LIdI$$

Η ενέργεια από το 0 στην τελική της τιμή:

$$U = \int_0^U dU = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

Τελικά $$L = \mu_0\frac{N^2A}{\ell}$$

ως διάσταση του πηνίου, όπου N είναι ο αριθμός των στροφών του πηνίου, το A είναι η αποτελεσματική περιοχή διατομής του πηνίου και το ℓ είναι το πραγματικό μήκος του πηνίου.

Έχουμε:

$$I = \frac{Hl}{N}$$

Όπου, H είναι η δύναμη μαγνητισμού, N είναι ο αριθμός των στροφών του πηνίου και το l είναι το πραγματικό μήκος του πηνίου.

$$I = \frac{Bl}{\mu_0 N}$$

Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις I και L έχουμε την :

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}\right)\left(\frac{B\ell}{\mu_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}A\ell}$$

Έτσι, η αποθηκευμένη ενέργεια σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δηλαδή ένας αγωγός μπορεί να υπολογιστεί από τη διάστασή του και την πυκνότητα ροής.

Παρεχόμενη ισχύς σε πηνίο επαγωγής L διαρρέεται από ρεύμα I που μεταβάλλεται με ρυθμό dI/dt

$$\mathrm{P} = \mathrm{I}\mathcal{E} = \mathrm{LI}\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}}$$

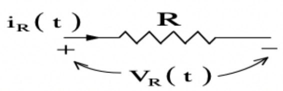
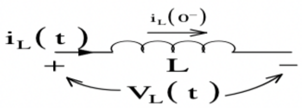
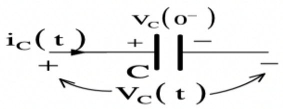
Έργο που απαιτείται για την αύξηση του I από 0 σε I

$$dw = Pdt = LIdI$$

$$W = \int dW = \int_0^1 LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

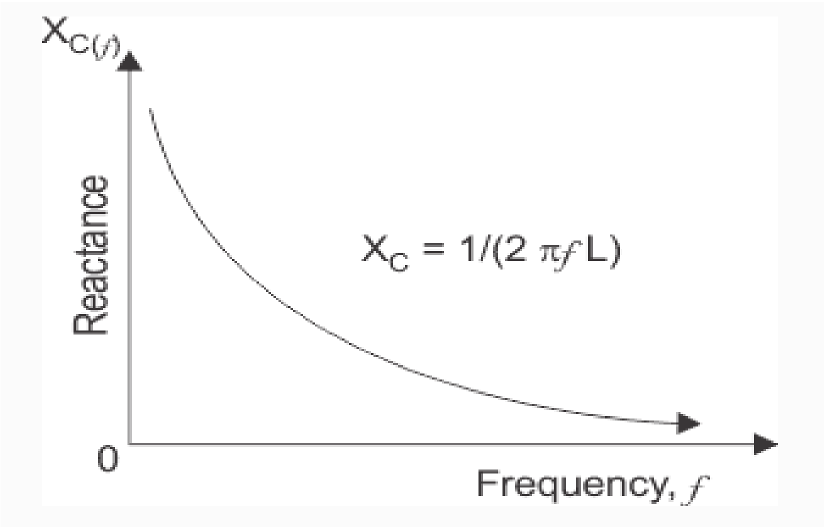
$$v = \frac{1}{2}CV^2$$

τα βασικά ηλεκτρικά στοιχεία

ΗΛ. ΣΤΟΙΧΕΙΟ	Σχεσεις Τάσεως – Ρεύματος και Ρεύματος- Τάσεως στο πεδίο του χρόνου
Ωμική αντίσταση R (Ohm) 	$V_R(t) = R\, i_R(t)$ $i_R(t) = \frac{1}{R} V_R(t)$
Πηνίο με αυτεπαγωγή L (Henry) 	$V_L(t) = L\frac{d\, i_L(t)}{dt}$ $i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_0^t V_L(t')\,dt'$ όπου $i_L(0-)$ η αρχική κατάσταση για το ρεύμα του πηνίου
Πυκνωτής με χωρητικότητα C (Farad) 	$i_C(t) = C\frac{d\, V_C(t)}{dt}$ $V_C(t) = V_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')\,dt'$ όπου $V_C(0-)$ η αρχική κατάσταση για την τάση του πυκνωτή

2.5 Μεταβολή της συχνότητας χωρητικότητας αντίδρασης συχνότητας

Από τον τύπο της χωρητικής αντίστασης $X\nu\tau o = 1 \,/\, 2\pi f C$ ότι, συχνότητα και χωρητικότητα αντίστασης είναι αντιστρόφως ανάλογες μεταξύ τους. Σε περίπτωση DC ή όταν η συχνότητα είναι μηδέν, η χωρητικότητα αντίστασης γίνεται άπειρο και το κύκλωμα συμπεριφέρεται ως ανοιχτό κύκλωμα και όταν η συχνότητα αυξάνεται και γίνεται άπειρη, η χωρητική αντίδραση μειώνεται και καθίσταται μηδενική σε άπειρη συχνότητα, στο σημείο αυτό το κύκλωμα λειτουργεί ως βραχυκύκλωμα. η χωρητικότητα της αντίστασης αυξάνεται με την αποθάρρυνση της συχνότητας και αν σχεδιάσουμε ένα γράφημα μεταξύ της χωρητικής αντίστασης και της συχνότητας, είναι μια υπερβολική καμπύλη



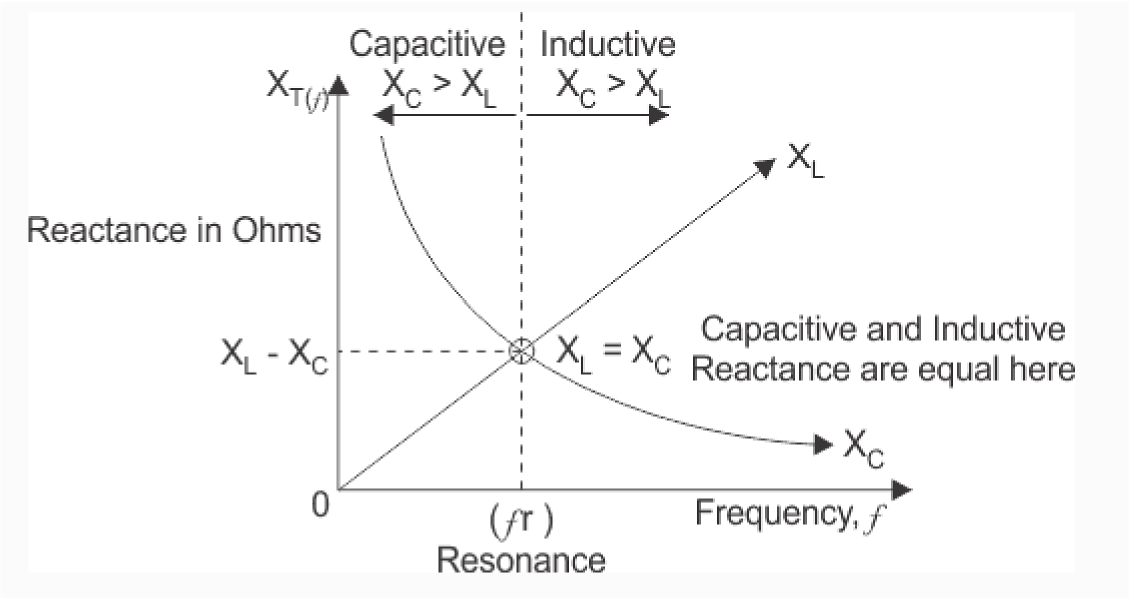
Επαγωγική αντίδραση και χωρητική αντιδραστικότητα V_Sσυχνότητα

Η επαγωγική αντίδραση είναι ευθέως ανάλογη προς τη συχνότητα και η χωρητική αντίδραση είναι αντιστρόφως ανάλογη προς τη συχνότητα, δηλ. σε χαμηλή συχνότητα X είναι χαμηλή και X_μ είναι υψηλή, αλλά πρέπει να υπάρχει μια συχνότητα, όπου τιμή της επαγωγικής αντίστασης γίνεται ίση με την χωρητική αντίδραση, για να βρούμε την συχνότητα συντονισμού πρέπει να σχεδιάσουμε το σημείο αυτό το οποίο βρίσκεται στην μέση επαγωγικής αντίστασης έναντι της συχνότητας και της χωρητικής αντίστασης έναντι της συχνότητας, η επαγωγική και χωρητική αντίδραση ισούται και η συχνότητα με την οποία οι δύο αυτές αντιδράσεις καθίστανται ίσες.

Συντονισμός X = X :

$$\boldsymbol{X_L = 2\pi f \quad , \quad X_c = \frac{1}{2\pi\, fC}}$$

$$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$



2.6 Ηλεκτρικά Κυκλώματα Πρώτης Τάξης

Μεταβατική περίοδος ονομάζεται όταν στο κύκλωμα υπάρχουν αλλαγές στις συνθήκες λειτουργείας σε αυτήν την περίπτωση παρατηρείται μία μεταβατική περίοδος κατά την οποία τα ρεύματα των κλάδων και οι τάσεις των στοιχείων αλλάζουν από τις παλιές τιμές στις καινούριες .Όταν περάσει η μεταβατική περίοδος το κύκλωμα βρίσκεται σε **μόνιμη κατάσταση.** Αυτό μπορεί να επιγραφτεί με μία διαφορική εξίσωση από δύο μέρη :

i) Την γενική λύση που την χρησιμοποιούμε στην μεταβατική περίοδο.
ii) Την ειδική λύση που την χρησιμοποιούμε στην μόνιμη κατάσταση.

Όπως γνωρίζουμε οι διαφορικές εξισώσεις έχουν πολλές εφαρμογές, στα κυκλώματα όταν έχουμε σταθερούς συντελεστές και τα κυκλώματα περιγράφονται με μια γραμμική εξίσωση τότε τα ονομάζομαι κυκλώματα πρώτης τάξης.

Η Απόκριση σε Αρχικές Συνθήκες

Ένα κύκλωμα στο οποίο δεν υπάρχουν πηγές άρα δεν έχουμε διέγερση και απόκριση σε είσοδο , ο πυκνωτής είναι φορτισμένος στην αρχική του κατάσταση μέχρι και την τελική κατάσταση ισορροπίας. Η εξίσωση που το περιγράφει είναι ομογενής μορφή :

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0 \qquad , \qquad \text{αρχική συνθήκη:} \quad \chi(0) = \chi_0$$

Η εξίσωση θα έχει την μορφή: $\tau \frac{dx(t)}{dt}$+x(t)=0

Με t η χρονική σταθερά με την ταχύτητα απόκρισης να εξαρτάται από την χρονική σταθερά έτσι η εξίσωση θα γράφεται: $t\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda + \frac{1}{t} = 0$

λύνοντας ως προς λ θα έχουμε $\lambda = -\frac{1}{\tau}$ που είναι η μοναδική ρίζα, η λύση της ομογενούς θα είναι : $x(t) = ce^{\lambda t} = ce^{-\frac{1}{\tau}}$

Με την βοήθεια των αρχικών συνθηκών $x(0) = x_0$ δίνουν την τελική απόκριση στις αρχικές συνθήκες : $x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

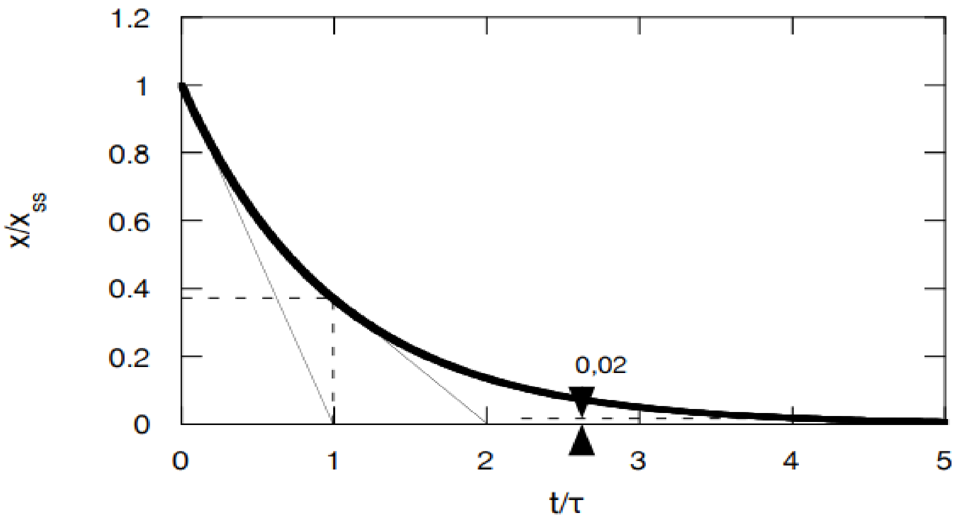
Το κύκλωμα θα λέγεται ευσταθές αν και μόνο αν η εκθετική συνάρτηση ξεκινά από την αρχική συνθήκη και μειώνεται ώσπου να γίνει μηδέν αν τ>0. Ενώ αν τ< 0 το κύκλωμα είναι ασταθές και με τ=0 το κύκλωμα είναι οριακά ευσταθές με την χρονική σταθερά να τείνει στα ms και s θετικός αριθμός .

Πίνακας κανονικοποιημένης απόκρισης κυκλώματος πρώτης τάξης

ΧΡΟΝΟΣ	$\boldsymbol{\frac{t}{\tau}}$	$\boldsymbol{\frac{x(t)}{x_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}}$	$\boldsymbol{\frac{x_{\beta}(t)}{x_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}$
0	0	1	0
τ	1	0,3679	0,6321
2τ	2	0,1353	0,8647
3τ	3	0,0498	0,9502
4τ	4	0,0183	0,9817

Χρόνος αποκατάστασης $\boldsymbol{t_s}$ για το οποίο το χρησιμοποιούμαι για την σύγκριση της ταχύτητας απόκρισης κυκλωμάτων, είναι ο χρόνος στο οποίο η απόκριση έχει μειωθεί κατά 98% της αρχικής τιμής του .Για την αποτύπωση της οποιασδήποτε απόκρισης ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες με όσο η χρονική σταθερά αυξάνει τόσο αυξάνει και ο πραγματικός χρόνος που θα περάσει εώς ότου η απόκριση εισέλθει στην ζώνη του 2%της αρχικής τιμής . Επομένως, μεγάλη χρονική σταθερά συνεπάγεται αργή απόκριση και αργό κύκλωμα, ενώ μικρή χρονική σταθερά συνεπάγεται γρήγορο κύκλωμα.

$$t_s = 4\tau$$



2.7 Εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα RC

Έχουμε έναν πυκνωτή με διαφορά δυναμικού V_0 μεταξύ δύο αγώγιμων πλακών του. Για να εμφανιστεί το ρεύμα i πρέπει να μετακινηθεί το φορτίο από μία αντίσταση που πρέπει να συνδεθεί ώστε να μετακινηθεί από μία πλάκα στην άλλη. Η τάση του πυκνωτή u μειώνεται σιγά σιγά μέχρι να μηδενιστεί παρομοίως και στο ρεύμα.

$\boldsymbol{Ri = u}$, $\quad \boldsymbol{i = -C\frac{du}{dt}}$

Από τις δύο εξισώσεις που αναφέραμε :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = 0 = 0$$

Μια εκθετική συνάρτηση που επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση είναι η

Ae^{st}, με το $\frac{du}{dt}$ ως sAe^{st} τότε:

$$sAe^{st} + \frac{1}{RC}Ae^{st} = A\left(s + \frac{1}{RC}\right)e^{st} = 0$$

Από την οποία:

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{RC}$$

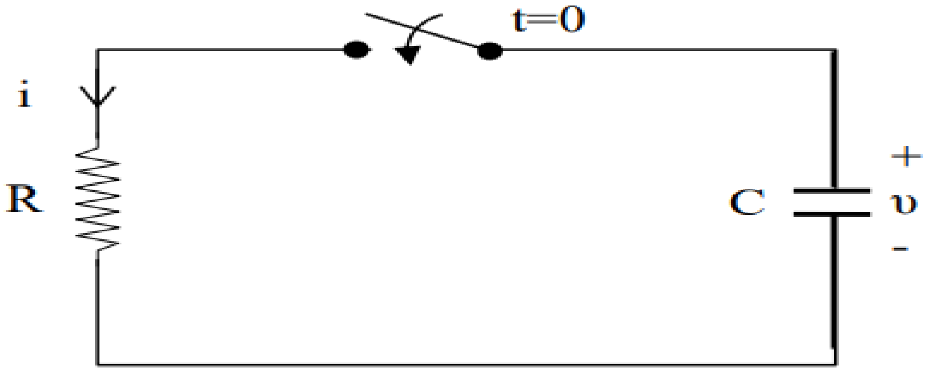
Από τα παραπάνω έχουμε $u(0) = A = V_0$,επομένως οι κυματομορφές $u(t)$, $i(t)$:

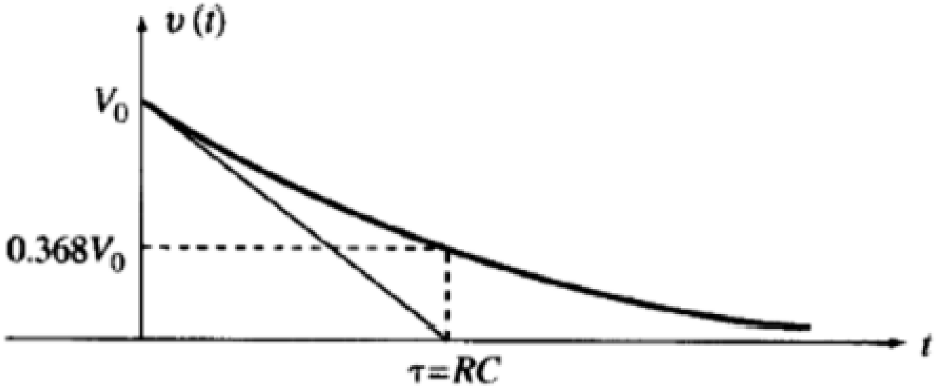
$$u(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \;\; t > 0$$

$$i(t) = -C\frac{du}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \text{ t>0}$$

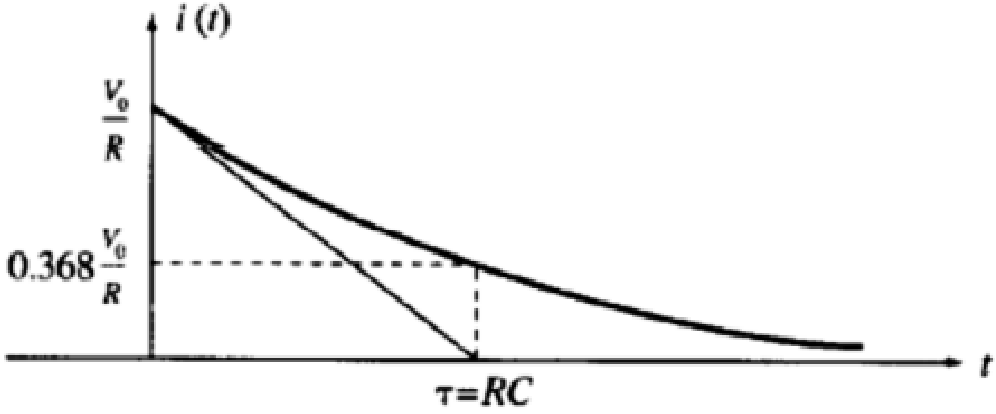
Καθώς περνάει ο χρόνος η τάση μειώνεται σιγά σιγά μέχρι να μηδενιστεί με σταθερά χρόνου $t = RC$,παρομίος και στο ρεύμα γιατί είναι εκθετικές συναρτήσεις με αρχική τιμή V_0 και $\frac{V_0}{R}$

κύκλωμα RC (αντίσταση-πυκνωτής)





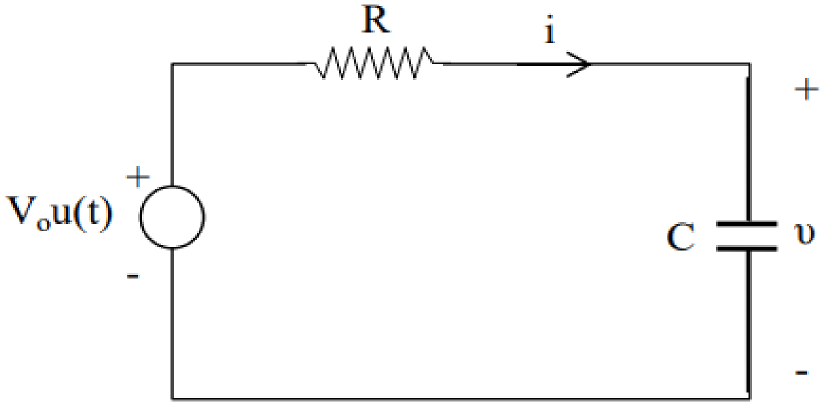
κυμματομορφή τάσης κυκλώματος RC(αντίσταση-πυκνωτής)



Κυμματομορφή ρεύματος κυκλώματος RC(αντίσταση-πυκνωτής)

Συνεχής τάση (dc) στα άκρα ενός πυκνωτή

Έστω στο παρακάτω κύκλωμα είναι ένας αφόρτιστος πυκνωτής και συνδέεται σε μια μπαταρία τάσης V_0 $και$ με μία αντίσταση R σε t=0.



Κύκλωμα RC

Με τον νόμο του Kirchhoff για t=0 προκύπτει η σχέση $Ri + u = V_0$ και του ρεύματος είναι $i = C\frac{du}{dt}$

Από τις δύο εξισώσεις αυτές έχουμε:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = \frac{1}{RC}V_0 \text{ για t>0}$$

Αρχική συνθήκη είναι $u(0^-) = u(0^+) = 0$

Την 3.3.4.1 την ικανοποιεί η ειδική λύση $u_{\varepsilon\iota}(t) = V_0$ όχι όμως και την αρχική συνθήκη ,η γενική λύση είναι $u_\gamma(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ όταν την προσθέσουμε στην ειδική λύση έχουμε:

$$u(t) = u_{\varepsilon\iota}(t) + u_\gamma(t) = V_0 + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

Το πλάτος Α πρέπει να υπολογιστεί τέτοιο ώστε να ικανοποιεί την 3.3.4.1 και την αρχική συνθήκη άρα:

$$u(0^+) = V_{0+A} \Leftrightarrow A = -V_0$$

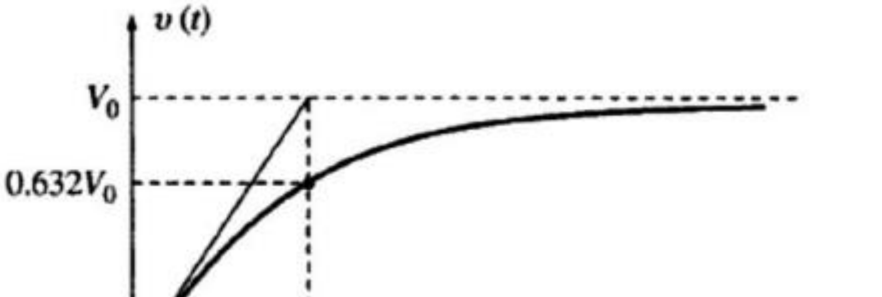
Η ολική λύση προκύπτει :

$$u(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$$

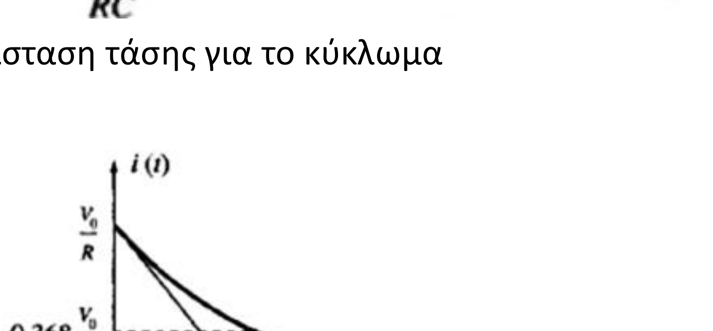
Το ρεύμα θα είναι:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

Οι γραφικές παραστάσεις θα είναι οι εξής :



Η γραφική παράσταση τάσης για το κύκλωμα



Γραφική παράσταση ρεύματος

Συνεχής τάση (dc) στα άκρα ενός πηνίου

Όταν εφαρμοστεί ο νόμος του Kirchhoff στον βρόγχο ενός κυκλώματος με μία συνεχή τάση στο κύκλωμα RL τότε προκύπτει μία εξίσωση πρώτου βαθμού:

$$RI + L\frac{di}{dt} = V_0 \text{ για } \tau > 0 \qquad (3.3.4.1)$$

Ισχύει ότι: $i = i_\gamma(t) i_{\varepsilon\iota}(t)$ όπου $i_\gamma(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$ και $i_{\varepsilon\iota}(t)$ $=\frac{V_0}{R}$ άρα έχουμε:

$$i = Ae^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{V_0}{R}$$

Με την A να μπορεί να βρεθεί στις αρχικές συνθήκες

$$i(0^+) = 0 \Leftrightarrow A + \frac{V_0}{R} = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{V_0}{R}$$

Από ότι μπορούμε να δούμε το ρεύμα θα αυξάνεται εκθετικά από το μηδέν μέχρι μια σταθερή τιμή (σταθερά του χρόνου θα είναι L/R).

Ρεύμα στο πηνίο:

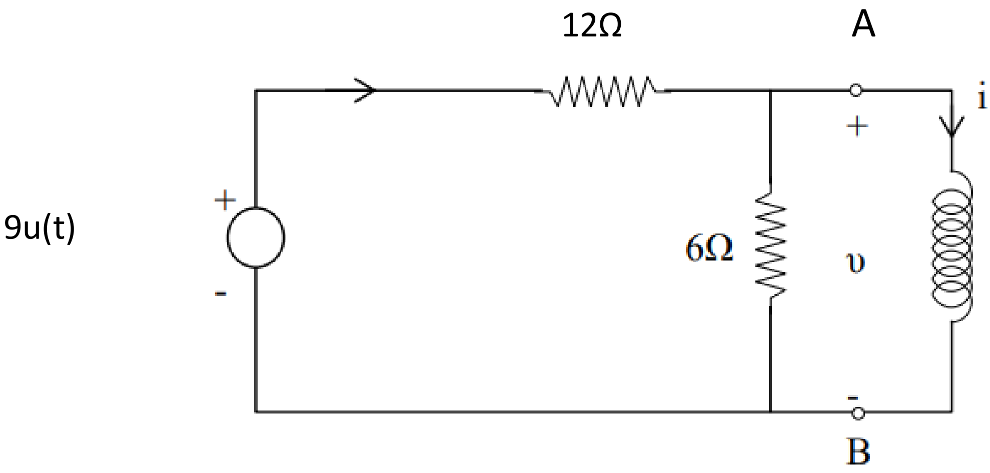
$$i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{\frac{Rt}{L}}\right) \ \gamma\alpha\iota\ t > 0,$$

Τάση: $$u(t) = L\frac{di}{dt} = V_0 e^{-\frac{Rt}{L}}\ \gamma\alpha\iota\ t > 0,$$

2.8 Σύνθετα Κυκλώματα RL και RC πρώτης Τάξης

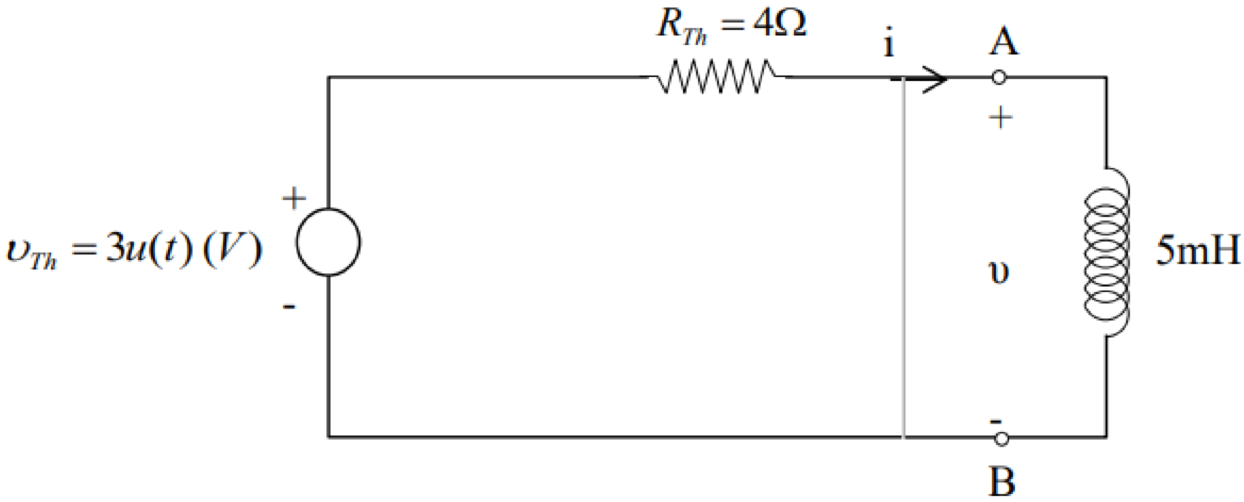
Έστω ότι θέλουμε να απλοποιήσουμε ένα σύνθετο κύκλωμα σε RL και RC που το κυκλώματα αυτό περιέχει αντιστάσεις ,πήγες και έναν πυκνωτή που μπορούν να μετατραπούν σε ισοδύναμα Noton ή Thevenin με ακροδέκτες τα άκρα του πηνίου η του πυκνωτή .Αν όμως κάποια στιγμή το κύκλωμα μετατραπεί σε dc πηγή το ρεύμα και οι τάσεις θα είναι εκθετικές συναρτήσεις με την ίδια σταθερά χρόνου και διαφορετικές τιμές. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος που περιέχει πηνίο θα είναι R/L όπου R η αντίσταση του ισοδύναμου Thévenin όπως φαίνεται από τα άκρα του πηνίου. Αντίστοιχα, η σταθερά χρόνου του κυκλώματος που περιέχει πυκνωτή θα είναι RC όπου R η αντίσταση του ισοδύναμου Thévenin, όπως φαίνεται από τα άκρα του πυκνωτή .

Έστω το σχήμα είναι ένα κύκλωμα και θέλουμε να βρούμε το I,u,i_1



Σε αυτό το κύκλωμα το ισοδύναμο Thevenin του είναι από το πηνιο (A και B)

Με $R_{Th} = 4\Omega$ και $u_{Th} = 3u(t)(V)$.



Η σταθερά του χρόνου είναι $t = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{5\ 10^{-3}}{4} s = 1.25ms$

Η τιμή του ρεύματος είναι μηδέν στο αρχικό ενώ η τελική βρίσκεται :

$$i(\infty) = \frac{u_{Th}}{R_{Th}} = \frac{3V}{4\Omega} = 0.75A$$

Επομένως

$$i = 0.75(1 - e^{-800t})u(t)(A)$$

$$u = L\frac{dt}{dt} = 3e^{-800t}u(t)(V)$$

$$i_1 = \frac{9-u}{12} = \frac{1}{4}(3-3^{-800t})u(t)$$

Η τάση u είναι από την αρχική τιμή $u(0^{+}) = \frac{9*6}{12+6} = 3V$ ενώ η τελική τιμή $u(\infty) = 0$ και από την σταθερά του χρόνου.

2.9 Η έννοια της τελέστριας συνθέτης αντίστασης Z (D)

Αν θεωρήσουμε ούτι οι αρχικές καταστάσεις **i L (0 ¯)** και **VC (0 ¯)** έχουν μηδενικές τιμές**,** τότε οι σχέσεις τάσεως – ρεύματος για το πηνίο και τον πυκνωτή μπορούν να γράφουν:

$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ και $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t V_L(t')dt'$

$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t')dt'$ και $i_C(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt}$

Τελεστής της παραγώγου :

$$D = \frac{d}{dt}(\dots).$$

Όταν χρησιμοποιούμαι τον τελεστή D ως προς την συνάρτηση του χρόνου την παραγωγίζει και εφαρμόζουμε το ολοκλήρωμα

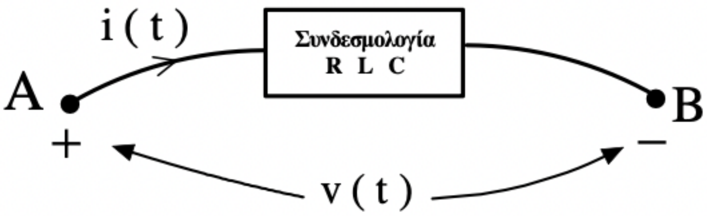
$$\frac{1}{D} = \int_0^t (\dots)dt$$

Όπου 1/D την εφαρμόζουμε στην συνάρτηση του χρόνου και την ολοκληρώνει. Ἔστω ότι ‘έχουμε αλγεβρικά $D + 3D = 4$, $D^2D^3 = D^5$,=$\frac{D^3}{D} = D^2$, Με τις παραπάνω σχέσεις τάσεως ρεύματος μπορούμε διαφορετικά να τις γράψουμε:

$V_L(t) = LDi_L(t)$ και $i_L(t) = \frac{1}{LD}V_L(t)$

$V_C(t) = \frac{1}{CD}i_C(t)$ και $i_C(t) = CDV_C(t)$

Με την βοήθεια του νόμου του Ohm ο οποίος μας λέει ότι τα στοιχεία που είναι γραμμικά και σταθερά (R,L,C) που είναι συνδεδεμένο από οποιαδήποτε συνδεσμολογία

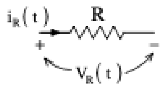
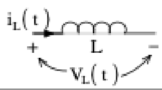
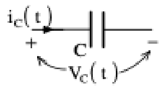


Θα ορίζεται η γενικευμένη τελέστρια σύνθετη αντίσταση

$$Z(D) = \frac{V(t)}{i(t)}$$

Για την Αγωγιμότητα $\Upsilon(D) = \frac{1}{Z(D)} = \frac{i(t)}{V(t)} \quad ohm^{-1}$

Πίνακας για τις τελέστριες συνθήκες για τις συνθέτες αντιστάσεις και αγωγιμότητες :

Ωμική αντίσταση R 	$Z_R(D) = \frac{V_R(t)}{i_R(t)} = R$	$Y_R(D) = \frac{i_R(t)}{V_R(t)} = \frac{1}{R}$
Πηνίο L 	$Z_L(D) = \frac{V_L(t)}{i_L(t)} = LD$	$Y_L(D) = \frac{i_L(t)}{V_L(t)} = \frac{1}{LD}$
Πυκνωτής C 	$Z_C(D) = \frac{V_C(t)}{i_C(t)} = \frac{1}{CD}$	$Y_C(D) = \frac{i_C(t)}{V_C(t)} = CD$

Αν έχουμε μια συνδεσμολογία Α-Β με R,L,C θέλοντας να βρούμε το $Z_{AB}(D)$ πρέπει :

$Z_{AB}(D) = R + LD + \frac{1}{CD} = \frac{LCD^2+RCD+1}{CD}$

$$Z_{AB}(D) = LD + \frac{R\frac{1}{CD}}{R+\frac{1}{CD}} = \frac{R}{RCD+1} + LD = \frac{RLCD^2+LD+R}{RCD+1}$$

Η σύνθετη αντίσταση Z(D) θα είναι:

$$Z(D) = \frac{P(D)}{Q(D)} = \frac{p_m D^m + p_{m-1}D^{m-1} + \ldots + p_1 D + p_0}{q_n D^n + q_{n-1}D^{n-1} + \ldots + q_1 D + q_0}$$

Όπου n και m είναι ακέραιοι αριθμοί και πραγματικοί αριθμοί είναι οι p_0, p_1,…, p_m, q_0, q,…, q_n . Αρά η Z (D) θα είναι μια ρητή συνάρτηση (πηλίκο πολυωνύμων) του D.

Η σχέση $Z(D) = \frac{P(d)}{Q(D)} = \frac{V(t)}{i(t)}$ άρα $Q(D)V(t) = P(D)i(t)$

Στην συνδεσμολογία αυτή με γραμμικά σταθερά στοιχεία R,L,C τα V(τ) & i(t) συνδέονται με μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές η οποία είναι :

$$q_n D^n V(t) + q_{n-1} D^{n-1} V(t) + \ldots + q_1 DV(t) + q_0 V(t) = \\ = p_m D^m i(t) + p_{m-1} D^{m-1} i(t) + \ldots + p_1 Di(t) + p_0 i(t)$$

2.10 Στοιχειώδεις Ομαλές Είσοδοι

Εκθετική Είσοδος

Για την είσοδο στην πράξη για πραγματικές σταθερές για την ανάλυση των κυκλωμάτων με μιγαδικές σταθερές το s,c ,πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια εκθετική είσοδο η οποία παριστά μια συνάρτηση. Για παράδειγμα έστω ότι το c=1 που είναι η εκθετική είσοδος και s=a πραγματική σταθερά στον εκθέτη ,αυτή η σταθερά εκφράζει την ταχύτητα με την οποία το εκθετικό αυξάνεται ή μειώνεται ως συνάρτηση του χρόνου και έχει μονάδες s^{-1}.ΟΙ εκθετικές συναρτήσεις είναι σημαντικές για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων όπως για παράδειγμα :

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + jsin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - jsin(\omega t)$$

Όπως ισχύει και για τις εξισώσεις του Euler :

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

2.11 Απόκριση κυκλωμάτων πρώτης τάξης σε παλμό

Στα RC και RL που είναι κυκλώματα πρώτης τάξης και η είσοδος μπορεί να είναι ρεύμα ή τάση είναι δυνατό να περιγράψουμε την απόκριση του σε ένα ορθογώνιο παλμό. Έστω στο κύκλωμα η πηγή τάσης δίνει ένα παλμό διάρκειας T με Ύψος V_0.Για $t < 0$ τα i και u είναι μηδέν.

$$u = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), 0 < t < T \qquad (2.8.1)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad , \quad 0 < t < T, \qquad (2.8.2)$$

Στην περίπτωση όμως που σταματήσει ο παλμός το κύκλωμα που θα μείνει χωρίς πηγή με τον πυκνωτή να έχει αρχική τιμή V_T.

$$V_T = V_0(1 - e^{-\frac{T}{RC}}) \qquad (2.8.3)$$

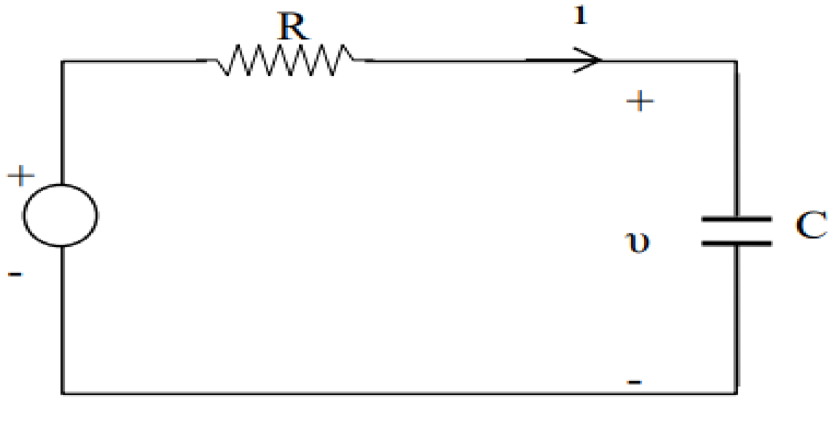
Σύμφωνα με την εκφόρτωση του πυκνωτή για τι i και το u και της μετατόπισης T

Έχουμε:

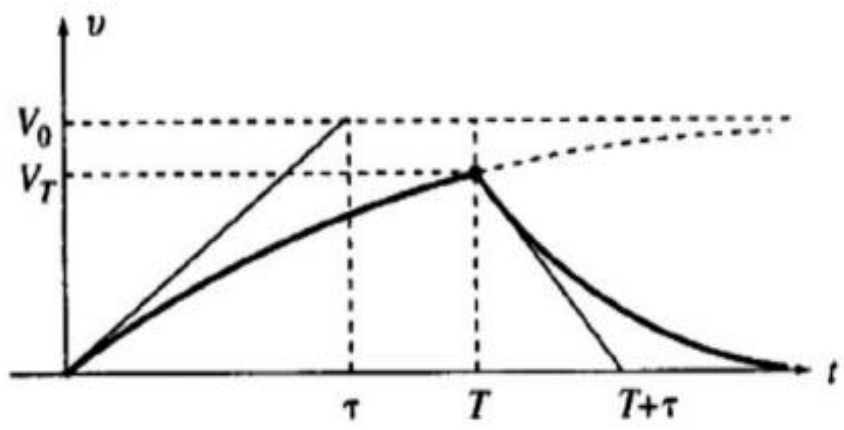
$$u = V_T e^{\frac{(t-T)}{RC}} \qquad \text{για t>T} \qquad (2.8.4)$$

$$i = -\frac{V_T}{R} e^{\frac{(t-T)}{RC}} \qquad \text{για t>T} \qquad (2.8.5)$$

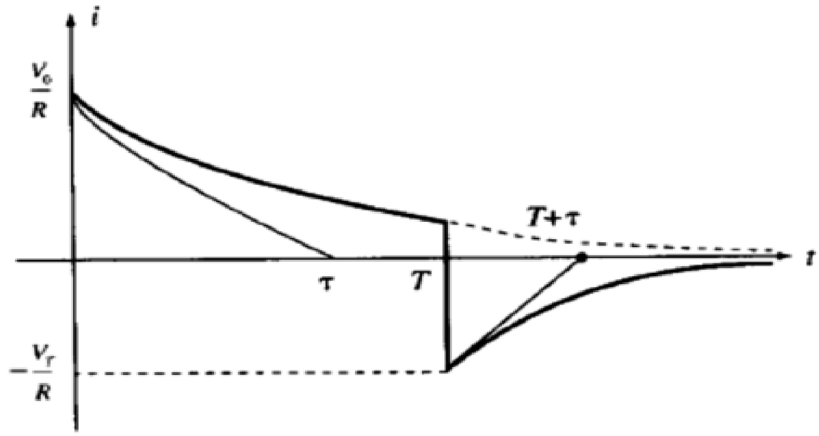
$u_s = V_0[u(t) - u(t - T)]$



Κύκλωμα RL με πηγή τάσης παλμού διάρκειας T και ύψους Vo



Διάγραμμα τάσης κυκλώματος



Διάγραμμα ρεύματος κυκλώματος

2.12 Κυκλώματα RC και RL με κρουστική απόκριση

Χρονική απόκριση όπου θεωρούμαι ότι τα κυκλώματα είναι **γραμμικά** και η λειτουργία τους μπορεί να εφαρμοστεί με τις **γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Σε συγκεκριμένες διεγέρσεις παίρνουμε την λύση των εξισώσεων της χρονικής απόκρισης.** Για να μπορούμε να γνωρίζουμε την συμπεριφορά τους πρέπει να εξετάζουμε τα κυκλώματα στο πεδίο της συχνότητας που αποτελεί την αρμονική απόκριση.

Είναι σημαντική και μας βοηθά πολύ η κρουστική απόκριση ως για την ανάλυση και σύνθεση των κυκλωμάτων διότι έχουμε την δυνατότητα να μοντελοποείσουμε έναν στενό παλμό σε μία κρουστική συνάρτηση με το εμβαδό κάτω από τον παλμό να είναι ενδεικτικό της τιμής της.

Μερικοί τρόποι είναι :

i) Μέθοδος προσέγγισης ορίου στο οποίο υπολογίζουμε το όριο της απόκρισης ενός στενού παλμού.
ii) Παράγωγος της βηματικής απόκρισης
iii) Επίλυσης διαφορικής εξίσωσης

Έστω στο παρακάτω σχήμα θέλουμε να βρούμε τις κρουστικές αποκρίσεις υπολογίζοντας την παράγωγο της μοναδιαίας βηματικής απόκρισης

Για να ορίσουμε αυτή την είσοδο, θεωρούμε ένα παλμό μικρής διάρκειας του οποίου το εμβαδό είναι σταθερό και ίσο με τη μονάδα.

$$\delta_T(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ \frac{1}{T}, & 0 < t \leq T \\ 0, & t > t \end{cases}$$

Η μοναδιαία κρουστική είσοδος ορίζεται ως το όριο του παλμού όταν το εύρος του τείνει στο μηδέν:

$$\delta(t) = lim_{T \to 0} \delta_T(t)$$

Η μοναδιαία κρουστική είσοδος, ή συνάρτηση Dirac, έχει την εξής ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

που είναι ιδιαίτερα εξυπηρετική όταν έχουμε εισόδους βραχείας διάρκειας και μεταβλητές που κατά το πολύ μικρό αυτό διάστημα παραμένουν αμετάβλητες.

Κρουστική απόκρισης συστήματος 1ης τάξεως

Είναι της μορφής $(a_1 D + a_0) y(t) = (b_1 D + b_0)$f(t)

Η΄

y (0^+) = y0

Στην περίπτωση κρουστικής διέγερσης f (t) = δ (t) θα έχουμε:

$$(a_1 D + a_0) y(t) = b_1 D \delta(t) + b_0 \delta(t)$$

για t=0^- y(0^-) =0

για t>0 $(a_1 D + a_0)y(t) = 0$

για t=0+ $y(0^{+}) = άγνωστη$

εξετάζοντας τα για t=0 θα έχουμε στις Δ.Ε τις συναρτήσεις

α μέλος Dy(t) β μέλος Dδ(τ)

α μέλος y(t) β μέλος δ(τ)

Προσπαθούμε να αντιστοιχήσουμε τις συναρτήσεις που υπάρχουν στα δυο μέλη της Δ.Ε. Για το σκοπό αυτό, στο α΄ μέλος, εξετάζουμε πρώτα την συνάρτηση με την χαμηλότερης τάξης παραγωγό (παράγωγος μηδενικής τάξης) δηλ. την y (t). Παρατηρούμε ότι στο β΄ μέλος υπάρχει η δ(t) και η 1η παράγωγος της Dδ(t).

Αν υποθέσουμε ότι για t = 0 ακριβώς ισχύει

$$y(t) = k_1 \delta(t)$$

όπου k_1μια σταθερά, τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση D y (t) που επίσης υπάρχει στο α' μέλος θα γράφεται:

$$Dy(t) = k_1 D\delta(t) + k_2 \delta(t)$$

όπου k_2 μια σταθερά. Ο πρώτος ορός είναι άμεση συνέπεια της παραγωγικής, ενῶ ό δεύτερος ορός k_1δ (t) πρέπει οπωσδήποτε να τεθεί για λογούς πληρότητας, δηλαδή δεν μπορεί να αποκλειστεί η περίπτωσή η συνάρτηση Dy(t) να περιέχει εκτός της k1 Dδ(t) και επιπλέον τον κρουστικό ορό k 2 δ (t).

t = 0 ακριβώς ισχύει

y (t) = k_1 Dδ (t) + k_2 δ (t)

η συνάρτηση D(y) θα γράφεται :

$$\boldsymbol{D(y) = k_1 D^2 \delta(t) + k_2 \delta(t) + k_3 \delta(t)}$$

αυτό όμως οδηγεί σε άτοπο διότι ο ορός $\boldsymbol{D^2}$ δ **(t)** δεν υπάρχει στο β**'** μέλος και επομένως η υπόθεση $y(t) = k_1\ D\delta(t) + k_2\delta(t)$ δεν ευσταθεί.

Συνεπώς για t=0 ακριβώς θα έχουμε

$$y(t) = \boldsymbol{k_1 \delta(t)}$$

$$Dy(t) = \boldsymbol{k_1 D\delta(t) + k_2 \delta(t)}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω με την διαφορική εξίσωση θα έχουμε:

$$(a_1 D + a_0)y(t) = b_1 D\delta(t) + b_0\delta(t)$$

$$a_1 k_1 D\delta(t) + a_1 k_2 \delta(t) + a_0 k_1 \delta(t) = b_1 D\delta(t) + b_0\delta(t)$$

Με την αναγωγή όρων θα έχουμε την:

$$a_1 k_1 = b_1$$

$$a_1 k_2 + a_0 k_1 = b_0$$

Απο τις δυο αυτές σχέσεις έχουμε τις σταθερές κ_1, κ_2

$k_1 = \frac{b_1}{a_1}$ & $k_2 = \frac{b_0}{a_1} - \frac{a_0 \ b_1}{{a_1}^2}$

Άρα $y(t) = \frac{b_1}{a_1}\delta(t)$

Και $Dy(t) = \frac{b_1}{a_1}D\delta(t) + \left[\frac{b_0}{a_1} - \frac{a_0 b_1}{{a_1}^2}\right]\delta(t)$

Χρονικά Μετατοπισμένες Είσοδοι

Με την αντικατάσταση του χρόνου από $t_0 \ \sigma\varepsilon \ t - t_0$ όταν στην είσοδο του κυκλώματος έχουμε διαφορετικό χρόνο από την αρχή του τότε :

$$u_s(t - t_0) = \begin{cases} 0\,, t \leq t_0 \\ 1, t > t_0 \end{cases}$$

Για κάποιες εισόδους οι οποίοι δεν είναι στοιχειώδεις αυτή η μετατόπιση μας δίνει την δυνατότητα να μπορέσουμε να τις αναλύσουμε περαιτέρω,

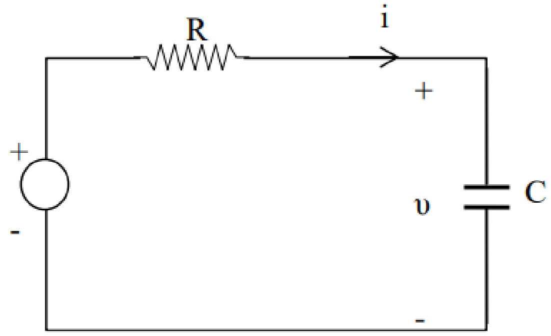
$$\delta_t(t) = \frac{1}{T}u_s(t) - \frac{1}{T}u_s(t - T)$$

Από την εξίσωση: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{d}{dt} = u_s(t) = \delta(t)$$

Έστω το κύκλωμα:

$u_s = V_0[u(t) - u(t-T)]$



Με τις ιδιότητες των Γ.Δ.Ε για να βρούμε την κρουστική απόκριση πρέπει να υπολογιστεί η παράγωγος της βηματικής απόκρισης. Γνωρίζοντας ότι η βηματική συνάρτηση είναι η παράγωγος μιας κρουστικής συνάρτησης.

Έχουμε τις συναρτήσεις:

$$u(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$$

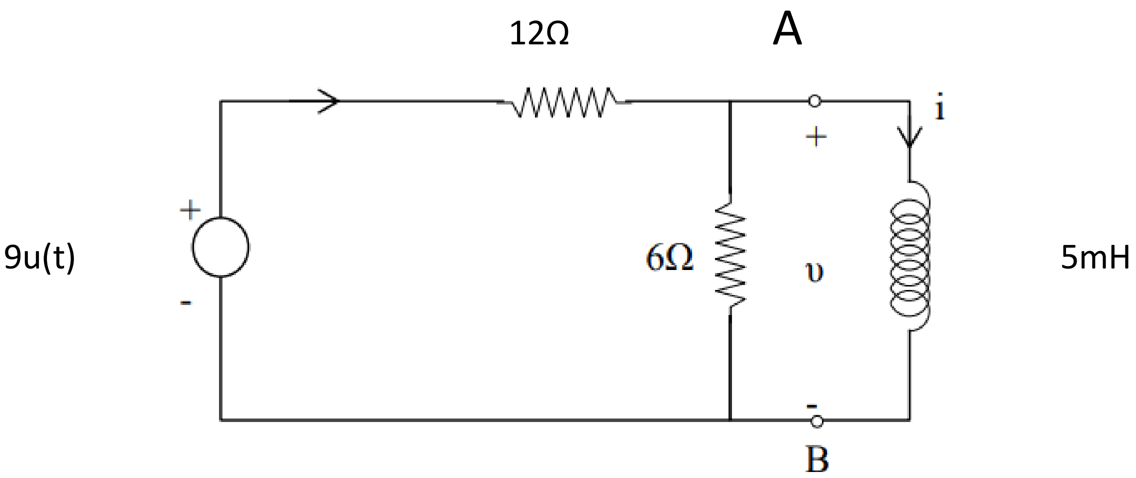
$$i(t) = \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

Οι παράγωγοι αυτοί των βηματικών αποκρίσεων μας δίνουν και τις κρουστικές αποκρίσεις οι οποίες είναι :

$$h_u = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

$$h_{i(t)} = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

Έχουμε το κύκλωμα RL και θέλουμε την να βρούμε τις κρουστικές αποκρίσεις. Πρέπει να υπολογίσουμε την βηματική απόκριση



Γνωρίζουμε ότι το πλάτος της συνάρτησης είναι 9 και οι κρουστικές αποκρίσεις είναι:

$$h_i(t) = \frac{1}{9}\frac{d}{dt}[0.75(1 - e^{-800t})u(t)] = \frac{200}{3}e^{-800t}u(t)$$

$$h_u(t) = \frac{1}{9}\frac{d}{dt}[3e^{-800t}u(t)] = -\frac{800}{3}e^{-800t}u(t) + \frac{1}{3}\delta(t)$$

$$h_{i1}(t) = \frac{1}{9}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4}(3 - e^{-800t})u(t)\right] = \frac{200}{3}e^{-800t}u(t) + \frac{1}{18}\delta(t)$$

Αναλυτικός Προσδιορισμός Απόκρισης

Μια μέθοδος που χρησιμοποιούμαι για την ολοκλήρωση της **διαφορικής εξίσωσης** που συνδέει την είσοδο με την έξοδο είναι:

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + a_{n-2}\frac{d^{n-2}}{d^{n-2}}y + \cdots + a_0 y = b_P\frac{d^P}{dt^P}u + \cdots + b_0 u$$

με p≤ n καταλήγουμε στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης το οποίο είναι η συνάρτηση εισόδου u(t) που είναι μια γνωστή συνάρτηση του χρόνου που την ονομάζουμε **διεγείρουσα συνάρτηση γιατί είναι η διέγερση του κυκλώματος**:

$$f(t) = b_P\frac{d^P}{dt^P}u + \cdots + b_0 u$$

Η γενική λύση της :

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + a_{n-2}\frac{d^{n-2}}{d^{n-2}}y + \cdots + a_0 y = b_P\frac{d^P}{dt^P}u + \cdots + b_0 u$$

είναι της μορφής : $y(t) = y_0(t) + y_\mu(t)$ όπου $y_0(t)$ είναι η λύση της εξίσωσης όταν η f(t)=0 **και ονομάζεται ομογενής και η $y_\mu(t)$ μία μερική λύση που ικανοποιεί την αρχική διαφορική εξίσωση.**

Απόκριση σε απότομες εκθετικές διεγέρσεις

Μια Δ.Ε πρώτου βαθμού από ένα κύκλωμα RL έχει μια εκθετική τάση πηγής $v_s = V_0 e^{st} u(t)$, όταν το κύκλωμα είναι t<0 είναι σε ηρεμία

Από τον νόμο του Kirchhoff η εξίσωση θα γίνει:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 e^{st} u(t)$$

Για t>0 η λύση θα είναι :

$$i(t) = i_\gamma(t) + i_{\varepsilon\iota}(t) \text{ και } i(0^+) = 0$$

Η απόκριση $i_\gamma(t)$ γενική λύση της $Ri + L\frac{di}{dt} = 0$ με λύση $i = Ae^{st}$ και με αντικατάσταση A και s:

$$A(R + Ls)e^{st} = 0 \iff R + Ls = 0 \iff s = -\frac{R}{L}$$

Από την αρχική συνθήκη $i(0) = A = I_0$,συνολικά $i(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$ για t>0.Αρα $i_\gamma(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$.Η απόκριση λόγω της εκθετικής πηγής τάσης $i_{\varepsilon\iota}(t)$ που είναι η ειδική λύση θα ικανοποιεί τη $Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 e^{st} u(t)$ με $I_0 = \frac{V_0}{R+Ls}$.Αν πάρουμε την $A = -\frac{V_0}{R+Ls}$, οριακή συνθήκη θα είναι i$(0^+) = 0$ ικανοποιείται .Η τελική εξίσωση θα είναι :

$$i(t) = \frac{V_0}{R + Ls}\left(e^{st} - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)u(t)$$

Αν όμως η συνάρτηση της πηγής έχει τον ίδιο εκθετικό παράγοντα με την απόκριση $s = -\frac{R}{L}$ η απόκριση λόγω της εκθετικής πηγής τάσης πρέπει να είναι $i_{\varepsilon\iota}(t) = I_o e^{-\frac{Rt}{L}}$ με αντικατάσταση $Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 e^{st} u(t)$ θα έχουμε $I_o = \frac{V_0}{L}$. Η συνολική απόκριση:

$$i(t) = i_\gamma\,(t) + i_{\varepsilon\iota}(t) = (I_o + A)e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Οι συνθήκες $i(o^-) = i(o^+) = 0$ προκύπτει ότι A=0 και

$i(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} u(t)$ όπου. $I_0 = \frac{V_0}{L}$

Απόκριση ημιτονοειδών διεγέρσεων RC και RL

Η Δ.Ε όταν συνδέεται το RL με $v_S = V_0 \cos \omega t$ θα έχει την μορφή:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 (\cos \omega t)\, u(t)$$

Τότε έχουμε την λύση $i(t) = i_\gamma\,(t) + i_{\varepsilon\iota}(t)$, με $i_\gamma(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$, $i_{\varepsilon\iota}(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta)$. Για να βρούμε το I_0 θα κάνουμε αντικατάσταση και θα έχουμε:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \text{ με } \theta = tan^{-1}\frac{L\omega}{R}$$

Τότε : $$i(t) = i_\gamma\,(t) + i_{\varepsilon\iota}(t) = Ae^{-\frac{Rt}{L}} + I_0 \cos(\omega t - \theta)\,, t > 0$$

Από την συνθήκη $i(0^+) = 0$, τότε $A = -I_0 \cos\theta$ και τελικά καταλήγουμε στην σχέση

$$i(t) = I_0 \left[\cos(\omega t - \theta) - cos\theta(e^{-\frac{Rt}{L}})\right]$$

2.13 Το πρόβλημα αναλύσεως δικτυού

Για απλότητα εδώ θεωρείται μια είσοδος f (t) (διέγερση) και μια έξοδος y (t) (απόκριση). Τα δυο μεγέθη f (t) και y (t) είναι προφανώς τάσεις ή ρεύματα. Η σχέση που συνδέει τα μεγέθη f(t) και y(t) θα είναι γενικά:

$$\boldsymbol{a_n D^n y(t)} + \boldsymbol{a_{n-1} D^{n-1} y(t)} + \ldots + \boldsymbol{a_1 D y(t)} + \boldsymbol{a_0 y(t)} = \boldsymbol{b_m D^m f(t)} + \boldsymbol{b_{m-1} D^{m-1} f(t)} + \ldots + \boldsymbol{b_1 D f(t)} + \boldsymbol{b_0 f(t)}$$

δηλαδή μια γραμμική διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) n – τάξεως. Εφ' όσον η εξίσωση αυτή περιγράφει ένα πραγματικό (φυσικό) ηλεκτρικό δίκτυο θα ισχύει πάντοτε n ≥ m .

Η Δ.Ε θα είναι :

$$A(D)y(t) = B(D)\, f(T)$$

$A(D) = \boldsymbol{a_n D^n} + \boldsymbol{a_{n-1} D^{n-1}} + \ldots + \boldsymbol{a_1 D} + \boldsymbol{a_0}$

$B(D) = \boldsymbol{b_m D^m} + \boldsymbol{b_{m-1} D^{m-1}} + \ldots + \boldsymbol{b_1 D} + \boldsymbol{b_0}$

Η Δ.Ε. συνοδεύεται και από n αρχικές συνθήκες (Α.Σ.) οι οποίες είναι οι τιμές

$$y(0^+), Dy(0^+), \ldots, D^{n-2}y(0^+), D^{n-1}y(0^+)$$

Παρατηρήσεις σχετικά με τις αρχικές συνθήκες

Σχετικά με τις αρχικές συνθήκες και την εύρεσή τους κάνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:
α**)** Θεωρείται ότι η διέγερση f (t) επιβάλλεται στο δίκτυο την χρονική στιγμή t = 0 και η απόκριση αρχίζει να λαμβάνεται από την χρονική στιγμή $t = 0^+$ δηλαδή απείρως κοντά το 0 αλλά από θετικές τιμές . Για το λόγο αυτό και οι αρχικές συνθήκες υπολογίζονται για $t = 0^+$. Είναι δυνατόν να έχουμε $y(0^-) = y(0^+)$ οπότε ορίζεται και η τιμή y(0), αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο να ισχύει πάντοτέ

β**)** Οι αρχικές καταστάσεις του δικτυού, δηλαδή οι τιμές των τάσεων των πυκνωτών και των ρευμάτων των πηνίων δίδονται για $t = 0^-$ δηλαδή απείρως κοντά στο 0 αλλά από αρνητικές τιμές , επομένως πριν να εφαρμοστεΐ η διέγερση f (t) . Ένα ζήτημα που πρέπει να εξεταστεΐ είναι το αν ισχύουν οι σχέσεις:

$i_L(0^-) = i_L(0^+)$ για το πηνίο

$V_c(0^-) = V_c(0^+)$ για κάθε πυκνωτή.

Δηλαδή αν οι συναρτήσεις i_L και V_c είναι συνεχείς για t=0

γ**)** Οι αρχικές συνθήκες $y(0^+), Dy(0^+) \ldots\ D^{n-2}y(0^+), D^{n-1}y(0^+)$ υπολογίζονται συναρτήση των τιμών i_L (0^+) και V_C (0^+) καθώς και της τιμής της διέγερσης $f(0^+)$και παράγωγων αυτής μέχρι n - τάξεως . Οι αρχικές συνθήκες είναι σταθερές τιμές και πρέπει να υπολογιστούν**,** για $t = 0^+$συναρτήσει γνωστών σταθερών τιμών από τα δεδομένα του προβλήματος**.** Τέτοιες τιμές είναι ακριβώς τα ρεύματα των πηνίων**,** οι τάσεις των πυκνωτών**,** και βέβαια οι τιμές της διέγερσης **(** και παράγωγων της **)** για την χρονική στιγμή $t = 0^+$. Είναι προφανές ότι στον υπολογισμό των αρχικών συνθηκών δεν εμπλέκεται καθόλου η «μαθηματική σχέση» της διαφορικής εξίσωσης .

2.14 Ιδιότητες Γραμμικών κυκλωμάτων

Ένα κύκλωμα μπορεί να περιγράφει με μία γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές αν και μόνο αν η μπορούμε να την εφαρμόσουμε σε όλες τις περιπτώσεις και η μέθοδος αναλυτικού προσδιορισμού της απόκρισης μίας μεταβλητής είναι γενική .

Για να χρησιμοποιήσουμε τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις στα κυκλώματα πρέπει η καθυστέρηση μίας εισόδου της απόκρισης να είναι ίδια με την καθυστέρηση του T, δηλαδή η καθυστέρηση u(t-T) είναι y(t-T), με y(t) να είναι απόκριση στην είσοδο u(t). Αυτό δεν ισχύει όταν αυξομειώνεται η θερμοκρασία απότομα σε μικρό χρονικό διάστημα με αποτέλεσμα το κύκλωμα να είναι ανάλογο από τον χρόνο που προτωεφαρμόστηκε και ανάλογα τον χρόνο θα έχουμε ανάλογες αποκρίσεις n. Αυτές οι μεταβολές στα στοιχεία συμβαίνουν πολύ αργά σε σχέση με το χρόνο απόκρισης του κυκλώματος στις εισόδους και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης εισόδου εξόδου είναι σταθερές.

Για γραμμικά σύστημα με μηδενικές αρχικές συνθήκες, όπου δεν δρουν άλλα σήματα ούτε πηγές και yi (t) είναι η απόκριση σε είσοδο xi (t) τότε

για είσοδο: $\boldsymbol{x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \ldots + C_n x_n(t)}$
για έξοδο $\boldsymbol{y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots + C_n y_n(t)}$

Αρχή της Επαλληλίας

Η αρχή της επαλληλίας είναι η απόκριση του κυκλώματος στης διεγείρουσα συνάρτηση

$$g_1(t) + g_2(t) + \cdots + g_m(t)$$

Είναι τα αθροίσματα της απόκρισης στην αρχική συνθήκη και το άθροισμα των μερικών λύσεων που αντιστοιχούν στις επί μέρους διεγείρουσες συναρτήσεις

$$y(t) = y_0(t) + y_{g1}(t) y_{g2}(t) + \cdots y_{gm}$$

Ιδιότητα διαφόρισης ,ολοκλήρωσης

Η απόκριση στην είσοδο u(t) με u(t)=0, για t<0 είναι $y_m(t)$ η απόκριση του κυκλώματος :

$$u_a(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

Η οποία θα γίνει: $y_{u_a}(t) = \frac{d}{dt} y_u(t)$

Το ίδιο ισχύει και στην διεγείρουσα συνάρτηση g(t) όταν g(t)=0 με t<0.

Ομοίως και στην ολοκλήρωση:

$$u_a(t) = \int_0^t u(t) dt$$

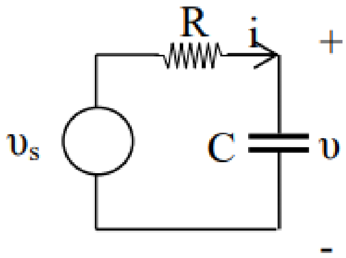
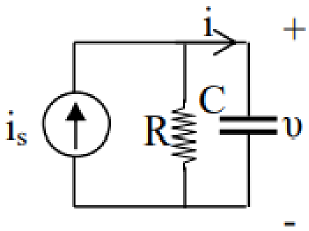
$$y_{u_a}(t) = \int_0^t y_u(t) dt$$

Ευστάθεια Απόκρισης

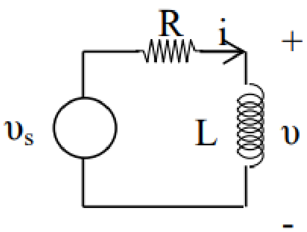
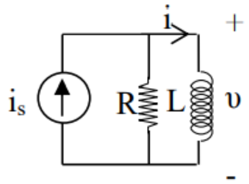
Μια πολύ σημαντική ιδιότητα για την ομαλή λειτουργία του κυκλώματος για να αποφύγουμε τις βλάβες και να καταστραφεί το κύκλωμα λόγω ανεξέλεγκτης αύξηση τάσης και ρεύματος είναι η ευστάθεια του .Όταν όμως το σύστημα είναι ασταθές η απόκριση της μεταβλητής αποκλίνει από το σημείο.

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι της μορφής $ce^{\lambda t}$ για να μην γίνει άπειρη αυτή η εξίσωση πρέπει το λ να είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός: $\mathbf{Re(\lambda) < 0}$

Αν η $Re(\lambda) < 0$ ισχύει για όλες τις ρίζες της εξίσωσης $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$ τότε το κύκλωμα είναι ευσταθές. Αν το κύκλωμα $Re(\lambda) = 0$ τότε έιναι **οριακά ευσταθές**, ενώ $Re(\lambda) > 0$ είναι **ασταθές**

Κύκλωμα RC	**Βηματική απόκριση**	**Κρουστική απόκριση**
	$v_s = u(t)$ $v = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$ $i = \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$	$v_s = \delta(t)$ $h_v = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$ $h_i = -\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t) + \frac{1}{R}\delta(t)$
	$i_s = u(t)$ $v = R\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$ $i = e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$	$i_s = \delta(t)$ $h_v = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$ $h_i = -\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t) + \delta(\,t)$

Πίνακας Βιωματικών & Κρουστικών Αποκρίσεων

Κύκλωμα RL	**Βηματική απόκριση**	**Κρουστική απόκριση**
	$v_s = u(t)$ $v = e^{-\frac{Rt}{L}}u(t)$ $i = \frac{1}{R}\left(1 - e^{\frac{Rt}{L}}\right)u(t)$	$v_s = \delta(t)$ $h_v = \frac{R}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}u(t) + \delta(t)$ $h_i = -\frac{1}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}u(t)$
	$i_s = u(t)$ $v = Re^{-\frac{Rt}{L}}u(t)$ $i = (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})u(t)$	$i_s = \delta(t)$ $h_v = -\frac{R^2}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}u(t) + R\delta(t)$ $h_i = \frac{R}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}u(t)$

Κεφάλαιο 3

3.1 Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace σε ένα κύκλωμα RLC περιγράφει την σχέση της απόκρισης y(t) και της διέγερσης g(t) όπου είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_j y^{(j)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + \cdots + a_0 y = b_m g^{(m)} + \cdots + b_i g^{(i)} + \cdots + b_1 g^{(1)} + b_0 g$$

Μέ $y^{(j)}$ και $g^{(i)}$ να είναι j - οστή και η I - οστή παράγωγος της απόκρισης της y(t) και της διέγερσης x(t) αντίστοιχα. Για τους συντελεστές των διαφορικών εξισώσεων για να είναι σταθεροί της παραπάνω εξίσωσης οι a_j και b_i πρέπει οι τιμές των στοιχείων του κυκλώματος να είναι σταθερές. Με τον μετασχηματισμός Laplace θα εξετάζουμε περιπτώσεις διαφορών διεγέρσεων και με επαλληλία θα εξετάζουμε τις σύνθετες διεγέρσεις.

3.2 Μορφή μετασχηματισμού Laplace

Η f(t) είναι μια συνάρτηση η οποία είναι μηδέν για t≤0 και είναι ορισμένη αυθαίρετα με βάση κάποιες συνθήκες για $t > 0$. Ο ευθύς μετασχηματισμός Laplace (direct Laplace transform) της συνάρτησης f (t) συμβολίζεται με L[f (t)] και ορίζεται ως:

$$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Ο Laplace μετασχηματίζει τη συνάρτηση f(t) από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο μιας μιγαδικής μεταβλητής s με $s = \sigma + j\omega$. Για να θέλουμε να ισχύει $F_1(t) = F_2(t)$ και με τις συναρτήσεις $f_1(t) = f_2(t)$ πρέπει να έχουν την ίδια εικόνα πεδίου της μιγαδικής μεταβλητής s. Αυτό ονομάζεται γραμμικότητα και μας δίνει την ιδιότητα να χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό από το πεδίο s στο πεδίο του χρόνου και συμβολίζεται :$L^{-1}[F(s)] = f(t)$, επίσης με ολοκλήρωμα γράφεται ως εξής:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

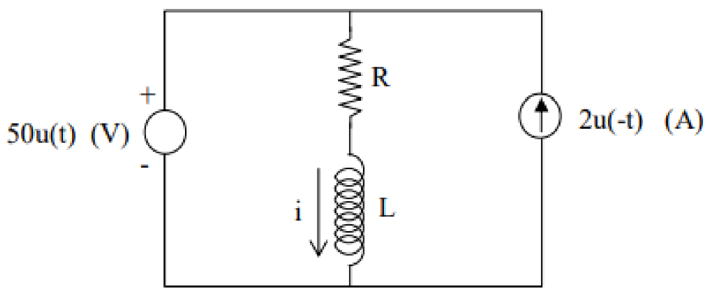
Ο ευθύς μετασχηματισμός Laplace ενός φυσικού μεγέθους, έστω i(t) είναι το ρεύμα στο πεδίο του χρόνου, τότε η μονάδα του είναι το A ο μετασχηματισμός Laplace στο ρεύμα θα είναι I(s) με μονάδα A·s.

Μετασχηματισμός Laplace μιας μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης:

$$L[u(t)] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Λόγω γραμμικότητας που παρουσιάζεται προκύπτει $v(t) = Vu(t)$ για την συνάρτηση της τάσης στο πεδίο του χρόνου τότε s πεδίο V(s)=$\frac{V}{s}$.

Το κύκλωμα RL με R=5Ω και L=2.5 mH ,για t=0 το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα με 2A και με πηγή 50V



Από τον Kirchhoff για t>0 έχουμε την διαφορική εξίσωση:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v$$

Η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται από όρο σε όρο σε μία εξίσωση του ο s -πεδίου:

$$RI(s) + L[-i(0^+) + sI(s)] = V(s) \Leftrightarrow 5I(s) + 2.5 \cdot 10^{-3}[-2 + sI(s)] = \frac{50}{s}$$

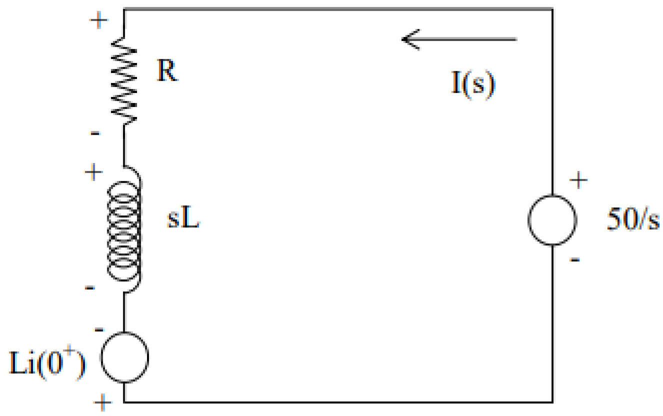
Με αυτήν την διαδικασία i(t) μετασχηματίζεται σε I(s),ενώ η τάση v=50u(t) είναι $\frac{50}{s}$,η παράγωγος $\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}$ μετασχηματίζεται σε -i$(0^+) + sI(s)\ όπου - i(0^+) = 2A$. Η εξίσωση $5I(s) + 2.5 \cdot 10^{-3}[-2 + sI(s)] = \frac{50}{s}$ επιλύεται ως προς I(s):

$$I(s) = \frac{10}{s} + \frac{-8}{s+2000}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός θα είναι:

$$L^{-1}[I(s)] = 10L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + (-8)10L^{-1}\left[\frac{1}{s+2000}\right] \Leftrightarrow i(t) = 10 - 8e^{-2000t}$$

Το νέο κύκλωμα για το πεδίο s- με το αρχικό ρεύμα να είναι στο κύκλωμα ως πηγή τάσης $Li(0^+)$.



3.3 Μιγαδική μεταβλητή

Τις μιγαδικές συναρτήσεις τις χρησιμοποιούμε διότι οι πηγές ενός κυκλώματος είναι πραγματικές και μας βοηθά στην απλοποίηση και την ανάλυση των πηγών όταν οι πηγές είναι αθροίσματα ημιτονοειδών κυμάτων οδηγεί στην έννοια των διανυσμάτων φάσης (phasors)

Έστω η μιγαδική μεταβλητή $s = \sigma + j\omega$ όπου s είναι η μιγαδική συχνότητα και ορίζεται από την σχέση $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$.

Αν έχουμε όμως διέγερση :$Ae^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)$, σύμφωνα με τον Euler

$e^{j(\omega t+\varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j(\omega t + \varphi)$ τότε η συνάρτηση θα γράφεται:

$$Ae^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi) = Ae^{j\varphi}e^{(\sigma+j\omega)t} = Ae^{j\varphi}e^{st} \text{ με } s = \sigma + j\omega$$

Η μιγαδική μεταβλητή s έχει s^{-1} μονάδες και ω η γωνιακή συχνότητα σε rad/s,άρα η ποσότητα σ έχει μονάδες s^{-1}.

Έστω η είσοδος σε ένα κύκλωμα είναι μιγαδική συνάρτηση

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Συμβολίζουμε με y(t) την προκαλούμενη απόκριση μηδενικής κατάστασης. Η συνάρτηση y(t) ικανοποιεί μία διαφορική εξίσωση με δεξιό μέλος x(t) και είναι γενικά μιγαδική:

$$y(t) = y_1(t) + jy_2(t)$$

Μπορεί να δειχτεί ότι αν η x(t) αντικατασταθεί από το πραγματικό μέρος x_1(t), τότε η απόκριση του κυκλώματος ισούται με το πραγματικό μέρος y_1(t) της y(t). Αυτό είναι συνέπεια της ιδιότητας της υπέρθεσης των γραμμικών συστημάτων και ισχύει επίσης για την απόκριση μόνιμης κατάστασης σε περιοδικές εισόδους.

Μιγαδική συνάρτηση εξαναγκασμού

Έστω μια συνάρτηση ημιτονοειδής $\mathbf{V_m sin(\omega t + \theta)}$. $\mathbf{(1)}$ **είναι συνδεδεμένη σε ένα** γενικό δικτύωμα που αυθαίρετα θα το θεωρήσουμε παθητικό για να αποφύγουμε περίπλοκες στην χρήση της αρχικής υπέρθεσης .Η απόκριση σε ημιτονοειδή συνάρτηση εξαναγκασμού με αυθαίρετο πλάτος και γωνία φάσης **η απόκριση μπορεί να είναι** :

$$I_m = sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Στα γραμμικά κυκλώματα δέχονται ημιτονική εξαρτημένη απόκριση από μία ημιτονική συνάρτηση .Η αναφορά του χρόνου με την μετάθεση της φάσης της συνάρτησης εξάρτησης κατά 90 μοίρες η αν αλλάξουμε την στιγμή που ορίζουμε ότι t=0 θα έχουμε συνάρτηση εξαναγκασμού:

$$V_m = sin(\omega t + \theta - \ 90) = V_m \ cos(\omega t + \theta) \qquad (3)$$

Όταν εφαρμοστεί στο ίδιο κύκλωμα θα προκαλέσει μια αντίστοιχη απόκριση

$$I_m = sin(\omega t + \theta - \ 90) = I_m \ cos(\omega t + \theta). \ (4)$$

Τώρα πρέπει να εφαρμόσουμε μια φανταστική συνάρτηση εξαναγκασμού. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την πηγή 3 με το j που είναι ο φανταστικός τελεστής :

$$jV_m = cos(\omega t + \theta) \qquad (5)$$

Η απόκριση θα είναι :

$$jI_m cos(\psi t + \varphi) \qquad (6)$$

Η ισχύς της υπέρθεσης είναι εξασφαλισμένη από τη γραμμικότητα του κυκλώματος και δεν εξαρτάται από την μορφή των συναρτήσεων εξαναγκασμού. Άρα το άθροισμα των συναρτήσεων εξαναγκασμού 1 και 5

$$V_m \ cos(\omega t + \theta) \quad + jV_m cos(\omega t + \theta) \qquad (7)$$

Πρέπει επομένως να παράγει μια απόκριση που είναι το άθροισμα των 2 και 6

$$I_m cos(\omega t + \varphi) + I_m sin(\omega \tau + \varphi) \quad (8)$$

Η μιγαδική πηγή και απόκριση μπορεί να παρασταθεί πιο απλά εφαρμόζοντας την ταυτότητα Euler από τις διαφορικές εξισώσεις. Αρά η πηγή της συνάρτησης (7) θα γίνει:

$$\boldsymbol{V_m e^{j(\omega t+\theta)}} \quad \textbf{(9)}$$

Και η απόκριση (8) είναι:

$$\boldsymbol{I_m e^{j(\omega t+\theta)}} \quad \textbf{(10)}$$

Η μιγαδική συνάρτηση εξαναγκασμού μπορεί να μελετηθεί με την ταυτότητα euler και την του θεωρήματος της υπέρθεσης σαν μια πραγματική και φανταστική συνάρτηση εξαναγκασμού. Για να πάρουμε την πραγματική απόκριση πρέπει να εφαρμόσουμε μια μιγαδική συνάρτηση εξαναγκασμού της οποίας το πραγματικό μέρος είναι η δοθείσα πραγματική συνάρτηση εξαναγκασμού άρα παίρνουμε μια μιγαδική απόκριση της οποίας το πραγματικό μέρος είναι η ζητούμενη πραγματική συνάρτηση.

Αυτή η διαδικασία η ολοκληρωδιαφορική εξίσωση που περιγράφει την απόκριση σταθερής κατάστασης ενός κυκλώματος ,θα γίνει απλή αλγεβρική εξίσωση.

Έστω ένα κύκλωμα RL με πραγματική πηγή $V_m sin\omega t$ και θέλουμε να βρούμε την πραγματική απόκριση i(t). Θα φτιάξουμε την μιγαδική συνάρτηση εξαναγκασμού και την ταυτότητα Euler :

$$cos\omega t = re\ e^{j\omega t}$$

η πηγή θα είναι:

$$V_m e^{j\omega t}$$

Εδώ η μιγαδική απόκριση είναι η έκφραση μέσω ενός αγνώστου πλάτους I_m και της άγνωστης γωνίας φ:

$$I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Η Δ.Ε του κυκλώματος θα είναι: $\boldsymbol{Ri + L(di/dt) = U_s}$

Εισάγουμε τις μιγαδικές μας εκφράσεις για τις U_s και I,

$$RI_m e^{j(\omega t+\varphi)} + L(di/dt) I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = V_m e^{j\omega t}$$

Παραγωγίζοντας:

$$RI_m e^{j\varphi} + j\omega L I_m e^{j(\omega t+\varphi)} = V_m e^{j\omega t}$$

Τώρα για να υπολογίσουμε τη τιμή $I_m\ και\ την\ \varphi$ διαιρώ τα μέλη με τον παράγοντα $e^{j\omega t}$.

$$RI_m e^{j\varphi} + j\omega L I_m e^{j\varphi} = V_m$$

Το αριστερό μέλος θα γίνει:

$$I_m e^{j\varphi}(R + j\omega L) = V_m$$

$$I_m e^{j\varphi} = V_m/(R + j\omega L)$$

$$I_m e^{j\varphi} = \left[V_m/\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)}\right] e^{j[-\tan -1(\omega l/R)]}$$

$$I_m = V_m/\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

και

$$\varphi = -\tan^{-1}(\omega L/R)$$

Η μιγαδική απόκριση είναι από την 12 .Ενώ έχουμε καθορίσει I_m και η φ έχουν μόλις καθοριστεί μπορούμε να πάρουμε την πραγματική απόκριση i(t) εισάγοντας πάλι τον παράγοντα $e^{j\omega t} και$ στα δύο μέλη της 12 με την βοήθεια του euler θα έχω:

$$i(t) = I_m sin(\omega t + \varphi) = \left[V_m/\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)}\right] cos[\omega t - \tan^{-1}(\omega L/R)]$$

3.4 Ωμική αντίσταση R

Οι σχέσεις τάσεως- ρεύματος στο πεδίο του χρόνου είναι

$V_R(t) = Ri_R(t)$ και $i_R(t) = 1/R\, V_R(t)$

Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace αυτών των σχέσεων έχουμε:

$V_s(s) = RI_R(s)$ και. $I_R(t) = 1/R\, V_R(s)$

Λόγω της απλής αναλογίας μεταξύ τάσεως και ρεύματος, στην ωμική αντίσταση, δεν υπάρχει διαφορά στις σχέσεις τάσεως – ρεύματος μεταξύ της Ε.Μ.Κ και του μετασχηματισμού Laplace

Πηνίο με αυτεπαγωγή L

Οι σχέσεις τάσεως- ρεύματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \text{ και } i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_0^t V_L(t')dt'$$

'Οπου i_L (0–) η αρχική κατάσταση για το ρεύμα του πηνίου . Λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Laplace αυτών των σχέσεων έχουμε:

Η πρώτη σχέση δίνει: $L\{V_L(t)\} = V_L(s) = L\{L\frac{di_L(t)}{dt}\} = L(s\,I_L(s) - i_L(0))$

η τάση V_L (s) μπορεῖ να γραφεῖ σαν διαφορά δυο τάσεων: $V_L(s) = Ls\,I_L(s) - Li_L(0^-)$

Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Laplace της δεύτερης σχέσης τάσεως - ρεύματος

$$L\{i_L(t)\} = L\{i_L(0^-)\} + L\{\frac{1}{L}\int_0^t V_L(t')dt'\} \quad \text{ή} \quad I_L(s) = \frac{i_L(0^-)}{s} + \frac{V_L(s)}{sL}$$

Πυκνωτής με χωρητικότητα C

Οι σχέσεις τάσεως- ρεύματος στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$i_C(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt} \quad \text{και} \quad V_C(t) = V_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')dt'$$

μετασχηματισμένα κυκλώματα στο πεδίο του s, για τον πυκνωτή.

$$I_C(s) = -Cv_c(0^-) + sCV_c(s) \quad \text{και} \quad V_c(s) = \frac{V_C(0^-)}{s} + I_c(s)\frac{1}{sC}$$

3.5 Βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση ενός δικτύου:

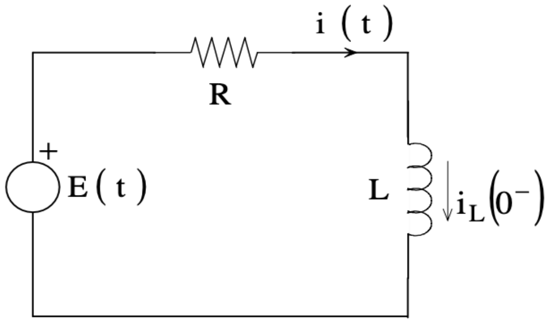
α**)** Μετασχηματίζουμε**,** κατά **Laplace,** όλα τα στοιχειά του δικτυού**,** λαμβάνοντας υπ**'** όψη και τις αρχικές καταστάσεις για τα πηνία και τους πυκνωτές **(** εφ' όσον υπάρχουν **)**

β**)** Μετασχηματίζουμε**,** κατά **Laplace,** τις συναρτήσεις **(**σήματα**)** των πηγών του δικτυού

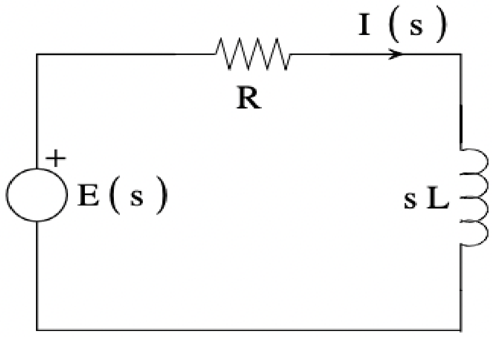
γ**)** Το δίκτυο που προέκυψε λέγεται μετασχηματισμένο κατά **Laplace** και η επίλυση του είναι πλέον ένα απλό αλγεβρικό πρόβλημα

δ**)** Αντιστρέφουμε **,** κατά **Laplace,** την λύση που έχουμε βρει στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας και παίρνουμε την επιθυμητή λύση στο πεδίο του χρόνου**.**

Παράδειγμα :



Έστω το παραπάνω κύκλωμα με τιμές R,L και $\boldsymbol{i_L(0^-) = 0\ A}$ Η τάση της πηγής είναι η κρουστική συνάρτηση E(t)= δ(t). Ζητείται να υπολογιστεΐ το ρεύμα i (t) για 0≤t<∞ Ζητείται να υπολογιστεΐ το ρεύμα i (t) για 0≤t<∞ , Στο δίκτυο αυτό η διέγερση (είσοδος) είναι η τάση της πηγής E (t) και η απόκριση (έξοδος) είναι το ρεύμα i (t). Επειδή η διέγερσή μας εδῶ είναι η κρουστική συνάρτηση, η απόκριση που θα πάρουμε λέγεται, όπως είναι γνωστό, κρουστική απόκριση**.** Μετασχηματίζουμε το δίκτυο στην περιοχή της μιγαδικής συχνότητας.



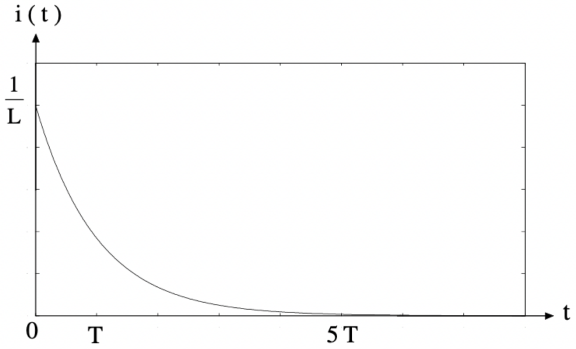
Επειδή η αρχική κατάσταση για το ρεύμα του πηνίου είναι $i_L(0^-) = 0\ A$ το μετασχηματισμένο κύκλωμα , κατά laplace δεν θα περιλαμβάνει πηγή στο ισοδύναμο του πηνίου . Η επίλυση του μετασχηματισμένου δικτύου δίνει :

$$I(s) = \frac{E(s)}{R + sL}$$

Όπου $E(s) = \mathcal{L}\{E(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

άρα :$I(S) = \frac{1}{R+sL} = \frac{\frac{1}{L}}{s+\frac{R}{L}}$ και $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\frac{1}{L}}{s+\frac{R}{L}}\} = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$

Η γραφική παράσταση για το ρεύμα i θα είναι :



Παρατηρούμε ότι η κρουστική διέγερση E (t) = δ (t) δίνει μια ομαλότατη απόκριση που έχει τη μορφή αποσβενύμενης εκθετικής συνάρτησης με σταθερά χρόνου T = L / R. Το ρεύμα $i(t) = i_L(t)$ παρουσιάζει ασυνέχεια για t=0 γιατί $i(0^-) = 0 \; ενώ \; i(0^+) = \frac{1}{L}$ αυτό οφείλεται στην κρουστική διέγερση.

3.6 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Για την πλήρης εφαρμογής της μεθόδου Laplace στην επίλυση γραμμικών ηλεκτρικών δικτύων, και εν γένει συστημάτων είναι απαραίτητος ο υπολογισμός και του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Στην περίπτωση επίλυσης γραμμικών δικτύων και συστημάτων, το μαθηματικό μας πρόβλημα είναι η επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές. Οι συναρτήσεις F (s) που εμφανίζονται εδώ̋ (και που πρέπει να αντιστραφούν) είναι πάντοτε της μορφής

$$f(s)\,\frac{A(s)}{B(s)}$$

$A(s) = a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0$ και $B(s) = b_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0$

Με $m \leq n$

α) Περίπτωση απλών πραγματικών ριζών:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)}\frac{1}{s - s_1} + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)}\frac{1}{s - s_2} + \ldots + \frac{A(s_n)}{B'(s_n)}\frac{1}{s - s_n}$$

$$L^{-1}\{\boldsymbol{F(s)}\} = \boldsymbol{f(t)} = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)}\boldsymbol{e^{s_1 t}} + \frac{A(s_2)}{B'(s_2)}\boldsymbol{e^{s_2 t}} + \ldots + \frac{A(s_n)}{B'(s_n)}\;\boldsymbol{e^{s_n t}}$$

Περίπτωση απλών μιγαδικών ρίζων σε συζυγή ζεύγη :

$$\boldsymbol{F(s)} = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s_1)}{B'(s_1)}\frac{1}{s - s_1}\frac{A(s_2)}{B'(s_2)}\frac{1}{s - s_2} + \ldots + \frac{A(s_n)}{B'(s_n)}\frac{1}{s - s_n}$$

Κάθε ζεύγος $s_1 = \sigma + j\omega,\ \ s_2 = \sigma - j\omega$. θα δίνει αντίστροφη συνάρτηση την

$q(t) = 2Me^{\sigma t}cos(\omega t + \varphi)\ \ με\ \frac{A(s_1)}{B\prime(s_1)} = 2Me^{j\varphi}$ με s1 ρίζα με το θετικό φανταστικό μέρος

άρα έχουμε: $L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 2Me^{\sigma t}cos(\omega t + \varphi) + L^{-1}\{F_1(s)\}$.

3.7 Κυκλώματα στο πεδίο s-

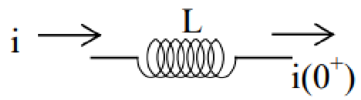
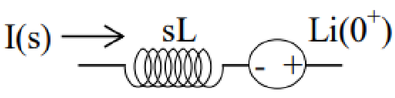
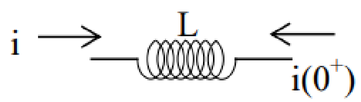
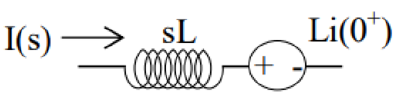
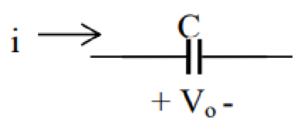
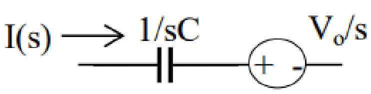
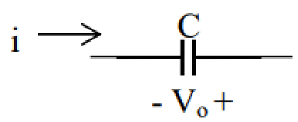
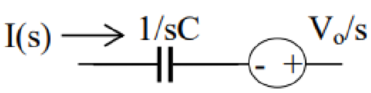
Είναι η μετατροπή ενός κυκλώματος από το πεδίο του χρόνου s-πεδίο, γνωρίζοντας για t>0 ο πυκνωτής είναι :

$$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau$$

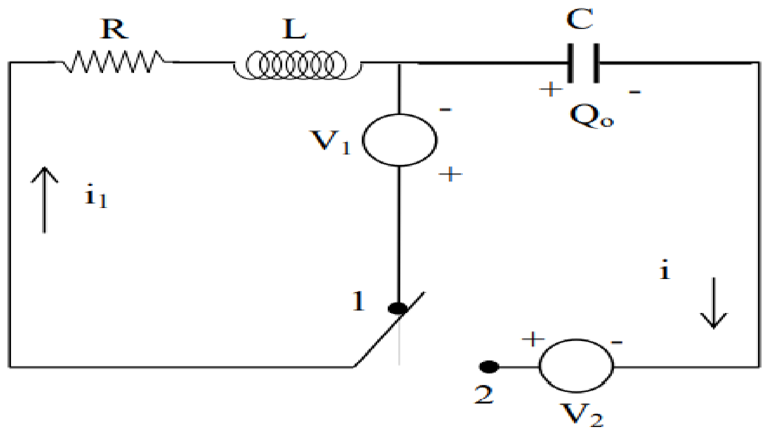
Με την βοήθεια του πίνακα Μετασχηματισμοί Laplace διαφόρων συναρτήσεων η εξίσωση του πυκνωτή θα είναι :

$$V_c(s) = \frac{V_0}{s} + \frac{I(s)}{Cs}$$

Ο πίνακας για τις μετατροπές στο s-πεδίο

Πεδίο του χρόνου	s - πεδίο	Όρος της τάσης στο s - πεδίο
		RI(s)
		sLI(s)+Li(0+)
		sLI(s)+Li(0+)
		I(s)/sC+Vo/s
		I(s)/sC-Vo/s

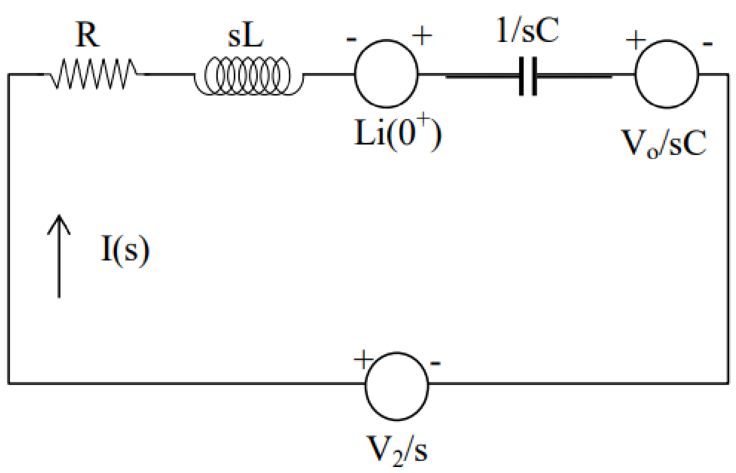
Όταν θέλουμε να σχεδιάσουμε το κύκλωμα στο s-πεδίο σε ένα κύκλωμα που το διαρρέει ρεύμα $i_1(t)$ με τον διακόπτη να μετακινείται από την θέση 1 στην 2 με έναν πυκνωτή με αρχικό φορτίο Q_0 και πηγή με τάση V_2 θα πρέπει αρχικά να έχουμε την εξίσωση του κυκλώματος η οποία είναι:



$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{sC} = \frac{V_2}{s}$$

$$\mu\varepsilon\ V_0 = \frac{Q_0}{C}\ \kappa\alpha\iota\ i(0^+) = i_1 = \frac{V_1}{R}$$

Το νέο κύκλωμα στο s-πεδίο θα είναι ως εξής :



Κλείνοντας την παρούσα εργασία και κάνοντας μια ανασκόπηση αυτής θέλουμε να πούμε ότι εξετάσαμε τις διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης στα ηλεκτρικά κυκλώματα. Αφού είδαμε αναλυτικά τι σημαίνουν οι παραπάνω όροι και πως μπορούν να συσχετισθούν ποιες συνδέσεις υπάρχουν. Μεταξύ των άλλων είδαμε τα κυκλώματα πρώτης τάξης , τα γραμμικά κυκλώματα την απόκριση τους και πως συνδέονται με τον μετασχηματισμό Laplace και άλλα ακόμη. Όλα αυτά βρίσκουν εφαρμογή στην καθημερινή ζωή όπως πολλά από αυτά τα κυκλώματα χρησιμοποιούνται σχεδόν χωρίς να το συνειδητοποιήσουμε , από τις φορητές συσκευές που χρησιμοποιούμε κάθε μέρα, μέχρι να πατήσουμε τον διακόπτη στο δωμάτιό μας για να ανάψει ή να σβήσει το φως, σταματώντας για πολλές άλλες εφαρμογές

Βιβλιογραφία - πηγές

•Κεφάλαιο 1

https://el.wikipedia.org/wiki/Διαφορική_εξίσωση#Εφαρμογές

[1] Ν. Δ. Αλικάκος και Γ. Η. Καλογερόπουλος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2007. [2] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.

[3] Γ. Δάσιος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1991.

[4] S. I. Grossman, Multivariable Calculus, Linear Algebra, and Differential Equations, 2nd Edition, Academic Press, Orlando, 1986.

[5] B. E. Shapiro, Lecture Notes in Differential Equations, California State University, Northridge, 2011.

[6] Σ.Τραχανάς, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ΄Ιδρυμα Τεχνολογίας και ΄Ερευνας, Ηράκλειο Κρήτης, 2010.

[7] Λ. Ν. Τσίτσας, Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός, 2η ΄Εκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 2003.

[8] Δ.Σουρλάς, Συνηθής Διαφορικές εξισώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών Εκδόσεις συμμετρία 2010.

[9]"Διαφορικές Εξισώσεις" Σ. Τραχανάς .

[10]"Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις" Γ. Δάσιος

[11]"Διαφορικές Εξισώσεις" Θ. Κυβεντίδης

[12] "Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις" Ν. Σταυρακάκης

[13]. "Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις" R. Bronson (Σειρά Schaum)

[14] "Μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων" Ι. Χαϊνης

[15]. "Differential Equations" S. Ross

[16]. "Differential Equations and their applications" S. Farlow

[17] "A First Course in Differential Equations with Applications" Derrick Grossman

[18]. "Mathematical methods for Physicists" G. Arfken

[19] "Ordinary Differential Equations" V. Arnold

[20]. “Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra” W. Hirch and S. Smale

[21] “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems” W. Boyce, R. DiPrima

- **Κεφάλαιο 2-3**

[1] M. Nahvi, J. A. Edminister, Theory and Problems of Electric Circuits, McGraw - Hill Co., New York, 2003.

[2] J. O’ Maley, Theory and Problems of Basic Circuit Analysis, McGraw - Hill Co., New York, 1992.

[3] S. A. Nasar, Electric Circuits , McGraw - Hill Co., New York, 1988.

[4] S. Madhn, Linear Circuit Analysis, Prentice - Hall Inc., New Jersey, 1988.

[5] J.W. Nilsson, Electric Circuits, Addison - Wesley, 1993.

[6] D. E. Johnson, J. R. Johnson, J. L. Hilburn, Electric Circuit Analysis, Prentice - Hall Inc., New Jersey, 1992.

[7] S. A. Boctor, Electric Circuit Analysis, Prentice - Hall Inc., New Jersey, 1992.

[8] K. F. Sander, Electric Circuit Analysis: Principals and Applications, Prentice - Hall Inc., New Jersey, 1992.

[9] J. Bird, Electrical Circuit Theory and Technology, Routledge, New York, 2014.

[10] J. K. Fidler, L. Ibbotson, Introductory Circuit Theory, McGraw-Hill Publishing Co., New York, 1989. [11] J. D. Irwin, R. M. Nelms, Engineering Circuit Analysis, John Wiley & Sons, New York, 2002.

[12] H. M. Thomas, Basic Circuit Analysis, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012

[13] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1999.

[14] Δ. Χ. Κραββαρίτης, Θέματα Διαφορικών Εξισώσεων, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2011.

[15] J. Lebl, Differential Equations for Engineers, University of Illinois at UrbanaChampaign, 2014.

[16] R. H. Martin, Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1983.

[17] William H. Hayt, jr jack E. Kemmerly , the McGraw companies inch,1987

[18] N. Mohan, T. M. Undeland, W. P. Robbins, “Εισαγωγή στα ηλεκτρονικά ισχύος. Ανάλυση, σχεδίαση και εφαρμογές των ηλεκτρονικών μετατροπέων ισχύος», Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, 2010
[19] F. Blaabjerg, Z. Chen, and S. B. Kjaer, “Power electronics as efficient interface in dispersed power generation systems,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 19, no. 5, pp. 1184–1194, 2004.
[20] K. H. Sueker, “Power Electronics Design: A practitioner’s Guide”, Elsevier, 2005
[21] N. Mohan, “First Courses on Power Electronics and Drives”, MNPERE, 2003
[22] A. I. Maswood, “The Power Diode” στο “Power Electronics Handbook” (M. H. Rashid ed, 3rd edition), Butterworth-Heinemann, 2010
[23] M. G. Simoes, “Power Bipolar Transistors” στο “Power Electronics Handbook” (M. H. Rashid ed, 3rd edition), Butterworth-Heinemann, 2010
[24]. V. Subrahmanyam, “Thyristor Control of Electric Drives”, Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1988
[25]. P. C. Sen, “Thyristor DC Drives”, Wiley, 1981 10. 12. W. Mack Grady, Robert J. Gilleskie, “Harmonics And How They Relate To Power Factor”, Proc. of the EPRI Power Quality Issues & Opportunities Conference (PQA’93), San Diego, CA, November 1993, διαθέσιμο στο
http://users.ece.utexas.edu/~grady/POWERFAC.pdf
[26] M. Rashid, «Ηλεκτρονικά Ισχύος. Κυκλώματα, εξαρτήματα & εφαρμογές», Εκδόσεις ΙΩΝ, 2010